

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ - UNIFEI  
INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA - IFQ

# FLUTUAÇÕES DO VÁCUO AO REDOR DE UMA CORDA CÓSMICA GIRANTE

Guilherme Roberto Tavares

Itajubá, 2025

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ - UNIFEI  
INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA - IFQ**

**Guilherme Roberto Tavares**

# **FLUTUAÇÕES DO VÁCUO AO REDOR DE UMA CORDA CÓSMICA GIRANTE**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Física.

**Orientador: Prof. Dr. Vitorio Alberto De Lorenci  
Coorientador: Prof. Dr. Edisom de Souza Moreira Junior**

**2025  
Itajubá-MG**

---

Guilherme Roberto Tavares

Flutuações do Vácuo ao Redor de uma Corda Cósmica Girante / Guilherme Roberto Tavares. – Itajubá-MG, 25 de Setembro de 2025-  
52 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Vitorio Alberto De Lorenci  
Coorientador: Edisom de Souza Moreira Junior

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI, 7 de novembro de 2025.

1. Corda Cósmica Girante. 2. Região Acausal . 3. Região Causal. I. Vitorio Alberto De Lorenci. II. Edisom de Souza Moreira Junior. III. Universidade Federal de Itajubá. IV. Instituto de Física e Química. V. Flutuações do Vácuo ao Redor de uma Corda Cósmica Girante.

CDU 530.145:001.5

---

Guilherme Roberto Tavares

# **Flutuações do Vácuo ao Redor de uma Corda Cósmica Girante**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Física.

Itajubá-MG, 15/08/2025

---

**Prof. Dr. Vitorio Alberto De Lorenci**

---

**Prof. Dr. Edisom de Souza Moreira  
Junior**

---

**Prof. Dr. Caio Cesar Holanda Ribeiro**

---

**Prof. Dr. Ricardo Ivan Medina Bascur**

# Agradecimentos

Agradeço à meu finado pai que trabalhou no sol para que eu trabalhasse na sombra, Roberto Tavares, minha mãe e meus irmão, Regiane Tavares, Luana Tavares e Alexsandro Tavares pelo apoio oferecido durante toda a minha vida.

A Rosana Celia Pires Vergueiro, uma amiga da família que se tornou parte da família, pelo suporte não só financeiro mas também pelo carinho que sempre teve comigo.

Aos meus amigos de instituto João Pedro e Ygor pelas conversas produtivas, e as não produtivas, que certamente contribuíram para minha formação. Também aos amigos que moraram comigo durante anos e, em especial, Leonado Pereira que virou um irmão e me fez continuar mesmo quando achei que não seria possível.

Ao meu orientador e coorientador, Vitorio e Edisom, pela paciência, várias horas gastas em dúvidas e pelo excelente exemplo e influência na minha trajetória acadêmica.

Ao grupo GIFT como um todo pelas oportunidades de me capacitar e tornar minha formação mais sólida.

À UNIFEI pelo espaço universitário e as oportunidades e a CAPES pelo apoio financeiro.

# Resumo

Este trabalho investiga as flutuações do vácuo de um campo escalar sem massa na presença de uma fronteira cilíndrica num espaço-tempo de uma corda cósmica girante, de modo que a condição de contorno nos serve para blindar a região causal da região acausal, e tem como objetivo o cálculo da função de dois pontos e das flutuações do campo no estado de vácuo. Primeiramente, foi feita uma breve revisão da quantização do campo escalar e uma discussão sobre propagadores na teoria quântica de campos, onde foi definido como se calcula as flutuações do vácuo. Em seguida, a função de dois pontos renormalizada foi calculada e com ela fomos capazes de calcular, através do método *point-splitting*, as flutuações do vácuo. Por fim, foi recuperado os principais resultados da literatura no que se diz respeito a cordas cósmicas e as consequências destas nas flutuações do campo.

**Palavras-chaves:** Campo Escalar, Corda Cósmica Girante, Espaço-tempo, Região Acausal, Região Causal, Renormalização.

# Abstract

This work investigates the vacuum fluctuations of a massless scalar field in the presence of a cylindrical boundary in the spacetime of a spinning cosmic string. The boundary condition serves to shield the causal region from the acausal one, with the aim of computing the two-point function and the vacuum fluctuations of the field. First, a brief review of scalar field quantization is presented, along with a discussion of propagators in quantum field theory, in which the procedure for calculating vacuum fluctuations is defined. Next, the renormalized two-point function is obtained, and from it the vacuum fluctuations are computed using the point-splitting method. Finally, the main results in the literature regarding cosmic strings and their impact on field fluctuations are recovered.

**Key-words:** Scalar Field, Spinning Cosmic String, Spacetime, Acausal Region, Causal Region, Renormalization.





# Sumário

1	INTRODUÇÃO . . . . .	10
2	QUANTIZAÇÃO DO CAMPO ESCALAR E PROPAGADORES . .	12
2.1	Quantização Canônica . . . . .	12
2.2	Propagadores na Teoria Quântica de Campos . . . . .	16
3	FLUTUAÇÕES DO CAMPO ESCALAR SEM MASSA NA GEO- METRIA DE UMA CORDA CÓSMICA . . . . .	19
3.1	Corda Cósmica Girante . . . . .	19
3.2	Função de Wightman Renormalizada . . . . .	21
3.3	Flutuação do Campo no Vácuo . . . . .	29
3.4	Corda Cósmica Estática . . . . .	30
4	CONCLUSÃO . . . . .	35
	 APÊNDICES . . . . .	 37
	APÊNDICE A – PRODUTO INTERNO DE KEIN-GORDON . . .	38
	APÊNDICE B – PARTE RADIAL DA CONSTANTE DE NORMA- LIZAÇÃO . . . . .	42
	 Bibliografia . . . . .	 50

# 1 Introdução

Cordas cósmicas surgem no contexto de teorias de grande unificação, formadas na fase inicial do Universo como resultado da quebra espontânea de simetria durante uma transição de fase [36, 19]. Esses objetos são classificados como defeitos topológicos [29] e produzem uma geometria localmente plana: a curvatura do espaço-tempo é diferente de zero apenas sobre a própria corda, com comportamento tipo delta, e a topologia difere daquela do espaço-tempo de Minkowski [37].

No modelo idealizado, a corda é unidimensional e infinita. Apesar dessa simplificação, efeitos físicos significativos podem ocorrer, tanto no regime clássico [7] quanto no quântico [21, 12]. No caso de um campo escalar, por exemplo, as flutuações no estado de vácuo permanecem não nulas mesmo após renormalização, consequência direta da topologia não trivial [31, 8, 27].

O interesse por cordas cósmicas girantes remonta à década de 1980 [23, 33], pois suas geometrias constituem soluções exatas e localmente planas das equações de Einstein e, portanto, poderiam existir na natureza. Entretanto, esse tipo de geometria apresenta uma complicação relevante: o espaço-tempo resultante não é globalmente hiperbólico. Isso significa que não existe uma superfície de Cauchy global adequada para definir dados iniciais [38, 18], dificultando a aplicação direta da teoria quântica de campos. Apesar disso, há tentativas de lidar com esse cenário em espaços-tempos estáticos não globalmente hiperbólicos [39], e quantizações de campos escalares foram de fato estudadas [22], embora com resultados considerados fisicamente patológicos [6].

Um aspecto notável desses espaços-tempos é a possível formação de curvas do tipo-tempo fechadas (CTCs), que permitiriam, em princípio, viagens ao passado. Em 1992, Hawking propôs a *conjectura de proteção cronológica* [17], segundo a qual a existência de tais curvas seriam instáveis e proibidas quando efeitos quânticos são considerados. Como cordas cósmicas girantes podem conter regiões com CTCs, estudar a conjectura nesse contexto é uma questão natural. A ausência de uma superfície de Cauchy, no entanto, obriga a buscar estratégias alternativas de análise.

Uma dessas estratégias é considerar uma corda cósmica girante com um deslocamento ao longo do eixo  $z$  [8] ("*cosmic dispiration*"). Por meio de uma transformação de coordenadas, o problema torna-se mais tratável [14, 9]. Estudos nesse cenário mostram que, ao aproximar-se das regiões onde CTCs se formariam, as flutuações do tensor energia-momento crescem acentuadamente. Pelo mecanismo de *backreaction*, tal comportamento divergente pode gerar uma ergoregião, funcionando como mecanismo de proteção cronológica [10].

Outra abordagem para lidar com a não hiperbocidade é introduzir uma condição de contorno que “blinde” a região causal da acausal como sugere [32]. Para cordas cósmicas não girantes, diversos trabalhos investigaram como fronteiras modificam as médias de vácuo e o efeito Casimir [3, 24, 26, 25].

Neste trabalho, foi examinada a quantização de um campo escalar real sem massa no espaço-tempo de uma corda cósmica girante, impondo-se uma condição de contorno de Dirichlet sobre um cilindro de raio  $a$ , situado além da região acausal. Essa escolha permite isolar a região que contém curvas do tipo-tempo fechadas (CTCs) e, assim, aplicar as ferramentas usuais da teoria quântica de campos. A partir do propagador renormalizado, foram calculadas as flutuações do campo escalar no estado de vácuo, recuperando-se resultados previamente conhecidos na literatura [21, 3]. Além disso, ao analisar o comportamento das flutuações suficientemente próximas ao contorno cilíndrico, obteve-se a forma esperada para as flutuações do vácuo nas vizinhanças de um plano com condição de contorno de Dirichlet. Seguindo a proposta de [32], a condição de Dirichlet foi empregada com o intuito de regularizar os efeitos associados à região acausal. Contudo, essa expectativa não se confirmou diretamente, visto que as divergências identificadas por [6] nas flutuações do vácuo permaneceram presentes. Todavia, um contra-termo devido a presença da condição de contorno apareceu, nos levando a necessidade de estudos futuros mais profundos acerca da expressão obtida para as flutuações do campo no estado de vácuo.

## 2 Quantização do Campo Escalar e Propagadores

O objetivo deste capítulo será apresentar brevemente os conceitos que levam a quantização do campo escalar real e, posterior a isto, será apresentado um estudo sobre propagadores e algumas consequências centrais para o objetivo do trabalho, terminando com a construção do desvio quadrático médio do campo escalar no estado de vácuo e mostrando como se calcula formalmente tal grandeza física. Para simplificar a notação, vamos lançar mão do sistema de unidades naturais daqui em diante, ou seja, considerar que  $c = \hbar = 1$  por simplicidade e sem perda de generalidade, visto que pode-se voltar ao sistema de unidades internacionais através da análise dimensional.

### 2.1 Quantização Canônica

A quantização canônica é baseada em dois postulados iniciais [38]:

**Postulado 1** *Uma quantidade dinâmica  $A$  clássica será promovido à um observável quântico descrito por um operador linear Hermitiano  $\hat{A}$ .*

**Postulado 2** *Seja  $A$  e  $B$  duas variáveis dinâmicas clássicas. Então, definido o parênteses de Poisson entre estas, temos que a descrição quântica será dada pela substituição*

$$\{A, B\} \rightarrow -i[\hat{A}, \hat{B}].$$

Tais postulados são motivados por conta da estrutura algébrica dos parênteses de Poisson serem parecidas com as dos comutadores. Mais especificamente, os parênteses de Poisson nos resulta uma estrutura algébrica no espaço dos observáveis clássicos  $\mathcal{O}$  enquanto os comutadores resultam numa estrutura algébrica para os observáveis quânticos  $\hat{\mathcal{O}}$ , ambas bastante parecidas com a diferença de uma considerar funções e a outra operadores. Dessa forma, deve existir um mapa  $\hat{\phantom{x}}$  tal que

$$\hat{\phantom{x}} : \mathcal{O} \rightarrow \hat{\mathcal{O}}, \quad (2.1)$$

para o qual

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\widehat{\{A, B\}} \quad (2.2)$$

Dessa forma, para que uma teoria seja quantizada precisamos, primeiramente, conhecê-la em sua versão clássica.

Nosso interesse será estudar o comportamento de um campo escalar real dada uma métrica  $g_{\mu\nu}$ , com determinante  $g$ . Sendo assim, tal campo é descrito pela seguinte lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \sqrt{|g|} \left( \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \xi \mathbf{R} \phi^2 \right), \quad (2.3)$$

de tal forma que sua dinâmica vem dada pelo princípio de Hamilton [2], obtendo a equação de Klein-Gordon

$$\left( \square_g^2 + m^2 + \xi \mathbf{R}(x) \right) \phi(x) = 0, \quad (2.4)$$

onde  $m$  é a massa do campo escalar,  $\mathbf{R}$  o escalar de curvatura dado pelo traço do tensor de Ricci [40],  $\xi$  uma constante de acoplamento entre o campo e a curvatura do espaço-tempo (a discussão sobre este termo será discutido abaixo) e  $\square_g^2$  o operador de Laplace-Beltrami para a geometria  $g_{\mu\nu}$

$$\square_g^2 = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial^\mu \left( \sqrt{|g|} \partial_\mu \right).$$

#### Observação 0: Nota sobre o termo $\xi \mathbf{R}$

A importância do termo de acoplamento  $\xi \mathbf{R}$  pode ser vista através de uma transformação conforme na métrica

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(x) g_{\mu\nu} \quad (2.5)$$

seguida de uma transformação para o campo escalar

$$\bar{\phi}(x) = \Omega^{\frac{2-n}{2}}(x) \phi(x). \quad (2.6)$$

Com isso, podemos mostrar que usando a definição do operador de Laplace-Beltrami

$$\square_g^2 = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial^\mu \left( \sqrt{|g|} \partial_\mu \right)$$

para a geometria  $\bar{g}_{\mu\nu}$  que

$$\left[ \square_g^2 + \frac{1}{4} \frac{n-2}{n-1} \mathbf{R} \right] \bar{\phi} = \Omega^{-\frac{n-2}{2}} \left[ \square_g^2 + \frac{1}{4} \frac{n-2}{n-1} \mathbf{R} \right] \phi. \quad (2.7)$$

Portanto, se

$$\xi = \frac{1}{4} \frac{n-2}{n-1} \quad (2.8)$$

a equação de Klein-Gordon sem massa se mostra invariante por uma transformação conforme. Para um espaço-tempo 4-dimensional,  $n = 4$ , temos o chamado acoplamento conforme  $\xi = 1/6$ .

Da teoria clássica de campos definimos o momentum por

$$\pi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi)},$$

que no caso do campo escalar vem dado por

$$\pi(\mathbf{x}, t) = \sqrt{|g|} g^{0\nu} \partial_\nu \phi(\mathbf{x}, t).$$

O parênteses de Poisson entre dois funcionais dependendo dos campos  $\varphi_\beta$  e  $\pi^\beta$  é definido por

$$\{X, Y\} \doteq \int d^3x' \sum_{\beta=0}^N \left[ \frac{\delta X}{\delta \varphi_\beta(x')} \frac{\delta Y}{\delta \pi^\beta(x')} - \frac{\delta Y}{\delta \varphi_\beta(x')} \frac{\delta X}{\delta \pi^\beta(x')} \right]. \quad (2.9)$$

Desta forma, podemos usar tal definição e concluir imediatamente que o parênteses de Poisson entre o campo  $\phi$  e seu momentum conjugado  $\pi$  vem dado por

$$\{\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)\} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (2.10)$$

e os demais parênteses de Poisson [2]

$$\{\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)\} = 0 = \{\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)\}. \quad (2.11)$$

Portanto, usando as hipóteses de quantização, ou seja, (2.1) e (2.2) junto com os resultados (2.10) e (2.11), encontramos que

$$[\hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}(\mathbf{x}', t)] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\hat{\mathbb{I}} \quad ; \quad [\hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \hat{\phi}(\mathbf{x}', t)] = \hat{0} = [\hat{\pi}(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}(\mathbf{x}', t)]. \quad (2.12)$$

A evolução temporal de um operador  $\hat{A}$ , que não depende explicitamente do tempo, é governada por

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = i[\hat{H}, \hat{A}], \quad (2.13)$$

sendo

$$\hat{H} = \int d^3x \left[ \hat{\pi}^2 + (\nabla \hat{\phi})^2 + m^2 \hat{\phi}^2 \right]$$

o operador Hamiltoniano do campo escalar real após usar as hipóteses de quantização para a promover a Hamiltoniana clássica [16] à um observável quântico.

Com a equação (2.13), e usando o operador Hamiltoniano do campo escalar acima, obtemos que a evolução temporal do operador de campo  $\hat{\phi}$  e o momentum  $\hat{\pi}$  são determinadas pelas equações

$$\dot{\hat{\phi}} = i[\hat{H}, \hat{\phi}] \quad (2.14)$$

$$\dot{\hat{\pi}} = i[\hat{H}, \hat{\pi}]. \quad (2.15)$$

Desenvolvendo o sistema de equações acima usando o operador  $\hat{H}$  encontramos que a dinâmica do operador de campo é dado pela equação

$$(\square_g^2 + m^2) \hat{\phi}(x) = 0. \quad (2.16)$$

Assim, nota-se que a dinâmica do operador  $\hat{\phi}(x)$  é a mesma dada por (2.4) e, com isso, podemos expandir o operador de campo como

$$\hat{\phi}(x) = \sum_n \left[ \hat{a}_n \phi_n(x) + \hat{a}_n^\dagger \phi_n^*(x) \right], \quad (2.17)$$

onde as funções  $\phi_n(x)$  são denominadas por modos normais do campo e satisfazem à equação de autovalores

$$\left( \square_g^2 + m^2 \right) \phi_n(x) = 0 \quad (2.18)$$

e são ortonormalizadas por meio do produto interno de Klein-Gordon, vide apêndice (A).

Substituindo a expansão do operador de campo acima, e usando a definição para calcular o momentum, nas expressões para os comutadores na equação (2.12), encontramos

$$[\hat{a}_n, \hat{a}_{n'}^\dagger] = \delta_{nn'} \hat{\mathbb{I}} \quad (2.19)$$

$$[\hat{a}_n, \hat{a}_{n'}] = 0 \hat{\mathbb{I}} \quad (2.20)$$

$$[\hat{a}_n^\dagger, \hat{a}_{n'}^\dagger] = 0 \hat{\mathbb{I}}, \quad (2.21)$$

de modo que entendemos  $\delta_{nn'}$  como uma delta de Kronecker se os números quânticos forem discretos e uma delta de Dirac caso forem contínuos.

Nota-se que as relações de comutação acima são exatamente iguais as de um conjunto de osciladores harmônicos [2], o que faz os operadores  $\hat{a}_n$  e  $\hat{a}_n^\dagger$  receberem o nome de operadores de aniquilação e criação, respectivamente. Sendo assim, definimos o estado de vácuo  $|0\rangle$  através da relação

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0 \quad (2.22)$$

e o estado de uma partícula com momentum  $\mathbf{k}$  por

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger|0\rangle = |\mathbf{k}\rangle. \quad (2.23)$$

Analogamente, pode-se construir o estado com  $N$  partículas idênticas e momentum  $\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_N$  através da aplicação do operador de criação sobre o estado de vácuo  $|0\rangle$ , isto é

$$\hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger \dots \hat{a}_{\mathbf{k}_N}^\dagger|0\rangle = |\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_N\rangle.$$

O estado definido por (2.23) é base para o espaço de Hilbert de uma partícula e a soma direta sobre os espaços de Hilbert das  $N$ -partículas determina o chamado espaço de Fock. Ainda, note que por conta de  $[\hat{a}_n^\dagger, \hat{a}_{n'}^\dagger] = 0$ , o estado de múltiplas-partículas é simétrico sobre a operação de troca entre duas partículas, então esta obedece a estatística de Bose-Einstein. Para a construção do espaço de Fock de  $n_{\mathbf{k}}$  partículas idênticas com momentum  $\mathbf{k}$  veja [30, 4].

**Observação 1: Notas sobre espaços-tempos globalmente hiperbólico**

O procedimento feito acima (e para o que se segue) foi sempre considerando espaços-tempos globalmente hiperbólicos para que possamos evoluir uma superfície de dados iniciais  $\Sigma$ . Pensando nisso, devemos dar uma definição do que isso venha a ser e algumas consequências.

**Definição 2.1.1: Superfície de Cauchy [13]**

Uma curva causal é aquela que o vetor tangente é tipo-tempo ou tipo-luz (nulo) em todo lugar. Uma superfície de Cauchy para uma variedade  $\mathcal{M}$  semi-Riemanniana é uma superfície tipo-espaço tal que toda curva causal inextensível em  $\mathcal{M}$  a intercepte somente uma única vez.

Da definição de uma superfície de Cauchy aparece o termo "curva causal inextensível", isso nada mais é do que uma curva causal que não pode ser estendida para além do espaço-tempo, ou seja, a curva causal não pode ser estendida para além de seu domínio, mantendo causalidade e suavidade.

Portanto, dizemos que nosso espaço-tempo possui um problema de Cauchy bem posto, isto é podemos evoluir de forma única uma superfície de dados iniciais, se a variedade  $\mathcal{M}$  como um todo satisfizer a condição de possuir uma superfície de Cauchy, caracterizada, pelo menos localmente, por  $t = \text{constante}$ . Tal afirmação é equivalente a dizer que o espaço-tempo é globalmente hiperbólico [13, pág. 121].

## 2.2 Propagadores na Teoria Quântica de Campos

Com a quantização do campo escalar tendo sido feita na subseção anterior, podemos dar um próximo passo e construir alguns objetos que vão nos auxiliar na construção de um observável de interesse, a flutuação do campo escalar no estado de vácuo.

Sendo assim, começemos com a definição da chamada função de Hadamard:

$$G^{(1)}(x, x') \doteq \langle 0 | \{ \hat{\phi}(x), \hat{\phi}(x') \} | 0 \rangle, \quad (2.24)$$

onde foi definido o anti-comutador por

$$\{ \hat{A}, \hat{B} \} \doteq \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}. \quad (2.25)$$

Ainda, usando a definição do anti-comutador em (2.24) podemos definir outras duas funções por

$$G^+(x, x') \doteq \langle 0 | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') | 0 \rangle \quad (2.26)$$

$$G^-(x, x') \doteq \langle 0 | \hat{\phi}(x') \hat{\phi}(x) | 0 \rangle, \quad (2.27)$$



onde são chamadas de funções de Wightman de frequência positiva e negativa, respectivamente.

Com isso, nota-se imediatamente que a função de Hadamard vem dada pela combinação das funções de Wightman

$$G^{(1)}(x, x') = G^+(x, x') + G^-(x, x'). \quad (2.28)$$

Note que a função de Hadamard é real e para comprovar a afirmação veja que:

$$\begin{aligned} (G^{(1)}(x, x'))^* &= (\langle 0|\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')|0\rangle + \langle 0|\hat{\phi}(x')\hat{\phi}(x)|0\rangle)^* \\ &= \langle 0|(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x'))^\dagger|0\rangle + \langle 0|(\hat{\phi}(x')\hat{\phi}(x))^\dagger|0\rangle \\ &= \langle 0|\hat{\phi}(x')\hat{\phi}(x)|0\rangle + \langle 0|\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')|0\rangle \\ &= G^{(1)}(x, x'), \end{aligned}$$

onde foi usado que o campo  $\hat{\phi}(x)$  é hermitiano, ou seja,  $\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}^\dagger(x)$ . Concluindo assim que a função de Hadamard é real.

Outra conclusão útil e simples de ser verificada é que a função de Wightman de frequência negativa é o complexo conjugado da função de Wightman de frequência positiva. Para mostrar o resultado basta usar a definição da função de Wightman de frequência negativa e que o campo  $\hat{\phi}(x)$  é hermitiano:

$$\begin{aligned} G^-(x, x') &= \langle 0|\hat{\phi}(x')\hat{\phi}(x)|0\rangle \\ &= \langle 0|(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x'))^\dagger|0\rangle \\ &= (\langle 0|\hat{\phi}(x')\hat{\phi}(x)|0\rangle)^* \\ &= (G^+(x, x'))^*. \end{aligned}$$

Portanto, podemos reescrever a função de Hadamard como sendo proporcional a parte real da função de Wightman de frequência positiva:

$$G^{(1)}(x, x') = 2\Re[G^+(x, x')]. \quad (2.29)$$

Para a construção das flutuações no estado de vácuo do campo escalar, tome a definição da flutuação de um operador qualquer [5]

$$\begin{aligned} (\Delta\hat{A})^2 &\doteq \langle (\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle)^2 \rangle \\ &= \langle \hat{A}^2 \rangle - 2\langle \hat{A}\langle\hat{A}\rangle \rangle + \langle \hat{A} \rangle^2 \\ &= \langle \hat{A}^2 \rangle - 2\langle \hat{A} \rangle \langle \hat{A} \rangle + \langle \hat{A} \rangle^2 \\ &= \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2, \end{aligned} \quad (2.30)$$

onde o valor médio tomado acima foi para um estado quântico qualquer.

Assim, tome o valor médio do operador de campo no estado de vácuo

$$\langle 0 | \hat{\phi}(x) | 0 \rangle = \langle 0 | \sum_n [\hat{a}_n \phi_n(x) + \hat{a}_n^\dagger \phi_n^*(x)] | 0 \rangle \quad (2.31)$$

e use que o estado de vácuo é definido por  $\hat{a}_n | 0 \rangle = 0$ , ou equivalentemente  $\langle 0 | \hat{a}_n^\dagger = 0$ , para concluir que  $\langle \hat{\phi}(x) \rangle = 0$ .

Sendo assim, a flutuação do campo escalar real, de acordo com a equação (2.30), deverá vir pela contribuição da média no estado de vácuo do quadrado do operador de campo  $\hat{\phi}(x)$ . Desta forma, a flutuação no vácuo do campo escalar é dada, partindo da função de Hadamard, por

$$\langle \hat{\phi}^2(x) \rangle \doteq \lim_{x' \rightarrow x} \frac{1}{2} G^{(1)}(x, x') = \lim_{x' \rightarrow x} \Re[G^+(x, x')], \quad (2.32)$$

de modo que o fator  $1/2$  surge por conta da arbitrariedade em escolher o produto  $\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')$  ou  $\hat{\phi}(x')\hat{\phi}(x)$  na passagem da descrição clássica para a descrição quântica, de tal forma que o resultado que se mostra correto é o produto simetrizado.

Desta forma, calculando a função de Wightman de frequência positiva seremos capazes de encontrar a flutuação do campo no estado de vácuo. Para tal, tome a expansão (2.17) na definição de  $G^{(+)}(x, x')$ , equação (2.26), para encontrar

$$\begin{aligned} G^{(+)}(x, x') &= \sum_{i,j} \langle 0 | [\hat{a}_i \hat{a}_j \phi_i(x) \phi_j(x') + \hat{a}_i \hat{a}_j^\dagger \phi_i(x) \phi_j^*(x') + \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j \phi_i^*(x) \phi_j(x') + \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger \phi_i^*(x) \phi_j^*(x')] | 0 \rangle \\ &= \sum_{i,j} \phi_i(x) \phi_j^*(x') \langle 0 | \hat{a}_i \hat{a}_j^\dagger | 0 \rangle \\ &= \sum_{i,j} \phi_i(x) \phi_j^*(x') \left( \langle 0 | [\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] + \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i | 0 \rangle \right) \\ &= \sum_i \phi_i(x) \phi_i^*(x'), \end{aligned} \quad (2.33)$$

onde foram utilizadas as equações (2.22), (2.19) e que o estado de vácuo é normalizado  $\langle 0 | 0 \rangle = 1$  para concluir o resultado.

Portanto, precisamos resolver a equação (2.18) para encontrar as auto-funções  $\phi_n(x)$  com as condições de contorno adequadas e construir a função de Wightman seguindo (2.33) fazendo uma soma sobre todos os modos.

## 3 Flutuações do Campo Escalar sem Massa na Geometria de uma Corda Cósmica

O objeto de estudo será um campo escalar sem massa no espaço-tempo de fundo de uma corda cósmica girante e para garantir que a teoria quântica de campos possa ser utilizada nesse espaço não globalmente hiperbólico, será imposta uma condição de contorno para que o campo somente tenha acesso à região causal do espaço-tempo, evitando assim os problemas que surgem quando uma superfície de Cauchy global para a evolução dos dados iniciais não pode ser implementada.

Após definir o que seja uma corda cósmica girante, vamos ao cálculo do propagador renormalizado da teoria. Para verificar os efeitos que tal sistema físico terá, vamos analisar o comportamento das flutuações do campo no estado de vácuo e recuperar alguns dos principais resultados estabelecidos na literatura no que se diz respeito ao campo escalar na geometria de cordas cósmicas.

### 3.1 Corda Cósmica Girante

Campos de maneira geral, quer sejam clássicos ou quânticos, sempre estão mergulhados no espaço-tempo, isto é, estarão sofrendo influência da gravidade. Devido a Einstein, a gravitação passou a ser governada pelas equações da relatividade geral e, a partir disso, passou a ser uma teoria geométrica, ou seja, a gravidade é uma consequência da curvatura do espaço-tempo e não mais uma força como era entendido no contexto da gravitação Newtoniana. Para descrever como o espaço-tempo se curva com a presença de um conteúdo de matéria-energia precisamos resolver as equações da relatividade geral e obter como solução um objeto matemático chamado de tensor métrico.

Todavia, encontrar o tensor métrico para uma distribuição de matéria-energia qualquer é inviável, devido a complexidade da teoria. Contudo, algumas soluções são conhecidas [40] e dentre elas as chamadas cordas cósmicas. Tais soluções constituem uma idealização de um objeto unidimensional infinito, intuitivamente parecido com um fio infinito, que possuem a característica de serem planas em todo lugar exceto na região onde se encontra a própria corda cósmica, de modo que nesta localidade a curvatura diverge.

O comportamento dos campos quânticos, em particular, é modificado neste dado espaço de fundo em relação ao espaço-tempo de Minkowski. Entretanto, sendo nula a curvatura do espaço-tempo na região exterior a corda os comportamentos não deveriam ser iguais? A resposta é não, pois as cordas cósmicas possuem uma geometria global

distinta, de modo que a modificação na flutuação do campo no estado de vácuo, por exemplo, é consequência da mudança na geometria.

Sabendo que as cordas cósmicas nos servem de laboratório para o estudo das flutuações dos campos quânticos, pois são soluções das equações de Einstein, vamos tomar o espaço-tempo de uma corda cósmica girante, de modo que o elemento de linha para tal geometria vem dado por [23, 11]

$$ds^2 = (d\tau + Sd\phi)^2 - dr^2 - \alpha^2 r^2 d\phi^2 - dz^2, \quad (3.1)$$

onde  $S$  e  $\alpha$  são, respectivamente, a rotação e o parâmetro de *disclination* da corda cósmica.

### Observação 2:

Uma observação que pode ser importante é o fato de que a corda cósmica girante é um espaço-tempo estacionário mas não estático. A definição de ambos vem abaixo:

#### Definição 3.1.1: Espaços-tempos Estacionários

Dizemos que um espaço-tempo é estacionário se existe um campo de Killing do tipo-tempo  $\xi_t$  cuja linhas integrais representam a simetria de translação temporal.

#### Definição 3.1.2: Espaços-tempos Estáticos

Existe um vetor de Killing do tipo tempo da definição acima com o adicional de que este é ortogonal à superfície de Cauchy  $\Sigma$  em todo o ponto.

Fisicamente, a condição de ser estacionário implica na invariância por translação temporal, enquanto a condição de "estaticidade" implica na invariância por inversão temporal.

Veja que a métrica

$$ds^2 = (d\tau + Sd\phi)^2 - dr^2 - \alpha^2 r^2 d\phi^2 - dz^2 \quad (3.2)$$

possui um vetor de Killing do tipo-tempo global  $\xi_\tau^a = (\partial_\tau)^a$ . Todavia, para a região acausal  $r < S/\alpha$  o outro vetor de Killing  $\xi_\phi^a = (\partial_\phi)^a$  também se torna do tipo-tempo (pois a componente da métrica  $g_{\phi\phi}$  muda de sinal nesta região), e como este é um vetor que gera trajetórias fechadas temos curvas do tipo-tempo fechadas, quebrando a causalidade.

Adicionalmente, a *disclination* tem relação com a densidade de massa  $\mu$  da corda [31]

$$\alpha = 1 - 4G\mu. \quad (3.3)$$

Note que, fazendo  $S = 0$  e  $\tau$  constante obtemos a geometria de um cone [31], e tais espaços-tempos são chamados de cônicos. Ainda, se  $\mu > 0$  temos que  $\alpha < 1$  e isso implica que o espaço-tempo possui um deficit angular, ou seja, uma volta completa na coordenada angular  $\phi$  não nos resulta em  $2\pi$  mas sim em  $2\pi\alpha$ . Intuitivamente, pode-se pensar numa folha de papel circular sem uma fatia, de modo que o deficit aparece quando cola-se ambas as partes da folha formando um cone. Ainda, note que partindo de (3.1) tomando  $S = 0$  e  $\mu = 0$  em (3.3), isto é na ausência da corda cósmica, isso faz com que  $\alpha = 1$  reduza o elemento de linha (3.1) para o elemento de linha do espaço-tempo de Minkowski.

Um aspecto importante para a construção da teoria quântica de campos é que o espaço-tempo considerado seja globalmente hiperbólico, ou seja, é possível definir uma superfície de dados iniciais  $\Sigma$ , chamada de superfície de Cauchy, e evolui-la de maneira única no tempo. Todavia, a métrica (3.1) não possui esta característica. Verificar tal afirmação se torna simples ao considerar uma curva no espaço-tempo (3.1) tal que  $\tau$ ,  $r$  e  $z$  sejam constantes:

$$ds^2 = (S^2 - \alpha^2 r^2) d\phi^2,$$

de tal forma que a região  $r < S/\alpha$  faz com que haja uma mudança na assinatura da métrica, de modo a fazer com que o espaço-tempo não seja globalmente hiperbólico e, conseqüentemente, não seja possível definir a evolução unitária de um campo escalar [38]. Para tal região denominamos de região acausal e nesta aparecem curvas do tipo tempo fechadas, ou seja, curvas que possibilitam viagens ao passado [9]. Para  $r > S/\alpha$  o espaço-tempo permite a definição de uma superfície de Cauchy e é chamada de região causal.

Contudo, a teoria quântica falha em situações em que o espaço-tempo não seja globalmente hiperbólico [18]. Pensando nisso, o objetivo é quantizar um campo escalar sem massa em tal espaço de fundo e analisar as flutuações deste campo no estado de vácuo, de modo que será imposta uma condição de contorno de Dirichlet para que a região acausal não afete na "hiperbolicidade" do espaço-tempo, visto que para regiões  $r > S/\alpha$  o espaço-tempo é globalmente hiperbólico. Em outras palavras, a condição de contorno será imposta exterior a região acausal a fim de restringir a atuação do campo somente a região causal do espaço-tempo, fazendo com que possamos usar todo o ferramental construído na seção (2).

## 3.2 Função de Wightman Renormalizada

Como o objetivo é encontrar as flutuações de vácuo do campo escalar real sem massa, precisamos solucionar a equação (2.18) para  $m = 0$  e construir a função de Wightman de frequência positiva (2.33). Para tal, tome a equação de autovalores e autovetores

$$\square_g^2 \phi_\sigma(x) = \lambda_\sigma \phi_\sigma(x). \quad (3.4)$$

Todavia, para que  $\phi_\sigma(x)$  nos sirva para calcular  $G^+(x, x')$  esta deve ser solução para (2.4), e para tal deve-se exigir autovalores nulos a (3.4). Também, para cumprir com os requisitos da seção (3.1) imporemos uma condição de contorno de Dirichlet sobre um cilindro de raio  $a$

$$\phi(r = a, \varphi, z, t) = 0, \quad (3.5)$$

tal que  $a > S/\alpha$ , pois assim, hipoteticamente, estamos garantindo que a região acausal não influencie no comportamento do campo.

Antes de resolver (3.4) para a geometria (3.1) faça a seguinte mudança de coordenadas na métrica de interesse

$$t = \tau + S\phi \quad \varphi = \alpha\phi, \quad (3.6)$$

de tal forma que (3.1) se torne

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\varphi^2 - dz^2 \quad (3.7)$$

mas agora com as seguintes identificações não triviais entre as coordenadas  $(t, r, \varphi, z) \sim (t + 2\pi S, r, \varphi + 2\pi\alpha, z)$ . Como se pode ver, a fim de resolver a equação de autovalores para o operador  $\square_g^2$ , a métrica tem a forma da métrica de Minkowski e, com isso, o operador  $\square_g^2$  para (3.7) vem dado por

$$\square_g^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right].$$

Com isso, pode-se usar a técnica de separação de variáveis [1] e supor que

$$\phi_\sigma(x) = R(r) e^{i\gamma\varphi} e^{ikz} e^{-i\omega t} \quad (3.8)$$

a (3.4) para encontrar que a função radial  $R(r)$  deve respeitar

$$r^2 \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + r \frac{dR(r)}{dr} + (\nu^2 r^2 - \gamma^2) R(r) = 0. \quad (3.9)$$

A função radial então será dada em termos das funções de Bessel [35, 1]

$$R(r) = [\zeta J_\gamma(\nu r) + \beta Y_\gamma(\nu r)],$$

onde  $J_\gamma(\nu r)$  e  $Y_\gamma(\nu r)$  são as funções de Bessel de primeira e segunda espécie, respectivamente.

Com isso, as autofunções do operador diferencial virão dadas por

$$\phi_\sigma(x) = [\zeta J_\gamma(\nu r) + \beta Y_\gamma(\nu r)] e^{ikz} e^{i\gamma\varphi} e^{-i\omega t},$$

com autovalores  $\lambda_{\nu, k, \omega} = \nu^2 + k^2 - \omega^2$  e duas constantes a serem determinadas  $\zeta$  e  $\beta$ . Ambas soluções da parte radial são consideradas por conta de estarmos interessados na parte do

espaço-tempo que é globalmente hiperbólico e, portanto, não temos acesso a origem, onde a função de Bessel de segunda espécie diverge. Como a condição de contorno nos servirá para blindar a região acausal da causal, teremos acesso somente a parte externa do cilindro definido por (3.5).

Sendo assim, aplicando as identificações  $(t, r, \varphi, z) \sim (t + 2\pi S, r, \varphi + 2\pi\alpha, z)$  para as coordenadas nas autofunções acima concluímos que

$$\phi_\sigma(x) = \left[ \zeta J_{\left|\frac{n+\omega S}{\alpha}\right|}(\nu r) + \beta Y_{\left|\frac{n+\omega S}{\alpha}\right|}(\nu r) \right] e^{ikz} e^{i\left(\frac{n+\omega S}{\alpha}\right)\varphi} e^{-i\omega t},$$

com  $n \in \mathbb{Z}$ . As duas constantes remanescentes serão determinadas pela condição de contorno de Dirichlet e pela condição de normalização segundo o produto interno de Klein-Gordon [4], definido no apêndice (A). Ainda, podemos redefinir algumas constantes para escrever as autofunções acima como

$$\phi_\sigma(x) = \beta \left[ \zeta J_{\left|\frac{n+\omega S}{\alpha}\right|}(\nu r) + Y_{\left|\frac{n+\omega S}{\alpha}\right|}(\nu r) \right] e^{ikz} e^{i\left(\frac{n+\omega S}{\alpha}\right)\varphi} e^{-i\omega t}. \quad (3.10)$$

Aplicando a condição de contorno de Dirichlet sobre a coordenada radial vemos que a constante  $\zeta$  deve satisfazer

$$\zeta J_{\left|\frac{n+\omega S}{\alpha}\right|}(\nu a) + Y_{\left|\frac{n+\omega S}{\alpha}\right|}(\nu a) = 0,$$

implicando que as autofunções, após redefinir a constante  $\beta$ , serão tais que

$$\phi_{\nu,k,n}(x) = \bar{\beta} \left[ J_{\left|\frac{n+\omega S}{\alpha}\right|}(\nu r) Y_{\left|\frac{n+\omega S}{\alpha}\right|}(\nu a) - J_{\left|\frac{n+\omega S}{\alpha}\right|}(\nu a) Y_{\left|\frac{n+\omega S}{\alpha}\right|}(\nu r) \right] e^{i\left(\frac{n+\omega S}{\alpha}\right)\varphi} e^{ikz} e^{-i\omega t}. \quad (3.11)$$

Agora, a condição de autovalor nulo dita acima nos resulta num vínculo para  $\omega$ :

$$\begin{aligned} \lambda_{\nu,k,\omega} &= \nu^2 + k^2 - \omega^2 = 0 \\ \therefore \omega &= \sqrt{\nu^2 + k^2}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde só consideramos frequências positivas por conta da função de Wightman em questão ser a de frequência positiva.

Por último, devemos usar o produto interno para impor a condição de normalização para as autofunções e encontrar qual deve ser a constante  $\bar{\beta}$ . Lembrando que  $\bar{\beta}$  pode depender dos números quânticos, mas não deve depender das coordenadas.

Foi construído no apêndice (A) que o produto interno adequado para a teoria juntamente com a geometria de interesse vem dado pela equação (A.14)

$$(\phi_\sigma, \phi_{\sigma'}) = -i \int_\Sigma d^3x r \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - (S/\alpha r)^2}} \phi_\sigma \overleftrightarrow{\partial}_t \phi_{\sigma'}^* + \frac{S}{\alpha r^2 \sqrt{1 - (S/\alpha r)^2}} \phi_\sigma \overleftrightarrow{\partial}_\varphi \phi_{\sigma'}^* \right],$$

onde  $\sigma$  denota o conjunto de números quânticos  $(\nu, k, n)$ .

Seguindo o que foi feito no apêndice (B) podemos calcular a constante de normalização, equação (B.42), seguindo o produto interno de Klein-Gordon para a geometria de interesse e encontrar que as autofunções, agora normalizadas, vêm dadas por

$$\phi_{\nu,n,k}(x) = \sqrt{\frac{\nu}{2\alpha(2\pi)^2\omega \left( J_{\left|\frac{n+\omega S}{\alpha}\right|}^2(\nu a) + Y_{\left|\frac{n+\omega S}{\alpha}\right|}^2(\nu a) \right)}} g_{\left|\frac{n+\omega S}{\alpha}\right|}(\nu r, \nu a) e^{i\left(\frac{n+\omega S}{\alpha}\right)\varphi} e^{ikz} e^{-i\omega t}, \quad (3.13)$$

onde  $\omega = \sqrt{\nu^2 + k^2}$ .

Agora somos capazes de calcular a função de Wightman e, por consequência, construir os observáveis de interesse lançando mão da construção feita na subseção (2.2). Com as autofunções calculadas e normalizadas, equação (3.13), a função de Wightman de frequência positiva se dá pela soma em todos os modos. Isto é

$$G^+(x, x') = \frac{1}{2\alpha(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_0^{\infty} d\nu \nu \frac{g_{\left|\frac{n+\omega S}{\alpha}\right|}(\nu a, \nu r) g_{\left|\frac{n+\omega S}{\alpha}\right|}(\nu a, \nu r')}{J_{\left|\frac{n+\omega S}{\alpha}\right|}^2(\nu a) + Y_{\left|\frac{n+\omega S}{\alpha}\right|}^2(\nu a)} \times \frac{e^{in\Delta\varphi} e^{ik\Delta z} e^{-i\sqrt{\nu^2+k^2}\Delta t}}{\sqrt{\nu^2 + k^2}}. \quad (3.14)$$

Fazendo uso da seguinte identidade [3]

$$\frac{g_{\gamma}(\nu a, \nu r) g_{\gamma}(\nu a, \nu r')}{Y_{\gamma}^2(\nu a) + J_{\gamma}^2(\nu a)} = J_{\gamma}(\nu r) J_{\gamma}(\nu r') - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 \frac{J_{\gamma}(\nu a)}{H_{\gamma}^{(l)}(\nu a)} H_{\gamma}^{(l)}(\nu r) H_{\gamma}^{(l)}(\nu r'), \quad (3.15)$$

onde  $H_{\gamma}^{(1)}(r)$  e  $H_{\gamma}^{(2)}(r)$  são as funções de Hankel de primeira e segunda espécie, respectivamente, a função de Wightman de frequência positiva se separa em duas contribuições:

$$G^+(x, x') = \frac{1}{2\alpha(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_0^{\infty} d\nu \nu J_{|\gamma|}(\nu r) J_{|\gamma|}(\nu r') \frac{e^{i\gamma\Delta\varphi} e^{ik\Delta z} e^{-i\sqrt{\nu^2+k^2}\Delta t}}{\sqrt{\nu^2 + k^2}} - \frac{1}{4\alpha(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_0^{\infty} d\nu \nu \left[ \sum_{l=1}^2 \frac{J_{|\gamma|}(\nu a)}{H_{|\gamma|}^{(l)}(\nu a)} H_{|\gamma|}^{(l)}(\nu r) H_{|\gamma|}^{(l)}(\nu r') \right] \times \frac{e^{i\gamma\Delta\varphi} e^{ik\Delta z} e^{-i\sqrt{\nu^2+k^2}\Delta t}}{\sqrt{\nu^2 + k^2}} \quad (3.16)$$

onde

$$G_{CS}^+(x, x') \doteq \frac{1}{2\alpha(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_0^{\infty} d\nu \nu J_{|\gamma|}(\nu r) J_{|\gamma|}(\nu r') \frac{e^{i\gamma\Delta\varphi} e^{ik\Delta z} e^{-i\sqrt{\nu^2+k^2}\Delta t}}{\sqrt{\nu^2 + k^2}} \quad (3.17)$$

é a parte da função de Wightman relacionada somente a corda cósmica girante [6] e

$$G_B^+(x, x') \doteq -\frac{1}{4\alpha(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_0^{\infty} d\nu \nu \left[ \sum_{l=1}^2 \frac{J_{|\gamma|}(\nu a)}{H_{|\gamma|}^{(l)}(\nu a)} H_{|\gamma|}^{(l)}(\nu r) H_{|\gamma|}^{(l)}(\nu r') \right] \times \frac{e^{i\gamma\Delta\varphi} e^{ik\Delta z} e^{-i\sqrt{\nu^2+k^2}\Delta t}}{\sqrt{\nu^2 + k^2}} \quad (3.18)$$



relacionada somente a contribuição devido ao contorno cilíndrico. Desta forma, para resolver o problema por completo vamos examinar cada caso separado, começando por (3.17) e depois indo para (3.18).

Note que o índice que acompanha as funções de Bessel em (3.17), dado que  $\gamma$  foi definido acima, é complicado. Pensando nisso, vamos introduzir uma delta de Dirac de modo a retirar este índice e substituir por outro mais simples:

$$G_{CS}^+(x, x') = \frac{1}{2\alpha(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_0^{\infty} d\nu \nu \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \delta\left(\lambda - \left[\frac{n + S\sqrt{\nu^2 + k^2}}{\alpha}\right]\right) \\ \times J_{|\lambda|}(\nu r) J_{|\lambda|}(\nu r') \frac{e^{i\lambda\Delta\varphi} e^{ik\Delta z} e^{-i\sqrt{\nu^2 + k^2}\Delta t}}{\sqrt{\nu^2 + k^2}}.$$

Usando a fórmula de Poisson [8]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\theta + 2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} \quad (3.19)$$

no propagador acima, encontra-se

$$G_{CS}^+(x, x') = \frac{1}{2\alpha(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_0^{\infty} d\nu \nu \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda J_{|\lambda|}(\nu r) J_{|\lambda|}(\nu r') e^{i\lambda(\Delta\varphi - 2\pi n\alpha)} \\ \times \frac{e^{ik\Delta z} e^{-i\sqrt{\nu^2 + k^2}(\Delta t - 2\pi S n)}}{\sqrt{\nu^2 + k^2}}.$$

Definindo  $\tau \doteq i(\Delta t - 2\pi nS)$ , usando que

$$\frac{e^{-\omega\tau}}{\omega} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} d\eta e^{-\omega^2\eta^2 - \frac{\tau^2}{4\eta^2}}$$

e a definição de  $\omega$  em (3.12), podemos reescrever o propagador e deixá-lo com a seguinte forma

$$G_{CS}^+(x, x') = \frac{1}{2\alpha(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_0^{\infty} d\nu \nu e^{-\eta^2\nu^2} J_{|\lambda|}(\nu r) J_{|\lambda|}(\nu r') e^{i\lambda(\Delta\varphi - 2\pi n\alpha)} \\ \times e^{-\frac{\tau^2}{4\eta^2}} e^{-\eta^2 k^2 + ik\Delta z}$$

Mas podemos escrever

$$-\eta^2 k^2 + ik\Delta z = -\eta^2 \left(k - i\frac{\Delta z}{2\eta^2}\right)^2 - \frac{\Delta z^2}{4\eta^2}.$$

e reorganizar os termos de tal modo a obter

$$G_{CS}^+(x, x') = \frac{2}{8\sqrt{\pi}\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda(\Delta\varphi - 2\pi n\alpha)} \int_0^{\infty} d\eta e^{-\frac{(\tau^2 + \Delta z^2)}{4\eta^2}} \\ \int_0^{\infty} d\nu \nu e^{-\eta^2\nu^2} J_{|\lambda|}(\nu r) J_{|\lambda|}(\nu r') \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-\eta^2 \left(k - i\frac{\Delta z}{2\eta^2}\right)^2}.$$

Veja que podemos resolver imediatamente as integrais em  $\nu$  e  $k$  usando que [15]

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-\eta^2 \left(k - i \frac{\Delta z}{2\eta^2}\right)^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\eta}$$

$$\int_0^{\infty} d\nu \nu e^{-\eta^2 \nu^2} J_{|\lambda|}(\nu r) J_{|\lambda|}(\nu r') = \frac{e^{\frac{(r^2 + r'^2)}{4\eta^2}}}{2\eta^2} I_{|\lambda|}\left(\frac{rr'}{2\eta^2}\right),$$

com  $I_{\lambda}(y)$  sendo a função de Bessel modificada de primeira espécie.

Assim, o propagador se resume a

$$G_{CS}^+(x, x') = \frac{1}{8\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda(\Delta\varphi - 2\pi\alpha n)} \int_0^{\infty} \frac{d\eta}{\eta^3} e^{-\frac{(\tau^2 + \Delta z^2 + (r^2 + r'^2))}{4\eta^2}} I_{|\lambda|}\left(\frac{rr'}{2\eta^2}\right).$$

Por conveniência, tome a mudança de variáveis  $y = rr'/2\eta^2$  e reescreva o propagador acima como

$$G_{CS}^+(x, x') = \frac{1}{8\pi^2 rr'} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dy e^{-y \frac{(\tau^2 + \Delta z^2 + (r^2 + r'^2))}{2rr'}} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda(\Delta\varphi - 2\pi\alpha n)} I_{|\lambda|}(y).$$

Para o cálculo da última integral vamos lançar mão da representação [15, eq. 8.431-5] para  $I_{\lambda}(y)$ . Assim, após usar a representação citada e definirmos que  $\bar{\varphi} \doteq \Delta\varphi - 2\pi\alpha n$  obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda(\Delta\varphi - 2\pi\alpha n)} I_{|\lambda|}(y) &= \int_0^{\pi} d\theta e^{y \cos(\theta)} [\delta(\theta - \bar{\varphi}) + \delta(\theta + \bar{\varphi})] \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\xi e^{-y \cosh(\xi)} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{-|\lambda|\xi + i\lambda\bar{\varphi}} \sin(|\lambda|\pi). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Note que o primeiro termo só é diferente de zero caso  $|\bar{\varphi}| \leq \pi$ . Assim, se nos restringirmos, por simplicidade, somente a  $\alpha > 1/2$  e usarmos a desigualdade triangular [1] encontramos que

$$|\bar{\varphi}| = |\Delta\varphi - 2\pi\alpha n| \leq |\Delta\varphi| + |2\pi\alpha n| \leq \pi.$$

Assim, concluí-se que, para  $\alpha > 1/2$ , o primeiro termo de (3.20) será não nulo somente para  $n = 0$ , pois  $|2\pi\alpha n| > \pi \forall |n| > 0$ .

Portanto, levando em consideração os argumentos acima a função de Wightman toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} G_{CS}^+(x, x') &= \frac{1}{2(2\pi)^2 rr'} \int_0^{\infty} dy e^{-\frac{y}{2rr'}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 - \Delta t^2)} \\ &\quad - \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} dy e^{-\frac{y}{2rr'}[\tau^2 + \Delta z^2 + r^2 + r'^2 + 2rr' \cosh(\xi)]} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{-|\lambda|\xi + i\lambda\bar{\varphi}} \sin(|\lambda|\pi), \end{aligned}$$

onde

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 \doteq r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\Delta\varphi) + \Delta z^2.$$

Resolvendo as integrais em  $\lambda$  e  $y$  com auxílio de um *software* [41], encontramos que

$$G_{CS}^+(x, x') = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 - \Delta t^2)} - \frac{2}{(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\xi \frac{1}{\left[ -(\Delta t - 2\pi n S)^2 + \Delta z^2 + r^2 + r'^2 + 2rr' \cosh(\xi) \right]} \times \frac{\xi^2 + \pi^2 - (\Delta\varphi - 2\pi\alpha n)^2}{\left[ \left( \xi^2 + (\Delta\varphi - 2\pi\alpha n)^2 \right)^2 + 2\pi^2 (\xi - (\Delta\varphi - 2\pi\alpha n)) (\xi + (\Delta\varphi - 2\pi\alpha n)) + \pi^4 \right]}$$

Note que o primeiro termo é a função de Wightman no espaço-tempo de Minkowski [13] e esta é divergente quando tomado o limite de coincidência dos pontos, ou seja, é o termo responsável pela divergência ultravioleta. Sendo assim, pensando em construir observáveis este termo deve ser subtraído, de modo que só nos reste as contribuições convergentes do propagador. Tal subtração dos termos divergentes que não contribuem com a física é chamado de renormalização. De fato, o termo de Minkowski não contribui fisicamente por conta do seu tensor energia-momentum, mais especificamente  $\langle T_\nu^\mu \rangle$  definido em [4], ser nulo. De outra forma, ao realimentarmos as equações de Einstein para obter correções na métrica obteríamos outra solução que não seja a do espaço-tempo de Minkowski.

Assim sendo, o primeiro termo do propagador (3.16) possui as divergências que devem ser subtraídas, de modo que o propagador renormalizado vem dado por

$$G_{RCS}^+(x, x') = -\frac{2}{(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\xi \frac{1}{\left[ -(\Delta t - 2\pi n S)^2 + \Delta z^2 + r^2 + r'^2 + 2rr' \cosh(\xi) \right]} \times \frac{\xi^2 + \pi^2 - (\Delta\varphi - 2\pi\alpha n)^2}{\left[ \left( \xi^2 + (\Delta\varphi - 2\pi\alpha n)^2 \right)^2 + 2\pi^2 (\xi - (\Delta\varphi - 2\pi\alpha n)) (\xi + (\Delta\varphi - 2\pi\alpha n)) + \pi^4 \right]}. \quad (3.21)$$

Agora, nos resta trabalhar com o segundo termo de (3.16), isto é o termo devido ao contorno cilíndrico. Para lidar com o índice das funções de Bessel vamos utilizar do mesmo truque que foi usado para o primeiro termo. Introduzindo a delta de Dirac e usando a fórmula de Poisson (3.19), encontramos que a parte do propagador do campo escalar sem massa devido ao contorno cilíndrico será

$$G_B^+(x, x') = -\frac{1}{16\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_0^{\infty} d\nu \nu \left[ \sum_{l=1}^2 \frac{J_{|\lambda|}(\nu a)}{H_{|\lambda|}^{(l)}(\nu a)} H_{|\lambda|}^{(l)}(\nu r) H_{|\lambda|}^{(l)}(\nu r') \right] \times \frac{e^{i\lambda(\Delta\varphi - 2\pi\alpha n)} e^{ik\Delta z} e^{-i(\Delta t - 2\pi n S)\sqrt{\nu^2 + k^2}}}{\sqrt{\nu^2 + k^2}}. \quad (3.22)$$

A fim de simplificar  $G_B^+(x, x')$  podemos girar o contorno de integração no plano complexo de  $\nu$  nos ângulos de  $\pi/2$  para  $H_\nu^{(1)}(z)$  e  $-\pi/2$  para  $H_\nu^{(2)}(z)$  [3]. Com isso, e

usando [20]

$$H_\nu^{(1)}(e^{i\pi/2}z) = -\frac{2i}{\pi}e^{-i\nu\pi/2}K_\nu(z) \quad H_\nu^{(2)}(e^{-i\pi/2}z) = \frac{2i}{\pi}e^{i\nu\pi/2}K_\nu(z) \quad (3.23)$$

$$J_\nu(e^{i\pi/2}z) = e^{i\nu\pi/2}I_\nu(z) \quad J_\nu(e^{-i\pi/2}z) = e^{-i\nu\pi/2}I_\nu(z) \quad (3.24)$$

encontra-se após manipulações simples

$$\begin{aligned} G_B^+(x, x') = & -\frac{1}{16\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda(\Delta\varphi - 2\pi n\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik\Delta z} \times \\ & \times \left[ \frac{2i}{\pi} \int_0^\infty dy y \frac{K_{|\lambda|}(yr)K_{|\lambda|}(yr')}{K_{|\lambda|}(ya)} \frac{I_{|\lambda|}(ya)}{\sqrt{(e^{i\pi}y)^2 + k^2}} e^{-i\sqrt{(e^{i\pi}y)^2 + k^2}(\Delta t - 2\pi nS)} \right. \\ & \left. - \frac{2i}{\pi} \int_0^\infty dy y \frac{K_{|\lambda|}(yr)K_{|\lambda|}(yr')}{K_{|\lambda|}(ya)} \frac{I_{|\lambda|}(ya)}{\sqrt{(e^{-i\pi}y)^2 + k^2}} e^{-i\sqrt{(e^{-i\pi}y)^2 + k^2}(\Delta t - 2\pi nS)} \right], \quad (3.25) \end{aligned}$$

onde  $I_\nu(x)$  e  $K_\nu(x)$  são as funções modificadas de Bessel de primeira e segunda espécie, respectivamente. Note que a rotação no contorno de integração não altera os limites de integração, pois para fazer a rotação de  $\pi/2$ , por exemplo, usamos que  $\gamma = e^{\pi/2}y$ , então para o domínio de  $\gamma$  deveríamos ter um limite de integração da forma  $[0, i\infty)$ , indicando que a integração acontece no eixo imaginário de  $\gamma$ . Todavia, para o domínio de  $y$  o limite de integração permanece inalterado a comparar com antes da rotação, pois como  $y \in \mathbb{R}$  a informação sobre a rotação está toda no Jacobiano, ou seja, em  $d\gamma$ .

Veja que

$$\sqrt{(e^{\pm i\pi}y)^2 + c^2} = \begin{cases} \sqrt{c^2 - y^2}, & 0 \leq y \leq |c| \\ e^{\pm i\pi/2}\sqrt{y^2 - c^2}, & y > |c| \end{cases}. \quad (3.26)$$

Com isso, a soma de integrais dentro dos colchetes em (3.25) serão divididas em dois intervalos,  $[0, |k|]$  e  $[|k|, \infty)$ , de modo que as integrais no intervalo  $[0, |k|]$  cancelam entre si. Dessa forma, manipulando os dois termos restantes e usando a definição das funções hiperbólicas [1], encontra-se

$$\begin{aligned} G_B^+(x, x') = & -\frac{1}{4\pi^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda(\Delta\varphi - 2\pi n\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik\Delta z} \\ & \left[ \int_{|k|}^\infty dy y \frac{K_{|\lambda|}(yr)K_{|\lambda|}(yr')}{K_{|\lambda|}(ya)} \frac{I_{|\lambda|}(ya)}{\sqrt{y^2 - k^2}} \cosh\left(\sqrt{y^2 - k^2}(\Delta t - 2\pi nS)\right) \right]. \quad (3.27) \end{aligned}$$

Portanto, o propagador renormalizado utilizado para construir os observáveis de interesse da teoria quântica de campos no exterior de uma corda cósmica girante sujeita

a condição de contorno de Dirichlet é dado por

$$\begin{aligned}
G_{Ren}^+(x, x') &= -\frac{2}{(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\xi \frac{\xi^2 + \pi^2 - (\Delta\varphi - 2\pi\alpha n)^2}{D_n(\xi)} \frac{1}{Q_n(\xi)} \\
&\quad - \frac{1}{4\pi^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda(\Delta\varphi - 2\pi\alpha n)} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik\Delta z} \\
&\quad \times \left[ \int_{|k|}^{\infty} dy y \frac{K_{|\lambda|}(yr) K_{|\lambda|}(yr')}{K_{|\lambda|}(ya)} \frac{I_{|\lambda|}(ya)}{\sqrt{y^2 - k^2}} \cosh\left(\sqrt{y^2 - k^2}(\Delta t - 2\pi nS)\right) \right] \\
&\doteq G_{RCS}^+(x, x') + G_B^+(x, x'), \tag{3.28}
\end{aligned}$$

onde definimos

$$D_n(\xi) \equiv \left(\xi^2 + (\Delta\varphi - 2\pi\alpha n)^2\right)^2 + 2\pi^2 \left(\xi^2 - (\Delta\varphi - 2\pi\alpha n)^2\right) + \pi^4, \tag{3.29}$$

$$Q_n(\xi) \equiv -(\Delta t - 2\pi nS)^2 + \Delta z^2 + r^2 + r'^2 + 2rr' \cosh(\xi). \tag{3.30}$$

### 3.3 Flutuação do Campo no Vácuo

O valor esperado no vácuo,  $\langle\phi^2\rangle$ , foi definido na seção (2.2) e vem dada por (2.32)

$$\langle\phi^2\rangle = \lim_{x' \rightarrow x} \Re(G_{Ren}^+(x, x')), \tag{3.31}$$

de modo que temos que tomar o propagador renormalizado para obtermos resultados físicos. Usando a definição da flutuação no vácuo do campo escalar para o propagador obtido (3.28), encontramos que este possui duas contribuições

$$\langle\phi^2\rangle(r) = \langle\phi^2\rangle_{CS}(r) + \langle\phi^2\rangle_B(r), \tag{3.32}$$

onde  $\langle\phi^2\rangle_{CS}$  é a flutuação do campo escalar devido a corda cósmica girante [6]

$$\begin{aligned}
\langle\phi^2\rangle_{CS}(r) &= -\frac{1}{2(2\pi)^2 r^2} \\
&\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\xi \frac{\xi^2 + \pi^2(1 - 4\alpha^2 n^2)}{\left[\pi^2(2\alpha n + 1)^2 + \xi^2\right] \left[\pi^2(2\alpha n - 1)^2 + \xi^2\right] \left[\cosh^2(\xi/2) - \left(\frac{n\pi S}{r}\right)^2\right]} \tag{3.33}
\end{aligned}$$

e  $\langle\phi^2\rangle_B$  a flutuação induzida pela fronteira cilíndrica

$$\begin{aligned}
\langle\phi^2\rangle_B(r) &= -\frac{1}{4\pi^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{-2\pi i n \alpha \lambda} \\
&\int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{|k|}^{\infty} dy y \frac{I_{|\lambda|}(ya)}{K_{|\lambda|}(ya)} \frac{K_{|\lambda|}^2(yr)}{\sqrt{y^2 - k^2}} \cosh\left(2\pi nS \sqrt{y^2 - k^2}\right). \tag{3.34}
\end{aligned}$$

Veja que a integração em  $k$  do termo de fronteira (3.34) pode ser efetuada e para isso basta que se troque a ordem da integração a modo a integrar primeiro em  $k$ . Para

tal, basta olhar para o domínio da integral dupla e muda-lá de forma adequada, de modo a obter

$$\langle \phi^2 \rangle_B(r) = -\frac{1}{4\pi^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{-2\pi i n \alpha \lambda} \times \int_0^{\infty} dy y \frac{I_{|\lambda|}(ya)}{K_{|\lambda|}(ya)} K_{|\lambda|}^2(yr) \int_{-y}^y dk \frac{\cosh(2\pi n S \sqrt{y^2 - k^2})}{\sqrt{y^2 - k^2}}. \quad (3.35)$$

Por uma mudança de variável,  $u = k/y$ , na integração em  $k$  é fácil perceber que [15, eq. 3.534-2]

$$\int_{-y}^y dk \frac{\cosh(2\pi n S \sqrt{y^2 - k^2})}{\sqrt{y^2 - k^2}} = 2 \int_0^1 du \frac{\cosh(2\pi n y S \sqrt{1 - u^2})}{\sqrt{1 - u^2}} = \pi I_0(2\pi n y S).$$

Desta forma, encontramos que a flutuação devido a fronteira vem dada por

$$\langle \phi^2 \rangle_B(r) = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{-2\pi i n \alpha \lambda} \int_0^{\infty} dy y \frac{I_{|\lambda|}(ya)}{K_{|\lambda|}(ya)} K_{|\lambda|}^2(yr) I_0(2\pi n y S). \quad (3.36)$$

Portanto, concluímos finalmente que a flutuação do campo escalar no estado de vácuo no espaço-tempo de uma corda girante com condição de contorno de Dirichlet será dada por

$$\begin{aligned} \langle \phi^2 \rangle(r) &= -\frac{1}{2(2\pi)^2 r^2} \\ &\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\xi \frac{\xi^2 + \pi^2(1 - 4\alpha^2 n^2)}{\left[ \pi^2 (2\alpha n + 1)^2 + \xi^2 \right] \left[ \pi^2 (2\alpha n - 1)^2 + \xi^2 \right] \left[ \cosh^2(\xi/2) - \left( \frac{n\pi S}{r} \right)^2 \right]} \\ &- \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{-2\pi i n \alpha \lambda} \int_0^{\infty} dy y \frac{I_{|\lambda|}(ya)}{K_{|\lambda|}(ya)} K_{|\lambda|}^2(yr) I_0(2\pi n y S). \end{aligned} \quad (3.37)$$

O primeiro termo apresenta os problemas associados à quantização indevida no espaço-tempo de uma corda cósmica com rotação [6], que, por sua vez, não é globalmente hiperbólico. A motivação em impor uma condição de contorno era isolar a região patológica do espaço-tempo e, assim, obter uma contribuição regular para as flutuações do vácuo. Contudo, tal resultado não se concretizou devido à presença do primeiro termo. Em suma, mesmo com a introdução de uma fronteira separando as regiões causal e acausal do espaço-tempo, verificamos que as flutuações do campo permanecem divergentes. Isso sugere que: a condição de contorno considerada não foi suficiente; ou a existência física de uma corda cósmica girante pode ser improvável.

### 3.4 Corda Cósmica Estática

Até aqui, obtivemos o propagador do campo escalar para o espaço-tempo de uma corda cósmica girante e, em seguida, calculamos a flutuação no estado de vácuo. A partir

disso, é possível testar a expressão geral obtida, verificando se ela reproduz casos já consolidados na literatura. Em particular, um teste natural consiste em considerar a situação de uma corda cósmica sem rotação, isto é, para  $S = 0$ . De fato, ao impor  $S = 0$  em (3.1), recuperamos

$$ds^2 = d\tau^2 - dr^2 - \alpha^2 r^2 d\phi^2 - dz^2. \quad (3.38)$$

Mas veja que o tempo  $\tau$  e  $t$ , definido em (3.6), serão os mesmos, de modo que utilizaremos  $t$  para a coordenada temporal da corda cósmica sem rotação.

Assim, fazendo  $S = 0$  em (3.37) e utilizando que a função modificada de Bessel de primeira espécie avaliada em zero é tal que  $I_0(0) = 1$ , somos capazes de obter que as flutuações do vácuo no exterior de uma corda cósmica sem rotação com condição de contorno de Dirichlet serão tais que

$$\begin{aligned} \langle \phi^2 \rangle(r) = & -\frac{1}{2(2\pi)^2 r^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\xi \frac{\xi^2 + \pi^2(1 - 4\alpha^2 n^2)}{\left[ \pi^2 (2\alpha n + 1)^2 + \xi^2 \right] \left[ \pi^2 (2\alpha n - 1)^2 + \xi^2 \right] \cosh^2(\xi/2)} \\ & - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{-2\pi i n \alpha \lambda} \int_0^{\infty} dy y \frac{I_{|\lambda|}(ya)}{K_{|\lambda|}(ya)} K_{|\lambda|}^2(yr). \end{aligned}$$

Ainda, podemos usar a fórmula de Poisson (3.19) para reescrever o segundo termo de  $\langle \phi^2 \rangle(r)$  acima de forma mais adequada:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(-2\pi\lambda\alpha)n} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(2\pi n - 2\pi\lambda\alpha) = \frac{1}{2\pi\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\lambda - \frac{n}{\alpha}\right) \\ \therefore \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(-2\pi\lambda\alpha)n} &= \frac{1}{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\lambda - \frac{n}{\alpha}\right). \end{aligned}$$

Operando com a delta de Dirac resultante da igualdade acima na expressão para  $\langle \phi^2 \rangle(r)$  acima desta é imediato obter

$$\begin{aligned} \langle \phi^2 \rangle^{(S=0)}(r) &= -\frac{1}{2(2\pi)^2 r^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\xi \frac{\xi^2 + \pi^2(1 - 4\alpha^2 n^2)}{\left[ \pi^2 (2\alpha n + 1)^2 + \xi^2 \right] \left[ \pi^2 (2\alpha n - 1)^2 + \xi^2 \right] \cosh^2(\xi/2)} \\ &\quad - \frac{1}{4\pi^2 \alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dy y \frac{I_{\frac{|n|}{\alpha}}(ya)}{K_{\frac{|n|}{\alpha}}(ya)} K_{\frac{|n|}{\alpha}}^2(yr) \\ &\doteq \langle \phi^2 \rangle_{CS}^{(S=0)}(r) + \langle \phi^2 \rangle_B^{(S=0)}(r). \end{aligned}$$

O primeiro termo é exatamente o termo obtido em [21, 31] e o segundo o termo obtido em [3]. Para que o resultado clássico da literatura apareça explicitamente, vamos resolver a série e a integral do primeiro termo. Para tal, note que a série é simétrica, de modo que podemos separa-lá na contribuição  $n = 0$  e  $|n| > 0$ :

$$\begin{aligned} \langle \phi^2 \rangle_{CS}^{(S=0)}(r) &= -\frac{1}{8\pi^2 r^2} \int_0^{\infty} d\xi \frac{1}{(\pi^2 + \xi^2) \cosh^2(\xi/2)} \\ &\quad - \frac{1}{4\pi^2 r^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\xi \frac{\xi^2 + \pi^2(1 - 4\alpha^2 n^2)}{\left[ \pi^2 (2\alpha n + 1)^2 + \xi^2 \right] \left[ \pi^2 (2\alpha n - 1)^2 + \xi^2 \right] \cosh^2(\xi/2)}. \end{aligned}$$

Resolvendo a série com o auxílio de [41], obtemos que o termo devido somente a presença da corda cósmica vem dado por

$$\begin{aligned} \langle \phi^2 \rangle_{CS}^{(S=0)}(r) = & -\frac{1}{8\pi^2 r^2} \int_0^\infty d\xi \frac{1}{(\pi^2 + \xi^2) \cosh^2(\xi/2)} \\ & + \frac{1}{4\pi^2 r^2} \left[ \frac{1}{2} \int_0^\infty d\xi \frac{1}{(\pi^2 + \xi^2) \cosh^2(\xi/2)} + \frac{\sin(\pi/\alpha)}{4\pi\alpha} \int_0^\infty d\xi \frac{1}{\cosh^2(\xi/2) [\cos(\pi/\alpha) - \cosh(\xi/\alpha)]} \right]. \end{aligned}$$

Usando o teorema dos resíduos [1] é possível resolver os dois tipos de integrais acima:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\xi \frac{1}{(\pi^2 + \xi^2) \cosh^2(\xi/2)} &= \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \int_0^\infty d\xi \frac{1}{\cosh^2(\xi/2) [\cos(\pi a) - \cosh(a\xi)]} &= \frac{\pi a}{6 \sin(\pi a)} \left( \frac{1 - a^2}{a^2} \right). \end{aligned}$$

Manipulando os termos algebricamente, encontramos que

$$\langle \phi^2 \rangle_{CS}^{(S=0)}(r) = \frac{1}{48\pi^2 r^2} (\alpha^{-2} - 1). \quad (3.39)$$

Portanto, a flutuação do campo escalar real sem massa no espaço de fundo de uma corda cósmica sem rotação com uma fronteira cilíndrica vem dada por

$$\langle \phi^2 \rangle^{(S=0)}(r) = \frac{1}{48\pi^2 r^2} (\alpha^{-2} - 1) - \frac{1}{4\pi^2 \alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty dy y \frac{I_{\frac{|n|}{\alpha}}(ya)}{K_{\frac{|n|}{\alpha}}(ya)} K_{\frac{|n|}{\alpha}}^2(yr), \quad (3.40)$$

onde o primeiro termo é um resultado clássico da literatura [21, 31, 8] e o segundo termo devido a fronteira cilíndrica [3]. Note ainda que ao fazer  $\alpha = 1$  recuperamos o espaço-tempo de Minkowski, mas as flutuações do campo não são nulas devido a fronteira. O que foi dito na seção (3.1) sobre a geometria do espaço-tempo ter interferência nos observáveis quânticos se manifestou através do primeiro termo da expressão acima, mesmo após a renormalização em relação ao espaço-tempo de Minkowski. Isto é, mesmo o espaço-tempo de uma corda cósmica sem rotação, assim como a com rotação, ser localmente plana temos que o primeiro termo se deve exclusivamente a contribuições devidas à geometria não trivial que a corda cósmica fornece ao espaço-tempo.

Ainda, apesar do propagador ter sido renormalizado com relação a Minkowski as flutuações do campo são divergentes para  $r = a$ . Fisicamente, os modos  $n$  deverão ser tais que a oscilação na parte angular seja rápida o suficiente para que a condição de contorno de Dirichlet seja respeitada a medida que  $r \rightarrow a$ . Com isso, somos capazes de notar que os únicos comprimentos de onda capazes de fazer com que essa resposta seja rápida o suficiente seriam para comprimentos de onda muito curtos, ou seja, grandes modos angulares. Em outras palavras, para  $r \rightarrow a$  os termos mais relevantes deverão ser os modos para os quais  $n$  são grandes.

Sendo assim, podemos analisar as flutuações quando  $(r - a) \rightarrow 0$ , ou seja, a flutuação do campo avaliado bem próximas a fronteira. Fisicamente, esperaríamos que o



comportamento fosse como as flutuações do campo escalar próximas a uma fronteira plana. Note que para tal estudo, precisamos partir de (3.40) e considerar somente o segundo termo por conta do primeiro termo não envolve  $a$ .

Para começar, faça as seguintes mudanças de variáveis para retirar a dimensão física do argumento das funções de Bessel:

$$x = ya \quad \rho = r/a \quad \nu = n/\alpha.$$

Com isso, e usando a simetria no índice  $n$ , o segundo termo de (3.40) passa a ter a seguinte forma

$$\langle \phi^2 \rangle_B^{(S=0)}(r) = -\frac{1}{2\pi^2 a^2 \alpha} \sum_{n=0}^{\infty}{}' \int_0^{\infty} dx x \frac{I_{\nu}(x)}{K_{\nu}(x)} K_{\nu}^2(x\rho), \quad (3.41)$$

onde a linha no somatório significa que para  $n = 0$  há um fator  $1/2$  multiplicativo.

Agora, tome também  $x = \nu z$  para reescrever a expressão acima como

$$\langle \phi^2 \rangle_B^{(S=0)}(r) = -\frac{1}{2\pi^2 a^2 \alpha^3} \sum_{n=0}^{\infty}{}' n^2 \int_0^{\infty} dx x \frac{I_{\nu}(\nu x)}{K_{\nu}(\nu x)} K_{\nu}^2(\nu x\rho). \quad (3.42)$$

Levando em conta o argumento anterior da contribuição principal das divergências se darem para modos com  $n$  grande, podemos usar a expansão assintótica para a ordem das funções de Bessel e considerar somente o termo dominante [28]:

$$I_{\nu}(\nu z) = \frac{e^{\nu\eta(z)}}{\sqrt{2\pi\nu}(1+z^2)^{1/4}}$$

$$K_{\nu}(\nu z) = \sqrt{\frac{\pi}{2\nu}} \frac{e^{-\nu\eta(z)}}{(1+z^2)^{1/4}},$$

onde

$$\eta(z) \doteq \sqrt{1+z^2} + \ln\left(\frac{z}{1+\sqrt{1+z^2}}\right).$$

Assim, substituindo as aproximações acima em (3.42) chega-se que

$$\langle \phi^2 \rangle_B^{(S=0)}(r) \simeq -\frac{1}{4\pi^2 \alpha^2 a^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^{\infty} \frac{z}{\sqrt{1+\rho^2 z^2}} e^{-2\nu[\eta(z\rho)-\eta(z)]}. \quad (3.43)$$

Todavia, considerando que  $r$  está muito próximo de  $a$ , isto é  $\rho \rightarrow 1$ , podemos expandir o argumento da exponencial em uma série de Taylor em torno de  $\rho = 1$ . Matematicamente, teríamos que

$$[\eta(z\rho) - \eta(z)] = \eta(z) + \frac{\partial\eta(z\rho)}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=1}(\rho-1) + \dots - \eta(z),$$

onde pode-se calcular facilmente que

$$\frac{\partial\eta(z\rho)}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=1} = \sqrt{z^2+1}. \quad (3.44)$$

Desta forma, após cálculos simples encontra-se

$$\begin{aligned}
\langle \phi^2 \rangle_B^{(S=0)}(r) &\simeq -\frac{1}{4\pi^2 \alpha^2 a^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^{\infty} \frac{z}{\sqrt{1+\rho^2 z^2}} e^{-2\nu(\rho-1)\sqrt{1+z^2}} \\
&\simeq -\frac{1}{4\pi^2 \alpha^2 a^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^{\infty} \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} e^{-2\nu(r/a-1)\sqrt{1+z^2}} \\
&\simeq -\frac{1}{4\pi^2 \alpha^2 a^2} \int_0^{\infty} \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-2(n/\alpha)(r/a-1)\sqrt{1+z^2}}. \tag{3.45}
\end{aligned}$$

Resolvendo a série utilizando o auxílio de [41] encontramos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-2(n/\alpha)(r/a-1)\sqrt{1+z^2}} = \frac{1}{4} \operatorname{csch}^2 \left( \frac{(r/a-1)\sqrt{z^2+1}}{\alpha} \right).$$

Mas note que  $(r/a-1)$  é um fator bem pequeno, dado as aproximações ditas acima, então se expandirmos a função acima e considerarmos somente o termo dominante, encontraremos que

$$\operatorname{csch}^2 \left( \frac{(r/a-1)\sqrt{z^2+1}}{\alpha} \right) \simeq \frac{\alpha^2 a^2}{4(r-a)^2(z^2+1)}.$$

Substituindo a aproximação acima em (3.45) nos resulta que

$$\langle \phi^2 \rangle_B^{(S=0)}(r) \simeq -\frac{1}{(4\pi)^2 (r-a)^2} \int_0^{\infty} \frac{z}{(1+z^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(4\pi)^2 (r-a)^2}$$

Portanto, as flutuações do campo escalar perto da fronteira virão dadas pela expressão acima somada ao primeiro de (3.40):

$$\langle \phi^2 \rangle^{(S=0)}(r) \simeq \frac{1}{48\pi^2 r^2} (\alpha^{-2} - 1) - \frac{1}{(4\pi)^2 (r-a)^2}. \tag{3.46}$$

Entretanto, note que se estamos próximos à fronteira o segundo termo é o dominante, visto que o primeiro não possui nenhuma divergência para  $r \rightarrow a$ . Assim, a flutuação do campo no estado de vácuo perto da fronteira cilíndrica

$$\langle \phi^2 \rangle^{(S=0)}(r) \simeq -\frac{1}{(4\pi)^2 (r-a)^2} \tag{3.47}$$

não enxerga a mudança na geometria global do espaço-tempo, ou seja, próximo a fronteira as flutuações se comportam exatamente como as flutuações próximas a uma fronteira plana [13, eq. 5.12].

## 4 Conclusão

Neste trabalho investigamos o comportamento das flutuações do vácuo de um campo escalar sujeito a uma condição de contorno cilíndrica de Dirichlet no espaço-tempo de uma corda cósmica girante. Como principal resultado, obtivemos a função de Wightman renormalizada para esse sistema físico [ver Eq. (3.28)], a partir da qual foram calculadas as flutuações do campo [Eq. (3.37)]. Verificamos que  $\langle \phi^2 \rangle$  apresenta duas contribuições distintas: uma proveniente exclusivamente da presença da corda cósmica girante e outra induzida pela condição de contorno cilíndrica.

Entretanto, como o primeiro termo é responsável pelas patologias associadas à quantização do campo escalar — decorrentes do uso inadequado das ferramentas da teoria quântica de campos em espaços não globalmente hiperbólicos [6] — torna-se necessário analisar com mais cuidado o segundo termo, oriundo da fronteira, e investigar se as divergências do primeiro poderiam ser, de algum modo, “compensadas” por este. Assim, deixamos como conjectura a ser explorada futuramente a seguinte questão: impor uma condição de Dirichlet que isola a região acausal seria suficiente para restaurar a causalidade na corda cósmica girante?

Como verificação de consistência, consideramos o limite de ausência de rotação, no qual recuperamos resultados conhecidos na literatura: a contribuição associada à própria corda cósmica [21, 31] e aquela devida à condição de contorno [3]. Além disso, mostramos que, nesse mesmo limite, a expressão (3.37) reproduz o resultado clássico da teoria quântica de campos para as flutuações próximas a um plano com condição de Dirichlet [13], quando avaliada no regime em que  $(r - a)$  é suficientemente pequeno.

A questão que permanece, portanto, é se a condição de Dirichlet é realmente capaz de eliminar as divergências associadas ao primeiro termo de (3.37). Um passo natural para trabalhos futuros consiste em examinar numericamente essa expressão, a fim de verificar se a imposição da condição de contorno resolve, de fato, o problema causal inicial. Caso a resposta seja positiva, a função de Wightman renormalizada obtida aqui poderá ser empregada para investigar, via *backreaction* [10], os mecanismos semiclássicos de resposta da geometria ao campo quântico. Isso abriria caminho para testar a conjectura da proteção cronológica de Hawking [17], analisando o comportamento das flutuações do vácuo na vizinhança da fronteira onde surgem curvas do tipo-tempo fechadas.

Por outro lado, caso a resposta seja negativa, poderemos buscar condições de contorno fisicamente mais adequadas e, ainda assim, estudar as implicações da conjectura de Hawking. Contudo, se mesmo essas condições adicionais não forem suficientes para isolar a região causalmente patológica, talvez seja necessário adotar a posição sugerida

por [32]: “... perhaps one should reject as physically unrealistic a spinning string or at least the portion of its spacetime  $r < S$  that contains closed time-like curves”, descartando, portanto, tal solução como fisicamente admissível.

## Apêndices

# APÊNDICE A – Produto Interno de Kein-Gordon

O produto interno de Klein-Gordon vem dado por [4]

$$(\phi_1, \phi_2) \doteq -i \int_{\Sigma} d\Sigma n_{\mu} (\phi_1 \nabla^{\mu} \phi_2^* - \phi_2^* \nabla^{\mu} \phi_1),$$

onde  $\Sigma$  é uma superfície do tipo-espaço chamada de superfície de Cauchy,  $n^{\mu}$  o quadrivetor unitário perpendicular a  $\Sigma$  apontado na direção futura por definição e  $\phi_1(x)$ ,  $\phi_2(x)$  duas soluções da equação de Klein-Gordon.

Precisamos que um produto interno possua algumas propriedades, entre elas que seja positivo definido e que este não dependa do tempo. Para o último requerimento, o equivalente é que o produto interno não dependa da escolha da superfície  $\Sigma$ .

Para motivar a definição do produto interno apresentado acima, tome a definição da corrente de Noether [30]

$$J^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_{\mu} \phi^{\beta})} \frac{\delta \phi^{\beta}}{\delta \epsilon}, \quad (\text{A.1})$$

onde  $\phi^{\beta}$  denota o campo em questão e  $\delta \phi^{\beta} / \delta \epsilon$  a variação com respeito a um parâmetro infinitesimal no campo levando em conta a sua simetria.

Considerando um campo escalar complexo descrito pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = \nabla_{\mu} \phi \nabla^{\mu} \phi^* - m^2 \phi \phi^* \quad (\text{A.2})$$

e notando que tal teoria possui a seguinte simetria para  $\alpha \in \mathbb{R}$ :  $\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi$  e  $\phi^* \rightarrow e^{-i\alpha} \phi^*$ ; implicando em  $\delta \phi / \delta \alpha = i\phi$  e  $\delta \phi^* / \delta \alpha = -i\phi^*$ , encontramos que a corrente de Noether definida por (A.1) será

$$J^{\mu} = i(\phi^* \nabla^{\mu} \phi - \phi \nabla^{\mu} \phi^*).$$

Note que

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} J^{\mu} &= i(\nabla_{\mu}(\phi^* \nabla^{\mu} \phi) - \nabla_{\mu}(\phi \nabla^{\mu} \phi^*)) \\ &= i((\nabla_{\mu} \phi^*) \nabla^{\mu} \phi + \phi^* \nabla_{\mu} \nabla^{\mu} \phi - (\nabla_{\mu} \phi) \nabla^{\mu} \phi^* - \phi \nabla_{\mu} \nabla^{\mu} \phi^*) \\ &= i((\nabla_{\mu} \phi^*) \nabla^{\mu} \phi - (\nabla_{\mu} \phi) \nabla^{\mu} \phi^*) + i(\phi^* \square^2 \phi - \phi \square^2 \phi^*) \\ &= i(0) + i(\phi^* (m^2 \phi) - \phi (m^2 \phi^*)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, vemos que  $J^{\mu}$  se conserva. Mesmo tendo considerado um campo escalar complexo para o cálculo, o resultado deve ser o mesmo para qualquer par de soluções da equação

de Klein-Gordon, pois a conservação foi consequência da simetria e não da solução em particular.

Suponha que integremos  $\nabla_\mu J^\mu$  entre duas superfícies  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  infinitamente longas e que  $n^\mu$  seja um vetor apontado na direção futura e ortonormal às superfícies. Lançando mão do teorema de Stokes vemos que

$$\int_{\Sigma} d\Sigma \nabla_\mu J^\mu \Big|_{\Sigma=\Sigma_1}^{\Sigma=\Sigma_2} = \int_{\partial\Sigma} d\Sigma n_\mu J^\mu \Big|_{\Sigma=\Sigma_1}^{\Sigma=\Sigma_2} = \int_{\Sigma_2} d\Sigma n_\mu^{(2)} J^\mu + \int_{\Sigma_1} d\Sigma n_\mu^{(1)} J^\mu = 0. \quad (\text{A.3})$$

Mas como foi definido que  $n_\mu$  aponta para o futuro e a superfície  $\Sigma_1$  está no passado de  $\Sigma_2$ , então  $n_\mu^{(1)} = -n_\mu^{(2)}$ , onde os índices 1 e 2 significam que os vetores normais são ortogonais às respectivas superfícies. Com isto e levando em conta que a corrente  $J^\mu$  vai a zero quando avaliada no infinito, conclui-se que

$$\int_{\Sigma_1} d\Sigma n_\mu J^\mu = \int_{\Sigma_2} d\Sigma n_\mu J^\mu \quad (\text{A.4})$$

não depende da superfície de Cauchy escolhida e, portanto, independe do instante de tempo em que é calculada. Isso nos motiva a definir um produto interno com a forma acima, pois garante que estados ortogonais inicialmente permaneçam assim durante a evolução temporal.

O elemento de superfície  $d\Sigma$  em coordenadas possui a seguinte forma

$$d\Sigma = d^3x \sqrt{|h|}, \quad (\text{A.5})$$

onde  $h$  é o determinante da métrica induzida na superfície de Cauchy e dada por

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu. \quad (\text{A.6})$$

Levando em conta toda a construção acima e as propriedades que um produto interno deve possuir, somos levados a definir o produto interno de Klein-Gordon por

$$(\phi_1, \phi_2) = -i \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{|h|} n_\mu (\phi_1 \nabla^\mu \phi_2^* - \phi_2^* \nabla^\mu \phi_1). \quad (\text{A.7})$$

De forma que para cada geometria devemos ter um vetor normal à  $\Sigma$  distinto, e isso define totalmente o produto interno para o campo escalar.

A geometria de interesse neste trabalho é a de uma corda cósmica girante cujo elemento de linha é dado por

$$ds^2 = (d\tau + Sd\phi)^2 - dr^2 - \alpha^2 r^2 d\phi^2 - dz^2. \quad (\text{A.8})$$

Para calcular as autofunções em (3.4) usamos coordenadas localmente planas, ou seja, o elemento de linha tem a forma do elemento de linha de Minkowski, mesmo que as identificações entre as coordenadas não sejam. Todavia, para calcularmos o vetor normal à  $\Sigma$  devemos usar as coordenadas globais, isto é  $(\tau, r, \phi, z)$ .

Para tal, lembre-se que o vetor normal possui duas propriedades: a de ser ortogonal a superfície de Cauchy e que este possua norma igual a 1. Sendo assim, para determiná-lo vamos usar estas duas propriedades dadas em termos da métrica. Para o elemento de linha (A.8) temos que a métrica é tal que

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & S & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ S & 0 & -(\alpha^2 r^2 - S^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

Com isso, o vetor normal é determinado por

$$g(n, n) = 1 \quad ; \quad g(n, \partial_i) = 0,$$

sendo que  $g$  é o tensor métrico,  $n$  o vetor normal com coordenadas  $n^\mu = (n^\tau, n^r, n^\phi, n^z)$  e  $\partial_i$  o  $i$ -ésimo vetor de base da superfície  $\Sigma$ .

Usando a métrica acima e as propriedades encontramos que

$$n^\mu = \frac{\sqrt{\alpha^2 r^2 - S^2}}{\alpha r} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{S}{\alpha r \sqrt{\alpha^2 r^2 - S^2}} \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (\text{A.10})$$

Usando a métrica podemos descer o índice do vetor contravariante, encontrando que o vetor covariante é

$$n_\mu = \frac{\alpha r}{\sqrt{\alpha^2 r^2 - S^2}} \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (\text{A.11})$$

Assim, podemos usar (A.11) e (A.9) em (A.6) para concluir que a métrica induzida na superfície  $\Sigma$  vem dada por

$$(h_{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\alpha^2 r^2}{\alpha^2 r^2 - S^2} & 0 & S & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ S & 0 & -(\alpha^2 r^2 - S^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

Com isso, temos que o elemento de linha (A.8) pode ser reescrito em termos do projetor  $h_{\mu\nu}$  como sendo

$$ds^2 = d\tau^2 + 2Sd\tau d\phi + h_{ij}dx^i dx^j,$$

onde  $h_{ij}$  é a parte espacial do projetor acima.

Agora que definimos as quantidades geométricas nas coordenadas globais podemos fazer uma mudança de coordenadas usual usando (3.6) para mudar das coordenadas físicas  $(\tau, r, \phi, z)$  para as coordenadas planas  $(t, r, \varphi, z)$ . Desta forma, o vetor normal à superfície de Cauchy  $\Sigma$  no sistema de coordenadas planas é dado por

$$n^{\bar{\mu}} = \frac{\partial x^{\bar{\mu}}}{\partial x^\mu} n^\mu = \left( \frac{\alpha r}{\sqrt{\alpha^2 r^2 - S^2}}, 0, \frac{S}{\sqrt{\alpha^2 r^2 - S^2}}, 0 \right), \quad (\text{A.13})$$



onde  $x^{\bar{\mu}}$  denota as coordenadas planas definidas em (3.6). Adicionalmente, neste sistema de coordenadas planas a parte espacial do projetor (A.12) possui determinante dado por  $|h| = r^2$ .

Portanto, levando em conta as equações (A.7) e (A.13) encontramos que o produto interno de Klein-Gordon adequado para a geometria examinada vem dado por

$$(\phi_\sigma, \phi_{\sigma'}) = -i \int_\Sigma d^3x r \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - (S/\alpha r)^2}} \phi_\sigma \overleftrightarrow{\partial}_t \phi_{\sigma'}^* + \frac{S}{\alpha r^2 \sqrt{1 - (S/\alpha r)^2}} \phi_\sigma \overleftrightarrow{\partial}_\varphi \phi_{\sigma'}^* \right], \quad (\text{A.14})$$

onde

$$\phi_\sigma \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi_{\sigma'}^* \doteq \phi_\sigma \partial_\mu \phi_{\sigma'}^* - \phi_{\sigma'}^* \partial_\mu \phi_\sigma.$$

## APÊNDICE B – Parte Radial da Constante de Normalização

Para calcularmos a constante de normalização proveniente da integração em  $r$  de (??) vamos, primeiramente, lançar mão das coordenadas globais (A.8). Com isso, basta usar (A.10) em (A.7) usando que o determinante induzido na superfície  $\Sigma$  é dado por  $h = \alpha^2 r^2 - S^2$  e efetuar a mudança de coordenadas (3.6) nas autofunções (3.11) para obter

$$\phi_{\nu kn}(x) = \bar{\beta} \left[ J_{\left|\frac{n+\omega S}{\alpha}\right|}(\nu r) Y_{\left|\frac{n+\omega S}{\alpha}\right|}(\nu a) - J_{\left|\frac{n+\omega S}{\alpha}\right|}(\nu a) Y_{\left|\frac{n+\omega S}{\alpha}\right|}(\nu r) \right] e^{in\phi} e^{-i\omega t} e^{ikz}, \quad (\text{B.1})$$

onde  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ ,  $\nu \in \mathbb{R}_+$  e  $\omega = \sqrt{\nu^2 + k^2}$ .

Usando (A.10) em (A.7), juntamente com  $h = \alpha^2 r^2 - S^2$  para a região  $r > S/\alpha$ , encontramos que a condição de normalização será

$$\begin{aligned} (\phi_\sigma(x), \phi_{\sigma'}(x)) &= -i \int_{\Sigma} d^3x \left[ \alpha r(\omega + \omega') - \frac{1}{\alpha r} (S(n + n') + S^2(\omega + \omega')) \right] \phi_\sigma(x) \phi_{\sigma'}^*(x) \\ &= |\bar{\beta}|^2 \int_0^{2\pi} d\phi e^{i\Delta n \phi} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{i\Delta k z} \\ &\times \int_a^{\infty} dr \left[ \alpha r(\omega + \omega') - \frac{1}{\alpha r} (S(n + n') + S^2(\omega + \omega')) \right] g_{\left|\frac{n+S\omega}{\alpha}\right|}(\nu r, \nu a) g_{\left|\frac{n'+S\omega'}{\alpha}\right|}(\nu' r, \nu' a) \\ &= \delta_{nn'} \delta(k - k') \delta(\nu - \nu'), \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

onde definimos

$$g_\nu(u, v) \doteq [J_\nu(u) Y_\nu(v) - J_\nu(v) Y_\nu(u)]. \quad (\text{B.3})$$

As integrações em  $\phi$  e  $z$  são triviais e resultam em  $(2\pi)^2 \delta_{nn'} \delta(k - k')$  e por fim devemos calcular somente

$$\int_a^{\infty} dr \left[ \alpha r(\omega + \omega') - \frac{1}{\alpha r} (2nS + S^2(\omega + \omega')) \right] g_{\left|\frac{n+S\omega}{\alpha}\right|}(\nu r, \nu a) g_{\left|\frac{n+S\omega'}{\alpha}\right|}(\nu' r, \nu' a). \quad (\text{B.4})$$

Antes de continuarmos, vamos revisitar alguns aspectos básicos da teoria de Sturm-Liouville. Começemos por definir um operador diferencial tal que

$$L[y](x) \doteq \sum_{k=0}^n P_k(x) y^{(k)}(x). \quad (\text{B.5})$$

Seja

$$v(x) L[u](x) = v(x) \sum_{k=0}^n P_k(x) u^{(k)}(x). \quad (\text{B.6})$$

Trabalhando somente com o argumento dentro da série, podemos escrever

$$\begin{aligned} P_k(x)u^{(k)}(x) &= \left( v(x)P_k(x)u^{(k-1)}(x) \right)' - (v(x)P_k(x))u^{(k-1)}(x) \\ &= \left( v(x)P_k(x)u^{(k-1)}(x) \right)' - \left\{ \left[ (v(x)P_k(x))' u^{(k-2)}(x) \right]' - [v(x)P_k(x)]'' u^{(k-2)}(x) \right\} \\ &= [v(x)P_k(x)]^{(2)} u^{(k-2)}(x) + \left[ v(x)P_k(x)u^{(k-1)}(x) \right]' - \left[ (v(x)P_k(x))' u^{(k-2)}(x) \right]', \end{aligned}$$

onde o símbolo  $y' \doteq dy/dx$  e  $y^{(n)} \doteq d^n y/dx^n$ .

Continuando com o raciocínio de usar a regra do produto para os termos que não são a derivada total de produto de funções, ou seja, os termos que não são da forma  $(f(x)g(x))'$ , encontramos que após aplicarmos o raciocínio  $k$  vezes podemos escrever

$$v(x)L[u](x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k [v(x)P_k(x)]^{(k)} u(x) + \frac{d}{dx} \left\{ \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j [v(x)P_k(x)u^{(k-1-j)}] \right\}.$$

Definindo

$$L^\dagger[v](x) \doteq \sum_{k=0}^n (-1)^k [v(x)P_k(x)]^{(k)} \quad (\text{B.7})$$

e

$$Q[u, v](x) \doteq \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j [v(x)P_k(x)u^{(k-1-j)}], \quad (\text{B.8})$$

vemos que

$$v(x)L[u](x) - u(x)L^\dagger[v](x) = \frac{d}{dx} Q[u, v](x). \quad (\text{B.9})$$

A equação diferencial  $L^\dagger[y](x) = 0$  é chamada de equação diferencial adjunta de  $L[y](x) = 0$ . Chamamos uma equação diferencial de auto-adjunto se  $L[y](x) = L^\dagger[y](x)$ .

Como a relação de ortogonalidade entre as funções de Bessel vêm dessas funções serem solução da equação diferencial de Bessel, vamos supor que o operador (B.5) seja de segunda ordem e escrever

$$L[y](x) = P_2(x)y''(x) + P_1(x)y'(x) + P_0(x)y(x) = 0 \quad (\text{B.10})$$

e sua adjunta, considerando (B.7), se dá por

$$\begin{aligned} L^\dagger[y](x) &= [P_2(x)y(x)]'' - [P_1(x)y(x)]' + [P_0(x)y(x)] = 0 \\ &= P_2(x)y''(x) + (2P_2'(x) - P_1(x))y'(x) + (P_2''(x) - P_1'(x) + P_0(x))y(x) = 0. \end{aligned}$$

Para que a equação diferencial proposta seja auto-adjunta a condição necessária será que

$$\begin{cases} 2P_2'(x) - P_1(x) = P_1(x) \\ P_2''(x) - P_1'(x) + P_0(x) = P_0(x) \end{cases}. \quad (\text{B.11})$$

Isto é, para  $P_2'(x) = P_1(x)$ .

Desta forma, veja que (B.10) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} [P_2(x)y'(x)]' - P_2'(x)y'(x) + P_1(x)y'(x) + P_0(x)y(x) &= 0 \\ [P_2(x)y'(x)]' - \underline{P_2'(x)y'(x)} + \underline{P_1(x)y'(x)} + P_0(x)y(x) &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, uma equação diferencial auto-adjunta de segunda ordem pode sempre ser escrita como

$$[p(x)y'(x)]' + q(x)y(x) = 0, \quad (\text{B.12})$$

de tal forma que o operador em (B.8) vem dado por

$$Q[u, v](x) = p(x) [v(x)u'(x) - u(x)v'(x)]. \quad (\text{B.13})$$

Se a equação diferencial é auto-adjunta temos a conhecida identidade de Lagrange [35], análoga à equação (B.9). Para o caso de uma equação diferencial de segunda ordem auto-adjunta, como (B.10), a identidade de Lagrange se dá por

$$v(x)L[u](x) - u(x)L[v](x) = \frac{d}{dx} (p(x) [v(x)u'(x) - u(x)v'(x)]), \quad (\text{B.14})$$

para  $u(x), v(x) \in C^2$ .

Finalmente, estamos em condição de definir um problema de Sturm-Liouville regular. Seja um operador diferencial tal que possa ser escrito como

$$L[y](x) = [p(x)y'(x)]' + q(x)y(x). \quad (\text{B.15})$$

Sendo assim, definimos um problema de Sturm-Liouville por

$$\begin{cases} L[y](x) = -\lambda\rho(x)y(x) & x \in (a, b) \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}, \quad (\text{B.16})$$

onde  $\alpha_i$  e  $\beta_i$ ,  $i = 1, 2$ , seja constantes.

Um problema de Sturm-Liouville regular é definido como sendo tal que

$$\begin{cases} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0 \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0 \\ p(x), p'(x), q(x), \rho(x) \text{ contínuas em } [a, b] \\ p(x), \rho(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b] \end{cases}. \quad (\text{B.17})$$

Um problema de Sturm-Liouville singular é aquele em que  $p(x) > 0$  e/ou  $\rho(x) > 0$  não vale para um dos extremos de  $x$ , ou os dois extremos.

As soluções não triviais de (B.16) são chamadas de autofunções enquanto  $\lambda$  são os autovalores e o conjunto dos autovalores constituem o espectro do problema de Sturm-Liouville. Existem outros conceitos e propriedades importantes acerca do problema de

Sturm-Liouville como, por exemplo, quando o problema de Sturm-Liouville é regular isso implica que os autovalores são reais. Veja [35] para os detalhes.

Voltemos agora para o problema do trabalho. A solução de (3.9) é uma combinação linear das funções de Bessel de primeira e segunda espécie. Tais soluções respeitam a seguinte equação diferencial:

$$r^2 \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + r \frac{dR(r)}{dr} + (\nu^2 r^2 - \gamma^2) R(r) = 0. \quad (\text{B.18})$$

Tal equação diferencial pode ser posta em sua forma auto-adjunta dividindo-a por  $r$  e rearranjando os termo de modo a escrever como

$$L[R](r) = \frac{d}{dr} \left[ r \frac{dR(r)}{dr} \right] - \frac{\gamma^2}{r} R(r) = -\nu^2 r R(r) \quad (\text{B.19})$$

com o adicional da condição de contorno  $R(r = a) = 0$  imposta para o problema físico aqui considerado ser bem posto. Veja que (B.19) constitui um problema de Sturm-Liouville regular, pois os requisitos (B.17) são cumpridos.

Sendo um problema de Sturm-Liouville regular, podemos usar o que foi desenvolvido acima para encontrar uma relação de ortogonalidade entre duas soluções de (B.19). A solução, já com a condição de contorno imposta, foi apresentada em (3.11), de forma que somente nos interessa a contribuição que depende da coordenada radial para resolvermos completamente a constante  $\bar{\beta}$  na equação (B.2):

$$g_{\left| \frac{n+\omega S}{\alpha} \right|}(\nu r, \nu a) \doteq \left[ J_{\left| \frac{n+\omega S}{\alpha} \right|}(\nu r) Y_{\left| \frac{n+\omega S}{\alpha} \right|}(\nu a) - J_{\left| \frac{n+\omega S}{\alpha} \right|}(\nu a) Y_{\left| \frac{n+\omega S}{\alpha} \right|}(\nu r) \right]. \quad (\text{B.20})$$

Para uma relação de ortogonalidade precisamos de duas soluções que respeitem (B.18). Tais soluções são dadas por

$$u(r) \doteq g_{\gamma}(\nu r, \nu a) \quad v(r) \doteq g_{\gamma'}(\nu' r, \nu' a), \quad (\text{B.21})$$

com

$$\gamma \doteq \frac{n + S\omega}{\alpha} \quad (\text{B.22})$$

Ambas soluções respeitam

$$\begin{cases} \frac{d}{dr} \left[ r \frac{du(r)}{dr} \right] + \left[ \frac{\gamma^2}{r} - \nu^2 r \right] u(r) = 0 \\ \frac{d}{dr} \left[ r \frac{dv(r)}{dr} \right] + \left[ \frac{\gamma'^2}{r} - \nu'^2 r \right] v(r) = 0 \end{cases}. \quad (\text{B.23})$$

Multiplicando a primeira equação diferencial por  $v(r)$ , a segunda por  $u(r)$  e subtraindo a primeira da segunda, encontramos

$$\left[ (\nu^2 - \nu'^2) r - \frac{1}{r} (\gamma^2 - \gamma'^2) \right] u(r) v(r) = \frac{d}{dr} \left[ r \left( u(r) \frac{dv(r)}{dr} - \frac{du(r)}{dr} v(r) \right) \right]. \quad (\text{B.24})$$

Pela definição de  $\gamma$  em (B.22) e as deltas encontradas ao integramos em  $\phi$  e  $z$  a equação (B.2), discutida brevemente no começo deste apêndice, nos possibilita escrever

$$\gamma^2 - \gamma'^2 = \left( \frac{n + S\omega}{\alpha} \right)^2 - \left( \frac{n + S\omega'}{\alpha} \right)^2 = \frac{(\omega - \omega')}{\alpha^2} [S^2(\omega + \omega') + 2nS] \quad (\text{B.25})$$

e utilizando que  $\omega^2 = \nu^2 + k^2$ , equação (3.12), encontra-se

$$\nu^2 - \nu'^2 = (\omega + \omega')(\omega - \omega'). \quad (\text{B.26})$$

Assim, a equação (B.24) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} & \left[ (\omega + \omega')(\omega - \omega')r - \frac{(\omega - \omega')}{\alpha^2 r} (S^2(\omega + \omega') + 2nS) \right] u(r)v(r) = \\ & = \frac{d}{dr} \left[ r \left( u(r) \frac{dv(r)}{dr} - \frac{du(r)}{dr} v(r) \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Agora, multiplique ambos os lados da equação acima por

$$\frac{\alpha}{(\omega - \omega')}$$

para encontrarmos

$$\left[ \alpha r(\omega + \omega') - \frac{1}{\alpha r} (S^2(\omega + \omega') + 2nS) \right] u(r)v(r) = \frac{\alpha}{(\omega - \omega')} \frac{d}{dr} \left[ r \left( u(r) \frac{dv(r)}{dr} - \frac{du(r)}{dr} v(r) \right) \right].$$

Por fim, integrando ambos os lados no domínio  $r \in (a, \infty)$ , usando o teorema fundamental do cálculo no lado direito e o fato de que as funções  $u(r)$  e  $v(r)$  se anulam em  $r = a$  pela condição de contorno de Dirichlet, obtemos finalmente que a relação de ortogonalidade virá dada por

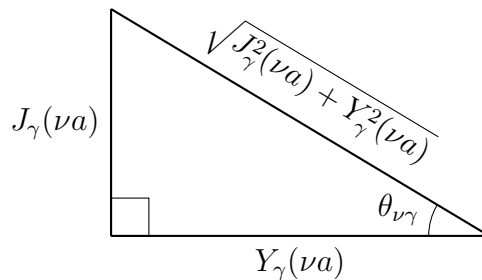
$$\begin{aligned} & \int_a^\infty dr \left[ \alpha r(\omega + \omega') - \frac{1}{\alpha r} (2nS + S^2(\omega + \omega')) \right] u(r)v(r) = \\ & = \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\alpha}{(\omega - \omega')} \left[ r \left( u(r) \frac{dv(r)}{dr} - \frac{du(r)}{dr} v(r) \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

Portanto, se resolvermos o limite ao lado direito teremos a relação de ortogonalidade entre duas soluções da equação de Klein-Gordon para uma condição de contorno de Dirichlet no espaço de fundo de uma corda cósmica girante, equação (3.11).

Antes de resolver o limite, vamos propor uma mudança em

$$g_\gamma(\nu r, \nu a) = [J_\gamma(\nu r)Y_\gamma(\nu a) - J_\gamma(\nu a)Y_\gamma(\nu r)]$$

simplesmente por conveniência matemática seguindo o esquema geométrico



Veja que podemos reescrever

$$\cos(\theta_{\nu\gamma}) = \frac{Y_\gamma(\nu a)}{\sqrt{J_\gamma^2(\nu a) + Y_\gamma^2(\nu a)}} \quad \sin(\theta_{\nu\gamma}) = \frac{J_\gamma(\nu a)}{\sqrt{J_\gamma^2(\nu a) + Y_\gamma^2(\nu a)}} \quad (\text{B.29})$$

e então o ângulo  $\theta_{\nu\gamma}$  vem dado por

$$\tan(\theta_{\nu\gamma}) = \frac{Y_\gamma(\nu a)}{J_\gamma(\nu a)}. \quad (\text{B.30})$$

Desta forma, podemos escrever

$$g_\gamma(\nu r, \nu a) = \sqrt{J_\gamma^2(\nu a) + Y_\gamma^2(\nu a)} [\cos(\theta_{\nu\gamma}) J_\gamma(\nu r) - \sin(\theta_{\nu\gamma}) Y_\gamma(\nu r)].$$

Como estamos interessados em resolver um limite quando o argumento de uma combinação de funções de Bessel está tendendo ao infinito, podemos escrever estas funções assintoticamente como sendo [20]

$$\begin{cases} J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}(1 + 2\nu)\right) \\ Y_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}(1 + 2\nu)\right) \end{cases}. \quad (\text{B.31})$$

Desta forma, assintoticamente temos que

$$g_\gamma(\nu r, \nu a) = \beta_{\nu\gamma} \sqrt{\frac{2}{\pi \nu r}} \cos(\Omega_{\nu\gamma} + \theta_{\nu\gamma}), \quad (\text{B.32})$$

de forma que foi definido

$$\Omega_{\nu\gamma} \doteq \nu r - \frac{\pi}{4}(1 + 2\gamma) \quad (\text{B.33})$$

e

$$\beta_{\nu\gamma} \doteq \sqrt{J_\gamma^2(\nu a) + Y_\gamma^2(\nu a)}. \quad (\text{B.34})$$

Ainda, a derivada da função  $g_\gamma(\nu r, \nu a)$  vem dada por

$$\frac{d}{dr} g_\gamma(\nu r, \nu a) = \left[ -\frac{\beta_{\nu\gamma}}{2\sqrt{\nu} r^{3/2}} \cos(\Omega_{\nu\gamma} + \theta_{\nu\gamma}) - \frac{\beta_{\nu\gamma} \nu}{\sqrt{\gamma} r} \sin(\Omega_{\nu\gamma} + \theta_{\nu\gamma}) \right]. \quad (\text{B.35})$$

Usando (B.35) e (B.32) no termo dentro dos colchetes no lado direito de (B.28) encontramos

$$\begin{aligned} \left( u(r) \frac{dv(r)}{dr} - \frac{du(r)}{dr} v(r) \right) &= \frac{\beta_{\nu\gamma} \beta_{\nu'\gamma'}}{r \sqrt{\nu \nu'}} \\ &\times [\nu \cos(\Omega_{\nu'\gamma'} + \theta_{\nu'\gamma'}) \sin(\Omega_{\nu\gamma} + \theta_{\nu\gamma}) - \nu' \cos(\Omega_{\nu\gamma} + \theta_{\nu\gamma}) \sin(\Omega_{\nu'\gamma'} + \theta_{\nu'\gamma'})]. \end{aligned}$$

Usando a identidade

$$\begin{aligned} &[\nu \cos(\Omega_{\nu'\gamma'} + \theta_{\nu'\gamma'}) \sin(\Omega_{\nu\gamma} + \theta_{\nu\gamma}) - \nu' \cos(\Omega_{\nu\gamma} + \theta_{\nu\gamma}) \sin(\Omega_{\nu'\gamma'} + \theta_{\nu'\gamma'})] = \\ &= \frac{1}{2} [(\nu + \nu') \sin((\Omega_{\nu\gamma} - \Omega_{\nu'\gamma'}) + (\theta_{\nu\gamma} - \theta_{\nu'\gamma'})) + (\nu - \nu') \sin((\Omega_{\nu'\gamma'} + \Omega_{\nu\gamma}) + (\theta_{\nu\gamma} + \theta_{\nu'\gamma'}))] \end{aligned}$$

e notando que

$$\omega - \omega' = \frac{\nu^2 - \nu'^2}{\omega + \omega'} \quad (\text{B.36})$$

podemos reescrever (B.28) como sendo

$$\begin{aligned} I &\doteq \int_a^\infty dr \left[ \alpha r (\omega + \omega') - \frac{1}{\alpha r} (2nS + S^2(\omega + \omega')) \right] u(r)v(r) \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{(\omega + \omega')\alpha}{\pi} \frac{\sqrt{J_\gamma^2(\nu a) + Y_\gamma^2(\nu a)} \sqrt{J_{\gamma'}^2(\nu' a) + Y_{\gamma'}^2(\nu' a)}}{\sqrt{\nu \nu'}} \\ &\times \left[ \frac{\sin((\Omega_{\nu\gamma} - \Omega_{\nu'\gamma'}) + (\theta_{\nu\gamma} - \theta_{\nu'\gamma'}))}{\nu - \nu'} + \frac{\sin((\Omega_{\nu\gamma} + \Omega_{\nu'\gamma'}) + (\theta_{\nu\gamma} + \theta_{\nu'\gamma'}))}{\nu + \nu'} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

Mas, veja que usando (B.33) encontramos

$$\begin{aligned} \Omega_{\nu\gamma} - \Omega_{\nu'\gamma'} &= (\nu - \nu')r - 2(\gamma - \gamma') \doteq (\nu - \nu')r - \Delta_{\gamma\gamma'} \\ \Omega_{\nu\gamma} + \Omega_{\nu'\gamma'} &= (\nu - \nu')r - 2(\gamma - \gamma') - \frac{\pi}{2} \doteq (\nu - \nu')r - \Delta_{\gamma\gamma'} - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Assim, vemos que a integração que nos resulta na relação de ortogonalidade é dada pelo seguinte limite

$$\begin{aligned} I &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{(\omega + \omega')\alpha}{\pi} \frac{\sqrt{J_\gamma^2(\nu a) + Y_\gamma^2(\nu a)} \sqrt{J_{\gamma'}^2(\nu' a) + Y_{\gamma'}^2(\nu' a)}}{\sqrt{\nu \nu'}} \\ &\times \left\{ \frac{\sin[(\nu - \nu')r + \bar{\delta}]}{(\nu - \nu')} + \frac{\sin[(\nu + \nu')r + \tilde{\delta} - \pi/2]}{(\nu + \nu')} \right\}, \end{aligned}$$

onde definimos

$$\bar{\delta} \doteq -\Delta_{\gamma\gamma'} + (\theta_{\nu\gamma} - \theta_{\nu'\gamma'}) \quad \tilde{\delta} \doteq -\Delta_{\gamma\gamma'} + (\theta_{\nu\gamma} + \theta_{\nu'\gamma'}). \quad (\text{B.38})$$

Veja que o primeiro termo dentro das chaves diverge para  $\nu = \nu'$ , enquanto o segundo não tem esta divergência pois  $\nu, \nu' \in \mathbb{R}_+$ . Abrindo o primeiro termo dentro das chaves usando a relação entre a soma de arcos e lançando mão da seguinte representação da delta de Dirac [1]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sin(\kappa r)}{\kappa} = \pi \delta(\kappa) \quad (\text{B.39})$$

vamos encontrar

$$\begin{aligned} L &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sin[(\nu - \nu')r + \bar{\delta}]}{(\nu - \nu')} + \frac{\sin[(\nu + \nu')r + \tilde{\delta} - \pi/2]}{(\nu + \nu')} \right\} \\ &= \left\{ \cos(\bar{\delta})\pi\delta(\nu - \nu') + \sin(\bar{\delta}) \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\cos[(\nu - \nu')r]}{(\nu - \nu')} - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\cos[(\nu + \nu')r + \tilde{\delta}]}{(\nu + \nu')} \right\}. \end{aligned}$$

Usando o lema de Riemann-Lebesgue [34, eq. 1.2] é possível mostrar que os limites nos cossenos vão a zero no sentido de distribuições. Portanto, notando que ao usarmos



que a delta de Dirac avalia  $\nu = \nu'$  isso implica em  $\bar{\delta} = 0$  e com isso tudo somos capazes de mostrar que

$$\begin{aligned} \int_a^\infty dr \left[ \alpha r(\omega + \omega') - \frac{1}{\alpha r} (2nS + S^2(\omega + \omega')) \right] g_\gamma(\nu r, \nu a) g_{\gamma'}(\nu' r, \nu' a) = \\ = 2\omega\alpha \left[ \frac{Y_\gamma^2(\nu a) + J_\gamma^2(\nu a)}{\nu} \right] \delta(\nu - \nu'). \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

Desta forma, a condição de normalização apresentada no início deste apêndice, equação (B.2), será dada por

$$(\phi_\sigma, \phi_{\sigma'}) = |\bar{\beta}|^2 2(2\pi)^2 \omega\alpha \left[ \frac{Y_\gamma^2(\nu a) + J_\gamma^2(\nu a)}{\nu} \right] \delta(\nu - \nu') \delta(k - k') \delta_{nn'}. \quad (\text{B.41})$$

Ou ainda, para que  $(\phi_\sigma, \phi_{\sigma'}) = \delta(\nu - \nu') \delta(k - k') \delta_{nn'}$  a constante  $|\bar{\beta}|^2$  deve ser tal que

$$|\bar{\beta}|^2 = \frac{\nu}{2(2\pi)^2 \omega\alpha [Y_\gamma^2(\nu a) + J_\gamma^2(\nu a)]}. \quad (\text{B.42})$$

# Bibliografia

- [1] George B. Arfken, Hans J. Weber e Frank E. Harris. *Mathematical methods for physicists: a comprehensive guide*. London, UK: Academic Press, 2011.
- [2] João Barcelos-Neto. *Teoria de Campos e a Natureza: parte quântica*. Rio de Janeiro, Brazil: Livraria da Física, 2017.
- [3] E. R. Bezerra de Mello et al. “Vacuum polarization induced by a cylindrical boundary in the cosmic string spacetime”. Em: *Physical Review D* 74.2 (2006), p. 025017.
- [4] N. D. Birrell e P. C. W. Davies. *Quantum fields in curved space*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1984.
- [5] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu e Frank Laloe. *Quantum mechanics, volume 1: Basic Concepts, Tools, and Applications*. Vol. 1. New York, USA: Wiley-VHC, 1986.
- [6] V. A. De Lorenci e E. S. Moreira Jr. “Remarks on vacuum fluctuations around a spinning cosmic string”. Em: *Physical Review D* 63.2 (2000), p. 027501.
- [7] V. A. De Lorenci e E. S. Moreira Jr. “Classical self-forces in a space with a topological defect”. Em: *Physical Review D* 65.8 (2002), p. 085013.
- [8] V. A. De Lorenci e E. S. Moreira Jr. “Renormalized scalar propagator around a dispiration”. Em: *Physical Review D* 67.12 (2003), p. 124002.
- [9] V. A. De Lorenci e E. S. Moreira Jr. “Spinning strings, cosmic dislocations, and chronology protection”. Em: *Physical Review D* 70.4 (2004), p. 047502.
- [10] V. A. De Lorenci e E. S. Moreira Jr. “Semiclassical backreaction around a nearly spinning cosmic string”. Em: *Physics Letters B* 679.5 (2009), pp. 510–514.
- [11] S Deser, R Jackiw e G ’t Hooft. “Three-dimensional Einstein gravity: Dynamics of flat space”. Em: *Annals of Physics* 152.1 (1984), pp. 220–235. ISSN: 0003-4916. DOI: [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(84\)90085-X](https://doi.org/10.1016/0003-4916(84)90085-X). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/000349168490085X>.
- [12] John S. Dowker. “Vacuum averages for arbitrary spin around a cosmic string”. Em: *Physical Review D* 36.12 (1987), pp. 3742–3748.
- [13] Stephen A Fulling. *Aspects of quantum field theory in curved spacetime*. 17. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1989.
- [14] DV Gal’Tsov e PS Letelier. “Spinning strings and cosmic dislocations”. Em: *Physical Review D* 47.10 (1993), pp. 4273–4280.

- [15] Izrail Solomonovich Gradshteyn e Iosif Moiseevich Ryzhik. *Table of integrals, series, and products*. London, UK: Academic Press, 2014.
- [16] Walter Greiner e Joachim Reinhardt. *Field quantization*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [17] Stephen W. Hawking. “Chronology protection conjecture”. Em: *Physical Review D* 46.2 (1992), pp. 603–611.
- [18] Stephen W. Hawking e George F. R. Ellis. *The large scale structure of space-time*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2023.
- [19] Tom W. B. Kibble. “Some implications of a cosmological phase transition”. Em: *Physics Reports* 67.1 (1980), pp. 183–199.
- [20] Nikolaï Nikolaevich Lebedev, Richard A Silverman e DB Livhtenberg. *Special functions and their applications*. New York, USA: American Institute of Physics, 1965.
- [21] B. Linet. “Quantum field theory in the space-time of a cosmic string”. Em: *Physical Review D* 35.2 (1987), pp. 536–539.
- [22] G. E. A. Matsas. “Semiclassical gravitational effects in the spacetime of a rotating cosmic string”. Em: *Physical Review D* 42.8 (1990), pp. 2927–2934.
- [23] Pawel O. Mazur. “Spinning cosmic strings and quantization of energy”. Em: *Physical Review Letters* 57.8 (1986), pp. 929–932.
- [24] E. R. de Mello, H. F. Mota e W. Santos. “Cylindrical boundary induced current in the cosmic string spacetime”. Em: *arXiv preprint arXiv:2503.24281* (2025).
- [25] E. R. Bezerra de Mello, Valdir B. Bezerra e A. A. Saharian. “Electromagnetic Casimir densities induced by a conducting cylindrical shell in the cosmic string spacetime”. Em: *Physics Letters B* 645.2-3 (2007), pp. 245–254.
- [26] E. R. Bezerra de Mello e A. A. Saharian. “Topological Casimir effect in compactified cosmic string spacetime”. Em: *Classical and Quantum Gravity* 29.3 (2012), p. 035006.
- [27] E. S. Moreira Jr. “Massive quantum fields in a conical background”. Em: *Nuclear Physics B* 451.1-2 (1995), pp. 365–378.
- [28] Frank W. J. Olver. “The asymptotic expansion of Bessel functions of large order”. Em: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 247.930 (1954), pp. 328–368.
- [29] Roland A. Puntigam e Harald H. Soleng. “Volterra distortions, spinning strings, and cosmic defects”. Em: *Classical and Quantum Gravity* 14.5 (1997), pp. 1129–1142.
- [30] A. A. Saharian. *Quantum field theory in curved spacetime*. Online: LectQFTrev, 2020.

- [31] A. G. Smith. “Gravitational effects of an infinite straight cosmic string”. Em: *The Formation and Evolution of Cosmic Strings* (1990), pp. 263–272.
- [32] Ph. de Sousa Gerbert e R. Jackiw. “Classical and quantum scattering on a spinning cone”. Em: *Communications in Mathematical Physics* 124.2 (1989), pp. 229–260.
- [33] K. P. Tod. “Conical singularities and torsion”. Em: *Classical and Quantum Gravity* 11.5 (1994), pp. 1331–1340.
- [34] FJ Mendoza Torres et al. “Several aspects around the Riemann-Lebesgue lemma”. Em: *J. Adv. Res. Pure Math* 5 (2013), pp. 33–46.
- [35] Jayme Morandi Vaz e Edmundo Capelas de Oliveira. *Métodos Matemáticos*. Editora da UNICAMP, 2016.
- [36] Alexander Vilenkin. “Cosmic strings and domain walls”. Em: *Physics Reports* 121.5 (1985), pp. 263–315.
- [37] Alexander Vilenkin e E. P. S. Shellard. *Cosmic strings and other topological defects*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1994.
- [38] Robert M Wald. *Quantum field theory in curved spacetime and black hole thermodynamics*. Chicago, USA: University of Chicago Press, 1994.
- [39] Robert M. Wald. “Dynamics in nonglobally hyperbolic, static space-times”. Em: *Journal of Mathematical Physics* 21.12 (1980), pp. 2802–2805.
- [40] Robert M. Wald. *General relativity*. Chicago, USA: University of Chicago Press, 2010.
- [41] Robert L Zimmerman, Fredrick I Olness e CD Murray. “Mathematica for physics”. Em: *Classical and Quantum Gravity* 14.3 (1997), p. 827.