

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Sobre o teorema de Kruskal de que todo tensor $3 \times 3 \times 3$ tem
posto no máximo 5**

Lizzeth Paola Ibáñez Rojas

Orientador: Prof. Dr. Rick Antonio Richster

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

ITAJUBÁ, 1 DE JANEIRO DE 2026

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Sobre o teorema de Kruskal de que todo tensor $3 \times 3 \times 3$ tem posto no máximo 5

Lizzeth Paola Ibáñez Rojas

Orientador: Prof. Dr. Rick Antonio Richster

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Matemática

Área de Concentração: Geometria e Topologia

ITAJUBÁ – MG

1 DE JANEIRO DE 2026

Resumo

O objetivo principal desta dissertação é o estudo do artigo escrito por M. Bremner e Jiaxiong Hu “On Kruskal’s theorem that every $3 \times 3 \times 3$ array has rank at most 5”, onde o objetivo é mostrar que o posto de todo tensor $3 \times 3 \times 3$ é no máximo 5, um caso previamente estudado por Kruskal. Para chegar a isso, começaremos com definições e conceitos básicos de álgebra linear e multilinear, continuaremos com tensores e seu posto, mostrando propriedades necessárias para o desenvolvimento do assunto. Chegaremos ao estudo específico dos tensores $2 \times 2 \times 2$ e um algoritmo para encontrar seu posto, no final estudaremos os tensores $3 \times 3 \times 2$ e $3 \times 3 \times 3$ mostrando resultados e exemplos sobre eles para chegar à demonstração do teorema principal com tudo o que é necessário para entendê-lo.

Palavras-chave: Tensor, Posto, Classificação.

Abstract

The main objective of this dissertation is the study of the article written by M. Bremner and Jiaxiong Hu “On Kruskal’s theorem that every $3 \times 3 \times 3$ array has rank at most 5”, where the objective is to show that the rank of every tensor $3 \times 3 \times 3$ is at most 5, a case previously studied by Kruskal. To achieve this, we will start with basic definitions and concepts of linear and multilinear algebra, we will continue with tensors and their rank, showing properties necessary for the development of the subject. We will come to the specific study of the tensors $2 \times 2 \times 2$ and an algorithm to find their rank, at the end we will study the tensors $3 \times 3 \times 2$ and $3 \times 3 \times 3$ showing results and examples about them to reach the demonstration of the main theorem with everything that is necessary to understand it.

Keywords: Tensor, Rank, Classification.

Sumário

Introdução	iii
1 Conceitos de álgebra linear e multilinear	1
1.1 A forma canônica de Jordan e racional de uma matriz	1
1.2 Álgebra multilinear	5
1.3 O produto tensorial	7
2 Tensores, posto e exemplos	11
2.1 O posto de um tensor	11
2.2 Tensores invariantes	12
2.3 Tensores de 3 fatores	13
2.4 Resultados sobre tensores de 3 fatores	16
3 Tensores $2 \times 2 \times 2$	19
3.1 Exemplo	19
3.2 Resultados em tensores $2 \times 2 \times 2$	21
3.3 Algoritmo para determinar o posto	28
4 Tensores $3 \times 2 \times 2$	33
5 Tensores $3 \times 3 \times 2$	34
6 Tensores $3 \times 3 \times 3$	39
7 Demonstração do Teorema de Kruskal	42
Bibliografia	50

Introdução

No século XIX, os matemáticos C.F. Gauss (1777-1855) e E. Galois (1811-1832) introduziram e estabeleceram os fundamentos da álgebra linear, que, ao longo do tempo, contribuíram para a compreensão de estruturas multidimensionais. No final do século XIX e início do século XX, G. Ricci-Curbastro (1853-1925) e T. Levi-Civita (1873-1941) começaram a desenvolver uma formulação sistemática de tensores no contexto da geometria diferencial. Ricci-Curbastro e Levi-Civita introduziram o conceito de tensor em seu trabalho sobre cálculo diferencial absoluto, um conceito que permitiria a descrição das propriedades geométricas de objetos curvos [5].

No século XX, J. von-Neumann (1903-1957), com seu trabalho em álgebra linear e teoria matricial, lançou as bases para as técnicas computacionais que mais tarde seriam usadas para realizar decomposições tensoriais [16]. No final do século XX, Joseph Kruskal (1928-2010), durante seu estudo de tensores escreveu o artigo “Three-way arrays: rank and uniqueness of trilinear decompositions, with application to arithmetic complexity and statistics” [9] que foi a base para que Brenner e Hu escrevessem o artigo “On Kruskal’s theorem that every $3 \times 3 \times 3$ array has rank at most 5” [3], que é a base desta dissertação.

Deste modo esta dissertação tem como objetivo principal estudar o posto de tensores de terceira ordem, com ênfase especial nos tensores do formato $3 \times 3 \times 3$. O resultado culminante é a demonstração de que qualquer tensor $T \in \mathbb{F}^{3 \times 3 \times 3}$, com $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ possui posto no máximo cinco, conforme originalmente estabelecido por Kruskal e posteriormente refinado na literatura contemporânea. A prova apresentada aqui segue uma estratégia construtiva: reduzimos casos gerais a configurações menores cujos postos máximos já foram determinados, e utilizamos transformações lineares invertíveis para colocar as fatias matriciais dos tensores em formas canônicas que facilitam a decomposição. Nesta dissertação, a menos que seja dito o contrário, utilizaremos como corpo base um corpo $\mathbb{F}$ com característica 0.

A dissertação está organizada em sete capítulos. No Capítulo 1, revisamos ferramentas fundamentais de álgebra linear e multilinear, incluindo formas canônicas, aplicações multilineares e propriedades essenciais do produto tensorial. Esse material fornece a base teórica necessária para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes. O Capítulo 2 introduz formalmente o conceito de tensor como elemento de um espaço produto e discute o posto tensorial sob a perspectiva da decomposição em tensores simples. Também estudamos e analisamos a estrutura dos tensores de três fatores por meio de suas fatias matriciais.

No Capítulo 3, examinamos detalhadamente os tensores $2 \times 2 \times 2$, que constituem o menor formato no qual a estrutura multilinear se diferencia substancialmente da álgebra de matrizes. Analisamos o posto desses tensores quando ao menos uma de suas fatias é não singular, descrevendo todos os casos possíveis e estabelecendo resultados que serão reutilizados posteriormente. O Capítulo 4 trata de tensores do tipo $m \times n \times 2$, com foco particular no caso $3 \times 2 \times 2$, apresentando limites superiores para seus postos à luz dos resultados de Song e colaboradores. No Capítulo 5, estudamos tensores $3 \times 3 \times 2$ e mostramos, por meio de argumentos inspirados em Kruskal e Ja'Ja', que seu posto é sempre no máximo quatro, utilizando formas canônicas e decomposições explícitas.

O Capítulo 6 reúne uma coleção de lemas intermediários que preparam a demonstração final. Nele, analisamos tensores $3 \times 3 \times 3$ sob hipóteses estruturais específicas sobre suas fatias, garantindo em vários casos que o posto não ultrapassa cinco. Finalmente, no Capítulo 7, combinamos todos os resultados anteriores para tratar o caso geral e apresentamos uma prova completa do fato de que qualquer tensor $3 \times 3 \times 3$ sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ possui posto no máximo igual a cinco. O argumento baseia-se na decomposição sistemática dos tensores conforme os postos de suas fatias e na aplicação de transformações lineares que reduzem o estudo aos casos já resolvidos.

Assim, esta dissertação oferece uma exposição detalhada, coerente e autossuficiente sobre o posto de tensores de terceira ordem, desde os exemplos de menor dimensão até o teorema central de Kruskal. Além de apresentar provas completas e estruturadas, o trabalho destaca ferramentas conceituais que podem ser aplicadas ao estudo de tensores de formatos maiores, contribuindo para a compreensão mais ampla da teoria de decomposição tensorial.

Capítulo 1

Conceitos de álgebra linear e multilinear

Neste capítulo reunimos os conceitos fundamentais de álgebra linear e multilinear que serão utilizados ao longo desta dissertação. Iniciamos com uma revisão das formas canônicas de Jordan e racional, ferramentas essenciais para a compreensão da estrutura interna das transformações lineares e para a análise de matrizes sob equivalência por similaridade. Em seguida, abordamos noções básicas sobre aplicações lineares, bilineares e multilineares, destacando diferenças estruturais entre a álgebra linear clássica e a álgebra multilinear.

O capítulo é baseado nas referências clássicas [2], [4], [6], [7], [10], [11] e [12], às quais remetemos o leitor para aprofundamentos adicionais. O objetivo principal é fornecer uma base sólida e unificada que permita o desenvolvimento dos resultados posteriores da dissertação.

1.1 A forma canônica de Jordan e racional de uma matriz

Aqui serão mostradas as definições necessárias para entender o uso da forma canônica de Jordan (F.C.J.) e racional (F.C.R.). Os resultados mostrados podem ser encontrados em [11, Capítulo 4, Seções 4.3 e 4.4] para mais detalhes.

O grupo $GL(n, \mathbb{F})$

Seja V um espaço vetorial, definimos $GL(V)$ como o grupo de automorfismos de V . Se alguém fixa uma base de referência para $\mathbb{F}^n$, $GL(n, \mathbb{F})$ é o grupo de mudanças de bases ou pode ser identificado com o conjunto de matrizes $n \times n$ invertíveis.

Vamos agora com a F.C.J..

Definição 1.1 (Bloco de Jordan). O bloco de Jordan $J_m(\lambda)$ é a matriz $m \times m$ sobre $\mathbb{F}$ tal que,

$$J_m(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}.$$

Teorema 1.1 (Forma canônica de Jordan (F.C.J.)). Seja A uma matriz $n \times n$ sobre um corpo $\mathbb{F}$ algebricamente fechado. Então, existe uma matriz invertível $P \in GL(n, \mathbb{F})$ tal que

$$P^{-1}AP = J = \sum_{i=1}^k J_{m_i}(\lambda_i),$$

onde:

- A matriz J é uma matriz diagonal de blocos, chamada de forma canônica de Jordan de A , cujos blocos são os blocos de Jordan $J_{m_i}(\lambda_i)$.
- Os números $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ são as raízes do polinômio característico contadas com multiplicidade, ou seja, são autovalores (com repetição) de A .
- Cada matriz $J_{m_i}(\lambda_i)$ de ordem $m_i \times m_i$ é um bloco de Jordan de tamanho $m_i \geq 1$.

Observação. A forma canônica de Jordan de uma matriz é única e pode ser calculada a partir da matriz. Quando tem autovalores repetidos precisamos computar os autovetores generalizados, veja a Seção 7.8 de [2].

Corolário 1.1. Seja A uma matriz 3×3 sobre $\mathbb{C}$. Então existe uma matriz $P \in GL(3, \mathbb{C})$, tal que $P^{-1}AP = J$, onde J tem algum dos três formatos abaixo:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1.1. Considere a seguinte matriz sobre $\mathbb{C}$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de A é $p_A = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 5)$ e seus autovalores são $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1 + 2i, \lambda_3 = \overline{\lambda_2} = 1 - 2i$. Pelo Corolário 1.1 existe uma matriz P tal que $P^{-1}AP = J$ onde

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + 2i & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 2i \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1.2. Considere as seguintes matrizes sobre $\mathbb{C}$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{11}{3} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Temos que

$$p_A = \det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 21\lambda - 18 = \det(\lambda I - B) = p_B,$$

ou seja, as duas matrizes têm o mesmo polinômio característico, onde suas raízes são $\lambda_1 = 2$ simples e $\lambda_2 = 3$ dupla. Fazendo o cálculo como no Capítulo 7 de [2] temos que a F.C.J. de A e B são

$$J_A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Agora vamos para a F.C.R..

Definição 1.2. A matriz companheira $C(f)$ de um polinômio mônico $f(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1x + a_0$ é

$$C(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{m-1} \end{bmatrix}.$$

Teorema 1.2 (Forma canônica racional (F.C.R.)). Seja A uma matriz $n \times n$ sobre $\mathbb{F}$. Então existe uma matriz invertível $P \in GL(n, \mathbb{F})$ tal que

$$P^{-1}AP = \text{Rat}_A = \sum_{i=1}^k C(f_i)$$

onde:

1. A matriz Rat_A é uma matriz diagonal de blocos, chamada de forma canônica racional de A , cujos blocos são as matrizes companheiras de polinômios f_i .
2. Cada f_i satisfaz a cadeia de divisibilidade $f_1 | f_2 | \cdots | f_k$.
3. $\deg(f_1) + \deg(f_2) + \cdots + \deg(f_k) = n$.
4. O produto $f_1 f_2 \cdots f_k$ é o polinômio característico de A .
5. O polinômio f_k é o polinômio mínimo de A .

Observação. A F.C.R. é única mas seu cálculo é muito elaborado, mais detalhes podem ser encontrados no Capítulo 7 de [7].

Corolário 1.2. Seja A uma matriz 3×3 sobre $\mathbb{F}$. Então existe uma matriz $P \in GL(3, \mathbb{F})$, tal que $P^{-1}AP = Rat_A$, onde R tem algum dos três formatos abaixo:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1.3. Reconsiderando as matrizes sobre $\mathbb{C}$ do Exemplo 1.2:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{11}{3} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Lembrando que

$$p_A = \det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 21\lambda - 18 = \det(\lambda I - B) = p_B,$$

ou seja, as duas matrizes têm o mesmo polinômio característico, onde suas raízes são $\lambda_1 = 2$ simples e $\lambda_2 = 3$ dupla. Agora temos que para a matriz A o polinômio mínimo é $m_A = p_A$, enquanto para a matriz B o polinômio mínimo é $m_B = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$. De acordo com o Corolário 1.2, podemos calcular a matriz companheira de um polinômio mônico, então as matrizes companheiras dos polinômios mínimos de A e B são:

$$C(m_A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 18 \\ 1 & 0 & -27 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C(m_B) = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

A partir daqui pelo Teorema 1.2 temos que a F.C.R. da matriz A é a mesma matriz companheira de p_A . Para a matriz B , no contexto do Teorema 1.2, já sabemos que $f_2 = m_B$ e precisamos encontrar f_1 de grau um tal que $f_1 \cdot f_2 = p_B$ e $f_1 | f_2$. Portanto $f_1 = \lambda - 3$ e precisamos anexar o bloco desse polinômio, ou seja, a matriz $[3]$ que é 1×1 . A F.C.R. de B é

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Lema 1.1. Seja $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Sejam A e C matrizes 3×3 sobre $\mathbb{F}$ com C não singular. Então existe um $\lambda \in \mathbb{F}$ tal que a matriz $A - \lambda C$ é singular.

Demonstração. Como C é não singular o determinante de C é diferente de zero, então a matriz $A - \lambda C$ tem como determinante um polinômio na variável λ , onde o coeficiente que acompanha λ^3 é o oposto do determinante da matriz C , ou seja, $\det(A - \lambda C) = a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d$ com $a = -\det(C)$.

Logo, o coeficiente não é zero, já que C é não singular, assim podemos dizer que no caso que $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, o polinômio tem pelo menos uma raiz real (o polinômio é de grau ímpar) ou se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, tem raiz também,

pois $\mathbb{C}$ é algebricamente fechado.

Por ter uma raiz, queremos dizer que existe pelo menos um $\lambda \in \mathbb{F}$ tal que $\det(A - \lambda C) = 0$, tornando a matriz $A - \lambda C$ uma matriz singular. $\square$

Proposição 1.1. [12, Capítulo 5] Seja A uma matriz real $n \times n$. Então A será simétrica se, e somente se, for ortogonalmente diagonalizável.

Demonstração. O leitor pode encontrar a demonstração em [12]. $\square$

Proposição 1.2. [4, Capítulo 9] Seja A uma matriz complexa $n \times n$ hermitiana. Então existe uma matriz unitária U e uma matriz diagonal real D tais que $A = UDU^{-1} = UDU^H$.

Demonstração. O leitor pode encontrar a demonstração em [4]. $\square$

1.2 Álgebra multilinear

Nesta seção veremos algumas definições e conceitos de álgebra multilinear, começando com aplicações lineares, depois bilineares, até chegar às aplicações multilineares. Como referências básicas para esta seção, utilizamos [6] e [10, Capítulo 1].

Aplicações lineares e bilineares

Uma aplicação f é linear se $f(v + \alpha w) = f(v) + \alpha f(w)$ para todos $v, w \in \mathbb{F}^n$ e $\alpha \in \mathbb{F}$.

Suponha que U , V e W sejam três espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$ e considere uma aplicação

$$\varphi : U \times V \rightarrow W.$$

φ é chamado bilinear se satisfizer as condições

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda x_1 + \mu x_2, y) &= \lambda \varphi(x_1, y) + \mu \varphi(x_2, y) & x_1, x_2 \in U, y \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{F}, \\ \varphi(x, \lambda y_1 + \mu y_2) &= \lambda \varphi(x, y_1) + \mu \varphi(x, y_2) & x \in U, y_1, y_2 \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{F}. \end{aligned}$$

Lembre-se de que se $W = \mathbb{F}$, então φ é chamada de função bilinear. O conjunto $Im(\varphi)$ de todos os vetores em W da forma $\varphi(x, y)$, $x \in U$, $y \in V$ não é em geral um subespaço vetorial de W . Ao definir a soma de duas aplicações bilineares φ_1 e φ_2 por

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(x, y) = \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y)$$

e a aplicação produto de uma aplicação bilinear φ por um escalar λ por

$$(\lambda \varphi)(x, y) = \lambda \varphi(x, y),$$

podemos introduzir uma estrutura de espaço vetorial no conjunto $B(U, V; W)$. O espaço $B(U, V; \mathbb{F})$ de todas as funções bilineares em $U \times V$ será denotado simplesmente por $B(U, V)$.

Exemplo 1.4. Como exemplo, sejam $U = V = \mathbb{F}^2$ e $W = \mathbb{F}^4$ espaços vetoriais. Selecione uma base u_1, u_2 em U e uma base w_1, w_2, w_3, w_4 em W e defina a aplicação bilinear φ por

$$\varphi(x, y) = \xi^1 \eta^1 w_1 + \xi^1 \eta^2 w_2 + \xi^2 \eta^1 w_3 + \xi^2 \eta^2 w_4$$

onde $x = \xi^1 u_1 + \xi^2 u_2$ e $y = \eta^1 u_1 + \eta^2 u_2$. Então um vetor

$$z = \sum_v \lambda^v w_v$$

de W está contido em $\text{Im}(\varphi)$ se e somente se as componentes satisfazem a relação

$$\lambda^1 \lambda^4 - \lambda^2 \lambda^3 = 0.$$

Como os vetores $z_1 = 2w_1 + 2w_2 + w_3 + w_4$ e $z_2 = w_1 + w_3$ satisfazem essa condição, enquanto o vetor $z = z_1 - z_2 = w_1 + 2w_2 + w_4$ não, segue-se que $\text{Im}(\varphi)$ não é um subespaço de W .

Exemplo 1.5. Sejam m e n inteiros positivos. Sejam U o espaço vetorial de matrizes $m \times n$ sobre $\mathbb{F}$ e M uma matriz $m \times m$ dada sobre $\mathbb{F}$. Definimos

$$f_M(X, Y) = \text{tr}(X^T M Y) \quad X, Y \in U.$$

Então f_M é uma forma bilinear em U .

De fato, se X, Y e $Z \in U$,

$$\begin{aligned} f_M(cX + Z, Y) &= \text{tr}[(cX + Z)^T M Y] \\ &= \text{tr}(cX^T M Y) + \text{tr}(Z^T M Y) \\ &= cf_M(X, Y) + f_M(Z, Y) \end{aligned}$$

O fato de que a operação transposta e a função traço são lineares é usado aqui.

Aplicações multilineares

Suponha que nos são dados $p+1$ espaços vetoriais $V_i (i = 1, \dots, p), W$. Uma aplicação $\varphi : V_1 \times \dots \times V_p \rightarrow W$ é chamada de p -linear se para todo $1 \leq i \leq p$

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda x_i + \mu y_i, x_{i+1}, \dots, x_p) &= \lambda \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_p) \\ &\quad + \mu \varphi(x_1, \dots, y_i, \dots, x_p) \quad x_j, y_i \in V_i, \lambda, \mu \in \mathbb{F}. \end{aligned}$$

Se $W = \mathbb{F}$, então φ é chamada de função p -linear.

Como no caso $p = 2$, o subespaço de W gerado pelos vetores $\varphi(x_1, \dots, x_p), x_i \in V_i$ será denotado por $\text{Im}(\varphi)$. Seja $L(V_1, \dots, V_p; W)$ o conjunto de todas as aplicações p -lineares $\varphi : V_1 \times \dots \times V_p \rightarrow W$. Definindo a soma por

$$(\varphi + \psi)(x_1, \dots, x_p) = \varphi(x_1, \dots, x_p) + \psi(x_1, \dots, x_p)$$

e a aplicação produto de uma aplicação multilinear φ por um escalar λ por

$$(\lambda\varphi)(x_1, \dots, x_p) = \lambda\varphi(x_1, \dots, x_p)$$

obtemos uma estrutura de espaço vetorial em $L(V_1, \dots, V_p; W)$. O espaço de todas as funções p -lineares em $V_1 \times \dots \times V_p$ será denotado por $L(V_1, \dots, V_p)$.

Definição 1.3. Seja G um grupo e V um espaço vetorial. Um homomorfismo de grupos

$$\rho : G \longrightarrow GL(V)$$

é chamado de uma representação linear de G (ou simplesmente, uma representação de G).

Diz-se que G atua linearmente em V , ou que V é um G -módulo.

Exemplo 1.6. Aqui estão algumas ações: $g \in GL(V)$ atua em

1. V^* por $\alpha \mapsto \alpha \circ g^{-1}$.
2. $\text{End}(V)$ por $f \mapsto g \circ f$.
3. Uma segunda ação em $\text{End}(V)$ é por $f \mapsto g \circ f \circ g^{-1}$.

Esses exemplos fornecem homomorfismos de grupo $GL(V) \rightarrow GL(V^*)$ e $GL(V) \rightarrow GL(\text{End}(V))$.

Álgebra linear vs álgebra multilinear

Um dos resultados básicos da álgebra linear é que “posto é igual a posto linha é igual a posto coluna”, ou seja, para uma aplicação linear $f : U \rightarrow V$, $\text{rank}(f) = \dim f(U) = \dim f^T(V^*)$. Já para aplicações bilineares, $f : U \times V \rightarrow W$, o posto de f é geralmente diferente de $\dim f(U \times V)$, de fato o resultado principal dessa dissertação pode ser visto como o resultado de que o posto máximo de aplicações bilineares $f : \mathbb{F}^3 \times \mathbb{F}^3 \rightarrow \mathbb{F}^3$ é 5.

1.3 O produto tensorial

A propriedade universal

Teorema 1.3. [6] Sejam U e W espaços vetoriais e seja $\otimes : U \times W \rightarrow V$ uma aplicação bilinear. Diremos que $\otimes$ e V tem a propriedade universal do produto tensorial, se ela satisfaz as seguintes condições:

- $\otimes_1$: $\text{Im}(\otimes)$ gera V .
- $\otimes_2$: Se φ é um aplicação bilinear de $U \times W$ em qualquer espaço vetorial V_1 , então existe uma aplicação

linear $f : V \rightarrow V_1$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} U \times W & \xrightarrow{\otimes} & V \\ \varphi \downarrow & \searrow f & \\ V_1 & & \end{array} \quad (1.1)$$

comuta.

As duas condições acima são equivalentes à seguinte condição única

$\otimes$: Para cada aplicação bilinear $\varphi : U \times W \rightarrow V_1$ existe uma única aplicação linear $f : V \rightarrow V_1$ tal que o diagrama (1.1) comuta.

Demonstração. A demonstração com todos os seus detalhes pode ser encontrada em [6, Capítulo 1]. $\square$

Definição 1.4. O produto tensorial de dois espaços vetoriais U e W é um par $(V, \otimes)$, onde $\otimes : U \times W \rightarrow V$ é uma aplicação bilinear com a propriedade universal.

O espaço V , que é determinado unicamente por U e W a menos de isomorfismo, também é chamado de produto tensorial de U e W e é denotado por $U \otimes W$.

Lema 1.2. O produto tensorial é comutativo e associativo a menos de isomorfismo no sentido de que

$$\begin{aligned} U \otimes V &\cong V \otimes U, \\ (U \otimes V) \otimes W &\cong U \otimes (V \otimes W). \end{aligned}$$

Demonstração. O leitor pode encontrar uma demonstração detalhada em [6, Capítulo 1] $\square$

Produtos tensoriais

Em física, engenharia e outras áreas, tensores são frequentemente definidos como matrizes multidimensionais ou objetos com vários índices. Mesmo uma aplicação linear é frequentemente definido em termos de uma matriz que o representa em uma determinada escolha de base.

Definição 1.5. O espaço $V^* \otimes W$ pode ser interpretado de diversas formas naturalmente isomorfas:

- como o espaço vetorial das aplicações lineares de V em W ;
- como o espaço das aplicações lineares de W^* em V , via o isomorfismo determinado pela transposição;
- como o dual do espaço tensorial $V \otimes W^*$;
- e como o espaço das aplicações bilineares $V \times W^* \rightarrow \mathbb{F}$.

Exemplo 1.7. [10, Capítulo 1] Se U é um espaço vetorial, seja $U^* := \{f : U \rightarrow \mathbb{F} | f \text{ é linear}\}$ o espaço vetorial dual. Se $\alpha \in U^*$ e $v \in V$, pode-se definir uma aplicação linear $\alpha \otimes v : U \rightarrow V$ por $u \mapsto \alpha(u)v$. Tal aplicação linear tem posto um. O posto de uma aplicação linear $f : U \rightarrow V$ é o menor r tal que existem

$\alpha_1, \dots, \alpha_r \in U^*$ e $v_1, \dots, v_r \in V$ tais que $f = \sum_{i=1}^r \alpha_i \otimes v_i$.

Se $\mathbb{F}^{2*}$ e $\mathbb{F}^3$ tem bases (e_1^*, e_2^*) , (f_1, f_2, f_3) , respectivamente, e $A : \mathbb{F}^2 \rightarrow \mathbb{F}^3$ é uma aplicação linear dada em relação a esta base por uma matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

então A pode ser escrita como o tensor

$$\begin{aligned} A &= a_{11}e_1^* \otimes f_1 + a_{21}e_1^* \otimes f_2 + a_{31}e_1^* \otimes f_3 + a_{12}e_2^* \otimes f_1 + a_{22}e_2^* \otimes f_2 + a_{32}e_2^* \otimes f_3 \\ &= e_1^* \otimes (a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + a_{31}f_3) + e_2^* \otimes (a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + a_{32}f_3), \end{aligned}$$

e assim existe uma expressão $A = \alpha_1^* \otimes b_1 + \alpha_2^* \otimes b_2$, portanto A tem posto no máximo dois.

Definição 1.6. Sejam $V_1, \dots, V_k$ espaços vetoriais. Uma função

$$f : V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow \mathbb{F} \quad (1.2)$$

é multilinear se for linear em cada fator V_l . O espaço de tais funções multilineares é denotado $V_1^* \otimes V_2^* \otimes \dots \otimes V_k^*$ e chamado de produto tensorial dos espaços vetoriais $V_1^*, \dots, V_k^*$. Os elementos $T \in V_1^* \otimes \dots \otimes V_k^*$ são chamados tensores. O inteiro k é algumas vezes chamado de ordem de T . A sequência de números naturais, $\dim(V_1), \dots, \dim(V_k)$, é algumas vezes chamada de dimensões de T .

Agora mostraremos como um tensor é formado através do produto tensorial de três vetores.

Sejam $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ e $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, seu produto tensorial se define como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 \\ a_2b_1 & a_2b_2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{array}{cc|cc} a_1b_1c_1 & a_1b_1c_2 & a_1b_2c_1 & a_1b_2c_2 \\ a_2b_1c_1 & a_2b_1c_2 & a_2b_2c_1 & a_2b_2c_2 \end{array} \right], \end{aligned}$$

e assim obtemos um tensor $2 \times 2 \times 2$.

Sejam $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ e $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$, seu produto tensorial se define como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1b_1c_1 & a_1b_1c_2 & a_1b_1c_3 & a_1b_2c_1 & a_1b_2c_2 & a_1b_2c_3 & a_1b_3c_1 & a_1b_3c_2 & a_1b_3c_3 \\ a_2b_1c_1 & a_2b_1c_2 & a_2b_1c_3 & a_2b_2c_1 & a_2b_2c_2 & a_2b_2c_3 & a_2b_3c_1 & a_2b_3c_2 & a_2b_3c_3 \\ a_3b_1c_1 & a_3b_1c_2 & a_3b_1c_3 & a_3b_2c_1 & a_3b_2c_2 & a_3b_2c_3 & a_3b_3c_1 & a_3b_3c_2 & a_3b_3c_3 \end{array} \right], \end{aligned}$$

e assim obtemos um tensor $3 \times 3 \times 3$.

Capítulo 2

Tensores, posto e exemplos

Neste capítulo apresentamos os conceitos fundamentais necessários para o estudo estrutural de tensores, com ênfase especial nos tensores de terceira ordem. Iniciamos discutindo a noção de tensor como um elemento de um espaço produto, interpretação que permite vê-lo como uma generalização natural das matrizes para dimensões superiores. A partir dessa perspectiva, introduzimos a definição de posto de um tensor, conceito central que mede a complexidade de sua decomposição em tensores simples. Também discutimos propriedades básicas, exemplos ilustrativos e resultados que utilizaremos em capítulos posteriores.

Finalmente, focamos em tensores de três fatores, descrevendo sua estrutura por meio de fatias bidimensionais e desenvolvendo ferramentas matriciais para estimar e calcular seu posto. Os resultados apresentados aqui constituem a base teórica essencial para o desenvolvimento das seções seguintes, nas quais investigaremos problemas específicos envolvendo decomposições tensorais e critérios de identificação de posto. Como referência para este capítulo usamos [1], [10] e [13].

2.1 O posto de um tensor

Dados $\beta_1 \in V_1^*, \dots, \beta_k \in V_k^*$, defina um elemento $\beta_1 \otimes \dots \otimes \beta_k \in V_1^* \otimes \dots \otimes V_k^*$ por

$$\beta_1 \otimes \dots \otimes \beta_k(u_1, \dots, u_k) = \beta_1(u_1) \dots \beta_k(u_k).$$

Definição 2.1. Um elemento de $V_1^* \otimes V_2^* \otimes \dots \otimes V_k^*$ como na Definição 1.6 é dito ter posto um ou ser simples se pode ser escrito na forma $\beta_1 \otimes \dots \otimes \beta_k$.

A propriedade de ter posto um é independente da escolha de base [10, Capítulo 2, Seção 4]. Trabalharemos com o espaço vetorial V de dimensão finita e identificaremos V com V^* .

Definição 2.2. Defina o posto de um tensor $T \in V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_k$, denotado $\mathbf{R}(T)$, para ser o número mínimo r tal que $T = \sum_{u=1}^r Z_u$ com cada Z_u de posto um.

Exemplo 2.1. Sejam $u, v, w \in \mathbb{F}^2$ tais que

$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Note que

$$\begin{aligned} u \otimes v \otimes w &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{array}{cc|cc} -2 & -3 & 4 & 6 \\ -1 & -3/2 & 2 & 3 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Assim $u \otimes v \otimes w \in \mathbb{F}^{2 \times 2 \times 2}$ é um tensor de posto um, ou seja um tensor simples.

2.2 Tensores invariantes

Certos tensores, vistos como aplicações multilineares, comutam com a ação do grupo de mudanças de bases, ou seja, como tensores, eles são invariantes em relação à ação do grupo, para mais detalhes, o leitor pode consultar [1, Capítulo 2] e [10, Capítulo 2].

$GL(V)$ em $V^{\otimes d}$

O grupo $GL(V)$ atua em $V^{\otimes d}$. A ação em elementos de posto um é, para $g \in GL(V)$ e $v_1 \otimes \cdots \otimes v_d \in V^{\otimes d}$,

$$g \cdot (v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) = (g \cdot v_1) \otimes \cdots \otimes (g \cdot v_d), \quad (2.1)$$

e a ação em $V^{\otimes d}$ é obtida estendendo esta ação linearmente. Da mesma forma, $GL(V_1) \times \cdots \times GL(V_k)$ atua em $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$.

Exemplo 2.2. Seja $V = \mathbb{F}^2$ com base canônica $\{e_1, e_2\}$, então o espaço $V^{\otimes 3} = V \otimes V \otimes V$ terá dimensão $2^3 = 8$ com base $\{e_i \otimes e_j \otimes e_k | i, j, k \in \{1, 2\}\}$. Seja agora $M \in GL(2, \mathbb{F})$, tal que $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ é uma matriz 2×2 invertível, então M atua sobre os elementos de $v \in \mathbb{F}^2$ pela multiplicação matricial usual. Seja $T \in \mathbb{F}^{2 \times 2 \times 2}$ dado por

$$T = e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_2 \otimes e_1 = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

Agora, ao aplicar a ação de grupo M , obtemos:

$$\begin{aligned}
M \cdot T &= M \cdot (e_1 \otimes e_1 \otimes e_2) + M \cdot (e_2 \otimes e_2 \otimes e_1) \\
&= (M \cdot e_1 \otimes M \cdot e_1 \otimes M \cdot e_2) + (M \cdot e_2 \otimes M \cdot e_2 \otimes M \cdot e_1) \\
&= (2e_1 \otimes 2e_1 \otimes 3e_2) + (3e_2 \otimes 3e_2 \otimes 2e_1) \\
&= 12(e_1 \otimes e_1 \otimes e_2) + 18(e_2 \otimes e_2 \otimes e_1) \\
&= \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 0 \end{array} \right].
\end{aligned}$$

Exemplo 2.3. Seja $T = e_1 \otimes e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 \otimes e_2 \in \mathbb{F}^{2 \times 2 \times 2}$. Consideramos o subgrupo

$$H = \{(g, g, g) \mid g \in GL(2, \mathbb{F}) \text{ diagonal, com } g = \text{diag}(\lambda, \mu) \text{ e } \lambda^3 = \mu^3 = 1\}.$$

Então, a ação de (g, g, g) sobre T é:

$$(g, g, g) \cdot T = \lambda^3(e_1 \otimes e_1 \otimes e_1) + \mu^3(e_2 \otimes e_2 \otimes e_2) = T,$$

pois $\lambda^3 = \mu^3 = 1$. Portanto, T é invariante sob a ação do subgrupo $H \cong \mu_3 \times \mu_3 \subset GL(2, \mathbb{F}) \times GL(2, \mathbb{F}) \times GL(2, \mathbb{F})$, onde μ_3 é o o grupo de raízes cúbicas da unidade em $\mathbb{F} : \{\zeta \in \mathbb{F} \mid \zeta^3 = 1\}$.

2.3 Tensores de 3 fatores

A partir de agora trabalharemos com tensores de terceira ordem. Geralmente em matemática trabalhamos em tensores de segunda ordem, ou seja, matrizes. Em matrizes trabalhamos em colunas e linhas, em tensores trabalharemos em fatias que são denotadas como $x_{:jk}, x_{i:k}, x_{ij:}$ respectivamente. As fatias são seções bidimensionais de um tensor, obtidas fixando um dos três índice. A Figura 2.1 mostra as fatias horizontais, verticais e frontais de um tensor T .

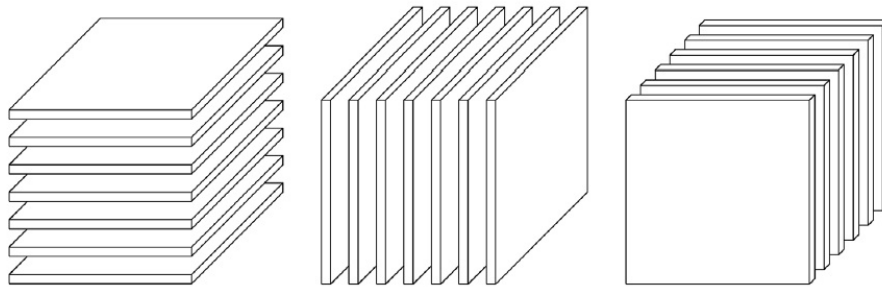


Figura 2.1: Fatias

Se tivermos três vetores coluna,

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^p, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^q, \quad \text{e} \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^m.$$

Seu produto tensorial $a \otimes b \otimes c$ será o tensor $p \times q \times m$ de posto um onde a entrada ijk é $a_i b_j c_k$.

Em geral seja $T \in \mathbb{F}^{p \times q \times m}$ um tensor. Podemos representá-lo por meio de suas fatias frontais como:

$$T = [A_1 \mid A_2 \mid \cdots \mid A_s],$$

onde cada fatia frontal $A_k \in \mathbb{F}^{p \times q}$ é dada por:

$$A_k = A(:, :, k) = \begin{bmatrix} A_{1,1,k} & A_{1,2,k} & \cdots & A_{1,q,k} \\ A_{2,1,k} & A_{2,2,k} & \cdots & A_{2,q,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p,1,k} & A_{p,2,k} & \cdots & A_{p,q,k} \end{bmatrix} \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, m.$$

Proposição 2.1 (Propiedades das fatias). Sejam T e S tensores de três fatores com fatias frontais $T_1, \dots, T_k, S_1, \dots, S_k$ e $a \in \mathbb{F}$. Então $T + aS$ tem como fatias frontais $T_1 + aS_1, \dots, T_k + aS_k$.

Nosso objetivo é encontrar o posto de um tensor, que é, como sabemos, o menor inteiro não negativo n para o qual o tensor T pode ter a seguinte decomposição:

$$T = \sum_{i=1}^n a^{(i)} \otimes b^{(i)} \otimes c^{(i)}. \quad (2.2)$$

O posto não muda se permutarmos as fatias em qualquer direção, por exemplo, dadas as permutações $\alpha \in S_p, \beta \in S_q, \gamma \in S_m$, temos outro tensor $p \times q \times m$ dado por

$$((\alpha, \beta, \gamma).T)_{ijk} = T_{\alpha(i)\beta(j)\gamma(k)}.$$

Além disso, o posto não muda se aplicarmos uma mudança de base em alguma direção, por exemplo, dadas as matrizes invertíveis

$$A = (a_{i_1 i_2}) \in GL(p, \mathbb{F}), \quad B = (b_{j_1 j_2}) \in GL(q, \mathbb{F}), \quad C = (c_{k_1 k_2}) \in GL(m, \mathbb{F}),$$

temos outro tensor $p \times q \times m$ dado por

$$((A, B, C).T)_{i_1 j_1 k_1} = \sum_{i_2=1}^p \sum_{j_2=1}^q \sum_{k_2=1}^m a_{i_1 i_2} b_{j_1 j_2} c_{k_1 k_2} x_{i_2 j_2 k_2}.$$

O resultado a seguir será útil para nós mais tarde [3, pág 402].

Proposição 2.2. Seja um tensor $T \in \mathbb{F}^{p \times q \times m}$ com fatias frontais $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{F}^{p \times q}$. Então

$$\mathbf{R}(T) \geq \max_{1 \leq k \leq m} \text{rank}(A_k).$$

Demonstração. Vamos supor que $\mathbf{R}(T) = m$. Por definição de posto, existe uma decomposição de T em tensores simples:

$$T = \sum_{i=1}^m a^{(i)} \otimes b^{(i)} \otimes c^{(i)},$$

onde para cada i , $a^{(i)} \in \mathbb{F}^p$, $b^{(i)} \in \mathbb{F}^q$, e $c^{(i)} \in \mathbb{F}^m$.

Para cada $k = 1, \dots, m$, a fatia A_k de T é:

$$A_k = \sum_{i=1}^m a_k^{(i)} b^{(i)} \otimes c^{(i)},$$

onde $a_k^{(i)}$ é o k -ésimo componente do vetor $a^{(i)}$. Cada matriz $b^{(i)} \otimes c^{(i)}$ tem posto no máximo 1, pois é um produto tensorial de vetores. Assim, A_k é a soma de no máximo m matrizes de posto ≤ 1 .

Portanto, pela definição de posto de matrizes, expressar A_k como uma soma de matrizes de posto ≤ 1 requer pelo menos $\text{rank}(A_k)$ termos. Portanto

$$m \geq \text{rank}(A_k), \quad \forall k = 1, \dots, m,$$

e assim,

$$\mathbf{R}(T) = m \geq \max_{1 \leq k \leq m} \text{rank}(A_k).$$

□

Proposição 2.3. Seja $T \in \mathbb{F}^{p \times q \times m}$ um tensor com fatias frontais $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{F}^{p \times q}$. Então

$$\mathbf{R}(T) \leq \sum_{k=1}^m \mathbf{R}(A_k).$$

Demonstração. Para cada k , escrevemos A_k como soma de matrizes de posto 1:

$$A_k = \sum_{i=1}^{r_k} uv^T, \quad \text{onde } r_k = \mathbf{R}(A_k), \quad u \in \mathbb{F}^p, v \in \mathbb{F}^q.$$

Seja $w^{(k)} \in \mathbb{F}^m$ o vetor canônico cuja k -ésima coordenada é 1 e as demais são 0. Então cada tensor $u \otimes v \otimes w^{(k)}$ possui todas as fatias nulas, exceto a k -ésima, que é precisamente uv^T . Assim,

$$T = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{r_k} u \otimes v \otimes w^{(k)}.$$

Esta é uma decomposição de T como soma de $\sum_{k=1}^m r_k$ tensores de posto 1. Pela definição de posto, concluímos que

$$\mathbf{R}(T) \leq \sum_{k=1}^m r_k = \sum_{k=1}^m \mathbf{R}(A_k).$$

□

2.4 Resultados sobre tensores de 3 fatores

Definição 2.3. [13, Capítulo 14] Sejam U, V, W espaços vetoriais de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$. Então, existe um isomorfismo natural de espaços vetoriais:

$$U \otimes V \otimes W \cong \text{Hom}(U^*, V \otimes W),$$

onde U^* é o espaço dual de U , e $\text{Hom}(U^*, V \otimes W)$ denota o espaço das aplicações lineares de U^* em $V \otimes W$.

Esse isomorfismo é definido da seguinte forma:

$$T = \sum_{i=1}^r u_i \otimes v_i \otimes w_i \quad \mapsto \quad \tilde{T} \in \text{Hom}(U^*, V \otimes W),$$

onde $\tilde{T}$ é dada por:

$$\tilde{T}(t) = \sum_{i=1}^r t(u_i) \cdot (v_i \otimes w_i), \quad \text{para todo } t \in U^*.$$

Reciprocamente, toda aplicação linear $F : U^* \rightarrow V \otimes W$ determina um único tensor $T \in U \otimes V \otimes W$ que satisfaz a relação acima.

Exemplo 2.4. Seja

$$T = e_1 \otimes e_2 \otimes e_3,$$

um tensor simples. Pode ser interpretado como uma aplicação linear:

$$T : (\mathbb{F}^3)^* \rightarrow \mathbb{F}^3 \otimes \mathbb{F}^3, \quad t \mapsto t(e_1)(e_2 \otimes e_3).$$

Ou seja, para qualquer forma linear $t \in (\mathbb{F}^3)^*$, $T(t)$ é um múltiplo escalar de $e_2 \otimes e_3$, onde o escalar é $t(e_1)$.

A partir de agora identificaremos T com $\tilde{T}$. A seguinte propriedade de posto é dada em termos matriciais e será de grande ajuda em demonstrações posteriores.

Teorema 2.1. [10, Capítulo 3, Seção 1] Seja $T \in U \otimes V \otimes W$. Então $\mathbf{R}(T)$ é igual ao número de matrizes de posto um necessárias para gerar (um espaço contendo) $T(U^*) \subset V \otimes W$.

Demonstração. Seja $r = \mathbf{R}(T)$, de modo que haja uma expressão $T = \sum_{i=1}^r u_i \otimes v_i \otimes w_i$. Os vetores u_i não precisam ser linearmente independentes, e similarmente para v_i e w_i . Então $T(U^*) \subseteq \langle v_1 \otimes w_1, \dots, v_r \otimes w_r \rangle$ mostra que o número de matrizes de posto um necessárias para gerar $T(U^*) \subset V \otimes W$ é no máximo $\mathbf{R}(T)$.

Por outro lado, digamos que $T(U^*)$ é gerado por elementos de posto um $v_1 \otimes w_1, \dots, v_r \otimes w_r$. Seja

$u^1, \dots, u^a$ uma base de U^* , com base dual $u_1, \dots, u_a$ de U . Então $T(u^i) = \sum_{s=1}^r x_s^i v_s \otimes w_s$ para algumas constantes x_s^i . Mas então

$$T = \sum_{s,i} u_i \otimes (x_s^i v_s \otimes w_s) = \sum_{s=1}^r \left(\sum_i x_s^i u_i \right) \otimes v_s \otimes w_s,$$

provando que $\mathbf{R}(T)$ é no máximo o número de matrizes de posto um necessárias para gerar $T(U^*) \subset V \otimes W$. $\square$

Exemplo 2.5. Seja $U = V = \mathbb{F}^2$ e $W = \mathbb{F}^3$, com as seguintes bases:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^2, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^2, \quad w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^3.$$

Seja o tensor $T \in U \otimes V \otimes W$ definido por:

$$T = u_1 \otimes v_1 \otimes w_1 + u_2 \otimes v_2 \otimes w_2.$$

Podemos representá-lo como uma função linear:

$$T : U^* \rightarrow V \otimes W.$$

Como $U^* \cong \mathbb{F}^2$, tomamos a base dual $\{\phi_1, \phi_2\}$, onde:

$$\phi_1(u_1) = 1, \quad \phi_1(u_2) = 0, \quad \phi_2(u_1) = 0, \quad \phi_2(u_2) = 1.$$

Aplicando T aos elementos da base dual:

$$T(\phi_1) = \phi_1(u_1)(v_1 \otimes w_1) + \phi_1(u_2)(v_2 \otimes w_2) = v_1 \otimes w_1, \quad T(\phi_2) = \phi_2(u_1)(v_1 \otimes w_1) + \phi_2(u_2)(v_2 \otimes w_2) = v_2 \otimes w_2.$$

Portanto, a imagem de T está contida no subespaço de $V \otimes W$ gerado por:

$$v_1 \otimes w_1 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 & 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 & 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 \otimes w_2 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 & 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 \\ -1 \cdot 0 & -1 \cdot 1 & -1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como os tensores $v_1 \otimes w_1$ e $v_2 \otimes w_2$ são L.I. em $V \otimes W \cong \mathbb{F}^6$, concluímos pelo Teorema 2.1 que:

$$\dim(\text{Im}(T)) = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}(T) \geq 2.$$

Além disso, como T é soma de dois tensores simples, segue que $\mathbf{R}(T) \leq 2$. Como já vimos que $\mathbf{R}(T) \geq 2$, concluímos que $\mathbf{R}(T) = 2$.

Exemplo 2.6. Seja $T \in U \otimes V \otimes W$ com $U = V = W = \mathbb{F}^3$. Sejam as bases canônicas:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e similarmente para } v_i, w_i.$$

Definimos o tensor:

$$T = u_1 \otimes v_1 \otimes w_1 + u_2 \otimes v_2 \otimes w_2 + u_3 \otimes v_3 \otimes w_3.$$

Queremos calcular $T : U^* \rightarrow V \otimes W$. Tomamos a base dual $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ de U^* , tal que:

$$\phi_i(u_j) = \delta_{ij}.$$

Aplicando T a cada elemento da base dual:

$$T(\phi_1) = \phi_1(u_1)(v_1 \otimes w_1) + \phi_1(u_2)(v_2 \otimes w_2) + \phi_1(u_3)(v_3 \otimes w_3) = v_1 \otimes w_1,$$

$$T(\phi_2) = v_2 \otimes w_2,$$

$$T(\phi_3) = v_3 \otimes w_3.$$

Portanto, a imagen $T(U^*) \subset V \otimes W$ é gerada pelos três tensores simples:

$$v_1 \otimes w_1, \quad v_2 \otimes w_2, \quad v_3 \otimes w_3.$$

Como $v_i \otimes w_i$ são linearmente independentes (têm suporte em posições distintas da matriz 3×3), são claramente independentes em $V \otimes W \cong \mathbb{F}^9$. Logo, a dimensão da imagem $T(U^*)$ é 3. Como a imagem tem dimensão três, é impossível gerar $T(U^*)$ com duas matrizes de posto um. Por isso, pelo Teorema 2.1, o posto do tensor é igual a 3, $\mathbf{R}(T) = 3$.

Capítulo 3

Tensores $2 \times 2 \times 2$

O estudo dos tensores $2 \times 2 \times 2$ ocupa um papel central na teoria de decomposição tensorial, pois eles constituem o menor exemplo no qual a estrutura multilinear deixa de se comportar de forma análoga à álgebra matricial clássica. Diferentemente do caso matricial, em que conceitos como posto, diagonalização ou equivalência por transformações invertíveis são bem compreendidos, os tensores de ordem três são mais complicados.

O objetivo deste capítulo é analisar detalhadamente o posto dos tensores $2 \times 2 \times 2$ e fornecer um algoritmo para seu cálculo. O estudo desenvolvido aqui não apenas resolve completamente o caso $2 \times 2 \times 2$, mas também ilustra estratégias úteis para formatos maiores, estudados em capítulos posteriores com ajuda de [3] e [15].

3.1 Exemplo

Exemplo 3.1. Considere os espaços vetoriais $U = \mathbb{F}^2$, $V = \mathbb{F}^2$ e $W = \mathbb{F}^2$, com bases $\{u_1, u_2\}$, $\{v_1, v_2\}$, $\{w_1, w_2\}$, onde:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Definimos o tensor:

$$T = u_1 \otimes v_1 \otimes w_1 + u_1 \otimes v_2 \otimes w_2 + u_2 \otimes v_1 \otimes w_2.$$

Vamos calcular $T : U^* \rightarrow V \otimes W$. Seja $\{\phi_1, \phi_2\}$ a base dual da base $\{u_1, u_2\}$ de U , ou seja:

$$\phi_1(u_1) = 1, \quad \phi_1(u_2) = 0, \quad \phi_2(u_1) = 0, \quad \phi_2(u_2) = 1.$$

Então:

$$T(\phi_1) = \phi_1(u_1)(v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2) + \phi_1(u_2)(v_1 \otimes w_2) = v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2,$$

$$T(\phi_2) = \phi_2(u_1)(v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2) + \phi_2(u_2)(v_1 \otimes w_2) = v_1 \otimes w_2.$$

Portanto, a imagem $T(U^*) \subset V \otimes W$ é gerada pelos tensores:

$$v_1 \otimes w_1, \quad v_2 \otimes w_2, \quad v_1 \otimes w_2.$$

Vamos verificar se esses três tensores de posto um são linearmente independentes em $V \otimes W \cong \mathbb{F}^4$ (já que $\dim(V \otimes W) = 2 \times 2 = 4$). Calculando explicitamente:

$$v_1 \otimes w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 \otimes w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$v_1 \otimes w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que a imagem $T(U^*) \subset V \otimes W$ é gerada pelos três tensores $v_1 \otimes w_1$, $v_2 \otimes w_2$, e $v_1 \otimes w_2$, cujas representações matriciais são:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Verifiquemos se esses três tensores são linearmente independentes. Suponha que exista uma combinação linear

$$\alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3 = 0,$$

isto é,

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Somando as matrizes:

$$\begin{bmatrix} \alpha + \gamma & \alpha - \gamma \\ \beta & -\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \gamma = \beta = 0.$$

Portanto, os três tensores são linearmente independentes. Assim, a imagem $T(U^*)$ tem dimensão 3, e não pode ser contida em um subespaço gerado por apenas dois tensores simples. Pelo Teorema 2.1, concluímos que:

$$\mathbf{R}(T) = 3.$$

Como vimos, esse método é bastante trabalhoso. Por isso, exploraremos outros casos nos quais o cálculo do posto pode ser feito de forma mais eficiente.

Com esse exemplo, podemos ver que é bastante trabalhoso e difícil calcular o posto de um tensor $2 \times 2 \times 2$, que é o menor tensor que não é uma matriz. Além disso, encontrar uma decomposição explícita como soma de tensores simples pode ser ainda mais difícil [15]. No entanto, ao longo deste capítulo, veremos métodos que facilitam esse cálculo e, ao final, apresentaremos um algoritmo eficiente para determinar o posto.

3.2 Resultados em tensores $2 \times 2 \times 2$

Lema 3.1. [15] O posto de um tensor $T = [T_1|T_2] \in \mathbb{F}^{2 \times 2 \times 2}$ é o menor inteiro $n \geq 1$ tal que as fatias frontais T_1, T_2 têm a forma $T_1 = ADB^T, T_2 = AEB^T$ onde A, B são matrizes $2 \times n$ e D, E são matrizes diagonais $n \times n$.

Demonstração. Suponha que existem matrizes A, B, D, E como no enunciado tais que $T = [ADB^T|AEB^T]$. Se $A = [a_1 \ \cdots \ a_n]$, $B = [b_1 \ \cdots \ b_n]$, e os elementos diagonais de D e E são $(d_1, \dots, d_n)$ e $(e_1, \dots, e_n)$, então temos:

$$ADB^T = \sum_{i=1}^n d_i a_i b_i^T, \quad AEB^T = \sum_{i=1}^n e_i a_i b_i^T.$$

Portanto

$$\begin{aligned} T = [ADB^T|AEB^T] &= \left[\sum_{i=1}^n d_i a_i b_i^T \mid \sum_{i=1}^n e_i a_i b_i^T \right] \\ &= \sum_{i=1}^n [d_i a_i b_i^T \mid e_i a_i b_i^T] \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i \otimes (v_1 d_i + v_2 e_i). \end{aligned}$$

Portanto o posto de T é menor ou igual a n .

Reciprocamente se T é um tensor de posto n , então

$$T = H_1 + H_2 + \cdots H_n,$$

onde cada H_i é um tensor simples. Portanto existem para cada i , vetores $a_i, b_i \in \mathbb{F}^2$ e escalares d_i e $e_i \in \mathbb{F}$, tais que

$$H_i = a_i \otimes b_i \otimes (v_1 d_i + v_2 e_i).$$

Onde $\{v_1, v_2\}$ é a base canônica de $\mathbb{F}^2$. Considere as matrizes A e B , as duas $2 \times n$ construídas usando como colunas os vetores a_i e b_i . Também as matrizes D e E , as duas $n \times n$ as quais são diagonais com as coordenadas do vetor d_i na diagonal de D e as coordenadas do vetor e_i na diagonal de E . Portanto $T = [ADB^T|AEB^T]$. $\square$

Definição 3.1. Chamamos o tensor T de superdiagonal se ele tiver uma destas formas para $\alpha, \beta \in \mathbb{F} - \{0\}$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & \beta \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Lema 3.2. [15, pág 632] Um tensor superdiagonal tem posto 2.

Demonstração. Fazendo permutações se necessário, podemos assumir que T é da primeira forma, ou seja,

$$T = \left[\begin{array}{cc|cc} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{array} \right].$$

A partir daqui podemos decompor T como a soma de dois tensores simples, ou seja,

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \alpha \\ 0 \end{array} \right] \otimes \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right] \otimes \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 0 \\ \beta \end{array} \right] \otimes \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right] \otimes \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right].$$

Isso mostra que o posto de T é ≤ 2 .

Agora a forma geral de um tensor simples de acordo com o Lema 3.1 é substituir $T = [T_1|T_2]$ com

$$T_1 = ADB^T = \begin{bmatrix} da_1b_1 & da_1b_2 \\ da_2b_1 & da_2b_2 \end{bmatrix}, \quad T_2 = AEB^T = \begin{bmatrix} ea_1b_1 & ea_1b_2 \\ ea_2b_1 & ea_2b_2 \end{bmatrix}.$$

Que é igual a $T_1 = d(AB^T)$ e $T_2 = e(AB^T)$, portanto, T_1 e T_2 são múltiplos escalares da mesma matriz AB^T de posto 1 e isso não pode acontecer em um tensor superdiagonal que, portanto, tem posto ≥ 2 . Assim, um tensor superdiagonal tem posto 2. $\square$

Às vezes trabalharemos em fatias horizontais ou verticais, mostremos as seis fatias de um tensor T .

$$T_F = \left[\begin{array}{cc|cc} x_{111} & x_{121} & x_{112} & x_{122} \\ x_{211} & x_{221} & x_{212} & x_{222} \end{array} \right],$$

$$T_V = \left[\begin{array}{cc|cc} x_{111} & x_{112} & x_{121} & x_{122} \\ x_{211} & x_{212} & x_{221} & x_{222} \end{array} \right],$$

$$T_H = \left[\begin{array}{cc|cc} x_{111} & x_{121} & x_{211} & x_{221} \\ x_{112} & x_{122} & x_{212} & x_{222} \end{array} \right].$$

Assim T_F é o tensor em suas fatias frontais, T_V é o tensor em suas fatias verticais, e T_H é o tensor em suas fatias horizontais. Note que se $T_F = [\alpha \ \beta | \gamma \ \delta]$ como colunas, então $T_V = [\alpha \ \gamma | \beta \ \delta]$ como colunas, e se $T_F = \left[\begin{array}{c} \alpha \\ \gamma \end{array} \middle| \begin{array}{c} \beta \\ \delta \end{array} \right]$ como linhas, então $T_H = \left[\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array} \middle| \begin{array}{c} \gamma \\ \delta \end{array} \right]$ como linhas.

Lema 3.3. [15, pág 632] Seja $T \in \mathbb{F}^{2 \times 2 \times 2}$ um tensor diferente de zero que não seja superdiagonal. Então T tem posto 1 se e somente se todas as suas seis fatias forem singulares.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Temos que se T tem pelo menos uma fatia não singular seu posto é ≥ 2 , já que essa fatia teria posto 2 pela Proposição 2.2.

($\Leftarrow$) Vamos provar que se todas as fatias de T forem singulares, então T tem posto 1.

Caso 1. Alguma fatia é zero.

Vamos supor, sem perda de generalidade, que $T_1 = 0$. Como T_2 é diferente de zero e singular, então $T_2 = a \otimes b$ com vetores a, b em $\mathbb{F}^2 - \{0\}$, então $T = a \otimes b \otimes e_2$ com $e_2 = [0, 1]^T$ e T tem posto 1.

Caso 2. Nenhuma fatia é zero.

Como T_1 é singular e diferente de zero, temos que $T_1 = a \otimes b$ com $a = [a_1 \ a_2]^T$ e $b = [b_1 \ b_2]$ não simultaneamente nulos. Transpondo as fatias verticais de T se necessário, podemos assumir que a primeira coluna de T_1 é diferente de zero. Como T_1 é singular, $T_1 = [a \ \lambda a]$, para algum $a \in \mathbb{F}^2$ não nulo e algum $\lambda \in \mathbb{F}$.

Escreva $T_F = [a \ \lambda a | c \ d]$, com $a, c, d \in \mathbb{F}^2$ com $a \neq 0$ e $\lambda \in \mathbb{F}$. Portanto $T_V = [a \ c | \lambda a \ d]$. Como todas as fatias são singulares temos que $c = \mu a$ para um $\mu \in \mathbb{F}$ e $T_V = [a \ \mu a | \lambda a \ d]$.

Subcaso 2a. $\lambda = 0$.

Temos $T_F = [a \ 0 | c \ d]$ com $d \neq 0$ pois nenhuma fatia é zero.

Se $\mu \neq 0$ temos que como T_2 é singular, existe um $\nu \in \mathbb{F} - \{0\}$ tal que $d = \nu a$ e $T_F = [a \ 0 | \mu a \ \nu a]$.

Olhando para T em suas fatias horizontais temos

$$T_H = \left[\begin{array}{cc|cc} a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ \mu a_1 & \nu a_1 & \mu a_2 & \nu a_2 \end{array} \right].$$

Daqui temos que $a_1 \neq 0 \neq a_2$ pois se alguma fosse zero, teríamos uma fatia horizontal nula. Além disso, as fatias horizontais também são singulares, portanto o determinante νa_2^2 da segunda fatia horizontal é zero e assim $\nu = 0$. Voltando às fatias verticais, teríamos $T_V = [a \ \mu a | 0 \ 0]$ e a segunda fatia vertical seria zero, o que é uma contradição.

Se $\mu = 0$ então $T_F = [a \ 0 | 0 \ d]$, neste caso vendo T em suas fatias horizontais temos,

$$T_H = \left[\begin{array}{cc|cc} a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 & d_2 \end{array} \right],$$

neste caso, como as fatias devem ser singulares mas não nulas, então deve ser que a_1 e d_2 sejam zero, ou a_2 e d_1 sejam zero; em ambos os casos, teríamos um tensor superdiagonal, que, como sabemos pelo Lema 3.2, tem posto 2, portanto μ não pode ser zero.

Assim, chegamos a uma contradição (μ não pode ser zero e não pode ser diferente de zero), então λ não pode ser igual a zero.

Subcaso 2b. $\lambda \neq 0$.

Temos que $T_v = [a \ \mu a \mid \lambda a \ d]$, como $\lambda a \neq 0$, então $d = \nu a$ para algum $\nu \in \mathbb{F}$, então $T_F = [a \ \lambda a \mid \mu a \ \nu a]$.

Como $a_1 \neq 0$ ou $a_2 \neq 0$ temos,

$$T_H = \left[\begin{array}{cc|cc} a_1 & \lambda a_1 & a_2 & \lambda a_2 \\ \mu a_1 & \nu a_1 & \mu a_2 & \nu a_2 \end{array} \right].$$

E a singularidade das fatias horizontais implica que $\nu = \lambda\mu$, portanto

$$T_F = [a \ \lambda a \mid \mu a \ \lambda\mu a] = [a_1 \ a_2]^T \otimes [1 \ \lambda]^T \otimes [1 \ \mu]^T,$$

ou seja T tem posto 1. □

Observação. Até agora temos que para um tensor $T \in \mathbb{F}^{2 \times 2 \times 2}$:

1. Seu posto é zero se e somente se T for o tensor zero.
2. Se T for um tensor superdiagonal, então seu posto é 2.
3. O posto de T é 1 se e somente se T for diferente de zero, não for superdiagonal e todas suas fatias forem singulares.

A seguir vamos dar uma cota superior para o posto de $T \in \mathbb{F}^{2 \times 2 \times 2}$.

Lema 3.4. [15, pág 632-633] O posto de um tensor $T \in \mathbb{F}^{2 \times 2 \times 2}$ é no máximo 3.

Demonstração. Como mencionado na observação anterior, basta considerar o caso em que uma das fatias de T seja não singular. Fazendo as permutações necessárias, assumiremos que T_2 não é singular.

Temos $T = [T_1|T_2]$, como T_2 não é singular, ele tem uma inversa, então operando por T_2^{-1} temos:

$$T_1 T_2^{-1} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T_2 T_2^{-1} = Id = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Logo temos o novo tensor

$$S = [T_1 T_2^{-1} | Id] = \left[\begin{array}{cc|cc} y_{11} & y_{12} & 1 & 0 \\ y_{21} & y_{22} & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Que tem o mesmo posto que T . Podemos decompor o tensor S como a soma de três tensores simples:

$$\begin{aligned} S &= \left[\begin{array}{cc|cc} y_{11} & y_{12} & 1 & 0 \\ y_{21} & y_{22} & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc|cc} y_{12} & y_{12} & 0 & 0 \\ y_{21} & y_{21} & 0 & 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc|cc} y_{11} - y_{12} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_{22} - y_{21} & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &= \begin{bmatrix} y_{12} \\ y_{21} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} y_{11} - y_{12} \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} y_{22} - y_{21} \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim cada um dos tensores tem posto 1 e o tensor T tem posto no máximo 3. □

Seja $T \in \mathbb{F}^{2 \times 2 \times 2}$ um tensor com uma fatia não singular. Então T não é superdiagonal nem nulo. Pelo Lema 3.3 o posto de T é ≥ 2 e do Lema 3.4 vemos que o posto de T é no máximo 3, ou seja, T pode ter posto 2 ou 3. No próximo teorema veremos os casos em que cada posto é válido. Para simplificar a demonstração do teorema, definimos uma função auxiliar no próximo lema.

Lema 3.5. Seja $T \in \mathbb{F}^{2 \times 2 \times 2}$ tal que $T = [T_1|T_2]$ com T_1 não singular, T_2 não é um múltiplo escalar de T_1 , defina $f : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ como $\lambda \mapsto \det(T_2 - \lambda T_1)$. Então T tem posto 2 se e somente se f tem duas raízes distintas em $\mathbb{F}$.

Demonstração. ($\Rightarrow$). Pelo Lema 3.1, temos para $n = 2$

$$A = \begin{bmatrix} a^{(1)} & a^{(2)} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b^{(1)} & b^{(2)} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix},$$

onde $T_1 = ADB^T = d_1 a^{(1)} b^{(1)T} + d_2 a^{(2)} b^{(2)T}$ e $T_2 = AEB^T = e_1 a^{(1)} b^{(1)T} + e_2 a^{(2)} b^{(2)T}$.

Por hipótese temos que T_1 não é singular, então tem posto 2, logo temos que $d_1 \neq 0 \neq d_2$.

Afirmção: A matriz E não é um múltiplo escalar de D .

Se fosse um múltiplo escalar então $E = \lambda D$ para um $\lambda \in \mathbb{F}$ e teríamos que $T_2 = AEB^T = \lambda ADB^T = \lambda ADB^T = \lambda T_1$ o que é uma contradição, pois assumimos que T_2 não é um múltiplo escalar de T_1 . Daqui temos que:

$$\begin{aligned} d_1 e_2 &\neq d_2 e_1 \\ e_2 &\neq d_1^{-1} d_2 e_1 \\ d_2^{-1} e_2 &\neq d_1^{-1} e_1 \end{aligned}$$

então, as matrizes $T_2 - d_1^{-1} e_1 T_1$ e $T_2 - d_2^{-1} e_2 T_1$ são diferentes, também temos que

$$\begin{aligned} T_2 - d_1^{-1} e_1 T_1 &= e_1 a^{(1)} b^{(1)T} + e_2 a^{(2)} b^{(2)T} - d_1^{-1} e_1 (d_1 a^{(1)} b^{(1)T} + d_2 a^{(2)} b^{(2)T}) \\ &= e_1 a^{(1)} b^{(1)T} + e_2 a^{(2)} b^{(2)T} - e_1 a^{(1)} b^{(1)T} - d_1^{-1} d_2 e_1 a^{(2)} b^{(2)T} \\ &= d_1^{-1} (d_1 e_2 - d_2 e_1) a^{(2)} b^{(2)T}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2 - d_2^{-1} e_2 T_1 &= e_1 a^{(1)} b^{(1)T} + e_2 a^{(2)} b^{(2)T} - d_2^{-1} e_2 (d_1 a^{(1)} b^{(1)T} + d_2 a^{(2)} b^{(2)T}) \\ &= e_1 a^{(1)} b^{(1)T} + e_2 a^{(2)} b^{(2)T} - d_1 d_2^{-1} e_2 a^{(1)} b^{(1)T} - e_2 a^{(2)} b^{(2)T} \\ &= -d_2^{-1} (d_1 e_2 - d_2 e_1) a^{(1)} b^{(1)T}. \end{aligned}$$

Então vemos que essas duas matrizes têm posto 1, portanto são singulares, logo $\det(T_2 - \lambda T_1)$ tem duas raízes distintas $\lambda_1 = d_1^{-1} e_1$ e $\lambda_2 = d_2^{-1} e_2$.

($\Leftarrow$). Seja a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} \\ \lambda &\longmapsto \det(T_2 - \lambda T_1), \end{aligned}$$

a qual tem duas raízes distintas $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$. A partir daqui temos duas matrizes $T_2 - \lambda_1 T_1$ e $T_2 - \lambda_2 T_1$ que são singulares. Se uma delas for zero teríamos que T_2 é múltiplo escalar de T_1 e por hipótese isso não acontece, portanto nenhuma é nula e assim as duas tem posto 1. Então:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}(T_2 - \lambda_2 T_1) = \alpha^{(1)} \otimes \beta^{(1)} \neq 0, \quad -(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}(T_2 - \lambda_1 T_1) = \alpha^{(2)} \otimes \beta^{(2)} \neq 0,$$

temos que:

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}(T_2 - \lambda_2 T_1) &= \alpha^{(1)} \otimes \beta^{(1)} \\ T_2 - \lambda_2 T_1 &= \alpha^{(1)} \otimes \beta^{(1)}(\lambda_1 - \lambda_2) \\ T_2 - \lambda_2 T_1 &= \lambda_1 \alpha^{(1)} \otimes \beta^{(1)} - \lambda_2 \alpha^{(1)} \otimes \beta^{(1)} \\ T_2 &= \lambda_2 T_1 + \lambda_1 \alpha^{(1)} \otimes \beta^{(1)} - \lambda_2 \alpha^{(1)} \otimes \beta^{(1)}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

por outro lado;

$$\begin{aligned} -(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}(T_2 - \lambda_1 T_1) &= \alpha^{(2)} \otimes \beta^{(2)} \\ T_2 - \lambda_1 T_1 &= \alpha^{(2)} \otimes \beta^{(2)}(\lambda_2 - \lambda_1) \\ T_2 - \lambda_1 T_1 &= \lambda_2 \alpha^{(2)} \otimes \beta^{(2)} - \lambda_1 \alpha^{(2)} \otimes \beta^{(2)} \\ T_2 &= \lambda_1 T_1 + \lambda_2 \alpha^{(2)} \otimes \beta^{(2)} - \lambda_1 \alpha^{(2)} \otimes \beta^{(2)}, \end{aligned}$$

a partir dessas equações temos que,

$$\begin{aligned} \lambda_2 T_1 + \lambda_1 \alpha^{(1)} \otimes \beta^{(1)} - \lambda_2 \alpha^{(1)} \otimes \beta^{(1)} &= \lambda_1 T_1 - \lambda_1 \alpha^{(2)} \otimes \beta^{(2)} + \lambda_2 \alpha^{(2)} \otimes \beta^{(2)} \\ \lambda_2 T_1 - \lambda_1 T_1 &= -\lambda_1 \alpha^{(2)} \otimes \beta^{(2)} + \lambda_2 \alpha^{(2)} \otimes \beta^{(2)} \\ &\quad - \lambda_1 \alpha^{(1)} \otimes \beta^{(1)} + \lambda_2 \alpha^{(1)} \otimes \beta^{(1)} \\ (\lambda_2 - \lambda_1) T_1 &= (\lambda_2 - \lambda_1) \alpha^{(2)} \otimes \beta^{(2)} + (\lambda_2 - \lambda_1) \alpha^{(1)} \otimes \beta^{(1)} \\ T_1 &= \alpha^{(1)} \otimes \beta^{(1)} + \alpha^{(2)} \otimes \beta^{(2)} \end{aligned}$$

substituindo em (3.1) temos finalmente

$$\begin{aligned} T_2 &= \lambda_1 \alpha^{(1)} \otimes \beta^{(1)} + \lambda_1 \alpha^{(2)} \otimes \beta^{(2)} - \lambda_1 \alpha^{(2)} \otimes \beta^{(2)} + \lambda_2 \alpha^{(2)} \otimes \beta^{(2)} \\ T_2 &= \lambda_1 \alpha^{(1)} \otimes \beta^{(1)} + \lambda_2 \alpha^{(2)} \otimes \beta^{(2)}. \end{aligned}$$

Pela Proposição 2.2 temos que o posto de T é pelo menos 2 já que T_1 é não singular. Como T pode ser escrito como soma de duas matrizes de posto 1, pelo Teorema 2.1 o posto de T é no máximo 2, portanto o posto de T é 2. $\square$

Definimos um polinômio com os coeficientes do tensor que ajudará a determinar se ele tem posto 2 ou 3.

Definição 3.2. Para um tensor $T \in \mathbb{F}^{2 \times 2 \times 2}$, o hiperdeterminante de Cayley é o seguinte polinômio homogêneo de grau 4 nas entradas x_{ijk} de T :

$$\begin{aligned} \Delta(T) = & x_{111}^2 x_{222}^2 + x_{112}^2 x_{221}^2 + x_{121}^2 x_{212}^2 + x_{122}^2 x_{211}^2 \\ & - 2(x_{111} x_{112} x_{221} x_{222} + x_{111} x_{121} x_{212} x_{222} + x_{111} x_{122} x_{211} x_{222} \\ & + x_{112} x_{121} x_{212} x_{221} + x_{112} x_{122} x_{211} x_{221} + x_{121} x_{122} x_{211} x_{212}) \\ & + 4(x_{111} x_{122} x_{212} x_{221} + x_{112} x_{121} x_{211} x_{222}). \end{aligned}$$

Agora temos todas as ferramentas necessárias para provar o teorema principal do capítulo.

Teorema 3.1. [15, pág 633–634] Seja $T \in \mathbb{F}^{2 \times 2 \times 2}$ um tensor cuja primeira fatia frontal T_1 é não singular. Se T_2 é um múltiplo escalar de T_1 , então T tem posto 2. Se T_2 não é um múltiplo escalar de T_1 , então,

- a) se $\Delta(T) > 0$ (para $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) ou $\Delta(T) \neq 0$ (para $\mathbb{F} = \mathbb{C}$) então T tem posto 2;
- b) se $\Delta(T) = 0$ então T tem posto 3;
- c) se $\Delta(T) < 0$ (para $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) o posto é 3.

Demonstração. Primeiro, como T_1 não é singular, então T_1 tem posto 2, logo pode ser escrito na forma

$$T_1 = a^{(1)} \otimes b^{(1)} + a^{(2)} \otimes b^{(2)}.$$

Supondo que T_2 é múltiplo escalar de T_1 , digamos $T_2 = \lambda T_1$, e operarmos a T_1 com $c = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \end{bmatrix}^T$, obtemos:

$$T = T_1 \otimes c = a^{(1)} \otimes b^{(1)} \otimes c + a^{(2)} \otimes b^{(2)} \otimes c = \begin{bmatrix} T_1 & \lambda T_1 \end{bmatrix},$$

onde verificamos que T tem posto 2.

Agora vamos olhar para o caso em que T_2 não é um múltiplo escalar de T_1 . Vamos ver o $\det(T_2 - \lambda T_1)$,

$$\begin{aligned} \det(T_2 - \lambda T_1) &= \det \left(\begin{bmatrix} x_{112} & x_{122} \\ x_{212} & x_{222} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda x_{111} & \lambda x_{121} \\ \lambda x_{211} & \lambda x_{221} \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \begin{bmatrix} x_{112} - \lambda x_{111} & x_{122} - \lambda x_{121} \\ x_{212} - \lambda x_{211} & x_{222} - \lambda x_{221} \end{bmatrix} \\ &= (x_{112} x_{222} - \lambda x_{221} x_{112} - \lambda x_{111} x_{222} + \lambda^2 x_{111} x_{221}) \\ &\quad - (x_{212} x_{122} - \lambda x_{121} x_{212} - \lambda x_{211} x_{122} + \lambda^2 x_{211} x_{121}) \\ &= \lambda^2 (x_{111} x_{221} - x_{211} x_{121}) + \lambda (x_{121} x_{212} + x_{211} x_{122} \\ &\quad - x_{221} x_{112} - x_{111} x_{222}) + x_{112} x_{222} - x_{212} x_{122}, \end{aligned}$$

ordenando os termos temos que,

$$\begin{aligned} \det(T_2 - \lambda T_1) &= \lambda^2 (x_{111} x_{221} + x_{211} x_{121}) + \lambda (x_{121} x_{212} + x_{211} x_{122} - x_{221} x_{112} - x_{111} x_{222}) \\ &\quad + (x_{112} x_{222} - x_{212} x_{122}). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Agora, encontrando o discriminante da equação do segundo grau (3.2) em λ , temos:

$$\begin{aligned}
& (x_{121}x_{212} + x_{211}x_{122} - x_{221}x_{112} - x_{111}x_{222})^2 - 4(x_{111}x_{221} - x_{211}x_{121})(x_{112}x_{222} - x_{212}x_{122}) \quad (3.3) \\
& = x_{121}^2x_{212}^2 + x_{211}^2x_{122}^2 + x_{221}^2x_{112}^2 + x_{111}^2x_{222}^2 \\
& + 2(x_{121}x_{212}x_{211}x_{122} - x_{121}x_{221}x_{212}x_{112} - x_{111}x_{121}x_{212}x_{222} \\
& - x_{211}x_{221}x_{122}x_{112} - x_{111}x_{211}x_{122}x_{222} + x_{111}x_{221}x_{112}x_{222}) \\
& - 4(x_{111}x_{221}x_{112}x_{222} - x_{111}x_{221}x_{212}x_{122} - x_{211}x_{121}x_{112}x_{222} + x_{211}x_{121}x_{212}x_{122}) \\
& = x_{121}^2x_{212}^2 + x_{211}^2x_{122}^2 + x_{221}^2x_{112}^2 + x_{111}^2x_{222}^2 \\
& - 2(x_{121}x_{221}x_{212}x_{112} + x_{111}x_{121}x_{212}x_{222} + x_{211}x_{221}x_{122}x_{112} \\
& + x_{111}x_{211}x_{122}x_{222} + x_{111}x_{221}x_{112}x_{222} + x_{121}x_{212}x_{211}x_{122}) \\
& + 4(x_{111}x_{221}x_{212}x_{122} + x_{211}x_{121}x_{112}x_{222}), \\
& = \Delta(T).
\end{aligned}$$

Suponha que $\Delta(T) > 0$ (para $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) ou $\Delta(T) \neq 0$ (para $\mathbb{F} = \mathbb{C}$), então o Lema 3.5 demonstra o ítem a). No caso em que $\Delta(T) = 0$ ou $\Delta(T) < 0$ em $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, pelo Lema 3.5 o posto de T não é 2. Pelo Lema 3.4 o posto de T deve ser no máximo 3. Assim os ítems b), e c) são cumpridos. $\square$

3.3 Algoritmo para determinar o posto

Nesta seção, construiremos um algoritmo para classificar os postos em tensores $2 \times 2 \times 2$. Aqui mudaremos o nome do tensor para lista que é mais usado computacionalmente.

Primero apresentaremos nossa lista unidimensional de 8 elementos:

$$T = \left[\begin{array}{cc|cc} x_{111} & x_{121} & x_{112} & x_{122} \\ x_{211} & x_{221} & x_{212} & x_{222} \end{array} \right] \iff \text{Lista} = [x_{111}, x_{121}, x_{211}, x_{221}, x_{112}, x_{122}, x_{212}, x_{222}].$$

Logo exibiremos cada uma das seis fatias como matrizes 2×2 .

Passo 1.

Agora começaremos a verificar o posto da lista inserida, primeiro veremos se ela é nula, ou seja, se cada entrada for zero, o posto será zero. Caso contrário, passamos para o Passo 2.

Passo 2.

Se o posto não for zero, procedemos à verificação se a lista é superdiagonal, se for, o posto será 2 segundo o Lema 3.2. Verificamos se a lista atende às condições de ser superdiagonal, ou seja, se atende a uma das quatro formas descritas na Definição 3.1. Se a lista não for superdiagonal, passamos para o Passo 3.

Passo 3.

Verificamos se todas as fatias são singulares, faremos isso calculando o determinante de cada fatia. Se

todos os determinantes forem zero, então a lista terá posto 1 segundo o Lema 3.3, caso contrário, passaremos para o Passo 4.

Passo 4.

Se pelo menos uma fatia não for singular, então verificaremos se a outra fatia na mesma direção (frontal, vertical, horizontal) é um múltiplo escalar desta. Se for, a lista será de posto 2 pelo Teorema 3.1. Caso contrário, passaremos para o Passo 5.

Passo 5.

Procedemos ao cálculo do hiperdeterminante de Cayley como na Definição 3.2. Decidimos se o posto é dois ou três conforme o valor do hiperdeterminante usando o Teorema 3.1.

E assim construímos um algoritmo e implementamos em Python para calcular o posto em tensores $2 \times 2 \times 2$.

```

1 import numpy as np
2 def produto_tensorial(a, b, c):
3     """
4     Produto tensorial axbxc.
5     Devolve uma lista na ordem:
6     [a1*b1*c1, a1*b2*c1, a2*b1*c1, a2*b2*c1,
7     a1*b1*c2, a1*b2*c2, a2*b1*c2, a2*b2*c2]
8     """
9     a1, a2 = a
10    b1, b2 = b
11    c1, c2 = c
12    lista = [
13        a1*b1*c1, a1*b2*c1, a2*b1*c1, a2*b2*c1,
14        a1*b1*c2, a1*b2*c2, a2*b1*c2, a2*b2*c2
15    ]
16    return lista
17 def soma_tensores(tensores):
18     return list(np.sum(np.array(tensores), axis=0))
19 # Exemplos (use um por vez)
20 # Base
21 a1 = [2, 1]; b1 = [1, -2]; c1 = [-2, -3]
22 lista1 = produto_tensorial(a1, b1, c1)
23 # Permutacao de fatores
24 lista2 = produto_tensorial(c1, a1, b1)
25 lista3 = produto_tensorial(b1, c1, a1)
26 # Soma de tensores
27 lista4 = soma_tensores([lista1, lista2])
28 lista5 = soma_tensores([lista1, lista2, lista3])
29 # Superdiagonal
30 lista6 = [0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0]
31 # Fatias multiplas

```

```

32 lista7 = [-1, 7, 2, 0, -2, 14, 4, 0]
33 # Todas as fatias singulares
34 lista8 = [-1, 0, 5, 0, -6, 0, 30, 0]
35 # Hiperdeterminante de Cayley negativo
36 lista9 = [2, 0, 0, 1, 0, 3, -5, 0]
37 # Hiperdeterminante de Cayley positivo
38 lista10 = [2, 5, -6, -8, 4, 10, -12, 0]
39 # Exemplo: hiperdeterminante zero e sem fatias multiplas
40 lista11 = [1, -1, 3, 3, 3, -1, -3, 3]
41 # mude a linha abaixo para lista2, ..., lista11 para testar outros casos
42 lista = lista9
43 # Mostrar fatias do tensor
44 def mostrar_fatias(tensor):
45     # Fatias frontais (fixo k)
46     print("Fatias frontais:")
47     fatias_frontais = []
48     for k in range(tensor.shape[2]):
49         f = tensor[:, :, k]
50         fatias_frontais.append(f)
51         print(f"Fatia frontal k={k}:")
52         print(f)
53     # Fatias horizontais (fixo i)
54     print("\nFatias horizontais:")
55     fatias_horizontais = []
56     for i in range(tensor.shape[0]):
57         f = tensor[i, :, :]
58         fatias_horizontais.append(f)
59         print(f"Fatia horizontal i={i}:")
60         print(f)
61     # Fatias verticais (fixo j)
62     print("\nFatias verticais:")
63     fatias_verticais = []
64     for j in range(tensor.shape[1]):
65         f = tensor[:, j, :]
66         fatias_verticais.append(f)
67         print(f"Fatia vertical j={j}:")
68         print(f)
69     return fatias_frontais, fatias_horizontais, fatias_verticais
70 # Passo 1: verifica se a lista e nula
71 def passo_1(lista):
72     return np.all(np.array(lista) == 0)
73 # Passo 2: verifica se a lista e superdiagonal
74 def passo_2(lista):
75     if lista[0] != 0 and lista[7] != 0 and all(x == 0 for x in lista[1:7]):
76         return True

```

```

77     if lista[1] != 0 and lista[6] != 0 and all(x == 0 for x in [lista[0], lista[2], lista
78         [3], lista[4], lista[5], lista[7]]):
79         return True
80     if lista[2] != 0 and lista[5] != 0 and all(x == 0 for x in [lista[0], lista[1], lista
81         [3], lista[4], lista[6], lista[7]]):
82         return True
83     if lista[3] != 0 and lista[4] != 0 and all(x == 0 for x in [lista[0], lista[1], lista
84         [2], lista[5], lista[6], lista[7]]):
85         return True
86     return False
87 # Passo 3: verifica se todas as fatias sao singulares
88 def passo_3(lista):
89     # Reconstruir tensor 2x2x2
90     tensor = np.array([
91         [[lista[0], lista[4]], [lista[1], lista[5]]],
92         [[lista[2], lista[6]], [lista[3], lista[7]]]
93     ])
94     fatias_frontais, fatias_horizontais, fatias_verticais = mostrar_fatias(tensor)
95     todas_fatias = fatias_frontais + fatias_horizontais + fatias_verticais
96     # Verificar singularidade de cada fatia
97     todas_singulares = all(
98         abs(np.linalg.det(f)) < 1e-12 for f in todas_fatias
99     )
100     return todas_singulares, fatias_frontais, fatias_horizontais, fatias_verticais
101 # Verifica se duas matrizes sao multiplos escalares
102 def e_multiplo_escalar(matriz1, matriz2):
103     if np.all(matriz1 == 0) or np.all(matriz2 == 0):
104         return True
105     indices = np.argwhere(matriz1 != 0)
106     i, j = indices[0]
107     ratio = matriz2[i, j] / matriz1[i, j]
108     for x in range(matriz1.shape[0]):
109         for y in range(matriz1.shape[1]):
110             if not np.isclose(matriz2[x, y], ratio * matriz1[x, y]):
111                 return False
112     return True
113 # Passo 4: verifica se ha fatias multiplos escalares
114 def passo_4(fatias):
115     return e_multiplo_escalar(fatias[0], fatias[1])
116 # Calculo do hiperdeterminante de Cayley
117 def calcular_hiperdeterminante(lista):
118     a, b, c, d, e, f, g, h = lista
119     delta = (
120         a**2 * h**2 + b**2 * g**2 + c**2 * f**2 + d**2 * e**2
121         - 2 * (a*b*g*h + a*c*f*h + a*d*e*h

```

```

119         + b*c*f*g + b*d*e*g + c*d*e*f)
120     + 4 * (a*d*f*g + b*c*e*h)
121 )
122     return delta
123 # Funcao principal
124 def verificar_posto(lista):
125     # Reconstruir o tensor a partir da lista
126     tensor = np.array([
127         [[lista[0], lista[4]], [lista[1], lista[5]]],
128         [[lista[2], lista[6]], [lista[3], lista[7]]]
129     ])
130     # Passo 1: nula
131     if passo_1(lista):
132         return "A lista e nula, tem posto 0."
133     # Passo 2: superdiagonal
134     if passo_2(lista):
135         return "A lista e superdiagonal, tem posto 2."
136     # Passo 3: verificar se todas as fatias sao singulares
137     todas_singulares, fatias_frontais, fatias_horizontais, fatias_verticais = passo_3(
138         lista)
139     # Se todas sao singulares -> posto 1
140     if todas_singulares:
141         return "A lista e de posto 1, todas as fatias sao singulares."
142     # Passo 4: multiplos escalares
143     if (passo_4(fatias_frontais) or
144         passo_4(fatias_horizontais) or
145         passo_4(fatias_verticais)):
146         return "O tensor e de posto 2, existe um par de fatias multiplas escalares."
147     # Passo 5: Hiperdeterminante de Cayley
148     delta = calcular_hiperdeterminante(lista)
149     # Casos do teorema (T2 nao multiplo de T1):
150     if abs(delta) < 1e-12:
151         return "O hiperdeterminante de Cayley e zero: posto 3 (R e C)."
152     elif delta > 0:
153         return "O hiperdeterminante de Cayley e positivo: posto 2 (R e C)."
154     else: # delta < 0
155         return "O hiperdeterminante de Cayley e negativo: sobre R: posto 3; sobre C:
156             posto 2."
157 if __name__ == "__main__":
158     print(verificar_posto(lista))

```

O leitor pode encontrar o código python no seguinte link.

<https://github.com/Lizzethp/PostoTensor>

Capítulo 4

Tensores $3 \times 2 \times 2$

Neste capítulo estudamos tensores do tipo $T = [A|B] \in \mathbb{F}^{m \times n \times 2}$. Seguindo os resultados de [14], apresentamos limites superiores para o posto nesse formato e derivamos, como caso particular, o posto máximo para tensores $3 \times 2 \times 2$. Esses resultados servirão de base para análises realizadas nos capítulos seguintes.

Lema 4.1 (Teorema 1.1-1.2 e Lema 3.7 [14]). Seja $T = [A|B] \in \mathbb{F}^{m \times n \times 2}$ com $m \geq n \geq 2$. Então:

$$\mathbf{R}(T) \leq \begin{cases} n + \lfloor m/2 \rfloor & \text{se } n \leq m \leq 2n - 1 \\ 2n & \text{se } m \geq 2n \end{cases}$$

Corolário 4.1 (Posto máximo em $3 \times 2 \times 2$). Para todo $T \in \mathbb{F}^{3 \times 2 \times 2}$ tem-se $\mathbf{R}(T) \leq 3$.

Capítulo 5

Tensores $3 \times 3 \times 2$

Neste capítulo estudamos o posto de tensores da forma $T = [A|B] \in \mathbb{F}^{3 \times 3 \times 2}$ analisando como as propriedades das matrizes A e B influenciam diretamente esse posto. Seguindo os resultados clássicos de Kruskal [3] e os argumentos de Ja'Ja' [8], organizamos a demonstração em casos determinados pela soma dos postos das fatias frontais. Quando $\mathbf{R}(A) + \mathbf{R}(B) \leq 4$, o limite para o posto do tensor segue imediatamente dessa condição. Já quando $\mathbf{R}(A) + \mathbf{R}(B) \geq 5$ recorreremos a equivalências matriciais que preservam o posto e permitem trabalhar com formas canônicas — a racional no caso real e a de Jordan no caso complexo.

Essas transformações reduzem o estudo a modelos mais simples, nos quais o tensor pode ser decomposto explicitamente como soma de poucos tensores simples. Cada lema estabelece um desses casos particulares, e ao final, o Teorema 5.1 sintetiza o resultado geral: qualquer tensor $3 \times 3 \times 2$ tanto sobre $\mathbb{R}$ quanto sobre $\mathbb{C}$, possui posto no máximo igual a quatro.

Lema 5.1. [3, pág 407] O tensor $T = [A|B] \in \mathbb{F}^{3 \times 3 \times 2}$ onde $\mathbf{R}(A) + \mathbf{R}(B) \leq 4$, tem posto no máximo 4.

Demonstração. Por hipótese e pela Proposição 2.3 temos:

$$\mathbf{R}(T) \leq \mathbf{R}(A) + \mathbf{R}(B) \leq 4.$$

□

Lema 5.2. [3, pág 407] O tensor $T = [A|B] \in \mathbb{F}^{3 \times 3 \times 2}$ onde $\mathbf{R}(A) + \mathbf{R}(B) \geq 5$ e $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ tem posto no máximo 4.

Demonstração. Uma matriz 3×3 tem posto no máximo 3 ou seja, $\mathbf{R}(A) \leq 3$ e $\mathbf{R}(B) \leq 3$. Além disso, se temos simultaneamente que $\mathbf{R}(A) \leq 2$ e $\mathbf{R}(B) \leq 2$ não podemos ter que $\mathbf{R}(A) + \mathbf{R}(B) \geq 5$. Daqui temos que A ou B tem posto 3 e o outro tem posto ≥ 2 . Sem perda de generalidade vamos supor que A tem posto 3 e B tem posto ≥ 2 . Como A é invertível, multiplicando a A e B por A^{-1} temos que $[A|B] \approx [I|C]$

com $C = A^{-1}B$ e $\mathbf{R}(C) \geq 2$. Resta mostrar que qualquer tensor desse tipo em $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ tem posto ≤ 4 .

Existe uma matriz invertível E tal que $Q = E^{-1}CE$ é a forma canônica racional de C pelo Corolário 1.2, também temos que $I = E^{-1}IE$ logo, pode-se operar sobre $[I|C]$ por E^{-1} a esquerda e por E a direita, para obter assim $[I|C] \approx [I|Q]$, com $\mathbf{R}(Q) \geq 2$, nós trabalharemos com este último tensor.

Sobre $\mathbb{R}$ os possíveis casos que vamos estudar numa matriz 3×3 com sua forma canônica racional (F.C.R.) seguindo o Corolário 1.2 são:

Caso 1. Vemos que Q é uma matriz diagonal, logo, temos que

$$[I|Q] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & c \end{array} \right] = e_1 \otimes e_1 \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix} + e_2 \otimes e_2 \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix} + e_3 \otimes e_3 \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ c \end{bmatrix},$$

assim $\mathbf{R}([I|Q]) \leq 3$.

Caso 2. Temos

$$[I|Q] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & c \end{array} \right],$$

onde pode-se ver que o primeiro termo tem posto igual ao posto do tensor $2 \times 2 \times 2$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & a \end{array} \right],$$

que é ≤ 3 pelo Lema 3.4. E o segundo termo tem posto 1 logo, $\mathbf{R}([I|Q]) \leq 4$.

Caso 3. Aqui $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}$. Adaptamos o argumento de Ja'Ja' [8]. Definimos a matriz

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

Temos que a matriz $Q - D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ tem por polinômio mínimo $t^3 - t$ com autovalores $t_1 = 1, t_2 = 0$, e $t_3 = -1$ e portanto a matriz $Q - D$ é diagonalizável, assim existe uma matriz P tal que

$$P^{-1}(Q - D)P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = E_{11} - E_{33},$$

$$\text{com } E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

daqui obtemos $Q = D + (Q - D) = D + P(E_{11} - E_{33})P^{-1} = D + PE_{11}P^{-1} - PE_{33}P^{-1}$, e temos

$$\begin{aligned} [I|Q] &= [I|D + PE_{11}P^{-1} - PE_{33}P^{-1}] \\ &= [0|D] + [I|PE_{11}P^{-1} - PE_{33}P^{-1}] \\ &= [0|D] + [PP^{-1}|PE_{11}P^{-1} - PE_{33}P^{-1}] \\ &= [0|D] + P[I|E_{11} - E_{33}]P^{-1} \\ &= [0|D] + P[E_{11} + E_{22} + E_{33}|E_{11} - E_{33}]P^{-1} \\ &= [0|D] + P[E_{11}|E_{11}]P^{-1} + P[E_{22}|0]P^{-1} - P[E_{33}|E_{33}]P^{-1} \\ &= [0|D] + [PE_{11}P^{-1}|PE_{11}P^{-1}] + [PE_{22}P^{-1}|0] - [PE_{33}P^{-1}|PE_{33}P^{-1}] \\ &= [0|D] + P[E_{11}|E_{11}]P^{-1} + P[E_{22}|0]P^{-1} - P[E_{33}|E_{33}]P^{-1}. \end{aligned}$$

Logo $\mathbf{R}([I|Q]) \leq 4$. □

Lema 5.3. [3, pág 407] O tensor $T = [A|B] \in \mathbb{F}^{3 \times 3 \times 2}$ onde $\mathbf{R}(A) + \mathbf{R}(B) \geq 5$ e $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ tem posto no máximo 4.

Demonstração. Temos que uma matriz 3×3 tem posto no máximo 3, ou seja $\mathbf{R}(A) \leq 3$ e $\mathbf{R}(B) \leq 3$. Além disso, se temos simultaneamente que $\mathbf{R}(A) \leq 2$ e $\mathbf{R}(B) \leq 2$ não podemos ter que $\mathbf{R}(A) + \mathbf{R}(B) \geq 5$. Assumiremos sem perda de generalidade que $\mathbf{R}(A) = 3$ e $\mathbf{R}(B) \geq 2$. Como A é invertível, multiplicando a A e B por A^{-1} temos que $[A|B] \approx [I|C]$ com $C = A^{-1}B$ e $\mathbf{R}(C) \geq 2$. Resta mostrar que qualquer tensor desse tipo em $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ tem posto ≥ 4 . Pelo Corolário 1.1 temos que existe uma matriz invertível E tal que $J = E^{-1}CE$ é a forma canônica de Jordan (F.C.J.) de C logo, operamos sobre $[I|C]$ por E^{-1} à esquerda e por E à direita e assim obtemos $[I|C] \approx [I|J]$, com $\mathbf{R}(J) \geq 2$. Resta mostrar que qualquer tensor deste tipo tem posto ≤ 4 .

Aqui temos três casos para a F.C.J. sobre uma matriz J de tamanho 3×3 segundo o Corolário 1.1.

Caso 1. 3 blocos 1×1 e J é uma matriz diagonal

$$[I|J] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & d_3 \end{array} \right],$$

aqui, como no Caso 1. em $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ temos que $\mathbf{R}([I|J]) \leq 3$.

Caso 2. Um bloco 2×2 e um bloco 1×1 (autovalor com multiplicidade 2) temos,

$$\begin{aligned} [I|J] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & d_1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & d_2 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & d_2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \end{aligned}$$

onde o primeiro termo tem posto ≤ 3 e o outro tem posto 1, assim $\mathbf{R}([I|J]) \leq 4$.

Caso 3. Um bloco 3×3 no caso em que os autovetores não sejam independentes temos,

$$[I|J] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & d_1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & d_1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & d_1 \end{array} \right].$$

Fazendo uma mudança de base, adicionando $-d_1$ vezes a primeira fatia frontal para a segunda fatia frontal temos

$$[I|J] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = [I|E_{12} + E_{23}],$$

resta provar que o tensor tem posto ≤ 4 .

Temos a seguinte expressão explícita de $[I|E_{12} + E_{23}]$ como a soma de quatro tensores simples;

$$\begin{aligned} [I|E_{12} + E_{23}] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ &+ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

e assim $\mathbf{R}([I|E_{12} + E_{23}]) \leq 4$. □

Teorema 5.1. [3, pág 407] O posto de um tensor $T = [A|B] \in \mathbb{F}^{3 \times 3 \times 2}$ é no máximo 4 em $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Demonstração. A demonstração segue dos Lemas 5.1, 5.2 e 5.3 □

Capítulo 6

Tensores $3 \times 3 \times 3$

Neste capítulo enunciamos e demonstramos uma coleção de lemas que preparam a prova principal do Capítulo 7. Trabalhamos ainda no formato $3 \times 3 \times 3$, mas com hipóteses adicionais sobre as fatias matriciais, como a existência de vetores não nulos em interseções de núcleos ou restrições sobre os postos de A , B e C em uma decomposição $T = [A|B|C]$. O objetivo é mostrar que, sob essas condições estruturais, já podemos garantir que $\mathbf{R}(T) \leq 5$, muitas vezes reduzindo a prova ao caso $3 \times 3 \times 2$ estudado no Capítulo 5. Assim, os lemas deste capítulo funcionam como passos intermediários: cada um resolve uma configuração particular e, juntos, eles serão combinados no capítulo seguinte para tratar o caso geral.

Lema 6.1 (Primeiro Lema de Kruskal). [3, pág 411] Seja $T = [A|B|C] \in \mathbb{F}^{3 \times 3 \times 3}$ com $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Se existe um vetor diferente de zero x , tal que

$$x \in \ker(A) \cap \ker(B) \quad \text{ou} \quad x \in \ker(A^T) \cap \ker(B^T)$$

então $\mathbf{R}(T) \leq 5$.

Demonstração. Suponha que $x \neq 0$ é tal que $x \in \ker A \cap \ker B$. Seja X uma matriz não singular 3×3 , onde x é seu primeiro vetor coluna e $y, z \in \mathbb{F}^3$ completam uma base, ou seja, $X = [x|y|z]$. Operando por X em T temos que $TX = [AX|BX|CX]$ e levando em conta que $x \in \ker A \cap \ker B$, nos dá:

$$\begin{aligned} [AX|BX|CX] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & b_{12} & b_{13} & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 & b_{22} & b_{23} & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 & b_{32} & b_{33} & c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{11} & 0 & 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & b_{12} & b_{13} & 0 & c_{12} & c_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 & b_{22} & b_{23} & 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 & b_{32} & b_{33} & 0 & c_{32} & c_{33} \end{array} \right], \end{aligned} \tag{6.1}$$

a partir daqui temos que o primeiro termo de (6.1) é um tensor simples:

$$\begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Resta provar que o segundo termo de (6.1) tem posto ≤ 4 . Para isso podemos escrever este tensor restante $3 \times 2 \times 3$,

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc} a_{12} & a_{13} & b_{12} & b_{13} & c_{12} & c_{13} \\ a_{22} & a_{23} & b_{22} & b_{23} & c_{22} & c_{23} \\ a_{32} & a_{33} & b_{32} & b_{33} & c_{32} & c_{33} \end{array} \right]. \quad (6.2)$$

Visualizando este tensor (6.2) em suas fatias verticais, temos o seguinte tensor $3 \times 3 \times 2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{12} & b_{12} & c_{12} & a_{13} & b_{13} & c_{13} \\ a_{22} & b_{22} & c_{22} & a_{23} & b_{23} & c_{23} \\ a_{32} & b_{32} & c_{32} & a_{33} & b_{33} & c_{33} \end{array} \right].$$

onde pelo Teorema 5.1 seu posto é no máximo 4, e assim a prova está completa. Se $x \in \ker A^T \cap \ker B^T$, trabalhamos com as traspostas das matrizes A , B e C , e similarmente temos o resultado desejado. $\square$

Lema 6.2 (Segundo Lema de Kruskal). [3, pág 412] Seja $T \in \mathbb{F}^{3 \times 3 \times 3}$ um tensor. Se T tem fatias paralelas D e E e existem vetores não nulos x, y tais que $Dx = 0$, $y^T D = 0$ e $y^T E x \neq 0$. Então $\mathbf{R}(T) \leq 5$.

Demonstração. Vamos supor que $T = [A|B|C]$ com $A = D$ e $B = E$. Construimos $U = [x|u_2|u_3] \in GL_3(\mathbb{F})$ e $V = [y|v_2|v_3] \in GL_3(\mathbb{F})$. Pelas hipóteses pode-se obter:

$$V^T A U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}.$$

Defina $\alpha = y^T B x \neq 0, \beta = y^T C x \in \mathbb{F}$. Então existem entradas não especificadas $\alpha', \alpha'', \gamma, \delta$ e $\beta', \beta'', \eta, \theta$ tais que:

$$V^T B U = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \gamma & * & * \\ \delta & * & * \end{bmatrix} \text{ e } V^T C U = \begin{bmatrix} \beta & \beta' & \beta'' \\ \eta & * & * \\ \theta & * & * \end{bmatrix}.$$

Se β fosse igual a zero, fariamos uma mudança de base de C para $B + C$. Daqui em diante assumiremos que $\beta \neq 0$.

Como $\alpha \neq 0$, construimos uma matriz de posto um que tenha a mesma primeira linha e primeira coluna de $V^T B U$ do seguinte modo:

$$\text{Com } r^T := [1 \quad \alpha'/\alpha \quad \alpha''/\alpha], \quad c := \begin{bmatrix} \alpha \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} \text{ temos } X := cr^T = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \gamma & \gamma\alpha'/\alpha & \gamma\alpha''/\alpha \\ \delta & \delta\alpha'/\alpha & \delta\alpha''/\alpha \end{bmatrix}.$$

Analogamente, para $V^T CU$ com $\beta \neq 0$, defina

$$\text{Com } s^T := [1 \quad \beta'/\beta \quad \beta''/\beta], \quad d := \begin{bmatrix} \beta \\ \eta \\ \theta \end{bmatrix} \text{ temos } Y := ds^T := \begin{bmatrix} \beta & \beta' & \beta'' \\ \eta & \eta\beta'/\beta & \eta\beta''/\beta \\ \theta & \theta\beta'/\beta & \theta\beta''/\beta \end{bmatrix}.$$

Assim, Y também tem a primeira linha e a primeira coluna iguais às de $V^T CU$ e posto de Y é um.

Considere agora os tensores

$$\mathcal{X} = [0|X|0], \text{ e } \mathcal{Y} = [0|0|Y].$$

Ambos são tensores simples, $\mathcal{X} = (cr^T) \otimes e_2$ e $\mathcal{Y} = (ds^T) \otimes e_3$.

Defina o resto

$$K := V^T[A|B|C]U - \mathcal{X} - \mathcal{Y}.$$

Pela construção de X e Y , as primeiras linhas e colunas das fatias B e C são nulas, e também temos por hipótese que a primeira linha e a primeira coluna de A também são nulas. Então

$$K = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & * & * & 0 & * & * & 0 & * & * \end{array} \right].$$

O tensor K pode-se ver como um tensor $2 \times 2 \times 3$ e pelo Corolário 4.1 $\mathbf{R}(K) \leq 3$. Assim

$$V^T[A|B|C]U = \mathcal{X} + \mathcal{Y} + K.$$

É o tensor composto pela soma dos três tensores $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ e K , onde $\mathbf{R}(\mathcal{X}) = 1 = \mathbf{R}(\mathcal{Y})$ e $\mathbf{R}(K) \leq 3$, portanto

$$\mathbf{R}(V^T[A|B|C]U) = \mathbf{R}(\mathcal{X}) + \mathbf{R}(\mathcal{Y}) + \mathbf{R}(K) \leq 1 + 1 + 3 = 5.$$

□

Capítulo 7

Demonstração do Teorema de Kruskal

Neste capítulo reunimos os resultados obtidos nos capítulos anteriores para demonstrar o teorema central desta dissertação: todo tensor $T \in \mathbb{F}^{3 \times 3 \times 3}$, com $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, possui posto no máximo 5. Até aqui estudamos casos de menor dimensão e formatos especiais, como tensores $2 \times 2 \times 2$, $2 \times 2 \times 3$ e $3 \times 3 \times 2$, além de lemas que relacionam o posto do tensor aos postos de suas fatias matriciais. O objetivo agora é combinar esses ingredientes: fixamos a notação $T = [A|B|C]$, analisamos os possíveis valores de $\mathbf{R}(A)$, $\mathbf{R}(B)$ e $\mathbf{R}(C)$, e, por meio de mudanças de base adequadas, reduzimos cada caso aos resultados já estabelecidos. Ao final, obtemos uma prova completa do limite superior $\mathbf{R}(T) \leq 5$ na forma apresentada por Kruskal [9] e refinada por Bremner e Hu [3].

Lema 7.1. [3, pág 413-415] Seja $T = [A|B|C] \in \mathbb{F}^{3 \times 3 \times 3}$ onde $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Suponha que $\mathbf{R}(A) = \mathbf{R}(B) = \mathbf{R}(C) = 2$. Então T tem posto ≤ 5 .

Demonstração. Como cada matriz tem posto 2, então existem x_1, x_2, x_3 vetores não nulos, tais que, $Ax_1 = Bx_2 = Cx_3 = 0$ e para a transposta de cada matriz também existem y_1, y_2, y_3 vetores não nulos, tais que $y_1^T A = y_2^T B = y_3^T C = 0$, ou seja, temos

$$Ax_1 = Bx_2 = Cx_3 = 0, \text{ e } y_1^T A = y_2^T B = y_3^T C = 0. \quad (7.1)$$

Defina $X = [x_1 \ x_2 \ x_3]$ e $Y = [y_1 \ y_2 \ y_3]$ duas matrizes 3×3 . Então

$$Y^T A X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}, \quad Y^T B X = \begin{bmatrix} * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * \end{bmatrix}, \quad Y^T C X = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vamos separar em casos em conformidade com a dependência linear das colunas de X e Y .

- a. Duas colunas de X são L.D., por exemplo se $x_2 = \alpha x_1$, então $x_1 \in \ker A \cap \ker B$ e pelo Lema 6.1 $\mathbf{R}(T) \leq 5$, o mesmo vale se duas colunas de Y são L.D.
- b. Se X e Y não têm duas colunas L.D., então temos:

b1. Se o Lema 6.2 se aplica para algum par de fatias entre A, B ou C a prova acaba.

b2. Se o Lema 6.2 não se aplica para nenhum par então os escalares cruzados se anulam, ou seja

$$\begin{aligned} y_2^T A x_2 &= 0, & y_1^T B x_1 &= 0, \\ y_3^T A x_3 &= 0, & y_1^T C x_1 &= 0, \\ y_3^T B x_3 &= 0, & y_2^T C x_2 &= 0. \end{aligned}$$

b21. $\mathbf{R}(X) \leq 2$ ou $\mathbf{R}(Y) \leq 2$.

Vamos supor que $\mathbf{R}(X) \leq 2$ (o caso $\mathbf{R}(Y) \leq 2$ é analogo). Como estamos no caso **b.**, nenhuma dupla de colunas de X é L.D., logo $\mathbf{R}(X) = 2$, também temos que x_1 e x_2 são L.I. e $x_3 = \beta x_1 + \gamma x_2$, com $\beta, \gamma \in \mathbb{F}^\times$. Escolha $U = [x_1 \ x_2 \ u] \in GL_3(\mathbb{F})$ e $V = [y_1 \ y_2 \ y_3] \in GL_3(\mathbb{F}^\times)$, usando que $y_1^T A = 0$ e $A x_1 = 0$ e as anulações cruzadas de **b2** obtemos:

$$V^T A U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}, \quad V^T B U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & * \\ * & 0 & * \\ * & 0 & * \end{bmatrix}, \quad V^T C U = \begin{bmatrix} 0 & \delta & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}.$$

Com $(1, 1)$ nulos em $V^T B U$ e $V^T C U$ pois $y_1^T B x_1 = y_1^T C x_1 = 0$ e a segunda coluna de $V^T B U$ é nula pois $B x_2 = 0$. Como $C x_3 = 0$ e $x_3 = \beta x_1 + \gamma x_2$, então $\beta C x_1 + \gamma C x_2 = 0$. Assim as duas primeiras colunas de $C U$ são L.D.. Consequentemente as duas primeiras colunas de $V^T C U$ são L.D., isso força $\delta = 0$.

Escrevendo por fatias frontais, temos

$$V^T T U_F = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{13} \\ 0 & * & * & * & 0 & * \\ 0 & * & * & * & 0 & * \end{array} \middle| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & c_{13} \\ * & * & * \\ * & * & * \end{array} \right].$$

Agora, por fatias horizontais, escrevemos

$$V^T T U_H = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & b_{13} & * & 0 & * \\ 0 & 0 & c_{13} & * & * & * \end{array} \middle| \begin{array}{ccc} 0 & * & * \\ * & 0 & * \\ * & * & * \end{array} \right] = [H_1 | H_2 | H_3].$$

Note que a primeira fatia horizontal H_1 tem posto menor ou igual a um. Considere o tensor simples

$$S = [H_1 | 0 | 0].$$

Defina o resíduo $K := V^T T U_H - S$ cuja primeira fatia é nula e as outras são H_2 e H_3 ou seja, podemos considerar o tensor K como um tensor $3 \times 3 \times 2$ e pelo Teorema 5.1, $\mathbf{R}(K) \leq 4$, assim

$$\mathbf{R}(V^T T U_H) \leq \mathbf{R}(S) + \mathbf{R}(K) \leq 1 + 4 = 5,$$

o que conclui o caso **b21.**

b22. $\mathbf{R}(X) = \mathbf{R}(Y) = 3$.

Com as bases $X = [x_1 \ x_2 \ x_3]$ e $Y = [y_1 \ y_2 \ y_3]$ as três fatias de $Y^T T U$ ficam apenas as entradas indicadas que podem ser não nulas

$$Y^T A X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad Y^T B X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y^T C X = \begin{bmatrix} 0 & \varphi & 0 \\ \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Considere estes três tensores simples

$$S_1 = [S_1|0|0], \quad S_2 = [0|S_2|0], \quad S_3 = [0|0|S_3].$$

Com

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & -\beta \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & 0 & -\gamma \end{bmatrix}, \quad S_3 = \begin{bmatrix} 0 & \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Subtraindo $K = Y^T[A|B|C]X - S_1 - S_2 - S_3$ torna-se

$$K = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & \gamma & \rho & 0 & 0 \\ \beta & 0 & \beta & \gamma & 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = [K_1|K_2|K_3]. \quad (7.2)$$

Note que

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

têm posto um. Pelas formas em (7.2), cada fatia é combinação linear destas duas matrizes:

$$K_1 = \beta M - \beta N, \quad K_2 = \gamma M - \gamma N, \quad K_3 = \rho N.$$

Como as três fatias de K são geradas a partir de apenas duas matrizes de posto um pelo Teorema 2.1 concluímos que $\mathbf{R}(K) \leq 2$. Escrevemos

$$Y^T[A|B|C]X = \underbrace{S_1 + S_2 + S_3}_{\text{Tensores simples}} + \underbrace{K}_{\text{Posto no máximo 2}}.$$

Portanto obtemos $\mathbf{R}(Y^T[A|B|C]X) \leq 3 + 2 = 5$, como a mudança de bases não altera o posto então $\mathbf{R}(T) \leq 5$. Isto conclui o caso **b22**. E assim concluí a prova do lema. $\square$

Lema 7.2. [3, pág 415-418] Seja $T = [A|B|C] \in \mathbb{F}^{3 \times 3 \times 3}$, onde $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Suponha que $\mathbf{R}(A) = \mathbf{R}(B) = 2$ e $\mathbf{R}(C) = 3$. Então $\mathbf{R}(T) \leq 5$.

Demonstração. Se $\alpha A + \beta B + C$ tem posto menor ou igual a 2 para algum $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ então trocamos C por $\alpha A + \beta B + C$. Se depois disso $\mathbf{R}(C) = 2$ então terminamos pelo Lema 7.1. Caso $\mathbf{R}(C) \leq 1$ usamos a Proposição 2.3 e concluímos:

$$\mathbf{R}(T) \leq \mathbf{R}(A) + \mathbf{R}(B) + \mathbf{R}(C) \leq 2 + 2 + 1 = 5.$$

Vamos supor daqui em diante que $\alpha A + \beta B + C$ tem posto 3 para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. (1.)

Como A e B tem posto 2, existem vetores diferentes de zero tais que $Ax_1 = Bx_2 = 0$ e para A^T e B^T existem y_1 e y_2 diferentes de zero tal que $y_1^T A = y_2^T B = 0$. Como C é invertível, para qualquer vetor $v \in \mathbb{F}^3$ existe um x_3 tal que $Cx_3 = v$. Em particular, podemos escolher x_3 que satisfaça $Cx_3 = Ax_2$. Similarmente podemos definir $y_3^T C = y_2^T A$. Defina as matrizes $X = [x_1|x_2|x_3]$ e $Y = [y_1|y_2|y_3]$. Como $Cx_3 = Ax_2$ então $Y^T Cx_3 = Y^T Ax_2$, ou seja, a terceira coluna da matriz $Y^T CX$ é igual à segunda coluna da matriz $Y^T AX$. De modo similar como $y_3^T C = y_2^T A$ então a terceira linha da matriz $Y^T CX$ é igual à segunda linha da matriz $Y^T AX$. Note que a entrada $(3, 3)$ na matriz $Y^T CX$ é igual simultaneamente às entradas $(2, 3)$ e $(3, 2)$ da matriz $Y^T AX$. Assim temos

$$Y^T AX = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & \gamma & * \end{bmatrix}, \quad Y^T BX = \begin{bmatrix} * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * \end{bmatrix}, \quad Y^T CX = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & \alpha \\ 0 & \alpha & \gamma \end{bmatrix}.$$

Vamos separar em casos em conformidade com a dependência linear das colunas de X e Y .

a. Pelo menos um dos pares $\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\}$ é L.D., neste caso pelo Lema 6.1 temos o resultado desejado, por exemplo $x_2 = \lambda x_1$ temos que $Ax_1 = Bx_2 = \lambda Bx_1 = 0$ e $x_1 \in \ker A \cap \ker B$.

b. Os dois pares $\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\}$ são L.I., assim $\mathbf{R}(X) \geq 2$ e $\mathbf{R}(Y) \geq 2$.

Trabalharemos sobre este caso.

b1. Se podemos aplicar o Lema 6.2 então temos o resultado desejado.

b2. Assumimos que não podemos aplicar o Lema 6.2, ou seja temos as seguintes anulações cruzadas:

$$\begin{aligned} y_2^T Ax_2 &= 0, & y_1^T Bx_1 &= 0, \\ y_2^T Cx_2 &= 0, & y_1^T Cx_1 &= 0, \\ y_3^T C &= y_2^T A, & Cx_3 &= Ax_2. \end{aligned} \tag{7.3}$$

b21. Suponha que X ou Y tem posto 2.

Logo $x_3 = \beta x_1 + \delta x_2$, para $\beta, \delta \in \mathbb{F}$ e existem vetores diferentes de zero u, v , tais que as matrizes $U = [x_1|x_2|u]$ e $V = [y_1|y_2|v]$ tem posto 3. Então temos:

$$V^T AU = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}, \quad V^T BU = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 \\ \epsilon & 0 & * \end{bmatrix}, \quad V^T CU = \begin{bmatrix} 0 & \theta & * \\ \eta & 0 & * \\ * & * & * \end{bmatrix}.$$

Como B tem posto 2, ζ e ϵ são diferentes de zero. Também temos de (7.3) que

$$V^T Ax_2 = V^T Cx_3 = V^T C(\beta x_1 + \delta x_2) = \beta V^T Cx_1 + \delta V^T Cx_2,$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ * \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 0 \\ \eta \\ * \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} \theta \\ 0 \\ * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta\theta \\ \beta\eta \\ * \end{bmatrix}.$$

Logo $\delta\theta = 0$ e $\beta\eta = 0$. Como $x_3 \neq 0$, temos que $\beta \neq 0$ ou $\delta \neq 0$, e portanto deve ser $\eta = 0$ ou $\theta = 0$.

Se $\eta = 0$ então

$$V^T C U = \begin{bmatrix} 0 & \theta & * \\ 0 & 0 & * \\ \mu & * & * \end{bmatrix}.$$

Isso significa que

$$V^T C U - \frac{\mu}{\epsilon} V^T B U$$

tem a primeira coluna nula, e portanto $C - \frac{\mu}{\epsilon} B$ tem posto menor ou igual a 2, contradizendo (1.) Se $\theta = 0$ chegamos a outra contradição de modo similar.

Portanto, não pode ocorrer a situação em que X tem posto 2.

Se Y tem posto 2 argumento é similar trabalhando com as transpostas.

b22. Assumimos que X e Y tem posto 3.

Lembrando das equações escritas em (7.3) temos que:

$$Y^T A X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & \gamma & \delta \end{bmatrix}, \quad Y^T B X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 \\ \epsilon & 0 & \eta \end{bmatrix}, \quad Y^T C X = \begin{bmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}.$$

Se $\delta \neq 0$, podemos tomar uma combinação $\pi A + C$, para algum $\pi \in \mathbb{F}$, eliminando γ , reduzindo o posto da terceira fatia para dois. Se $\eta \neq 0$, uma combinação análoga é usada com $\pi B + C$. Em ambos os casos, a hipótese de que toda combinação $\alpha A + \beta B + C$ tem posto três é contradita, portanto $\delta = 0 = \eta$. Então

$$Y^T A X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & \gamma & 0 \end{bmatrix}, \quad Y^T B X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 \\ \epsilon & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y^T C X = \begin{bmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}.$$

Trocando as primeiras duas colunas da cada fatia obtemos:

$$Y^T [A|B|C] X = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 & \epsilon & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{array} \right].$$

Como por hipótese temos que a terceira fatia é de posto 3, temos que λ, κ e γ são diferentes de zero. Se operarmos por $1/\lambda$ na primeira fatia horizontal, por $1/\kappa$ na segunda fatia horizontal e por $1/\gamma$ na terceira

fatia horizontal, temos que,

$$Y^T[A|B|C]X = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta/\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma/\kappa & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \epsilon/\gamma & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \quad (7.4)$$

Aqui trabalhamos separadamente nos casos real e complexo.

Caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$:

De (7.4) subtraímos o seguinte tensor de posto 2:

$$\begin{aligned} S &:= \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma/\kappa & 0 & 0 & -\epsilon/\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\zeta/\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \gamma/\kappa \\ -\epsilon/\gamma \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ -\zeta/\lambda \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Daqui obtemos,

$$Y^T T X - S = K = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta/\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon/\gamma & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta/\lambda & \epsilon/\gamma & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right],$$

temos que a segunda fatia é simétrica e, portanto, diagonalizável em $\mathbb{R}$ pela Proposição 1.1. Assim, mudando de base temos que,

$$K = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 & 1 \end{array} \right],$$

o qual tem posto 3, visto que podemos escrever o tensor K como a soma de três tensores simples da seguinte forma

$$K = e_1 \otimes e_1 \otimes (\mu e_2 + e_3) + e_2 \otimes e_2 \otimes (\nu e_2 + e_3) + e_3 \otimes e_3 \otimes (\rho e_2 + e_3).$$

Portanto

$$\mathbf{R}(Y^T[A|B|C]X) = \mathbf{R}(S) + \mathbf{R}(K) \leq 2 + 3 = 5.$$

Caso $\mathbb{F} = \mathbb{C}$:

De (7.4) subtraímos o seguinte tensor de posto 2, onde a barra denota o conjugado complexo:

$$\begin{aligned}\bar{S} &:= \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma/\kappa & 0 & 0 & -\overline{\epsilon/\gamma} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\overline{\zeta/\lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \gamma/\kappa \\ -\overline{\epsilon/\gamma} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ -\overline{\zeta/\lambda} \\ 0 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

daqui obtemos,

$$Y^T T X - \bar{S} = \bar{K} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta/\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{\epsilon/\gamma} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\zeta/\lambda} & \epsilon/\gamma & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right],$$

a segunda fatia é hermitiana, portanto é diagonalizável em $\mathbb{C}$ pela Proposição 1.2. Agora argumentamos como no caso real. $\square$

Agora estudaremos o teorema principal.

Teorema 7.1 (Teorema de Kruskal). [3, pag 412] Cada tensor $T = [A|B|C] \in \mathbb{F}^{3 \times 3 \times 3}$ com $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ tem posto ≤ 5 .

Demonstração. Assuma, sem perda de generalidade, que

$$\mathbf{R}(C) \geq \mathbf{R}(B) \geq \mathbf{R}(A). \quad (7.5)$$

Pela Proposição 2.3 sabemos que, se a soma dos postos das fatias for ≤ 5 , então o posto do tensor é ≤ 5 . Portanto, podemos supor que

$$\mathbf{R}(A) + \mathbf{R}(B) + \mathbf{R}(C) \geq 6. \quad (7.6)$$

A demonstração dependerá dos postos das fatias.

Se $\mathbf{R}(C) = 2$, de (7.5) e (7.6), temos $\mathbf{R}(B) = \mathbf{R}(A) = 2$, e concluímos pelo Lema 7.1.

Daqui em diante assuma que $\mathbf{R}(C) = 3$.

Pelo Lema 1.1, usando mudanças de base convenientes, deixamos de ter (7.5) mas agora podemos assumir que tanto A quanto B são singulares:

$$\mathbf{R}(A) \leq 2, \quad \mathbf{R}(B) \leq 2, \quad \mathbf{R}(C) = 3. \quad (7.7)$$

Juntando (7.6) e (7.7) temos apenas três casos:

$$\mathbf{R}(A) = \mathbf{R}(B) = 2, \quad \mathbf{R}(C) = 3$$

e concluimos pelo Lema 7.2; ou

$$\mathbf{R}(A) = 1, \quad \mathbf{R}(B) = 2, \quad \mathbf{R}(C) = 3$$

decompondo T como $T = [A|0|0] + [0|B|C]$ e pelo Teorema 5.1 temos $\mathbf{R}(T) \leq 1 + 4 = 5$; ou

$$\mathbf{R}(A) = 2, \quad \mathbf{R}(B) = 1, \quad \mathbf{R}(C) = 3$$

que é similar.

Portanto, o Teorema de Kruskal está demonstrado. □

Referências Bibliográficas

- [1] BISHOP, R. L., AND GOLDBERG, S. I. *Tensor analysis on manifolds*. Courier Corporation, 2012.
- [2] BOYCE, W., DIPRIMA, R., AND MEADE, D. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. LTC, 2020.
- [3] BREMNER, M. R., AND HU, J. On kruskal’s theorem that every $3 \times 3 \times 3$ array has rank at most 5. *Linear algebra and its applications* 439, 2 (2013), 401–421.
- [4] CARRELL, J. B. The diagonalization theorems. Tech. report, University of British Columbia, Department of Mathematics, 2003.
- [5] CURBASTRO, G. R., AND LEVI-CIVITA, T. *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*. No. 5. Librairie scientifique, A. Blanchard, 1923.
- [6] GREUB, W. H. *Multilinear Algebra*. Greub. Springer-Verlag, 1967.
- [7] HOFFMAN, K., KUNZE, R., AND FINSTERBUSCH, H. *Algebra lineal*. Dossat, 1981.
- [8] JA’JA’, J. Optimal evaluation of pairs of bilinear forms. In *Proceedings of the tenth annual ACM symposium on Theory of computing* (1978), pp. 173–183.
- [9] KRUSKAL, J. B. Three-way arrays: rank and uniqueness of trilinear decompositions, with application to arithmetic complexity and statistics. *Linear algebra and its applications* 18, 2 (1977), 95–138.
- [10] LANDSBERG, J. M. *Tensors: geometry and applications*, vol. 128. American Mathematical Soc., 2011.
- [11] OSWALDO, L. S. J. Cuadernos de algebra : volumen 4. Álgebra lineal, 2012.
- [12] POOLE, D., AND SALERNO, M. *Álgebra linear*. Pioneira Thomson Learning, 2004.
- [13] ROMAN, S., AXLER, S., AND GEHRING, F. *Advanced linear algebra*, vol. 3. Springer, 2005.
- [14] SONG, X., ZHENG, B., AND HUANG, R. Maximal rank of $m \times n \times 2$ tensors over arbitrary fields. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 43, 2 (2022), 867–881.

- [15] TEN BERGE, J. M. Kruskal's polynomial for $2 \times 2 \times 2$ arrays and a generalization to $2 \times n \times n$ arrays. *Psychometrika* 56, 4 (1991), 631–636.
- [16] v. NEUMANN, J. Zur algebra der funktionaloperationen und theorie der normalen operatoren. *Mathematische Annalen* 102, 1 (1930), 370–427.