

Rodrigo Lipparelli Fernandez

# **Propagação Luminosa no Espaço-Tempo de Gödel**

Brasil

23 de Fevereiro de 2016



Rodrigo Lipparelli Fernandez

## **Propagação Luminosa no Espaço-Tempo de Gödel**

Dissertação submetida ao programa de Pós-Graduação em Física como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Física.

Universidade Federal de Itajubá – UNIFEI

Instituto de Física e Química – IFQ

Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Prof. Dr. Renato Klippert Barcellos

Brasil

23 de Fevereiro de 2016

Rodrigo Lipparelli Fernandez

Propagação Luminosa no Espaço-Tempo de Gödel/ Rodrigo Lipparelli Fernandez.  
– Brasil, 23 de Fevereiro de 2016-  
26 p. : il.

Orientador: Prof. Dr. Renato Klippert Barcellos

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Itajubá – UNIFEI  
Instituto de Física e Química – IFQ  
Programa de Pós-Graduação em Física, 23 de Fevereiro de 2016.

1. Relatividade Geral. 2. Modelos Análogos. 3. Eletrodinâmica Não-Linear. I.  
Orientador: Prof. Dr. Renato Klippert Barcellos. II. Universidade Federal de Itajubá.  
III. Instituto de Física e Química. IV. Título: Propagação Luminosa no Espaço-Tempo  
de Gödel

Rodrigo Lipparelli Fernandez

## **Propagação Luminosa no Espaço-Tempo de Gödel**

Dissertação submetida ao programa de Pós-Graduação em Física como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Física.

Trabalho aprovado. Brasil, 23 de fevereiro de 2016:

---

**Prof. Dr. Renato Klippert Barcellos**  
Orientador

---

**Professor**  
Prof. Dr. Mario Novello

---

**Professor**  
Prof. Dr. Vitorio Alberto de Lorenci

Brasil  
23 de Fevereiro de 2016



*Aos meus pais, aos meus irmãos e à minha grande companheira e amiga Carolina, que sempre me apoiaram e me mostraram que “impossível” é apenas uma palavra.*





# Agradecimentos

Agradeço aos amigos e professores Renato e Vitorio, que me incentivaram à realizar este trabalho. Ao meu orientador e amigo Renato, que sempre me fez questionar todos os resultados e me ajudou sempre no desenvolvimento deste trabalho. Ao professor Vitorio que me propôs a ideia e a trabalhar com o professor Renato. Agradeço ao grande amigo e também professor, Gabriel, que desde a graduação me incentiva durante nossas conversas e sempre me ensina algo novo.

Aos meus colegas de curso, que sempre levantaram questionamentos e proporcionaram um ambiente amistoso de aprendizado, tanto na parte de conversas quanto em discussões sobre Física.

Aos meus pais e irmãos, sempre presentes em todos os momentos e por oferecerem um porto seguro para toda hora.

Por fim, agradeço à grande companheira e amiga, Carolina, que esteve sempre comigo, partilhando e ajudando em todos os momentos de minha vida acadêmica e pessoal. Sou eternamente grato.



# Resumo

O modelo de Gödel é uma solução exata para as equações de campo da Relatividade Geral que descreve um fluido perfeito sem pressão em rotação num universo estacionário, onde esta solução possui a exótica propriedade de apresentar linhas do tipo-tempo fechadas.

Utilizando de uma formulação não linear da Eletrodinâmica nos coeficientes de permissividade elétrica e permeabilidade magnética podemos descrever a propagação luminosa em um material onde, sobre a influência de um campo eletromagnético externo aplicado, alterará de forma considerável a propagação deste pulso luminoso no material. Desta maneira, estas ondas eletromagnéticas propagarão neste material de acordo com as equações de geodésica nula na forma  $\hat{g}_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = 0$ , onde  $\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + f_{\mu\nu}(\epsilon, \mu)$ , é a *métrica efetiva*, sendo  $g_{\mu\nu}$  a métrica de fundo e  $f_{\mu\nu}(\epsilon, \mu)$  o termo que possui a influência na permissividade elétrica e permeabilidade magnética. A proposta deste trabalho é a verificação da possibilidade de tal material que apresente a propagação luminosa como aquela no espaço-tempo de Gödel.

**Palavras-chave:** relatividade geral. modelos análogos. eletrodinâmica não-linear.



# Abstract

The Gödel model is an exact solution to the field equations of General Relativity which describes a perfect pressureless fluid rotating in a stationary universe, where this solution presents the curious property to have closed time-like curves.

By making use of a nonlinear formulation of Electrodynamics in the electric permittivity and magnetic permeability coefficients we may describe the propagation of light inside this media where, under the influence of an external electromagnetic field applied, we are able to change considerably the propagation of the light pulse within this media. This way, these electromagnetic waves (light pulses) will propagate inside the media according to the equations of null geodesics of the form  $\hat{g}_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = 0$ , where  $\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + f_{\mu\nu}(\epsilon, \mu)$ , is the *effective metric*, whereas  $g_{\mu\nu}$  is the background metric and  $f_{\mu\nu}(\epsilon, \mu)$  the term corresponding to the influence of the media on the electric permittivity and magnetic permeability coefficients. The idea of this work is to verify if it is possible to find such media that shows the light pulse propagation just as that in which we found in the Gödel universe.

**Keywords:** general relativity, analogue models, nonlinear electrodynamics.



# Sumário

1	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	1
2	<b>O UNIVERSO DE GÖDEL</b> . . . . .	5
2.1	Modelo de Gödel . . . . .	5
2.2	Curvas do tipo tempo fechadas . . . . .	6
2.3	Propagação luminosa . . . . .	8
3	<b>MEIOS CONTÍNUOS</b> . . . . .	11
3.1	Meios Estáticos . . . . .	11
3.2	O Método de Hadamard . . . . .	13
3.3	Matriz de Fresnel. . . . .	14
4	<b>A ANALOGIA COM O UNIVERSO DE GÖDEL</b> . . . . .	17
4.1	Velocidade de fase no material . . . . .	17
4.2	Velocidade de fase no universo de Gödel . . . . .	19
5	<b>CONCLUSÕES</b> . . . . .	23
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	25





# 1 Introdução

O eletromagnetismo clássico, composto pelas quatro equações de Maxwell, descreve completamente os efeitos de campos elétricos e magnéticos e suas interações. Mais ainda, as equações mostram que tais campos não são independentes entre si, mas que possuem uma relação de tal forma que um campo elétrico pode gerar um campo magnético e vice-versa. Por tal razão, os campos, ora elétricos ou magnéticos, foram unificados em campos eletromagnéticos. Esta foi a segunda unificação de interações fundamentais na Física, sendo a primeira a Mecânica Newtoniana, unificando as equações de movimento de corpos terrestres e celestes. Ainda, foi possível verificar através deste conjunto de equações a existência de ondas eletromagnéticas no vácuo, tais que no vazio estas propagam-se com velocidade  $c$  (chamada de velocidade da luz no vácuo) e transportam energia.

Em 1905, A. Einstein publica o artigo (EINSTEIN, 1905) “*Sobre a Eletrodinâmica de corpos em movimento*”, onde descreve que a transformação temporal entre dois observadores inerciais transcorre de forma distinta. Este fato mostra, ainda, que a ideia de simultaneidade é local. A proposta deste trabalho mostrou porque a Mecânica Clássica não conseguia prever que, sobre uma mudança de referencial de um observador  $O'$  inercial para outro  $O$  também inercial, a velocidade de uma onda eletromagnética com velocidade  $v' = c$  era a mesma para o observador em  $O$ , ou seja,  $v = c$ , ao contrário do que se acreditava na época em que  $O$  observaria  $v = c + V$ , onde  $V$  era a velocidade relativa entre  $O$  e  $O'$ . A transformação correta de  $O \rightarrow O'$  é dada pelas transformações de Lorentz, que relacionam um ponto do espaço e tempo  $(t, x, y, z)$  em  $O$  com um ponto do espaço e tempo  $(t', x', y', z')$  em  $O'$ . De fato, a transformação de Lorentz mostra que as coordenadas temporais dependem das coordenadas espaciais e vice-versa. Assim, espaço e tempo foram unificados num espaço-tempo quadridimensional, sendo então a quarta coordenada o tempo, em si. No limite de baixas velocidades, i.e.,  $v \ll c$ , as transformações de Lorentz se reduzem à transformação de Galileu da Mecânica Clássica. Deste modo, a cinemática correta é descrita pela relatividade especial de tal forma que no limite de baixas velocidades, retomamos à cinemática de Newton.

A teoria da relatividade especial possui, no entanto, uma grave falha; ela ignora, por completo, a existência do campo gravitacional. Logo, não é possível considerar a relatividade especial como sendo a teoria que melhor descreve os fenômenos físicos, mas localmente podemos sempre considerar a relatividade especial como sendo válida. Assim, em 1915, A. Einstein propõe a teoria da Relatividade Geral (EINSTEIN, 1915), a qual leva em conta os efeitos gravitacionais. Em contrapartida de sua antecessora, que possui uma descrição simples, a descrição da relatividade geral é no entanto complicada, trazendo equações diferenciais parciais não-lineares e noções como variedades diferenciáveis e cálculo

tensorial.

A descrição da Relatividade Geral é uma teoria que traz uma interpretação mais fundamental, na qual relaciona diretamente uma distribuição de energia/matéria com a curvatura do espaço-tempo, ou seja, “*espaço-tempo diz como a matéria se move; matéria diz como o espaço-tempo se curva*”<sup>1</sup>. Este belo resultado é condensado, para 4 dimensões, num conjunto de 10 equações diferenciais parciais não-lineares, chamadas de *Equações de Campo da Relatividade Geral*, onde, utilizando a notação tensorial, com a constante cosmológica e em unidades geométricas  $c = G = 1$ ,

$$\underbrace{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}}_{\text{espaço-tempo}} = \underbrace{8\pi T_{\mu\nu}}_{\text{energia/matéria}},$$

onde  $R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}{}^\alpha$  é o chamado *tensor de Ricci*, dado pela contração de dois índices do *tensor de Riemann*  $R_{\mu\nu\alpha\beta}$  que mede a curvatura do espaço-tempo,  $R$  é o chamado escalar de curvatura, dado pelo traço do tensor de Ricci  $R = R^\mu{}_\mu$ . Aqui utilizamos a convenção do somatório de Einstein, sendo que índices iguais em cima e embaixo são contraídos (somados),  $R_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=0}^3 R_{\mu\alpha\nu}{}^\alpha$  e  $R = \sum_{\mu=0}^3 R^\mu{}_\mu$ , pois se trata de um espaço-tempo de quatro dimensões (variedade quadridimensional),  $g_{\mu\nu}$  é chamado *tensor métrico* do espaço-tempo,  $\Lambda$  é a chamada *constante cosmológica* e  $T_{\mu\nu}$  é o *tensor momentum-energia*. Uma vez que o tensor de Riemann envolve produtos de derivadas do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  (e, conseqüentemente, o tensor de Ricci e o escalar de curvatura), então a busca de soluções das equações de campo se dão na forma de propostas de um tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  que satisfazem as equações de campo.

Se retornamos para a relatividade especial utilizando as ideias de variedades e cálculo tensorial introduzidas pela relatividade geral, podemos descrever as equações do eletromagnetismo de forma elegante chamada *forma covariante do eletromagnetismo*. Nesta forma, podemos colocar todas as informações dos campos fundamentais  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  no chamado tensor eletromagnético antissimétrico  $F^{\mu\nu}$ , tal que

$$F^{\mu\nu} = V^{[\mu} E^{\nu]} - \eta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} V^\alpha B^\beta,$$

onde  $V^\mu$  é a velocidade do observador, e  $[ab]$  denota a operação de antissimetriação  $[ab] = ab - ba$ . As equações do movimento são, então,

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 4\pi J^\mu, \quad \mathcal{F}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \quad \mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta},$$

onde  $F^{\mu\nu}{}_{;\nu}$  denota a divergência covariante. A primeira equação nos dá as duas equações não-homogêneas do eletromagnetismo, enquanto que a segunda equação nos fornece as duas equações homogêneas. Estas são as quatro equações de Maxwell para o eletromagnetismo num espaço-tempo qualquer. Introduzimos aqui o tensor completamente antissimétrico

<sup>1</sup> John Archibald Wheeler em *Geons, Black Holes, and Quantum Foam*, p. 235

$\eta^{0123} = (\sqrt{-g})^{-1}$ , com  $g$  sendo o determinante da métrica do espaço-tempo, e o tensor dual  $\mathcal{F}^{\mu\nu}$  descrito na terceira equação acima. Este belo e elegante resultado condensa as quatro equações de Maxwell num par de equações que descrevem completamente o eletromagnetismo. A este ponto é necessário ressaltar a importância de quadrivetores. Uma vez que as transformações de Lorentz são as transformações a serem utilizadas de fato, um quadrivetor em um referencial  $O$  deve se transformar num quadrivetor no referencial  $O'$ , mais ainda, sua norma deve ser a mesma, i.e.,  $v^\mu v_\mu = v^2$  é um invariante de Lorentz. Se aplicamos as transformações de Lorentz para um vetor tridimensional, percebemos que sua norma não é a mesma, ou seja,  $(\mathbf{v})^2 \neq (\mathbf{v}')^2$ , o que viola a conservação da norma de um vetor. Porém, para um quadrivetor, sob uma mudança de referencial temos que  $v^\mu v_\mu = v'^\mu v'_\mu$ , e a norma se conserva. É importante notar, também, que as equações do eletromagnetismo são equações diferenciais parciais lineares, de modo que se um campo  $\mathbf{E}_1$  é solução das equações de Maxwell e um segundo campo  $\mathbf{E}_2$  é também solução, então a superposição destes  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$  é também solução. O mesmo sendo válido para o campo  $\mathbf{B}$ .

A razão na qual as equações do eletromagnetismo são lineares vem do fato de ao variar a ação do eletromagnetismo a sua dependência funcional é linear nos invariantes  $F = F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$  e  $G = \mathcal{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ , sendo então que temos como resultado as equações de Maxwell. No entanto, se buscamos uma formulação do eletromagnetismo não linear nos coeficientes de permissividade elétrica e permeabilidade magnética, obtemos a descrição de ondas eletromagnéticas que se propagam em meios não lineares com  $\epsilon = \epsilon(E^\mu, B^\mu)$  e  $\mu = \mu(E^\mu, B^\mu)$ . Ao fazer uma analogia com a teoria da relatividade, temos para uma onda eletromagnética que se propaga no espaço-tempo de acordo com um quadrivetor de onda  $k^\mu$  de modo que este segue uma geodésica nula, i.e.,  $k^\mu k_\mu = 0$ . Da mesma forma, temos que dentro de um material qualquer a onda eletromagnética se propaga no meio de acordo com a geodésica também nula  $k^\mu k_\mu = 0$ , de forma que este quadrivetor  $k^\mu$  carrega propriedades do material, ou seja, depende dos coeficientes de permissividade e permeabilidade. Se a dependência destes coeficientes é como na teoria de Maxwell, então teríamos a propagação de uma onda eletromagnética no espaço-tempo usual, obedecendo as equações de Maxwell. Porém, se tal material possui uma dependência não linear (LORENCI et al., 2000) nos coeficientes  $\epsilon$  e  $\mu$ , seríamos capazes de obter características de propagação não lineares, como aquelas que acontecem num espaço-tempo qualquer. Para notar isso, vemos que  $k^\mu k_\mu = g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu$ , de forma que as geodésicas nulas carregam, necessariamente, informações do espaço-tempo. Então, supomos um material de tal modo que seus coeficientes de permeabilidade e permissividade dependam dos campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  externos aplicados. Na ausência destes campos, temos o que chamamos de geometria de fundo. Ao incidir uma onda eletromagnética sobre o material, esta seguirá as geodésicas nulas conforme  $g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = 0$ , onde  $g_{\mu\nu}$  é a métrica de fundo. Agora, se fazemos incidir sobre esse material um campo eletromagnético externo, então as características do meio material mudarão

de acordo com os coeficientes de permissividade e permeabilidade, o que alterará de forma considerável a propagação da onda eletromagnética no material. Assim, esta onda propagar-se-á neste material de acordo com a geodésica nula definida por  $\hat{g}_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = 0$ , onde agora  $\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + f_{\mu\nu}(\epsilon, \mu)$  é chamada *métrica efetiva* (LORENCI; SOUZA, 2001), que contém informações da métrica de fundo  $g_{\mu\nu}$  mais a contribuição  $f_{\mu\nu}(\epsilon, \mu)$  dos coeficientes de permeabilidade e permissividade de acordo com a configuração dos campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  externos. Como os campos externos aplicados são ajustados conforme desejado, podemos então influenciar o comportamento do material de forma controlada num laboratório.

A busca por modelos análogos pode se dar também de forma mais abstrata. Através de uma Lagrangeana fundamental para este modelo podemos utilizar todas as ferramentas de cálculo variacional e então obter as equações do movimento para este. Dessa maneira, obtemos uma teoria do modelo proposto de forma que podemos propor experimentos para testá-la.

A proposta deste trabalho é estudar a possibilidade da existência de um material que seja capaz de fazer uma analogia (BITTENCOURT et al., 2014) com o espaço-tempo de Gödel, que consiste numa solução para as equações da relatividade geral que, dentre suas propriedades, possui a exótica propriedade de permitir curvas do tipo tempo fechadas.

Trabalharemos com a assinatura da métrica como  $(+, -, -, -)$ , e utilizaremos o sistema de unidades geométrico de modo que  $c = G = 1$ .

## 2 O Universo de Gödel

Faremos uma discussão sobre a proposta de solução de Gödel para as equações de campo de Einstein. Mostraremos como ela é de fato uma solução para as equações de campo da relatividade geral com constante cosmológica não-nula e faremos aqui a descrição do que são curvas tipo-tempo fechadas. Prosseguiremos para a descrição da propagação de uma onda eletromagnética para este espaço-tempo através das geodésicas nulas, obtendo então o comportamento da velocidade de fase da onda neste universo.

### 2.1 Modelo de Gödel

Em 1949, Kurt Gödel ([GÖDEL, 1949](#)) propõe uma solução para as equações de campo de Einstein com uma constante cosmológica  $\Lambda \neq 0$ . O elemento de linha em tal universo é, para um sistema de coordenadas cartesiano  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$ ,

$$ds^2 = a^2 \left[ dx_0^2 + 2e^{x_1} dx_0 dx_2 - dx_1^2 + \frac{e^{2x_1}}{2} dx_2^2 - dx_3^2 \right], \quad (2.1)$$

sendo  $a > 0$ . Se introduzimos coordenadas cilíndricas  $(t, r, \varphi, z)$ , o elemento de linha é reescrito como

$$ds^2 = 4a^2 \left\{ dt^2 + 2\sqrt{2} \sinh^2(r) dt d\varphi - dr^2 + \left[ \sinh^4(r) - \sinh^2(r) \right] d\varphi^2 - dz^2 \right\}, \quad (2.2)$$

tal que a relação entre o sistema de coordenadas  $(t, x, y, z)$  e este novo sistema é dado por

$$e^{x_1} = \cosh 2r + \cos \varphi \sinh 2r \quad (2.3a)$$

$$x_2 e^{x_1} = \sqrt{2} \sin \varphi \sinh 2r \quad (2.3b)$$

$$\tan \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{x_0 - 2t}{2\sqrt{2}} \right) = e^{-2r} \tan \frac{\varphi}{2}, \quad \text{onde } \left| \frac{x_0 - 2t}{2\sqrt{2}} \right| < \frac{\pi}{2} \quad (2.3c)$$

$$z = 2x_3. \quad (2.3d)$$

Fazemos aqui um breve paralelo com a métrica de Kerr, que descreve o espaço-tempo em torno de um objeto massivo de massa  $m$  e em rotação,

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2mr}{r^2 + \alpha^2 \cos^2 \theta} \right) dt^2 + \left( \frac{4\alpha mr \sin^2 \theta}{r^2 + \alpha^2 \cos^2 \theta} \right) dt d\varphi - \left( \frac{r^2 + \alpha^2 \cos^2 \theta}{r^2 + \alpha^2 - 2mr} \right) dr^2 \\ - \left( r^2 + \alpha^2 \cos^2 \theta \right) d\theta^2 - \left( r^2 + \alpha^2 + \frac{2\alpha^2 mr \sin^2 \theta}{r^2 + \alpha^2 \cos^2 \theta} \right) \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (2.4)$$

onde  $m$  é a massa do objeto e  $\alpha$  é à rapidez relativa da rotação, que está relacionado com o momento angular  $\alpha = \frac{J}{m}$ . Percebemos a semelhança notável quanto à presença do termo cruzado na métrica de Kerr assim como no modelo de Gödel descrito em (2.2). A presença de tal termo nos mostra que há uma vorticidade não-nula.

Ao contrário do modelo de Gödel, o modelo de Kerr possui grande aceitação da comunidade científica por ser aquele que melhor descreve a vizinhança de um objeto massivo em rotação (mais especificamente, o Horizonte de Eventos de um buraco negro sem carga e em rotação). Não há dúvidas que nosso universo não seja descrito pelo modelo de Gödel. Porém, ambos modelos de Gödel e Kerr apresentam as mesmas propriedades devido à vorticidade não-nula, sendo que estas propriedades são mais sutis no modelo de Kerr. Então, de certa forma, o modelo de Gödel serve como um laboratório para o estudo destas propriedades tão evidentes neste modelo, motivo pelo qual fazemos este paralelo com a métrica de Kerr.

Retornando ao modelo de Gödel, temos que este descreve um fluido perfeito sem pressão e com rotação não-nula, que possui o seguinte tensor momentum-energia

$$T_{\mu\nu} = 8\pi\rho V_\mu V_\nu, \quad (2.5)$$

onde  $V_\mu$  é o quadri vetor velocidade, sendo então as equações de campo, com a constante cosmológica, dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi\rho V_\mu V_\nu + \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (2.6)$$

Obtemos para o tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$ ,

$$R_{00} = 1, \quad R_{22} = 2e^{x_1}, \quad R_{02} = R_{20} = e^{x_1}, \quad (2.7)$$

sendo todas as outras componentes nulas, e  $R = R^\mu_\mu = a^{-2}$ . O vetor velocidade unitário ao longo da linha  $t$  tem as componentes  $V^\mu = \frac{1}{a}\delta_0^\mu$ , e obtemos das equações de campo

$$a^{-2} = 8\pi\rho, \quad \Lambda = -4\pi\rho, \quad (2.8)$$

sendo então que a constante cosmológica corresponde à uma pressão positiva.

## 2.2 Curvas do tipo tempo fechadas

Da equação (2.2), percebemos que para um valor  $r_c = \ln(1 + \sqrt{2})$ , temos que o termo  $\sinh^4 r_c - \sinh^2 r_c = 0$ . Assim, para um valor  $r > r_c$ , se temos  $dt = dr = dz = 0$ , o elemento de linha em (2.2) é positivo, ou seja, descreve uma linha do tipo tempo.

Se consideramos uma partícula de massa  $m$  de tal modo que sua coordenada radial é  $r = \sqrt{x^2 + y^2} < r_c$ , então existe uma linha de mundo que conecta dois eventos  $P$  e  $Q$ ,

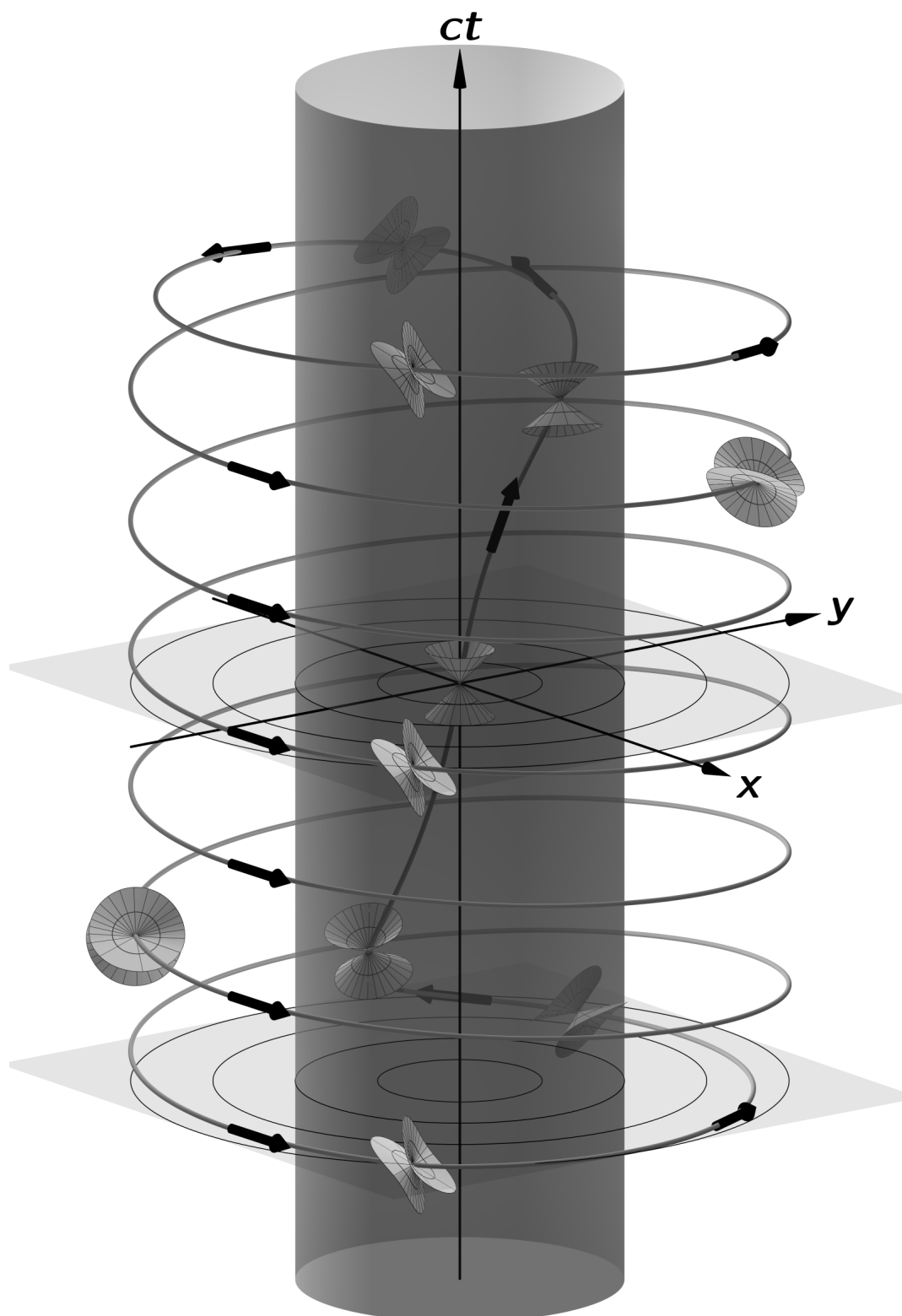


Figura 1: Linha do tipo tempo fechada. No universo de Gödel, caminhos não-geodésicos do tipo tempo permitem curvas fechadas e a possibilidade de volta no tempo. Créditos da imagem: [Grave et al. \(2009\)](#)

sendo que  $P$  está no passado e  $Q$  está no futuro, através de uma estrutura causal bem definida. Porém, para esta mesma partícula mas com coordenada radial  $r > r_c$ , então é possível que esta caminhe ao longo de uma curva do tipo tempo fechada variando  $\varphi$  e mantendo  $(t, r, z)$  constantes em (2.2), de modo que se  $P$  e  $Q$  estão novamente no passado e futuro conforme varia-se  $\varphi$  positivamente, então é possível que numa variação negativa de  $\varphi$  os eventos  $P$  e  $Q$  estejam no futuro e passado, respectivamente.

Ainda, de acordo com eq. (2.2) é possível que uma partícula de massa  $m$  caminhe através de uma linha de mundo do tipo tempo com  $z$  mantido constante de tal modo: i) partindo da origem, a partícula acelera através de uma curva tipo tempo com  $(t, r, \varphi)$  variando até chegar em um ponto onde  $r > r_c$ ; ii) Neste ponto, ela pode caminhar por uma curva também do tipo tempo com  $r$  constante e variando  $(t, \varphi)$  com  $dt < 0$  e  $d\varphi < 0$  de modo a voltar no eixo temporal  $t$ ; iii) Em um ponto onde a coordenada  $t$  seja anterior àquela da origem (i.e., do ponto de partida do observador), caminhar por uma curva do tipo tempo  $(t, r, \varphi)$  de modo a retornar ao ponto de partida. Desta maneira, é possível para a partícula de massa  $m$  caminhar por uma linha de mundo de modo a voltar em seu passado, como ilustra a figura 1.

Este caminho é possível para uma partícula  $m$  acelerada, uma vez que tal caminho é não-geodésico. Para uma análise detalhada das trajetórias no universo de Gödel, c.f. [Grave et al. \(2009\)](#), [Novello, Soares e Tiomno \(1983\)](#).

## 2.3 Propagação luminosa

Os caminhos geodésicos seguidos por ondas eletromagnéticas são dadas pelas geodésicas nulas  $g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = 0$ . Então, seja  $k^\mu = (\omega, k_1, k_2, k_3)$  o quadrivetor de uma onda eletromagnética que se propaga neste universo, para coordenadas do tipo cartesianas  $(t, x, y, z)$ , com  $a = 1$  em eq. (2.1), teremos

$$g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = \omega^2 + 2e^x\omega k_2 - k_1^2 + \frac{1}{2}e^{2x}k_2^2 - k_3^2 = 0, \quad (2.9)$$

se resolvemos a equação acima para  $\omega$ , obtemos

$$\omega = -k_2e^x \pm \sqrt{k_1^2 + \frac{1}{2}e^{2x}k_2^2 + k_3^2}, \quad (2.10)$$

são as frequências  $\omega$  para esta onda. A definição da velocidade de fase é dada por

$$v_\varphi \equiv \frac{V^\mu k_\mu}{|\mathbf{q}|}, \quad (2.11)$$

onde temos que  $q^\mu = h_\nu^\mu k^\nu$  é a projeção do vetor  $k^\mu$  no espaço ortogonal à velocidade  $V^\mu$  do observador. No entanto, notamos que pela eq. (2.1) temos duas classes de observadores possíveis, um com velocidade  $V^\mu = \delta_0^\mu$  e outro com velocidade  $U^\mu = \delta_2^\mu$ . Teremos, ainda, a



combinação destes dois tal que  $v^\mu = a\delta_0^\mu + b\delta_2^\mu$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Analisaremos os dois primeiros casos em particular, sendo que o último é uma combinação destes dois primeiros casos particulares.

Para um observador com velocidade  $V^\mu = \delta_0^\mu$ , temos da definição de  $h_\nu^\mu$ , na representação matricial, que

$$h_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu - \frac{V^\mu V_\nu}{V^2} \implies (h_\nu^\mu) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -e^x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \therefore (h_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{e^{2x}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

onde  $V^2 = V^\mu V_\mu$ . Assim, temos que  $h_\nu^\mu$  projeta um vetor  $v^\mu$  qualquer sobre o espaço ortogonal à velocidade  $V^\mu$  do observador. Se calculamos agora a projeção de  $k^\mu$  no espaço ortogonal ao observador  $V^\mu$ , teremos,

$$q^\mu = h_\nu^\mu k^\nu = (-k_2 e^x, k_1, k_2, k_3) \implies q^2 \equiv -h_{\mu\nu} q^\mu q^\nu = k_1^2 + \frac{e^{2x}}{2} k_2^2 + k_3^2, \quad (2.13)$$

onde definimos  $q^2 = -h_{\mu\nu} q^\mu q^\nu$  de tal modo que  $q^2 \geq 0$ . Assim, teremos da eq. (2.10) com a definição de  $q^2$  que

$$\omega = -k_2 e^x \pm \sqrt{k_1^2 + \frac{e^{2x}}{2} k_2^2 + k_3^2} = -k_2 e^x \pm |\mathbf{q}|, \quad (2.14)$$

onde  $|\mathbf{q}|$  é a norma de  $q^\mu$ . Por fim, utilizando da definição (2.11), teremos,

$$v_\varphi = \frac{V^\mu k_\mu}{|\mathbf{q}|} = \frac{\omega + k_2 e^x}{|\mathbf{q}|} = \frac{-k_2 e^x \pm |\mathbf{q}| + k_2 e^x}{|\mathbf{q}|} = \pm 1, \quad (2.15)$$

onde utilizamos do resultado (2.10). Portanto, para o observador  $V^\mu = \delta_0^\mu$ , temos que este verá a onda eletromagnética propagando no universo de Gödel com velocidade de fase constante  $v_\varphi = \pm 1$ . Este resultado nos mostra que para este observador, ele vê uma onda eletromagnética se propagando com velocidade de fase idêntica a de uma onda eletromagnética qualquer no espaço-tempo de Minkowski na ausência de fontes e se propagando no vazio.

Para o observador  $U^\mu = \delta_2^\mu$ , teremos o seguinte projetor,

$$h_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu - \frac{U^\mu U_\nu}{U^2} \implies (h_\nu^\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2e^{-x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \therefore (h_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

onde  $U^2 = U^\mu U_\mu = \frac{e^{2x}}{2}$ . Definindo a projeção  $w^\mu = h_\nu^\mu k^\nu$ , teremos,

$$w^\mu = (\omega, k_1, -2e^{-x}\omega, k_3) \implies w^2 \equiv -h_{\mu\nu} w^\mu w^\nu = \omega^2 + k_1^2 + k_3^2, \quad (2.17)$$

então, encontramos para a velocidade de fase da onda,

$$v_\varphi = \frac{U^\mu k_\mu}{|\mathbf{w}|} = \frac{1}{2} \left( \frac{2e^x \omega + e^{2x} k_2}{|\mathbf{w}|} \right) = \pm \frac{e^x}{\sqrt{2}}, \quad (2.18)$$

de onde utilizamos da eq. (2.10). É interessante notar que o observador  $U^\mu$  observa a mesma velocidade de fase para a onda eletromagnética que o observador  $V^\mu$  quando  $x = \ln \sqrt{2}$ . Notamos também que  $\lim_{x \rightarrow \infty} v_\varphi = \pm \infty$ , sendo que o observador  $U^\mu$  observa uma velocidade de fase infinita quanto maior o seu valor de  $x$ .

Apresentamos, também, as quantidades cinemáticas  $\theta$  (escalar de expansão),  $\sigma_{\mu\nu}$  (cisalhamento) e  $\omega^\mu$  (vorticidade) para os observadores  $V^\mu$  e  $U^\mu$ , de modo que, para  $V^\mu = \delta_0^\mu$ , temos,

$$\theta = 0, \quad \sigma_{\mu\nu} = 0, \quad \omega^\mu = \left( 0, 0, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad (2.19)$$

enquanto que, para  $U^\mu = \delta_2^\mu$ , obtemos<sup>1</sup>

$$\theta = 0, \quad \sigma_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & -\frac{e^x}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{e^x}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega^\mu = \left( 0, 0, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right). \quad (2.20)$$

É interessante notar que ambos diferem apenas quanto à observação de cisalhamento, enquanto as outras quantidades cinemáticas se mantêm.

Tanto o observador  $V^\mu$  quando o observador  $U^\mu$  são possíveis, uma vez que ambos são do tipo tempo. Porém, para uma mesma onda eletromagnética com vetor de onda  $k^\mu$ , ambos observam velocidades de fase diferentes para uma mesma onda.

Neste capítulo desenvolvemos os cálculos para a velocidade de fase de uma onda eletromagnética no espaço-tempo de Gödel. No capítulo seguinte iremos descrever a propagação de uma onda eletromagnética em um meio estático não-linear nos coeficientes de permissividade e permeabilidade.

<sup>1</sup> Os cálculos aqui foram obtidos uma vez que  $U^\mu$  é normalizado, i.e.,  $U^2 = 1$

## 3 Meios Contínuos

Estudaremos aqui a formulação das equações do eletromagnetismo não linear na permissividade elétrica e permeabilidade magnética para um meio material estático qualquer. Veremos que as dependências dos tensores de permissividade e permeabilidade e suas derivadas carregam informações pertinentes dos campos externos aplicados de modo a alterarem de forma significativa as equações de movimento para estes meios. Utilizaremos o chamado *método de Hadamard* para lidar com as descontinuidades das derivadas dos campos e obter a matriz de Fresnel generalizada, a qual será de importância fundamental para o cálculo das velocidades de fase de uma onda eletromagnética no meio material. Uma descrição completa das equações usadas neste capítulo se encontram no artigo de [Lorenci et al. \(2000\)](#). Até a seção 3.2 o desenvolvimento será o mais geral possível, de modo que o espaço-tempo é arbitrário. Da seção 3.2 em diante, admitiremos, por simplicidade, o espaço-tempo de Minkowski tal que a métrica de fundo é dada por  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ .

### 3.1 Meios Estáticos

Sabemos que em meios materiais, as quantidades que são de fato mensuráveis são os campos  $D^\mu$  e  $H^\mu$ . Em meios estáticos, a relação destes campos com os campos  $E^\mu$  e  $B^\mu$  se dão na forma das seguintes equações constituintes ([KLIPPERT; LORENCI, 2006](#))

$$D^\mu = \epsilon^\mu{}_\nu E^\nu, \quad H^\mu = \mu^\mu{}_\nu B^\nu. \quad (3.1)$$

onde  $\epsilon^\mu{}_\nu$  e  $\mu^\mu{}_\nu$  são a permissividade elétrica e o inverso da permeabilidade magnética, respectivamente. *A priori*, os campos  $D^\mu$  e  $H^\mu$  podem ser funções tanto de  $E^\mu$  quanto de  $B^\mu$ , de maneira que  $D^\mu = D^\mu(E^\mu, B^\mu)$  e  $H^\mu = H^\mu(E^\mu, B^\mu)$ .

Os tensores que descrevem a interação dos campos são o tensor eletromagnético usual  $F^{\mu\nu}$  e tensor excitação do campo  $P^{\mu\nu}$ , podem ser colocados como

$$F^{\mu\nu} = V^{[\mu} E^{\nu]} - \eta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} V^\alpha B^\beta, \quad P^{\mu\nu} = V^{[\mu} D^{\nu]} - \eta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} V^\alpha H^\beta, \quad (3.2)$$

com  $V^\mu$  sendo a velocidade do observador, e  $[a, b]$  é a operação de antissimetriação,  $[a, b] = ab - ba$ , de forma que  $V^{[\mu} E^{\nu]} = V^\mu E^\nu - V^\nu E^\mu$ . As equações do movimento são, então,

$$P^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 4\pi J^\mu, \quad \mathcal{F}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \quad (3.3)$$

onde  $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}$  denota a quadri-divergência covariante do tensor  $T^{\mu\nu}$ . Percebemos que as equações do movimento envolvem os campos  $E^\mu$  e  $B^\mu$  e suas derivadas, assim como

a permissividade e inverso da permeabilidade e suas derivadas. Note que nada fora dito acerca da dependência funcional da permissividade e inverso da permeabilidade, sendo que estes podem ser tanto funções dos campos  $E^\mu$  e  $B^\mu$  quanto função de posição, de maneira que ainda teríamos  $D^\mu = D^\mu(E^\mu, B^\mu)$  e  $H^\mu = H^\mu(E^\mu, B^\mu)$ , bem como uma dependência explícita ou implícita nas coordenadas. É interessante ver que caso  $\epsilon^\mu{}_\nu = \epsilon_0 h^\mu{}_\nu$  e  $\mu^\mu{}_\nu = \mu_0^{-1} h^\mu{}_\nu$ , teremos (neste caso particular) as equações da propagação da onda no vazio.

Obtemos das equações do movimento (3.2) o seguinte conjunto de equações para os campos eletromagnéticos em meios estáticos,

$$B^\mu{}_{;\mu} + B^\mu a_\mu - \eta^{\mu\nu\alpha\beta} V_\nu \omega_{\alpha\beta} E_\mu = 0, \quad (3.4a)$$

$$h^\mu{}_\nu B^\nu{}_{;\alpha} V^\alpha - \eta^{\mu\nu\alpha\beta} V_\nu E_{\alpha;\beta} + \left( \frac{2\theta}{3} h^\mu{}_\nu - \sigma^\mu{}_\nu - \omega^\mu{}_\nu \right) B^\nu = 0, \quad (3.4b)$$

$$\epsilon^\mu{}_{\nu;\mu} E^\nu + d_{(1)}^\mu{}_{\nu} E^\nu{}_{;\nu} + d_{(2)}^\mu{}_{\nu} B^\nu{}_{;\nu} + \epsilon^\mu{}_\nu E^\nu a_\mu + \eta_\mu{}^{\nu\alpha\beta} V_\nu \omega_{\alpha\beta} \mu^\mu{}_\lambda B^\lambda = 4\pi J^\mu V_\mu, \quad (3.4c)$$

$$h^\mu{}_\nu \left[ \epsilon^\nu{}_{\alpha;\beta} E^\alpha + d_{(1)}^\nu{}_{\alpha} E^\alpha{}_{;\beta} + d_{(2)}^\nu{}_{\alpha} B^\alpha{}_{;\beta} \right] V^\beta + \eta^{\mu\nu\alpha\beta} V_\alpha \left[ \mu^\beta{}_{\lambda;\nu} B^\lambda + h_{(1)}^\beta{}_{\lambda} B^\lambda{}_{;\nu} + h_{(2)}^\beta{}_{\lambda} E^\lambda{}_{;\nu} \right] + \left( \frac{2\theta}{3} h^\mu{}_\nu - \sigma^\mu{}_\nu - \omega^\mu{}_\nu \right) \epsilon^\nu{}_\lambda E^\lambda = -4\pi J^\nu h^\mu{}_\nu, \quad (3.4d)$$

onde utilizamos de

$$V^\mu{}_{;\nu} = \frac{1}{3} \theta h^\mu{}_\nu + \sigma^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu + a^\mu V_\nu, \quad (3.5)$$

sendo o gradiente covariante do vetor de velocidade de congruência normalizada, onde  $h^\mu{}_\nu$ ,  $\sigma_{\mu\nu} = \sigma_{\nu\mu}$ ,  $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$  e  $a^\mu$  sendo todos tensores espaciais. Temos que  $\theta$  é o fator de expansão,  $\sigma_{\mu\nu}$  é o tensor de cisalhamento,  $\omega_{\mu\nu}$  é o tensor de vorticidade e  $a^\mu$  é o vetor aceleração da congruência de  $V^\mu$ , e  $h^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu - V^\mu V_\nu$  é tensor de projeção sobre o espaço ortogonal à velocidade do observador  $V^\mu$  já normalizada. Introduzimos aqui os tensores auxiliares utilizados nas equações (3.4) como

$$d_{(1)}^\alpha{}_\beta = \epsilon^\alpha{}_\beta + \frac{\partial \epsilon^\alpha{}_\tau}{\partial E^\beta} E^\tau \quad (3.6a)$$

$$h_{(1)}^\alpha{}_\beta = \mu^\alpha{}_\beta + \frac{\partial \mu^\alpha{}_\tau}{\partial B^\beta} B^\tau, \quad (3.6b)$$

$$d_{(2)}^\alpha{}_\beta = \frac{\partial \epsilon^\alpha{}_\tau}{\partial B^\beta} E^\tau, \quad (3.6c)$$

$$h_{(2)}^\alpha{}_\beta = \frac{\partial \mu^\alpha{}_\tau}{\partial E^\beta} B^\tau, \quad (3.6d)$$

relembrando que  $\epsilon^\alpha{}_\beta$  e  $\mu^\alpha{}_\beta$  podem depender dos campos  $E^\mu$  e  $B^\mu$ .

As equações (3.4) envolvem equações diferenciais parciais não lineares nos campos  $E^\mu$  e  $B^\mu$  (uma vez que a dependência da permissividade e inverso da permeabilidade

podem depender destes campos), assim a resolução deste conjunto de equações se torna um trabalho um tanto quanto complicado. Porém, podemos utilizar do limite de comprimentos de onda pequenos (i.e., o limite da ótica geométrica) e então utilizar o método de Hadamard para a descontinuidade dos campos. Desenvolveremos este método na seção a seguir para proporcionar uma maneira direta para a resolução deste conjunto de equações.

## 3.2 O Método de Hadamard

Descrevemos aqui o Método de Hadamard (HADAMARD, 1903) para a descontinuidade de campos, que será utilizado nas equações (3.4).

Numa variedade de Minkowski, seja  $\Sigma : \phi(x^\mu) = 0$  uma hipersuperfície de Cauchy orientada. Seja  $X^+$  a união do futuro de todos os pontos do espaço-tempo  $P \in \Sigma$ , e seja  $X^-$  a união do passado destes mesmos pontos. Deste modo,  $X^+$  está no futuro de  $\Sigma$ , enquanto que  $X^-$  está no passado de  $\Sigma$ . Garantimos que pela causalidade do espaço-tempo e pela construção de  $\Sigma$  que  $X^+$  e  $X^-$  são disjuntos. Seja  $P_0 \in \Sigma$ . Podemos considerar uma pequena vizinhança  $U_{P_0}$  tal que esta é dividida por  $\Sigma$  em três regiões:  $U_{P_0}^- \subset X^-$ ,  $U_{P_0}^+ \subset X^+$  e  $U_{P_0}^0 \subset \Sigma$ . Seja  $r > 0$  o raio de  $U_{P_0}$ . Sendo ainda  $P^+ \in U_{P_0}^+$  e  $P^- \in U_{P_0}^-$  pontos arbitrários de modo que estão de lados opostos à  $\Sigma$ , se  $f$  é um tensor de rank arbitrário, definido em  $U_{P_0}$ , a descontinuidade sobre  $\Sigma$  deste tensor é definido como

$$[f(P_0)]_\Sigma = \lim_{r \rightarrow 0} [f(P^+) - f(P^-)]. \quad (3.7)$$

Hadamard demonstrou que se  $[f]_\Sigma = 0$ , então necessariamente  $[\nabla_\nu f]_\Sigma = \bar{f}k_\nu$ , onde  $k_\nu = \nabla_\nu \phi$  é ortogonal à hipersuperfície  $\Sigma$ , e  $\bar{f}$  é um tensor de mesmo rank de  $f$  com as mesmas simetrias algébricas de  $f$ . Não há, no entanto, qualquer outra relação imediata entre  $f$  e  $\bar{f}$ .

Assim, aplicando este método para os campos  $E^\mu$  e  $B^\mu$ , assim como suas derivadas, na hipótese em que  $[E^\mu]_\Sigma = [B^\mu]_\Sigma = 0$ , e as descontinuidades das derivadas  $E^\mu_{;\nu}$  e  $B^\mu_{;\nu}$  em  $\Sigma$  nos dão, onde  $E^\mu_{;\nu}$  indica a derivada covariante de  $E^\mu$  com respeito à  $\nu$ -ésima coordenada,

$$[E^\mu_{;\nu}]_\Sigma = e^\mu k_\nu, \quad [B^\mu_{;\nu}]_\Sigma = b^\mu k_\nu, \quad (3.8)$$

onde  $e^\mu$  e  $b^\mu$  são vetores tipo espaço de polarização dos campos elétricos e magnéticos, respectivamente, cuja vetor normal à frente de onda é  $k_\mu$ .

Fazemos aqui uma ressalva sobre a palavra “descontinuidade” utilizada nesta seção. Note que na definição (3.7) tomamos o limite de quando o raio da vizinha  $U_{P_0}$  se torna arbitrariamente pequeno. A “descontinuidade” na derivada dos campos é melhor entendida como um “salto”, pois não sabemos se a função derivada é realmente descontínua no ponto (i.e., nada fora dito acerca da função no ponto). Logo, temos uma variação abrupta das

derivadas dos campos quando estas se aproximam arbitrariamente do ponto, mas não sabemos se tal função é, de fato, descontínua neste ponto.

### 3.3 Matriz de Fresnel.

Uma vez descrito o método de Hadamard, aplicamos no conjunto de eqs. (3.4), e obtemos (KLIPPERT; LORENCI, 2006; LORENCI et al., 2013)

$$b^a k_a = 0, \quad (3.9a)$$

$$\left( d_{(1)}^\alpha{}_\beta e^\beta + d_{(2)}^\alpha{}_\beta \right) k_\alpha = 0, \quad (3.9b)$$

$$\left( k_\nu V^\nu \right) b^\mu - \eta^{\mu\nu\rho\sigma} V_\nu e_\rho k_\sigma = 0, \quad (3.9c)$$

$$\left( d_{(1)}^\mu{}_\beta e^\beta + d_{(2)}^\mu{}_\beta b^\beta \right) k_\nu V^\nu + \eta^{\mu\rho\nu\sigma} V_\nu \left( h_{(1)}^\sigma{}_\beta b^\beta + h_{(2)}^\sigma{}_\beta \right) k_\rho = 0, \quad (3.9d)$$

onde, resolvendo as equações acima para  $e^\beta$ , temos que  $Z^\alpha{}_\beta e^\beta = 0$ , com

$$Z^\alpha{}_\beta = d_{(1)}^\alpha{}_\beta + \frac{1}{v_\varphi^2} h_{(1)\mu}{}^\nu I_\beta^{[\mu} I_\nu^{\alpha]} + \frac{1}{v_\varphi} \left( d_{(2)}^\alpha{}_\rho \eta^{\rho\lambda}{}_{\nu\beta} + h_{(2)}^\rho{}_\beta \eta^{\alpha\lambda}{}_{\nu\rho} \right) V^\nu q_\lambda. \quad (3.10)$$

A matriz  $Z^\alpha{}_\beta$  é conhecida como *matriz de Fresnel generalizada*.  $v_\varphi$  é a *velocidade de fase* da propagação da onda eletromagnética no meio, definida pela equação (2.11).

Seja  $h_\beta^\alpha$  o projetor espacial como descrito anteriormente. O vetor  $q^\mu = h_\nu^\mu k^\nu$  é a projeção espacial do vetor de onda  $k^\mu$  no espaço ortogonal à  $V^\mu$ . Percebemos que o conjunto de equações (3.9) são invariantes sob uma mudança  $k^\mu \rightarrow \Omega k^\mu$ , onde  $\Omega$  é um fator conforme arbitrário. Então, sem perda de generalidade, podemos considerar que  $q^2 = -h_{\alpha\beta} q^\alpha q^\beta = 1$ . Assim podemos definir o projetor planar  $I_\beta^\alpha = h_\beta^\alpha + q^\alpha q_\beta$  que aparece na eq. (3.10) como aquele que projeta no plano perpendicular a  $q^\mu$ , i.e.,  $I_\beta^\alpha q^\beta = 0$ .

Para o que segue, consideraremos  $\epsilon_\beta^\alpha = \epsilon(E) h_\beta^\alpha$  e  $\mu_\beta^\alpha = \mu(B) h_\beta^\alpha$  nas eqs. (3.6), com  $\epsilon(E)$  sendo a permissividade elétrica dependendo do módulo do campo  $E^\mu$  e  $\mu(B)$  o inverso da permeabilidade magnética dependendo do módulo do campo  $B^\mu$ . Obtemos, para a eq. (3.10)

$$Z^\alpha{}_\beta = \epsilon h_\beta^\alpha - \left( \frac{1}{E} \frac{d\epsilon}{dE} \right) E^\alpha E_\beta - \frac{1}{v_\varphi^2} \left\{ \mu I_\beta^\alpha - \left( \frac{1}{B} \frac{d\mu}{dB} \right) \left[ B^\alpha B_\beta - B^2 I_\beta^\alpha - \left( q^\alpha B_\beta + B^\alpha q_\beta + h_\beta^\alpha B \cos \varphi \right) B \cos \varphi \right] \right\}, \quad (3.11)$$

onde  $\varphi$  é o ângulo entre os vetores  $B^\mu$  e  $q^\mu$ , ou seja,  $B^\mu q_\mu = -B \cos \varphi$ .

Para resolver o problema  $Z^\alpha{}_\beta e^\beta = 0$ , onde  $e^\beta$  é o vetor de polarização, basta que o determinante da matriz de Fresnel se anule. No entanto, utilizaremos o seguinte

método. Seja a expansão do vetor  $e^\beta$  numa base de vetores linearmente independentes. Seja essa base dada de tal maneira que  $e^\beta = \alpha_0 E^\beta + \beta_0 B^\beta + \gamma_0 q^\beta$ , onde assumimos que o conjunto de vetores  $\{E^\beta, B^\beta, q^\beta\}$  é tal base. Seja o ângulo entre  $E^\mu$  e  $q^\mu$  dado por  $\theta \neq 0$ , onde  $E^\mu q_\mu = -E \cos \theta$ , e que o ângulo entre  $B^\mu$  e  $q^\mu$  seja dado por  $\varphi \neq 0$  de forma que  $B^\mu q_\mu = -B \cos \varphi$ . Por fim seja  $\chi \neq 0$  o ângulo entre  $E^\mu$  e  $B^\mu$  de maneira que  $E^\mu B_\mu = -EB \cos \chi$ . Considerando, então, a contração  $Z^\alpha_\beta e^\beta = 0$ , teremos que

$$Z^\alpha_\beta e^\beta = \alpha_1 E^\alpha + \beta_1 B^\alpha + \gamma_1 q^\alpha = 0, \quad (3.12)$$

onde

$$\alpha_1 = \alpha_0 \left\{ (\epsilon + \epsilon') - \frac{1}{v_\varphi^2} [\mu + \mu'(1 + \cos^2 \varphi)] \right\} - \frac{\beta_0 B \epsilon'}{E} \cos \chi + \frac{\gamma_0 \epsilon'}{E} \cos \theta, \quad (3.13a)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{v_\varphi^2} \frac{\alpha_0 \mu' E}{B} (\cos \chi + \cos \varphi \cos \theta) + \beta_0 \left[ \epsilon - \frac{1}{v_\varphi^2} (\mu + 2\mu') \right], \quad (3.13b)$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{v_\varphi^2} \alpha_0 E [\mu \cos \theta + \mu' (\cos \theta - \cos \chi \cos \varphi)] + \frac{1}{v_\varphi^2} B \beta_0 (\mu + 2\mu') \cos \varphi + \gamma_0 \epsilon. \quad (3.13c)$$

Caso a solução admita que os coeficientes  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  sejam não todos nulos, então existe uma combinação linear não nula tal que o conjunto de vetores considerado são linearmente dependentes, e portanto não formam uma base. Porém, como descrito acima, os vetores formam uma base, então o problema possui solução se, e somente se,  $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 0$ , ou seja, equivalente ao determinante da matriz dos coeficientes ser identicamente nula. Assim, teremos,

$$\alpha_0 \beta_0 \gamma_0 \det \begin{pmatrix} \epsilon + \epsilon' - \frac{1}{v_\varphi^2} [\mu + \mu'(1 + \cos^2 \varphi)] & -\frac{B \epsilon'}{E} \cos \chi & \frac{\epsilon'}{E} \cos \theta \\ \frac{1}{v_\varphi^2} \frac{\mu' E}{B} (\cos \chi + \cos \varphi \cos \theta) & \epsilon - \frac{1}{v_\varphi^2} (\mu + 2\mu') & 0 \\ \frac{1}{v_\varphi^2} E [\mu \cos \theta + \mu' (\cos \theta - \cos \chi \cos \varphi)] & \frac{1}{v_\varphi^2} B (\mu + 2\mu') \cos \varphi & \epsilon \end{pmatrix} = 0 \quad (3.14)$$

então, encontramos uma equação que é quadrática em  $v_\varphi^{-2}$  de tal maneira que

$$-\frac{1}{v_\varphi^2} \epsilon \left\{ \epsilon \left[ 2\mu + \mu'(3 + \cos^2 \varphi) \right] + \mu \epsilon' (1 + \cos^2 \theta) + \mu' \epsilon' (2 + \cos^2 \theta - \cos^2 \chi - 2 \cos \chi \cos \theta \cos \varphi) \right\} + \frac{1}{v_\varphi^4} (\mu + 2\mu') \left[ \mu + \mu'(1 + \cos^2 \varphi) \right] (\epsilon + \epsilon' \cos^2 \theta) + \epsilon^2 (\epsilon + \epsilon') = 0. \quad (3.15)$$

É importante notar que essa equação mostra que há pelo menos dois valores possíveis para o inverso do quadrado da velocidade de fase  $v_\varphi^{-2}$ . Para cada uma das expressões,  $v_\varphi$  toma apenas sentidos opostos  $v_\varphi = \pm \sqrt{v_\varphi^2}$ , onde  $v_\varphi^2 = (v_\varphi^{-2})^{-1}$ .

Neste capítulo, desenvolvemos uma expressão para a velocidade de fase de uma onda que se propaga num meio material cuja a permissividade e inverso da permeabilidade possuem dependência funcional  $\epsilon(E)$  e  $\mu(B)$  ainda arbitrários (LORENCI; GOULART, 2008). Vamos investigar no próximo capítulo se é possível determinar tais coeficientes (ou seja, sua forma funcional) com relação aos campos  $E^\mu$  e  $B^\mu$  de tal maneira que a velocidade de fase encontrada neste material seja a mesma daquela encontrada em Gödel dada pelas eqs. (2.15) e (2.18).



## 4 A analogia com o Universo de Gödel

Veremos aqui se é possível encontrar uma forma funcional para os coeficientes de permissividade e inverso da permeabilidade na velocidade de fase do meio material dada por (3.15) de modo que possa ter o mesmo valor da velocidade de fase de uma onda eletromagnética que se propaga no universo de Gödel dada pelas eqs. (2.15) e (2.18). Para fins de distinção, vamos suprimir o subscrito  $\varphi$  e substituir por  $M$  para a velocidade de fase no material  $v_\varphi \rightarrow v_M$  e o mesmo para a velocidade de fase no universo de Gödel  $v_\varphi \rightarrow v_G$ . Por facilidade de notação, iremos suprimir a dependência de  $\epsilon(E)$  e  $\mu(B)$ , de forma que escrevemos apenas  $\epsilon$  e  $\mu$ , ficando subentendido suas dependências nos módulos dos campos.

### 4.1 Velocidade de fase no material

Se multiplicamos a eq. (3.15) por  $v_\varphi^4$ , já fazendo a identificação  $\varphi \rightarrow M$  para o material, obtemos,

$$-v_M^2 \epsilon \left\{ \epsilon \left[ 2\mu + \mu' (3 + \cos^2 \varphi) \right] + \mu \epsilon' (1 + \cos^2 \theta) + \mu' \epsilon' (2 + \cos^2 \theta - \cos^2 \chi - 2 \cos \chi \cos \theta \cos \varphi) \right\} \\ + (\mu + 2\mu') \left[ \mu + \mu' (1 + \cos^2 \varphi) \right] (\epsilon + \epsilon' \cos^2 \theta) + v_M^4 \epsilon^2 (\epsilon + \epsilon') = 0, \quad (4.1)$$

onde temos que a solução de tal equação é dada por

$$v_M^2 = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (4.2)$$

tal que

$$a = \epsilon^2 (\epsilon + \epsilon'), \quad (4.3a)$$

$$b = -\epsilon \left\{ \epsilon \left[ 2\mu + \mu' (3 + \cos^2 \varphi) \right] + \mu \epsilon' (1 + \cos^2 \theta) \right. \\ \left. + \mu' \epsilon' (2 + \cos^2 \theta - \cos^2 \chi - 2 \cos \chi \cos \theta \cos \varphi) \right\}, \quad (4.3b)$$

$$c = (\mu + 2\mu') \left[ \mu + \mu' (1 + \cos^2 \varphi) \right] (\epsilon + \epsilon' \cos^2 \theta). \quad (4.3c)$$

Estas soluções só serão possíveis uma vez que  $v_M^2 \geq 0$  para ambas. Por tal razão, é necessário uma análise destas soluções. Obviamente, como buscamos soluções reais, é necessário que o termo da raiz seja tal que  $b^2 - 4ac \geq 0 \implies b^2 \geq 4ac$ . Se caso temos que

$b^2 = 4ac$ , então a solução se reduz a

$$v_M^2 = -\frac{b}{2a} \geq 0, \quad (4.4)$$

sendo então que necessariamente temos que  $a$  e  $b$  possuem sinais contrários.

Caso temos que  $b^2 > 4ac \implies b < -2\sqrt{ac}$  ou  $b > 2\sqrt{ac}$ , então teremos

$$v_M^2 = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b}{2a} \left( -1 \pm \sqrt{1 - \frac{4ac}{b^2}} \right) \implies 0 < \sqrt{1 - \frac{4ac}{b^2}} \leq 1, \quad (4.5)$$

onde  $a > 0$  e  $c > 0$ , o que nos mostra que o termo dentro do parênteses é sempre negativo. Assim, teremos, novamente, que  $a$  e  $b$  devem ter sinais contrários para que estas soluções resultem em  $v_M^2 \geq 0$ . Notamos que as considerações  $a < 0$  ou  $c < 0$  implicariam em  $\epsilon < 0$  e/ou  $\mu < 0$ , o que nos levaria a materiais exóticos com permissividade e/ou inverso da permeabilidade negativos. Em geral, temos ainda que  $|\epsilon| > |\epsilon'|$  e  $|\mu| > |\mu'|$ , de tal modo que considerando  $\epsilon' < 0$  ou  $\mu' < 0$  não seria suficiente para obtermos  $a < 0$  ou  $c < 0$ .

Façamos agora uma simplificação quanto ao termo  $\cos \chi$ . Como  $\cos \chi$  é tal que  $E^\mu B_\mu = -EB \cos \chi$  é o ângulo entre os campos  $E^\mu$  e  $B^\mu$ , e como estes campos carregam tanto informação do campo externo aplicado quanto o campo da onda que se propaga no material, temos,

$$E^\mu E_\mu = \left( E^\mu E_\mu \right)_{\text{ext}} + \left( E^\mu E_\mu \right)_{\text{onda}} + 2 \left( E^\mu E_\mu \right)_{\text{onda+ext}}, \quad (4.6)$$

onde “ext” se refere ao campo externo aplicado e “onda” se refere a onda propagando no material. Como  $E_{\text{ext}}^\mu \gg E_{\text{onda}}^\mu$ , então os produtos entre  $(E^\mu E_\mu)_{\text{ext+onda}}$  e  $(E^\mu E_\mu)_{\text{onda}}$  se tornam desprezíveis em comparação a  $(E^\mu E_\mu)_{\text{ext}}$ . Assim, teremos, aproximadamente, que

$$E^\mu E_\mu \approx \left( E^\mu E_\mu \right)_{\text{ext}} \implies E^\mu \approx E_{\text{ext}}^\mu, \quad (4.7)$$

sendo o mesmo raciocínio aplicável a  $B^\mu$ , i.e.,  $B^\mu \approx B_{\text{ext}}^\mu$ . Logo, temos que  $E^\mu B_\mu \approx (E^\mu B_\mu)_{\text{ext}}$ . Como estes campos são aplicados de acordo como preparamos o experimento, podemos configurar estes campos de modo que sejam ortogonais entre si, ou seja, podemos prepará-los, por simplicidade, de modo que  $\cos \chi = 0$ . Dessa maneira, teremos que os coeficientes  $a$ ,  $b$ , e  $c$  utilizados na solução  $v_M^2$  ficam,

$$a = \epsilon^2 (\epsilon + \epsilon'), \quad (4.8a)$$

$$b = -\epsilon \left\{ \epsilon \left[ 2\mu + \mu' (3 + \cos^2 \varphi) \right] + \mu \epsilon' (1 + \cos^2 \theta) + \mu' \epsilon' (2 + \cos^2 \theta) \right\}, \quad (4.8b)$$

$$c = (\mu + 2\mu') \left[ \mu + \mu' (1 + \cos^2 \varphi) \right] (\epsilon + \epsilon' \cos^2 \theta). \quad (4.8c)$$

Uma vez estabelecidas estas condições, podemos igualar as soluções obtidas para  $v_M^2$  com as soluções  $v_G^2$  nas eqs. (2.15) e (2.18) e verificar se é possível encontrar coeficientes  $\epsilon(E)$  e  $\mu(B)$  que satisfazem estas equações e propôr um material que apresente a mesma velocidade de fase da onda eletromagnética no universo de Gödel.

## 4.2 Velocidade de fase no universo de Gödel

Tomaremos a solução  $v_G^2$  dada pela eq. (2.15). Igualando esta solução a  $v_M^2$ , teremos

$$-\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 1. \quad (4.9)$$

Se caso temos que  $b^2 = 4ac$ , então a solução resulta em

$$-\frac{b}{2a} = 1 \implies \frac{b^2}{4a^2} = 1 \implies \frac{c}{a} = 1 \therefore a = c, \quad (4.10)$$

onde elevamos ambos os lados da equação ao quadrado. Logo,

$$\epsilon^2 (\epsilon + \epsilon') = (\mu + 2\mu') \left[ \mu + \mu' (1 + \cos^2 \varphi) \right] (\epsilon + \epsilon' \cos^2 \theta), \quad (4.11)$$

obtemos então,

$$\begin{aligned} (\mu + 2\mu') \left[ \mu' \epsilon' \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \epsilon' (\mu + \mu') \cos^2 \theta + \mu' \epsilon \cos^2 \varphi \right] \\ + \epsilon \left[ (\mu + \mu') (\mu + 2\mu') - \epsilon (\epsilon + \epsilon') \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Como  $\cos^2 \theta$  e  $\cos^2 \varphi$  são ângulos independentes, esta equação se torna verdadeira uma vez que todos os coeficientes se anulam. Assim, teremos

$$\mu + 2\mu' = 0 \implies \mu(B) = \frac{C_1}{\sqrt{B}}, \quad \epsilon + \epsilon' = 0 \implies \epsilon(E) = \frac{C_2}{E}, \quad (4.13)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes de integração. Notamos que

$$\lim_{B \rightarrow 0^+} |\mu(B)| = +\infty \quad \lim_{E \rightarrow 0^+} |\epsilon(E)| = +\infty. \quad (4.14)$$

Porém, esta análise deve ser realizada com cautela. Devido à aproximação em (4.7), este caso não leva em consideração o valor de  $E_{\text{onda}}^\mu$ , de modo que devemos computar a contribuição do campo da onda neste limite. Assim, chamaremos esta solução de *solução de campo externo mínimo* ou simplesmente *campo mínimo*, onde a validade desta análise se estabelece para um valor mínimo não-nulo de campo externo aplicado. Da eq. (4.12), podemos ter, também, o caso onde  $\mu$  e  $\epsilon$  são constantes, o que nos leva a

$$\mu^2 = \epsilon^2 \implies \mu = \epsilon \therefore \frac{\mu}{\epsilon} = 1, \quad (4.15)$$

assim, temos então que se  $\epsilon = \epsilon_0$  e  $\mu = \mu_0^{-1}$ ,

$$\frac{\mu}{\epsilon} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} = 1, \quad (4.16)$$

ou seja, como desenvolvido na seção 2.3 no capítulo 2, o universo de Gödel possui um análogo trivial tal que este análogo é o espaço-tempo de Minkowski na ausência de fontes externas. Vale notar que neste caso,  $b = -2\mu_0^{-1}\epsilon_0^2$  e  $a = \epsilon_0^3$ . Sendo tanto  $\mu_0 > 0$  e  $\epsilon_0 > 0$ ,

como apontou nossa análise,  $a$  e  $b$  tem sinais contrários, de modo que a razão  $b/2a$  é negativa e vale  $b/2a = -(\mu_0\epsilon_0)^{-1}$ .

Vejam, agora, o caso em que  $b^2 > 4ac$ . Vimos anteriormente que neste caso,

$$v_M^2 = \frac{b}{2a} \left( -1 \pm \sqrt{1 - \frac{4ac}{b^2}} \right) = 1, \quad (4.17)$$

construindo já a analogia com a velocidade  $v_G^2 = 1$ . Reorganizando os termos, teremos

$$1 + \frac{b}{2a} = \pm \frac{b}{2a} \sqrt{1 - \frac{4ac}{b^2}}, \quad (4.18)$$

e elevando ambos os membros ao quadrado,

$$1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} \left( 1 - \frac{4ac}{b^2} \right) \implies b + c = -a, \quad (4.19)$$

assim, teremos,

$$\begin{aligned} & -\epsilon \left\{ \epsilon \left[ 2\mu + \mu' (3 + \cos^2 \varphi) \right] + \mu\epsilon' (1 + \cos^2 \theta) + \mu'\epsilon' (2 + \cos^2 \theta) \right\} \\ & + (\mu + 2\mu') \left[ \mu + \mu' (1 + \cos^2 \varphi) \right] (\epsilon + \epsilon' \cos^2 \theta) = -\epsilon^2 (\epsilon + \epsilon'), \end{aligned} \quad (4.20)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & (\mu + 2\mu' - \epsilon) \left[ \epsilon' (\mu + \mu') \cos^2 \theta + \mu'\epsilon \cos^2 \varphi - \epsilon (\epsilon + \epsilon' - \mu - \mu') \right] \\ & + \mu'\epsilon' (\mu + 2\mu') \cos^2 \theta \cos^2 \varphi = 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Novamente, como  $\cos^2 \theta$  e  $\cos^2 \varphi$  são independentes, a equação se torna verdadeira uma vez que todos os coeficientes se anulam. No entanto, esta equação apresenta uma incompatibilidade com esta questão, pois se temos que  $\mu + 2\mu' = 0$ , então necessariamente teremos que  $\epsilon = 0$ , o que é absurdo. Portanto, concluímos assim que a única possibilidade plausível é de que  $\epsilon$  e  $\mu$  são constantes, de tal sorte que

$$\epsilon (\mu - \epsilon)^2 = 0 \implies \mu = \epsilon, \quad (4.22)$$

sendo que recaímos na solução quando  $b^2 = 4ac$ . Portanto, para o observador  $V^\mu = \delta_0^\mu$  em Gödel perceberia a mesma velocidade de fase para a onda eletromagnética no espaço-tempo de Minkowski na ausência de fonte externas.

Analisando agora para a velocidade  $U^\mu = \delta_2^\mu$ , temos a velocidade de fase da onda eletromagnética em Gödel dada pela eq. (2.18). Assim, teremos,

$$v_M^2 = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{e^{2x}}{2}. \quad (4.23)$$

Novamente, analisando para o caso  $b^2 = 4ac$ , teremos,

$$-\frac{b}{2a} = \frac{e^{2x}}{2} \implies -b = ae^{2x}, \quad (4.24)$$

ou seja,

$$\epsilon \left[ 2\mu + \mu' \left( 3 + \cos^2 \varphi \right) \right] + \mu \epsilon' \left( 1 + \cos^2 \theta \right) + \mu' \epsilon' \left( 2 + \cos^2 \theta \right) = \epsilon(\epsilon + \epsilon')e^{2x}, \quad (4.25)$$

onde, reorganizando os termos, ficamos com

$$(\mu + \mu')\epsilon' \cos^2 \theta + \mu' \epsilon \cos^2 \varphi + \epsilon \left[ 2\mu + 3\mu' - (\epsilon + \epsilon')e^{2x} \right] + \epsilon'(\mu + 2\mu') = 0. \quad (4.26)$$

Como a equação acima tem de ser verdadeira para quaisquer valores de  $\theta$  e  $\varphi$ , necessariamente teremos que  $\mu' = \epsilon' = 0$ . Assim, obtemos,

$$2\mu\epsilon - \epsilon^2 e^{2x} = 0 \quad \therefore \quad \frac{\mu}{\epsilon} = \frac{e^{2x}}{2}, \quad (4.27)$$

o que é inconsistente com a proposta dada. Uma vez que a permissividade elétrica e inverso da permeabilidade magnética são tais que  $\epsilon = \epsilon(E)$  e  $\mu = \mu(B)$ , como  $\mu' = \epsilon' = 0$ , então os coeficientes devem ser necessariamente constantes. Assim, a relação obtida é inconsistente com a hipótese considerada.

Analisando agora o caso em que  $b^2 > 4ac$ , teremos,

$$\frac{b}{2a} \left( -1 \pm \sqrt{1 - \frac{4ac}{b^2}} \right) = \frac{e^{2x}}{2}, \quad (4.28)$$

e como apontado anteriormente,  $a$  e  $b$  devem ter sinais contrários para que tal solução seja possível. Se reorganizamos a equação acima e elevamos ambos os membros ao quadrado, obtemos

$$ae^{4x} + 2be^{2x} + 4c = 0, \quad (4.29)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \epsilon^2 (\epsilon + \epsilon') e^{4x} - 2\epsilon \left\{ \epsilon \left[ 2\mu + \mu' \left( 3 + \cos^2 \varphi \right) \right] + \mu \epsilon' \left( 1 + \cos^2 \theta \right) + \mu' \epsilon' \left( 2 + \cos^2 \theta \right) \right\} e^{2x} \\ + 4(\mu + 2\mu') \left[ \mu + \mu' \left( 1 + \cos^2 \varphi \right) \right] (\epsilon + \epsilon' \cos^2 \theta) = 0, \quad (4.30) \end{aligned}$$

obtendo, então,

$$\begin{aligned} 4\mu' \epsilon' (\mu + 2\mu') \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + 2(2\mu + 4\mu' - \epsilon e^{2x}) \left[ \mu' \epsilon \cos^2 \theta + \epsilon' (\mu + \mu') \cos^2 \varphi \right] \\ + \epsilon (2\mu + 4\mu' - \epsilon e^{2x}) \left[ 2(\mu + \mu') - (\epsilon + \epsilon') e^{2x} \right] = 0, \quad (4.31) \end{aligned}$$

sendo que  $\theta$  e  $\varphi$  são ângulos independentes, podemos ter que

$$\mu' = 0 \implies 2\mu - \epsilon e^{2x} = 0, \quad (4.32)$$

ou

$$\epsilon' = 0 \implies 2\mu + 4\mu' - \epsilon e^{2x} = 0, \quad (4.33)$$

sendo que a solução  $\mu + 2\mu' = 0$  resulta na solução de campo mínimo previamente discutido. Caso  $\mu' = 0$ , teremos que

$$\frac{\mu}{\epsilon} = \frac{e^{2x}}{2}, \quad (4.34)$$

enquanto que, se  $\epsilon' = 0$ , temos,

$$\mu + 2\mu' = \frac{\epsilon e^{2x}}{2}, \quad (4.35)$$

onde  $\mu(B)$  vem dado pela solução da equação acima. Notamos que a dependência explícita na coordenada  $x$  na equação acima implica que devemos resolver para o campo  $B^\mu$  em termos das coordenadas. Como, *a priori*, o campo  $B^\mu$  é suposto qualquer, podemos escolhê-lo como desejado, contanto que este campo satisfaça as equações do movimento.

Para o caso em que temos  $\mu' = 0$ , a permissividade elétrica  $\epsilon(E)$  é dado por

$$\epsilon = 2\mu e^{-2x}, \quad (4.36)$$

sendo então que este também possui uma dependência explícita na coordenada  $x$ , de tal modo que precisamos resolver para o campo  $E^\mu$  com respeito às coordenadas, sendo que este campo escolhido deve satisfazer as equações do movimento. Uma vez que temos  $E^\mu(x)$ , sendo esta relação inversível, temos então

$$\frac{d\epsilon}{dE} = -4\mu e^{-2x} \left( \frac{dE}{dx} \right)^{-1}, \quad (4.37)$$

de modo que a variação da permissividade com respeito ao módulo do campo elétrico externo aplicado é proporcional ao negativo do produto de  $e^{-2x}$  com o inverso da derivada do módulo do campo com respeito à coordenada  $x$ .

## 5 Conclusões

Neste trabalho apresentamos como o universo de Gödel é uma solução exata das equações de campo da Relatividade Geral. Apresentamos, também, como este modelo possui a exótica propriedade de exibir curvas não-geodésicas do tipo-tempo fechadas. Por fim, buscamos a descrição de geodésicas nulas (caminhos percorridos por raios luminosos) e vimos seu comportamento. Adiante, utilizando de uma formulação não-linear do eletromagnetismo nos coeficientes de permissividade elétrica e permeabilidade magnética, exploramos as propriedades de um material de tal modo que a dependência funcional destes coeficientes fossem tais que  $\epsilon = \epsilon(E)$  e  $\mu = \mu(B)$ , ou seja, a permissividade elétrica possuiria uma dependência sobre o módulo do campo  $E^\mu$  externo aplicado, enquanto que a permeabilidade magnética possuiria uma dependência no módulo do campo  $B^\mu$  externo aplicado. Assim, este material seria diretamente influenciado pelos campos eletromagnéticos externos aplicados de uma maneira tal a modificar o comportamento de uma onda eletromagnética propagando neste material, sendo então que essa manipulação fosse realizada de modo a exibir a mesma propagação luminosa como aquela obtida no universo de Gödel.

Os resultados obtidos neste trabalho nos mostram que tal material seria tão exótico quanto o próprio modelo de Gödel. Encontramos as *soluções de campo mínimo*, que dizem a respeito de um valor mínimo não nulo de campos  $E^\mu$  e  $B^\mu$  externos aplicados dentro do limite em que o campo de onda seria desprezível. Assim, estes coeficientes seriam proporcionais ao inverso de uma potência positiva dos módulos dos campos, i.e.,  $\epsilon(E) \propto E^{-\alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  e  $\mu(B) \propto B^{-\beta}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}^+$ , onde não temos necessariamente que  $\alpha = \beta$ . Apesar de no limite analisado de  $E \rightarrow 0$  e  $B \rightarrow 0$  os coeficientes  $\epsilon(E)$  e  $\mu(B)$  se tornarem divergentes, estes devem ser tais que sejam funções contínuas e diferenciáveis de  $E$  e  $B$  em todo o espectro.

Por outro lado, temos um análogo trivial que seria o espaço-tempo de Minkowski com  $\epsilon = \epsilon_0$  e  $\mu = \mu_0^{-1}$ , sendo que o eletromagnetismo de Maxwell é suficiente para descrever a propagação dessa onda eletromagnética em Gödel. Obtemos também um material anisotrópico com uma dependência funcional na permissividade elétrica tal que  $\epsilon \propto e^{-2x}$ , enquanto que o inverso da permeabilidade magnética deverá ser constante. Se tomamos a coordenada  $x$  suficientemente grande e positiva, temos que a permissividade elétrica se aproxima de um valor nulo, de modo que o vetor  $D^\mu$  se torna nulo, também. Por outro lado, tomando a coordenada  $x$  suficientemente grande e negativa, obtemos um permissividade elétrica divergente. Apesar destes análogos serem *a priori* distintos, eles devem ser capazes de descrever a geometria do universo de Gödel, de tal modo que estes se conectem de alguma forma ainda elusiva.

Assim, da análise feita concluímos que um análogo para Gödel com um material de características  $\epsilon = \epsilon(E)$  e  $\mu = \mu(B)$  além de ser exótico, será válido para o limite descrito pelos resultados aqui obtidos. Os resultados possuem divergências evidentes em pontos específicos, o que nos leva a concluir que são válidos para algum regime em particular, de maneira que devemos buscar um material que apresente estas características dentro deste domínio.

Um possível candidato que deve ser analisado é um material tal que  $\epsilon = \epsilon(E, B)$  e  $\mu = \mu(B)$ . Para tal material, é necessário retornar às equações (3.4) e (3.6) com as características dadas, e assim obter uma nova equação para a matriz de Fresnel generalizada (3.10). Dessa maneira, procedendo para a resolução de  $Z^\alpha_\beta e^\beta = 0$  como anteriormente, obtemos a seguinte equação de quarto grau para  $v_\varphi$ ,

$$\begin{aligned} \epsilon^2(\epsilon + \epsilon')v_\varphi^4 + \frac{\epsilon^2\dot{\epsilon}}{B^2}(\mathbf{q} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B})v_\varphi^3 - \epsilon \left\{ \dot{\mu}\epsilon \cos^2 \varphi + \epsilon'(\mu + \dot{\mu}) \cos^2 \theta + \epsilon(2\mu + 3\dot{\mu}) + \epsilon'(\mu + 2\dot{\mu}) \right\} v_\varphi^2 \\ - \frac{\epsilon\dot{\epsilon}}{B^2}(\mu + 2\dot{\mu})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B})v_\varphi + (\mu + 2\dot{\mu}) \left[ \mu + \dot{\mu}(1 + \cos^2 \varphi) \right] (\epsilon + \epsilon' \cos^2 \theta) = 0, \end{aligned}$$

onde fizemos a identificação

$$\epsilon' = E \frac{\partial \epsilon}{\partial E}, \quad \dot{\epsilon} = B \frac{\partial \epsilon}{\partial B}, \quad \dot{\mu} = B \frac{d\mu}{dB}.$$

Deste modo, temos agora que obter a resolução da equação de quarto grau em  $v_\varphi$ , onde teremos necessariamente quatro raízes. Apesar de uma solução analítica para tal equação ser conhecida, a complexidade dos coeficientes desta equação de quarto grau torna a busca pela solução um trabalho árduo e computacionalmente carregado, de modo que é necessário dispor de grande capacidade de cálculo para a busca desta solução. No entanto, podemos tentar a busca por soluções numéricas de modo a obter uma estimativa do comportamento esperado deste material, e por fim tentar a busca da solução analítica a partir destes resultados.



# Referências

- BITTENCOURT, E. et al. Analogue black holes for light rays in static dielectrics. *Classical and Quantum Gravity*, v. 31, n. 14, p. 145007, 2014. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0264-9381/31/i=14/a=145007>>. Citado na página 4.
- CHANDRASEKHAR, S.; WRIGHT, J. P. The geodesics in gödel's universe. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America.*, v. 47(3), p. 341–347, 1961. Nenhuma citação no texto.
- EINSTEIN, A. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. (German) [On the electrodynamics of moving bodies]. *Annalen der Physik (1900) (series 4)*, v. 322, n. 10, p. 891–921, 1905. ISSN 0003-3804. Disponível em: <<http://www.gsjournal.net/Science-Journals/Essays/View/2492>; [http://www.itba.edu.ar/cargrado/fismat/fismod/transf/htm/einstein\\_1.htm](http://www.itba.edu.ar/cargrado/fismat/fismod/transf/htm/einstein_1.htm); <http://www.zbp.univie.ac.at/einstein/einstein3.pdf>>. Citado na página 1.
- EINSTEIN, A. Die Feldgleichungen der Gravitation. (German) [The field equations of gravitation]. *Ständiger Beobachter der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Part 2*, p. 844–847, 1915. Citado na página 1.
- GÖDEL, K. An example of a new type of cosmological solutions of einstein's field equations of gravitation. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 21, p. 447–450, Jul 1949. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.21.447>>. Citado na página 5.
- GRAVE, F. et al. The gödel universe: Exact geometrical optics and analytical investigations on motion. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 80, p. 103002, Nov 2009. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.80.103002>>. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 8.
- HADAMARD, J. *Leçons sur la Propagation des Ondes et les Équations de l'Hydrodynamique*. [S.l.]: Hermann, 1903. Citado na página 13.
- KLIPPERT, R.; LORENCI, V. A. D. Electromagnetic light rays in local dielectrics. *Phys. Lett. A*, v. 357, p. 61–65, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 14.
- LORENCI, V. A. D.; GOULART, G. P. Magnetoelectric birefringence revisited. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 78, p. 045015, Aug 2008. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.78.045015>>. Citado na página 16.
- LORENCI, V. A. D. et al. Multirefringence phenomena in nonlinear electrodynamics. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 88, p. 065015, Sep 2013. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.88.065015>>. Citado na página 14.
- LORENCI, V. A. D. et al. Light propagation in non-linear electrodynamics. *Phys. Lett. B*, v. 482, p. 134–140, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 11.
- LORENCI, V. A. D.; SOUZA, M. A. Electromagnetic wave propagation inside a material medium: an effective geometry interpretation. *Phys. Lett. B*, v. 512, p. 417–422, 2001. Citado na página 4.

NOVELLO, M. *Cosmologia Relativista*. [S.l.]: Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 1975. Nenhuma citação no texto.

NOVELLO, M.; GOULART, E. *Eletrodinâmica Não Linear*. [S.l.]: Livraria da Física, 2010. ISBN 978-85-7861-067-8. Nenhuma citação no texto.

NOVELLO, M.; SILVA, M. C. Motta da. Cosmic spinning string and causal protecting capsules. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 49, p. 825–830, Jan 1994. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.49.825>>. Nenhuma citação no texto.

NOVELLO, M.; SOARES, I. D.; TIOMNO, J. Geodesic motion and confinement in gödel's universe. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 27, p. 779–788, Feb 1983. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.27.779>>. Citado na página 8.