Universidade Federal de Itajubá
Instituto de Física e Química - IFQ
Programa de Pós-Graduação em Física

Teoria de perturbações lineares num modelo intrinsecamente simétrico

Paloma Dias Silva

Itajubá - MG, 20 de fevereiro de 2026

Paloma Dias Silva

Teoria de perturbações lineares num modelo intrinsecamente simétrico

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física pela UNIFEI como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Mestre em Física.

Universidade Federal de Itajubá - MG

Instituto de Física e Química - IFQ

Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Eduardo Henrique Silva Bittencourt

Itajubá - MG

20 de fevereiro de 2026

Paloma Dias Silva

Teoria de perturbações lineares num modelo intrinsecamente simétrico/ Paloma Dias Silva. – Itajubá - MG, 20 de fevereiro de 2026-

58 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Eduardo Henrique Silva Bittencourt

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Itajubá - MG
Instituto de Física e Química - IFQ
Programa de Pós-Graduação em Física, 20 de fevereiro de 2026.

1. Cosmologia. 2. Relatividade Geral. 3. Inomogeneidades. 4. Modelos Intrinsecamente Simétricos. 5. Perturbações Lineares I. Eduardo Henrique Silva Bittencourt. II. Universidade Federal de Itajubá. III. Instituto de Física e Química. IV. Teoria de perturbações lineares num modelo intrinsecamente simétrico.

CDU 02:141:005.7

Paloma Dias Silva

Teoria de perturbações lineares num modelo intrinsecamente simétrico

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física pela UNIFEI como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Mestre em Física.

Itajubá - MG, 12 de março de 2026:

Eduardo Henrique Silva Bittencourt
Orientador

José Carlos Neves de Araújo
Convidado 1

Leandro Gustavo Gomes
Convidado 2

Itajubá - MG
20 de fevereiro de 2026

Agradecimentos

- Primeiramente, agradeço a Deus por Suas bênçãos, orientação e fortaleza. Sem Sua presença constante, a conclusão deste trabalho acadêmico não teria sido possível. Sou grata pela paciência, perseverança e coragem concedidas ao longo desta jornada.

- Agradeço ao Professor Eduardo Bittencourt, meu orientador de mestrado, pela orientação atenta e competente ao longo deste trabalho. Sua disponibilidade, paciência e dedicação, assim como suas valiosas contribuições acadêmicas, foram fundamentais para o desenvolvimento e amadurecimento desta pesquisa.

- Expresso minha gratidão à memória de minha mãe, Helena, que, apesar das adversidades, dedicou-se incansavelmente à educação de suas seis filhas. Mesmo ausente fisicamente durante esta jornada, permaneceu como minha maior fonte de inspiração para seguir adiante.

- Agradeço ao meu pai, Adão, por permanecer ao meu lado durante este período, oferecendo apoio, cuidado e incentivo nos momentos necessários.

- Agradeço ao meu namorado, Felipe, por todo o apoio, incentivo, paciência e compreensão ao longo desta jornada. Sua presença constante e suas palavras de encorajamento foram essenciais para que eu seguisse em frente, mesmo nos momentos mais desafiadores.

- Agradeço às minhas irmãs, Shirlene, Edilene, Luciene, Isabel e Ana Paula, pelo constante apoio emocional, pelas palavras de incentivo e pela presença firme ao longo de toda essa trajetória. Vocês representam a base que me possibilitou chegar até aqui.

- Agradeço aos meus sobrinhos, Bernardo, Marcos, Geovanna, Yasmin, Luisa, Sofia, Alana e Rebeca, por trazerem leveza e alegria a este momento e por serem fonte contínua de inspiração.

- À minha amiga e colega de jornada, Raiane, expresso minha profunda gratidão pelo apoio incondicional, pelas conversas, pelo compartilhamento das dificuldades e por caminhar ao meu lado durante esse processo.

Resumo

A cosmologia contemporânea é amplamente fundamentada no modelo padrão ΛCDM, baseado na métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW) e no Princípio Cosmológico, que assume homogeneidade e isotropia em larga escala. Esse modelo tem obtido grande êxito na descrição da expansão cósmica, das anisotropias da radiação cósmica de fundo e da formação de estruturas em larga escala, embora sua formulação dependa da introdução de componentes ainda não totalmente compreendidos, como matéria escura e energia escura, além de supor simetrias globais que contrastam com as inomogeneidades observadas, como aglomerados, filamentos e vazios cósmicos. Diante dessas limitações, foram desenvolvidos modelos alternativos que relaxam as condições do Princípio Cosmológico, como os modelos de Lemaître–Tolman–Bondi (LTB), Szekeres e Locally Rotationally Symmetric (LRS), permitindo distribuições de matéria mais gerais. Mais recentemente, surgiram os modelos intrinsecamente simétricos, que preservam simetrias internas sem exigir homogeneidade global, constituindo um arcabouço mais flexível para investigar os efeitos das inomogeneidades sobre parâmetros cosmológicos. Neste trabalho, desenvolvemos o formalismo de perturbações lineares escalar para modelos intrinsecamente simétricos, analisando como a presença de gradientes espaciais no fundo geométrico altera as equações de evolução das flutuações. O objetivo é estabelecer as bases teóricas para confrontar esses modelos com o paradigma ΛCDM e investigar possíveis assinaturas observacionais de inomogeneidade.

Palavras-chave: Cosmologia; Relatividade Geral; Modelo Padrão; Inomogeneidades; Modelos Intrinsecamente Simétricos; Perturbações Lineares.

Abstract

Contemporary cosmology is largely grounded in the standard ΛCDM model, based on the Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW) metric and on the Cosmological Principle, which assumes large-scale homogeneity and isotropy. This model has been highly successful in describing cosmic expansion, the anisotropies of the cosmic microwave background, and the formation of large-scale structures, although its formulation depends on the introduction of components that are not yet fully understood, such as dark matter and dark energy, in addition to assuming global symmetries that contrast with the observed inhomogeneities, such as clusters, filaments, and cosmic voids. In light of these limitations, alternative models have been developed that relax the conditions of the Cosmological Principle, such as the Lemaître–Tolman–Bondi (LTB), Szekeres, and Locally Rotationally Symmetric (LRS) models, allowing for more general matter distributions. More recently, intrinsically symmetric models have emerged, which preserve internal symmetries without requiring global homogeneity, providing a more flexible framework to investigate the effects of inhomogeneities on cosmological parameters. In this work, we develop the linear scalar perturbation framework for intrinsically symmetric models, analyzing how the presence of spatial gradients in the geometric background alters the evolution equations of the fluctuations. Our goal is to establish the theoretical basis to confront these models with the ΛCDM paradigm and investigate potential observational signatures of inhomogeneity.

Keywords: Cosmology; General Relativity; Standard Model; Inhomogeneities; Intrinsically Symmetric Models; Linear Perturbations.

Sumário

Notação e convenções

Nesta seção estabelecemos as notações, convenções matemáticas e escolhas físicas adotadas ao longo deste trabalho. O objetivo é fixar claramente os símbolos utilizados, evitar ambiguidades e garantir a consistência formal das expressões apresentadas, especialmente na transição entre o modelo cosmológico padrão e os modelos inomogêneos intrinsecamente simétricos.

1. Índices e assinatura

Adotamos a convenção de soma de Einstein, na qual índices repetidos em posições superior e inferior são implicitamente somados. Os índices gregos $(\mu, \nu, \rho, \sigma, \dots)$ variam de 0 a 3, representando coordenadas espaço-temporais, enquanto os índices latinos $(i, j, k, \dots)$ variam de 1 a 3, correspondendo apenas às componentes espaciais. A assinatura da métrica adotada em todo o trabalho é $(-, +, +, +)$.

2. Sistema de unidades

Salvo indicação explícita em contrário, utilizamos unidades naturais nas quais a velocidade da luz e a constante gravitacional de Newton são tomadas como $c = 1$ e $8\pi G = 1$. Essa escolha simplifica as equações de campo de Einstein para a forma

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}, \tag{1}$$

facilitando o tratamento analítico das equações e, em particular, o desenvolvimento do formalismo perturbativo linear.

3. Formalismo perturbativo e métrica

As grandezas geométricas e físicas são decompostas em um termo de fundo e uma pequena flutuação em torno dele. Introduzimos o parâmetro adimensional $\epsilon \ll 1$ para controlar a ordem da expansão perturbativa, mantendo apenas termos até primeira ordem em ϵ. Essa abordagem permite estudar pequenas inomogeneidades e anisotropias sobre uma geometria cosmológica de fundo homogênea e isotrópica.

A métrica total perturbada, expressa no calibre longitudinal, assume a forma:

$$ds^2 = -e^{f_0(t,\vec{x})} \left(1 + 2\epsilon\Psi(t,\vec{x})\right) dt^2 + a(t)^2 \left(1 + 2\epsilon\Phi(t,\vec{x})\right) \delta_{ij} dx^i dx^j. \tag{2}$$

Nesta expressão, $a(t)$ é o fator de escala cosmológico que descreve a expansão global do espaço, enquanto $f_0(t,\vec{x})$ é uma função escalar geral que parametriza o setor temporal da métrica de fundo. Nos modelos intrinsecamente simétricos, essa função pode ser identificada com o lapso $N(t,\vec{x})$, permitindo acomodar possíveis inomogeneidades já no nível do fundo geométrico. A dependência espacial de f_0 é mantida de forma geral, uma vez que seus gradientes espaciais desempenham papel relevante na dinâmica perturbativa desenvolvida no Capítulo 4.

As funções $\Psi(t,\vec{x})$ e $\Phi(t,\vec{x})$ representam os potenciais gravitacionais escalares associados às perturbações da métrica. No contexto do modelo ΛCDM com fluido perfeito e ausência de tensões anisotrópicas, esses potenciais coincidem, isto é, $\Psi = \Phi$. Entretanto, neste trabalho são tratados como variáveis independentes, de modo a permitir a análise de cenários mais gerais, nos quais contribuições anisotrópicas ao tensor energia-momento podem estar presentes.

4. Conteúdo material e parâmetros específicos

O conteúdo material do universo é descrito pelo tensor energia-momento em sua forma mais geral para fluidos dissipativos,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu} + q_\mu u_\nu + q_\nu u_\mu + \pi_{\mu\nu}, \tag{3}$$

onde ρ representa a densidade de energia, p a pressão isotrópica, u^μ o quadrivetor velocidade do fluido, q_μ o fluxo de calor e $\pi_{\mu\nu}$ o tensor de tensões anisotrópicas.

Nos modelos cosmológicos com simetria intrínseca, introduzimos ainda o parâmetro m, associado à classe de simetria do espaço-tempo, bem como a constante H_0, característica da taxa de expansão desses modelos. Para o estudo das perturbações lineares desenvolvido neste trabalho, o fundo cosmológico será considerado no limite de fluido perfeito, impondo-se $q_i = 0$ e $\pi_{ij} = 0$, exceto quando explicitamente indicado em contrário.

5. Sistema de coordenadas

Adotamos coordenadas comóveis $x^\mu = (t, x, y, z)$, nas quais t representa o tempo cósmico e (x, y, z) correspondem às coordenadas espaciais cartesianas em um fundo espacialmente plano.

6. Notação para derivadas

Para a representação das derivadas das funções métricas e perturbativas ao longo deste trabalho, utilizaremos de forma intercambiável a notação de vírgula (por exemplo, $f_{,i}$) e o operador de derivada parcial (por exemplo, $\partial_i f$). Ambas as notações referem-se à diferenciação em relação às coordenadas comóveis do espaço-tempo de fundo, sendo matematicamente equivalentes e não havendo distinção de natureza física entre elas.

1 Introdução

A cosmologia moderna é fundamentada em um conjunto de princípios e hipóteses que permitem descrever o Universo em larga escala de forma consistente com as observações. Entre eles, destaca-se o Princípio Cosmológico, que assume homogeneidade e isotropia quando o Universo é considerado em escalas suficientemente grandes. A aplicação desse princípio às equações de campo de Einstein da Relatividade Geral conduz ao modelo cosmológico padrão, baseado na métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW). Este modelo, frequentemente chamado de ΛCDM , tem se mostrado extremamente bem-sucedido na descrição da expansão cósmica, das anisotropias da radiação cósmica de fundo (CMB) e da formação de estruturas em larga escala [1, 2, 3, 4].

No entanto, embora o modelo padrão seja amplamente aceito, ele não está isento de limitações. A necessidade de introduzir componentes ainda não completamente compreendidos, como a matéria escura e a energia escura, levanta questões fundamentais sobre a completude da descrição fornecida pelo ΛCDM [5, 6, 7]. Além disso, a detecção de estruturas cósmicas complexas, como vazios, filamentos e aglomerados, evidencia que o Universo real apresenta inomogeneidades significativas em escalas intermediárias, desafiando a simplicidade das hipóteses de homogeneidade e isotropia globais [8, 9, 10].

Essas limitações motivaram o desenvolvimento de modelos cosmológicos inomogêneos, que relaxam parcialmente as condições do Princípio Cosmológico. Entre os exemplos mais relevantes, encontram-se o modelo de Lemaître–Tolman–Bondi (LTB), que preserva simetria esférica mas admite variação radial de densidade [11, 12], e o modelo de Szekeres, que elimina totalmente as simetrias espaciais, permitindo descrever distribuições de matéria altamente assimétricas [10, 13]. Tais modelos fornecem laboratórios teóricos valiosos para investigar como a presença de inomogeneidades pode influenciar a expansão cósmica efetiva e os observáveis cosmológicos. Outro caminho seguido pela literatura é o dos modelos localmente simétricos, como os modelos Locally Rotationally Symmetric (LRS), que mantêm invariância rotacional em torno de um eixo preferencial [14, 15, 16].

Mais recentemente, surgiram os modelos intrinsecamente simétricos, que constituem uma proposta conceitual destinada a explorar cenários nos quais determinadas simetrias internas são preservadas mesmo quando a homogeneidade global não é assumida [17, 18]. Esses modelos partem de uma caracterização geométrica rigorosa das hipersuperfícies espaciais, permitindo que a estrutura interna do espaço mantenha relações invariantes, embora a distribuição de matéria e a curvatura possam variar ao longo das coordenadas espaciais. Essa formulação cria um quadro matemático mais amplo e flexível que o fornecido pelo modelo FLRW, e possibilita investigar configurações que incorporam inomogeneidades reais sem abandonar princípios fundamentais da Relatividade Geral.

Trabalhos anteriores sobre cosmologias não homogêneas reforçam a necessidade de estruturas intermediárias entre a simplicidade total do FLRW e a complexidade de modelos completamente livres de simetrias, como apontado em estudos sobre inomogeneidades e backreaction [8, 19, 9, 20]. Além disso, análises baseadas em soluções exatas têm mostrado como métricas mais gerais podem descrever de forma realista a distribuição de matéria em larga escala, destacando a relevância de modelos como LTB e Szekeres para compreender a evolução de estruturas cósmicas [11, 13]. Nesse sentido, os modelos intrinsecamente simétricos representam uma alternativa promissora para descrever geometrias mais ricas e compatíveis com observações, ao mesmo tempo em que mantêm condições matemáticas que tornam possível o tratamento analítico da dinâmica cosmológica.

Por fim, é importante ressaltar que o estudo das perturbações cosmológicas desempenha papel central no elo entre os modelos de fundo e as observações. Flutuações primordiais presentes no Universo muito jovem, amplificadas pela dinâmica gravitacional, deram origem às anisotropias observadas na radiação cósmica de fundo e, posteriormente, à estrutura em larga escala que caracteriza a distribuição de galáxias [2]. O formalismo das perturbações lineares em espaço-tempo curvo, desenvolvido de maneira sistemática no trabalho clássico de Kodama e Sasaki [21] e consolidado em referências padrão da área [3, 4], fornece o arcabouço matemático necessário para descrever a evolução dessas flutuações em modelos cosmológicos homogêneos e isotrópicos.

Dentro do modelo ΛCDM, o tratamento das perturbações é particularmente eficiente devido à simplicidade geométrica do espaço-tempo FLRW, que permite decompor as flutuações em modos escalares, vetoriais e tensoriais, levando a equações diferenciais ordinárias que podem ser resolvidas de forma direta [2]. No entanto, quando se abandona o pressuposto de homogeneidade global e se considera modelos inomogêneos ou geometrias mais gerais, como LTB, Szekeres ou modelos intrinsecamente simétricos, o estudo das perturbações torna-se substancialmente mais complexo. Nesses cenários, a ausência de simetrias suficientes impede a separação simples em modos e frequentemente leva a sistemas de equações diferenciais parciais acopladas, que demandam técnicas numéricas avançadas ou novos formalismos para serem tratadas [9, 22]. Além disso, a definição de quantidades observáveis, como o potencial gravitacional efetivo ou a taxa de crescimento de estruturas, torna-se mais sutil, já que dependem fortemente da escolha de folheação e do referencial do observador [8].

Assim, embora as perturbações lineares constituam uma das ferramentas mais bem estabelecidas da cosmologia moderna, estender esse formalismo para além do modelo ΛCDM permanece uma tarefa desafiadora, mas necessária, para que modelos mais gerais, incluindo os intrinsecamente simétricos, possam ser confrontados de maneira consistente com observações de alta precisão.

Neste trabalho, buscamos avançar nessa linha de investigação ao explorar como modelos cosmológicos intrinsecamente simétricos podem ser aplicados ao estudo de parâmetros cosmológicos e à interpretação de observáveis. A proposta central consiste em analisar de que maneira a preservação de simetrias internas, mesmo na ausência de homogeneidade global, afeta a dinâmica cosmológica, a evolução de grandezas físicas e sua relação com quantidades observacionais. Essa abordagem é particularmente relevante no contexto atual, em que observações cada vez mais precisas de anisotropias do CMB, oscilações acústicas de bárions (BAO), crescimento de estruturas e lentes gravitacionais fortalecem a necessidade de modelos mais gerais capazes de capturar sutilezas que extrapolam o quadro homogêneo e isotrópico [23, 24, 25].

A utilização de modelos intrinsecamente simétricos permite investigar, por exemplo, como parâmetros cosmológicos efetivos – tais como a taxa de expansão, o parâmetro de desaceleração, a curvatura espacial e o contraste de densidade – podem diferir de suas formulações usuais no modelo ΛCDM quando a estrutura geométrica do espaço-tempo é enriquecida pela presença de inomogeneidades organizadas por simetrias internas. Além disso, esses modelos oferecem a possibilidade de estudar efeitos associados a retroação e a interpretações alternativas para observáveis fundamentais, ampliando a discussão inaugurada por modelos como LTB e Szekeres [22, 9, 26].

Ao longo dos capítulos seguintes, revisaremos em detalhes o modelo ΛCDM e seu embasamento no Princípio Cosmológico, discutiremos diferentes propostas de modelos inomogêneos – incluindo LTB, Szekeres e os modelos LRS – e apresentaremos formalmente a construção geométrica dos modelos cosmológicos intrinsecamente simétricos. Na sequência, abordaremos o papel das perturbações lineares e sua importância para a ligação entre teoria e observação. Embora o formalismo das perturbações seja amplamente estabelecido no contexto do modelo padrão, sua extensão para geometrias mais gerais permanece um desafio conceitual e computacional [21, 2, 9]. Isso ocorre porque a quebra das simetrias globais impede a decomposição direta em modos independentes e resulta em sistemas de equações diferenciais parciais acopladas, exigindo técnicas analíticas e numéricas mais robustas. Assim, ao integrar essas abordagens, nosso objetivo é contribuir para a construção de uma cosmologia mais abrangente e precisa, capaz de acomodar a complexidade do Universo real e, ao mesmo tempo, fornecer previsões observacionais robustas.

2 Modelo Padrão da Cosmologia

2.1 O Princípio Cosmológico

O desenvolvimento da cosmologia moderna está fundamentado em um postulado central conhecido como Princípio Cosmológico, que estabelece que o Universo, em escalas suficientemente grandes, é homogêneo e isotrópico [1]. Isso significa que, em média, a distribuição de matéria e energia no cosmos é a mesma em todos os lugares (homogeneidade) e em todas as direções (isotropia) [4]. Esse princípio fornece um alicerce conceitual simples, mas profundamente eficaz: ele permite substituir a complexa distribuição real de estruturas cósmicas por um modelo estatístico regular, capturando apenas o comportamento médio do espaço-tempo.

Esse princípio representa uma generalização do Princípio Copernicano, segundo o qual a Terra não ocupa uma posição privilegiada no Universo. A cosmologia contemporânea vai além, assumindo que nenhum ponto ou direção do espaço possui um status especial. Essa hipótese, embora não derivada de primeiros princípios da física, desempenha um papel metodológico essencial: ela funciona como uma condição de simetria que permite a construção de modelos matematicamente tratáveis e compatíveis com observações em larga escala [27]. Sem essas simetrias, a solução das equações de campo de Einstein se tornaria extremamente mais complexa e, em muitos casos, inviável de ser tratada analiticamente.

A validade do Princípio Cosmológico é fortemente sustentada por evidências empíricas. A radiação cósmica de fundo em micro-ondas (CMB), detectada por Penzias e Wilson em 1965 [28], apresenta uma temperatura quase constante em todas as direções, com anisotropias da ordem de 10^{-5}. Essas pequenas flutuações indicam que, na época da recombinação, o Universo era extremamente uniforme, justificando o uso de simetrias globais para modelar sua evolução [3]. De modo complementar, levantamentos em larga escala da distribuição de galáxias, como o Sloan Digital Sky Survey (SDSS) [7] e o 2dF Galaxy Redshift Survey [29], demonstram que, acima de escalas de algumas centenas de megaparsecs, a distribuição das estruturas cósmicas tende à homogeneidade estatística. Esses resultados sugerem que as simetrias assumidas no Princípio Cosmológico são boas aproximações para descrever o Universo em escalas suficientemente amplas [30].

A adoção do Princípio Cosmológico impõe severas restrições à forma da métrica do espaço-tempo em uma teoria relativística. Na linguagem da Relatividade Geral, homogeneidade e isotropia implicam que o espaço tridimensional a cada instante de tempo cósmico deve ser uma variedade maximamente simétrica [2]. A consequência direta é a métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW), que se tornou a base do modelo cosmológico padrão.

Apesar de seu sucesso, o Princípio Cosmológico não é absoluto. Em escalas menores, como a de aglomerados, superaglomerados e estruturas filamentosas, a distribuição da matéria é fortemente inomogênea e anisotrópica [30]. Além disso, a teoria relativística permite a existência de soluções que generalizam o modelo padrão ao incorporar anisotropias ou estruturas globais mais complexas. Exemplos importantes incluem os modelos anisotrópicos de Bianchi, que preservam homogeneidade, mas permitem diferentes direções privilegiadas no espaço [31], e as soluções com topologias espaciais não triviais, em que o Universo pode ser espacialmente finito ou possuir conectividade múltipla sem deixar de ser localmente homogêneo [32, 33]. Esses cenários mostram que o Princípio Cosmológico é uma escolha teórica motivada por observações, mas não uma necessidade imposta pelas equações de Einstein.

A viabilidade desse princípio é, portanto, uma hipótese testável. Observações contemporâneas de alta precisão, como as do satélite Planck [34], continuam a impor limites rigorosos sobre possíveis violações das simetrias assumidas. Entre esses testes incluem-se a busca por modos de Bianchi na CMB, assinaturas de topologia múltipla, monopolos e dipolos residuais, bem como estudos estatísticos da distribuição de galáxias. Eventuais desvios detectados poderiam revelar novos elementos físicos, sugerir fases anisotrópicas ou indicar transições cosmológicas que precederam o estado quase homogêneo observado hoje.

2.2 A métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW)

Como dito, o uso do Princípio Cosmológico, impõe restrições severas à geometria do espaço-tempo no contexto da Relatividade Geral. A solução mais geral que satisfaz essas condições é descrita pela métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW), que representa um espaço tridimensional maximamente simétrico em evolução temporal [2, 4, 35, 36]. A forma padrão da métrica FLRW em coordenadas esféricas (t, r, θ, Φ) é:

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 \left(d\theta^2 + sen^2\theta \, d\phi^2 \right) \right], \tag{2.1}$$

onde $a(t)$ é o fator de escala, que descreve a evolução temporal do Universo, e k é o parâmetro de curvatura espacial, que pode assumir os valores $+1, 0$ ou -1, correspondendo, respectivamente, a geometrias fechada, plana ou aberta [1, 27].

Na métrica FLRW, o sistema de coordenadas utilizado é o de coordenadas comóveis, nas quais os observadores fixos no referencial de expansão do Universo (sem velocidade peculiar) mantêm posição espacial constante [1, 3, 37]. A separação física $D(t)$ entre dois pontos com distância comóvel r é dada por:

$$D(t) = a(t)r. \tag{2.2}$$

Essa expressão mostra que toda a dinâmica da expansão está encapsulada em $a(t)$; ou seja, mesmo que r seja constante, a separação física pode crescer com o tempo, caracterizando a expansão do Universo [35, 36].

A curvatura espacial do Universo, representada pelo parâmetro k, determina a geometria tridimensional das seções espaciais para tempos cósmicos constantes [2, 27]. Dependendo do valor de k, o espaço pode ser euclidiano, esférico ou hiperbólico, o que implica diferentes propriedades globais como o volume total do Universo e o comportamento das geodésicas [1, 4]. Essas diferenças estão diretamente associadas ao termo $\frac{1}{1-kr^2}$ presente na métrica FLRW, que modifica a forma como as distâncias e ângulos são medidos no espaço em expansão [2, 3]. A curvatura espacial tem consequências observacionais importantes, influenciando, por exemplo, a formação de estruturas cósmicas [38] e a trajetória da luz em escalas cosmológicas [4, 36].

A forma da métrica FLRW é consequência direta das simetrias espaciais impostas: homogeneidade (invariância por translações) e isotropia (invariância por rotações). Essas simetrias restringem a métrica a apenas um grau de liberdade temporal $a(t)$, refletindo que a dinâmica relevante é a expansão ou contração global do espaço. Essas condições foram demonstradas por Robertson [39] e Walker [40] como as únicas admissíveis sob tais simetrias.

Apesar do sucesso da métrica FLRW na descrição da estrutura em larga escala do Universo, trata-se de uma idealização. Em escalas menores, como as de galáxias e aglomerados, ocorrem flutuações e anisotropias que requerem uma abordagem mais refinada. A teoria das perturbações cosmológicas desenvolvida sobre a métrica FLRW é a base da cosmologia moderna, permitindo a descrição da formação de estruturas, das anisotropias no CMB e do crescimento das inomogeneidades ao longo da evolução cósmica [2, 38, 21].

2.3 As Equações de Campo de Einstein

A estrutura dinâmica do espaço-tempo na Relatividade Geral é governada pelas equações de campo de Einstein, formuladas em 1915, que estabelecem uma relação entre a curvatura do espaço-tempo e o conteúdo energético-material nele presente [41, 42]:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{2.3}$$

Nessa equação, $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, que resume a curvatura do espaço-tempo, $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico, Λ é a constante cosmológica, G é a constante da gravitação universal, c é a velocidade da luz e, $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento que representa a densidade de energia, pressão e fluxo de energia do conteúdo do Universo [43, 44]. A constante cosmológica Λ foi originalmente introduzida por Einstein com o objetivo de permitir soluções estáticas, mas hoje é interpretada como uma forma de energia do vácuo, associada à energia escura observada [3, 5, 6, 45].

As equações de campo são profundamente geométricas: o lado esquerdo representa a geometria do espaço-tempo (sua curvatura), enquanto o lado direito representa seu conteúdo material. Tal formulação é compatível com o Princípio da Equivalência e com a exigência de conservação local da energia e do momento, expressa pela identidade de Bianchi [46, 47]:

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{2.4}$$

A métrica FLRW, por satisfazer as simetrias do Princípio Cosmológico, simplifica significativamente a forma das equações de campo. Ao se inserir a métrica FLRW nas equações de Einstein, com o conteúdo do Universo descrito por um fluido perfeito de densidade $\rho(t)$ e pressão $p(t)$, obtêm-se as chamadas equações de Friedmann [1, 4, 27], que será discutido com mais detalhes na Seção 2.5. Essas equações descrevem como o fator de escala $a(t)$ evolui ao longo do tempo, determinando a dinâmica da expansão cósmica e sua ligação com os parâmetros cosmológicos fundamentais [36, 48].

2.4 O Tensor Energia-Momento

O conteúdo material do Universo influencia a geometria do espaço-tempo por meio do tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$, que descreve a densidade e o fluxo de energia e momento em cada ponto [43, 44]. Sua forma específica depende da natureza da matéria presente, mas, no contexto cosmológico, é costume modelá-lo como um fluido perfeito [1, 35, 36], cuja escolha é justificada pelo Princípio Cosmológico.

Nesse modelo, o tensor assume a forma:

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu} \tag{2.5}$$

onde ρ representa a densidade de energia, p é a pressão isotrópica do fluido, u^μ é o quadrivetor velocidade do fluido comóvel [47].

Embora o fluido perfeito seja uma aproximação eficaz para a maior parte da história cósmica, outros modelos mais gerais de $T_{\mu\nu}$ são utilizados em contextos específicos. Isso inclui anisotropias, viscosidade, interações entre diferentes componentes e campos escalares, sobretudo em cenários inflacionários e em teorias de gravidade modificada [3, 27]. Tais extensões permitem investigar a física do Universo primordial e explorar alternativas ao modelo cosmológico padrão.

2.5 As Equações de Friedmann

Ao se aplicar a métrica (FLRW) nas equações de campo de Einstein, assumindo que o conteúdo do Universo pode ser modelado como um fluido perfeito, com densidade de energia ρ e pressão p, obtêm-se duas equações diferenciais fundamentais para o fator de escala $a(t)$ [2, 27, 35]. Estas são as equações de Friedmann, que governam a dinâmica da expansão do Universo:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}, \tag{2.6}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}. \tag{2.7}$$

A primeira equação é conhecida como equação de Friedmann–Lemaître, e relaciona a taxa de expansão do Universo, dada pelo parâmetro de Hubble $H = \frac{\dot{a}}{a}$, à densidade de energia total ρ, à curvatura espacial k e à constante cosmológica Λ. A segunda equação descreve a aceleração da expansão e mostra como ela depende da pressão e da densidade da matéria e energia [2, 36, 48].

Essas equações são complementadas pela equação de conservação da energia, derivada da identidade de Bianchi:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0 \tag{2.8}$$

que descreve como a densidade de energia de um dado componente do Universo evolui com a expansão. Essa equação pode ser usada para determinar o comportamento temporal de ρ para diferentes tipos de conteúdo: por exemplo, matéria não relativística (com $p \approx 0$), radiação (com $p \approx pc^2/3$) e a energia escura (com $p \approx -pc^2$) [3, 35, 48].

A análise dessas equações permite estudar diferentes eras da história cósmica, como a era da radiação, da matéria e da energia escura, e comparar as previsões teóricas com observações cosmológicas, como a expansão acelerada do Universo detectada por supernovas do tipo Ia [5, 6].

2.6 Problemas com o modelo ΛCDM

O modelo cosmológico ΛCDM constitui a estrutura teórica mais amplamente utilizada para descrever a expansão acelerada do Universo e a formação de estruturas em larga escala. Contudo, apesar de seu sucesso observacional, diversas questões conceituais e empíricas permanecem abertas e têm motivado o desenvolvimento de extensões e alternativas. Um dos problemas mais fundamentais é o conhecido problema da constante cosmológica. As estimativas oriundas da energia do vácuo quântico são superiores ao valor observado por cerca de 120 ordens de magnitude, constituindo uma das maiores discrepâncias entre teoria e observação na física moderna [45]. Relacionado a isso está o problema da coincidência, que questiona por que razão, justamente na época atual, a densidade de energia escura e a densidade de matéria assumem valores comparáveis, mesmo evoluindo de forma distinta ao longo do tempo cósmico [49].

Além das dificuldades teóricas, experimentos e observações recentes trouxeram à tona tensões estatisticamente significativas que desafiam a consistência do modelo padrão. A mais proeminente delas é a tensão no valor da constante de Hubble (H_0), que revela uma discrepância superior a 4σ entre diferentes métodos de medição. Estimativas locais, obtidas a partir de velas padrão como estrelas Cefeidas e Supernovas do tipo Ia, apresentam valores consistentemente superiores (em torno de 73 km/s/Mpc) aos inferidos a partir da radiação cósmica de fundo (CMB) pelo satélite Planck (67,4 km/s/Mpc) sob a hipótese ΛCDM. Análises recentes indicam que essa discrepância persiste mesmo após considerações detalhadas sobre possíveis erros sistemáticos [50, 51]. Outra tensão relevante surge em medidas do parâmetro S_8, que caracteriza a amplitude da distribuição de matéria e o nível de aglomeração (clustering) das estruturas cósmicas. Estudos de lentes gravitacionais fracas e levantamentos de galáxias indicam valores de aglomeração menores do que aqueles previstos quando os parâmetros cosmológicos são ajustados usando dados do CMB. Esse resultado sugere um possível descompasso entre a taxa de crescimento de estruturas observada no Universo tardio e o valor inferido pelo modelo padrão a partir do Universo jovem, levantando questões sobre a necessidade de considerar efeitos de retroação e modelos mais gerais, como os intrinsecamente simétricos [52].

Além das tensões empíricas diretas, há ainda o desafio relacionado às idealizações geométricas do modelo FLRW que fundamentam o ΛCDM. Embora a suposição de homogeneidade e isotropia seja consistente em escalas cosmológicas muito amplas, análises teóricas têm mostrado que inomogeneidades reais podem, em princípio, influenciar a expansão média do Universo. Estudos investigam como flutuações não lineares e efeitos de retroação podem modificar a dinâmica efetiva, levantando questões sobre a robustez da aproximação homogênea quando aplicada a um Universo estruturalmente complexo [53, 54, 55]. Essas análises reforçam que a relação entre as equações de Einstein e suas médias cosmológicas pode ser mais sutil do que o modelo padrão assume, especialmente em contextos dominados por estruturas de grande escala.

Ainda permanece aberto o problema da natureza da matéria escura. Embora sua presença seja fortemente apoiada por múltiplos tipos de observações, a ausência de detecção direta após décadas de experimentos dedicados sugere que pode ser necessário considerar novas formas de matéria, interações não padrão ou mesmo modificações da gravidade em escalas cosmológicas [56]. Essas questões alimentam uma ampla gama de propostas que vão desde campos escalares ultra-leves até teorias gravitacionais alternativas.

Em síntese, embora o ΛCDM continue sendo a estrutura mais consistente e bem ajustada ao conjunto de observações disponíveis, tensões quantitativas, dificuldades conceituais e limitações geométricas persistem. Esses desafios abrem espaço para explorar modelos mais gerais, incluindo cenários inomogêneos, construções geométricas ampliadas e outras extensões que buscam compreender melhor a complexidade do Universo real e testar a resiliência do paradigma padrão diante de novas observações e formulações teóricas.

2.7 Resultados Importantes do Formalismo de Perturbações em FLRW

O formalismo de perturbações cosmológicas desenvolvido sobre a métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker constitui um dos pilares da cosmologia moderna, pois estabelece a ponte entre a descrição idealizada do Universo homogêneo e isotrópico e a complexa estrutura observada em escalas menores. Ao introduzir pequenas flutuações em torno do espaço-tempo FLRW, é possível estudar de maneira sistemática a origem, a evolução e as consequências observacionais das inomogeneidades cósmicas, mantendo o controle analítico do problema dentro da Relatividade Geral [2, 3].

Um dos resultados fundamentais desse formalismo é a decomposição das perturbações segundo suas propriedades de transformação sob rotações espaciais. As perturbações podem ser classificadas de forma única em modos escalares, vetoriais e tensoriais, conhecidos como decomposição escalar vetorial tensorial. Essa separação é possível devido à simetria espacial do fundo FLRW e permite que, em primeira ordem, os diferentes modos evoluam de maneira independente [21, 57]. Os modos escalares estão associados às flutuações de densidade e são os principais responsáveis pela formação de estruturas; os modos vetoriais descrevem vorticidade e geralmente decaem com a expansão; e os modos tensoriais correspondem às ondas gravitacionais primordiais.

Outro avanço crucial foi a formulação de variáveis gauge-invariantes, que resolveu de forma definitiva o chamado problema de gauge em cosmologia. Em um espaço-tempo dinâmico, pequenas transformações de coordenadas podem mimetizar perturbações físicas, tornando ambígua a interpretação dos resultados. A introdução de combinações invariantes sob transformações de gauge, como os potenciais de Bardeen, permitiu identificar de forma inequívoca as grandezas fisicamente observáveis [57, 58]. Esse desenvolvimento tornou o formalismo matematicamente consistente e fundamental para comparações diretas com dados observacionais.

No contexto dos modos escalares, um resultado de grande importância é a descrição do crescimento das perturbações de densidade em um Universo dominado por matéria. Em escalas sub-horizonte, as flutuações crescem aproximadamente de forma proporcional ao fator de escala durante a era dominada por matéria, fornecendo a base teórica para a formação hierárquica de estruturas como galáxias e aglomerados [59, 38]. Esse comportamento é modificado na presença de radiação ou energia escura, o que permite usar observações do crescimento de estrutura como uma poderosa ferramenta para testar modelos cosmológicos.

O formalismo perturbativo em FLRW também desempenha papel central na interpretação das anisotropias da radiação cósmica de fundo. As flutuações observadas no CMB são diretamente relacionadas às perturbações escalares e tensoriais presentes no plasma primordial, e sua evolução pode ser calculada de forma precisa a partir das equações perturbadas de Einstein e da dinâmica dos fluidos cosmológicos [60, 3]. O excelente acordo entre as previsões teóricas baseadas nesse formalismo e os dados experimentais obtidos por missões como WMAP e Planck representa uma das maiores confirmações empíricas do modelo cosmológico padrão [34].

Além disso, o formalismo de perturbações em FLRW fornece o arcabouço necessário para o estudo de lentes gravitacionais fracas, oscilações acústicas de bárions e correlações angulares em levantamentos de galáxias. Esses observáveis dependem de integrais ao longo da linha de visada das perturbações métricas e da distribuição de matéria, todas quantidades calculáveis de forma consistente dentro da teoria perturbativa [61, 4]. Dessa forma, a cosmologia de precisão contemporânea está profundamente enraizada nos resultados obtidos a partir das perturbações lineares em um fundo FLRW.

Apesar de seu enorme sucesso, esses resultados dependem fortemente das simetrias do modelo de fundo. A homogeneidade e isotropia globais são essenciais tanto para a decomposição escalar vetorial tensorial quanto para a definição clara das variáveis gauge-invariantes. Quando essas simetrias são relaxadas, como em modelos inomogêneos ou intrinsecamente simétricos, muitos desses resultados deixam de ser automaticamente válidos, tornando o tratamento das perturbações substancialmente mais complexo. Essa limitação motiva o estudo cuidadoso de extensões do formalismo perturbativo para além do cenário FLRW, tema que será explorado nos capítulos seguintes.

3 Modelos Inomogêneos

3.1 O Modelo Cosmológico Padrão: Sucessos, Limitações e Motivação para Extensões Inomogêneas

Modelos cosmológicos inomogêneos são soluções das equações de campo de Einstein que não impõem a condição de homogeneidade global do espaço-tempo. Diferentemente do modelo padrão baseado na métrica FLRW, que assume homogeneidade e isotropia em todas as direções e posições, os modelos inomogêneos permitem variações espaciais da densidade, curvatura e expansão. Tais modelos podem ou não preservar alguma simetria espacial, por exemplo, simetria esférica ou axial e podem ser localmente simétricos, ainda que globalmente mais complexos [10, 11, 62].

O modelo cosmológico padrão, baseado na métrica FLRW, alcançou um notável sucesso ao explicar de forma unificada diversos dados observacionais: a uniformidade da CMB, a distribuição estatística de galáxias em grandes escalas e a relação entre redshift e distância observada por supernovas do tipo Ia [1, 3, 4]. Sua força reside na simplicidade das equações de Friedmann, que relacionam diretamente a geometria do Universo à densidade de energia média, assumindo simetrias espaciais ideais.

Entretanto, o modelo FLRW apresenta limitações importantes. Em escalas menores que aproximadamente 100 megaparsec, o Universo é claramente inomogêneo: observações revelam vazios cósmicos, filamentos, superaglomerados e anisotropias residuais na CMB [38, 22]. Além disso, existe a possibilidade de que essas inomogeneidades exerçam um efeito dinâmico coletivo sobre a expansão global, um fenômeno conhecido como backreaction [9, 8]. Outra motivação para considerar modelos mais gerais está na busca de explicações alternativas à aceleração da expansão do Universo, sem necessidade de postular uma constante cosmológica ou um campo de energia escura [10, 63].

Diante disso, os modelos inomogêneos surgem como extensões naturais do modelo padrão, permitindo explorar soluções mais gerais das equações de Einstein e testar a robustez das inferências cosmológicas. Ao relaxar as condições de simetria impostas pelo Princípio Cosmológico, é possível estudar como a estrutura em grande escala e a distribuição real de matéria afetam as observações. Além disso, esses modelos funcionam como laboratórios teóricos para investigar o papel das inomogeneidades na evolução cósmica, na formação de estruturas e na interpretação de observáveis fundamentais como o redshift, o brilho de supernovas e a geometria aparente do Universo [9, 13, 64].

3.2 A Estrutura Matemática de Modelos Inomogêneos

Modelos cosmológicos inomogêneos são definidos como soluções das equações de campo de Einstein que não assumem homogeneidade espacial global [64]. Ao contrário do modelo FLRW, o qual a simetria do espaço tridimensional é máxima, e a métrica depende apenas do tempo por meio do fator de escala $a(t)$, os modelos inomogêneos permitem dependência espacial explícita nas funções métricas e na distribuição de matéria, o que leva a uma estrutura geométrica significativamente mais rica [8, 10, 11].

Em geral, esses modelos são classificados com base nas simetrias de Killing que preservam determinadas propriedades geométricas [62]. O número e o tipo de vetores de Killing disponíveis determinam o grau de simetria do espaço-tempo: no caso de FLRW, há a simetria máxima com seis vetores de Killing espaciais associados à homogeneidade e isotropia globais [4]. Em contrapartida, modelos como os de Lemaître–Tolman–Bondi (LTB) preservam apenas a simetria esférica, mantendo três vetores de Killing associados ao grupo de rotações $SO(3)$, o que permite a existência de inomogeneidades radiais [11]. Modelos ainda mais gerais, como o de Szekeres, não possuem nenhuma isometria espacial, sendo chamados de "genuinamente inomogêneos"ou "sem simetria"[10, 13]. Essa redução no grau de simetria implica que a métrica deixa de ter uma forma universal simplificada, exigindo que as equações de campo sejam tratadas como sistemas de equações diferenciais parciais acopladas, em vez das equações diferenciais ordinárias do modelo padrão.

A perda dessas simetrias implica que a métrica deixa de ter uma forma universal e simplificada. Por exemplo, em FLRW a separação entre dois pontos é puramente determinada por $a(t)$, enquanto nos modelos inomogêneos a distância física, a taxa de expansão e a curvatura podem variar ponto a ponto no espaço [9]. Isso significa que, em vez de uma única equação de Friedmann, devem ser resolvidas equações diferenciais parciais acopladas, geralmente dependentes do tempo e da posição [8, 10, 64].

Além da complexidade geométrica, um aspecto fundamental dos modelos inomogêneos é a definição da folha de tempo; isto é, a escolha de hipersuperfícies tridimensionais nas quais o tempo é considerado constante. Essas folhas formam uma folheação do espaço-tempo, crucial para interpretar a evolução das grandezas físicas. No modelo FLRW, existe uma folheação natural: cada folha de tempo é homogênea e isotrópica, e os observadores comóveis compartilham um tempo cósmico global. Já nos modelos inomogêneos, essa estrutura não é mais única: a folheação depende da escolha do referencial e da coordenada temporal adotada, o que impacta diretamente o cálculo de quantidades observáveis como a taxa de expansão, densidade média e curvatura [8, 9]. Em particular, a ambiguidade na escolha da folheação está no cerne de debates sobre o papel das inomogeneidades na dinâmica cosmológica média, especialmente nos estudos de backreaction [64].

Portanto, a estrutura matemática dos modelos inomogêneos é ao mesmo tempo mais complexa e mais flexível. Ela permite modelar com mais realismo a distribuição de matéria no Universo e investigar como variações locais podem influenciar as grandezas cosmológicas efetivas, inclusive a aceleração aparente da expansão cósmica [9, 63]. Como veremos nas seções seguintes, alguns desses modelos, como LTB, Szekeres e LRS; oferecem soluções exatas úteis para testar essas ideias [10, 13].

3.3 O Modelo de Lemaître–Tolman–Bondi (LTB)

O modelo de Lemaître–Tolman–Bondi (LTB) é uma solução exata das equações de campo de Einstein que descreve um universo com simetria esférica, porém radialmente inomogêneo, preenchido por um fluido de poeira, isto é, matéria sem pressão [11, 65]. Diferentemente do modelo cosmológico padrão FLRW, que assume homogeneidade e isotropia globais, o modelo LTB permite que a densidade de matéria, a curvatura espacial e a taxa de expansão variem ao longo da coordenada radial [10, 63].

Matematicamente, a simetria esférica implica a existência de três vetores de Killing associados ao grupo de rotações $SO(3)$, garantindo invariância sob rotações espaciais [11, 66]. Enquanto o modelo FLRW é maximamente simétrico com seis vetores de Killing, o modelo LTB preserva apenas a subvariedade isométrica associada à simetria esférica. A ausência de simetria translacional radial permite que as grandezas físicas dependam explicitamente da coordenada radial comóvel r.

A métrica do modelo LTB é dada por

$$ds^2 = -c^2dt^2 + \frac{R'(t,r)^2}{1+2E(r)}\,dr^2 + R(t,r)^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2\right), \tag{3.1}$$

onde $R(t,r)$ representa o raio areal associado a uma esfera comóvel, $E(r)$ é a função de energia específica relacionada à curvatura radial, e $R' = \partial R/\partial r$ [11]. Essa forma da métrica evidencia que a geometria espacial pode variar ao longo da direção radial, preservando, contudo, a simetria esférica em torno de um ponto central.

O conteúdo material é descrito por um fluido de poeira, cujo tensor energia-momento é

$$T^{\mu\nu} = \rho(t,r)u^\mu u^\nu, \tag{3.2}$$

com $u^\mu = \delta^\mu_0$ no sistema de coordenadas comóvel, o que reflete a ausência de pressão e tensões anisotrópicas [11, 66].

As equações de campo de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \tag{3.3}$$

conduzem às equações fundamentais do modelo LTB. Em particular, obtém-se a equação dinâmica

$$\dot{R}^2(t,r) = \frac{2GM(r)}{R(t,r)} + 2E(r), \tag{3.4}$$

na qual $M(r)$ representa a massa gravitacional efetiva contida no interior da coordenada radial r [65, 11, 10]. A densidade de matéria é dada por

$$\rho(t,r) = \frac{M'(r)}{4\pi R^2(t,r)R'(t,r)}, \tag{3.5}$$

o que evidencia explicitamente a possibilidade de perfis radiais de densidade arbitrários [65, 11].

A solução geral dessas equações pode ser expressa em forma paramétrica, dependendo do sinal da função $E(r)$, correspondendo aos casos hiperbólico ($E > 0$), parabólico ($E = 0$) e elíptico ($E < 0$) [11, 10].

Essa solução foi desenvolvida originalmente por Georges Lemaître (1933), Richard Tolman (1934) e Hermann Bondi (1947), com o objetivo de estudar o colapso gravitacional de distribuições esféricas de matéria [67, 68, 65]. No entanto, o modelo LTB passou a desempenhar um papel relevante na cosmologia contemporânea ao ser empregado na investigação de hipóteses alternativas à energia escura, em particular em cenários nos quais o observador estaria localizado próximo ao centro de uma extensa região subdensa em escalas cosmológicas [12, 69].

Do ponto de vista observacional, os principais observáveis cosmológicos são obtidos por meio da integração das equações das geodésicas nulas radiais,

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{R'(t,r)}{\sqrt{1+2E(r)}}, \tag{3.6}$$

e da equação para o redshift cosmológico,

$$\frac{dz}{dr} = (1+z)\frac{\dot{R}'(t,r)}{\sqrt{1+2E(r)}}, \tag{3.7}$$

o que permite determinar diretamente a relação distância–redshift e confrontar previsões teóricas com dados observacionais [63, 10].

Apesar de alguns desses modelos ajustarem adequadamente dados de supernovas do tipo Ia, da radiação cósmica de fundo (CMB) e das oscilações acústicas de bárions (BAO), observações adicionais impõem restrições importantes. Em particular, o efeito Sunyaev–Zeldovich cinemático (kSZ), medido em aglomerados de galáxias localizados transversalmente à região subdensa, impõe limites severos aos perfis radiais admissíveis [70, 71]. Além disso, análises combinando dados do WMAP, do SDSS e medições do parâmetro de Hubble indicam que apenas uma região bastante restrita do espaço de parâmetros desses modelos permanece compatível com as observações [69].

Nos últimos anos, surgiram extensões modernas do modelo LTB, como os chamados modelos ΛLTB, que incorporam explicitamente uma constante cosmológica. Nesse caso, a equação dinâmica torna-se

$$\dot{R}^2(t,r) = \frac{2GM(r)}{R(t,r)} + 2E(r) + \frac{\Lambda}{3}R^2(t,r), \tag{3.8}$$

permitindo o estudo conjunto dos efeitos de inomogeneidade e aceleração cósmica [10, 72].

Nesse contexto, destaca-se o projeto *BEHOMO* (*Cosmology Beyond Homogeneity and Isotropy*), cujo objetivo é investigar, de forma sistemática, o impacto de fundos cosmológicos inomogêneos na formação e evolução da estrutura em larga escala [72]. Essas simulações fornecem um laboratório numérico fundamental para testar a consistência observacional de modelos cosmológicos radialmente inomogêneos e para quantificar até que ponto desvios do Princípio Cosmológico podem influenciar observáveis cosmológicos de precisão.

Além disso, adaptações do modelo LTB em contextos de gravidade modificada, como teorias $f(R)$, nas quais a ação de Einstein é generalizada para incluir funções do escalar de Ricci, têm sido exploradas com o objetivo de explicar a aceleração cósmica sem a introdução explícita de energia escura [73, 74].

Em síntese, o modelo LTB constitui uma alternativa relevante ao modelo FLRW quando se busca incorporar efeitos de inomogeneidade espacial de forma exata. Sua flexibilidade matemática permite explorar cenários cosmológicos mais complexos, testar a robustez das inferências do modelo padrão e investigar o impacto de grandes estruturas espaciais sobre os observáveis cosmológicos.

3.4 O Modelo de Szekeres

O Modelo de Szekeres é uma solução exata das equações de Einstein que generaliza o modelo LTB, eliminando completamente a simetria esférica, o que o torna uma das formas exatas mais realistas de descrever universos inomogêneos e anisotrópicos, sem depender de perturbações lineares do modelo FLRW [75]. Proposto por Peter Szekeres em 1975 e subsequentemente aprimorado, esse modelo permite representar estruturas complexas como aglomerados, voids e dipolos de densidade sem recorrer à idealização de simetria global [10, 11].

Do ponto de vista geométrico, o modelo de Szekeres caracteriza-se pela ausência completa de vetores de Killing espaciais, não admitindo simetria esférica, axial ou translacional. Essa propriedade o distingue fundamentalmente tanto dos modelos FLRW quanto do modelo LTB, tornando-o uma das soluções cosmológicas exatas mais gerais conhecidas [11, 10].

Uma das características mais marcantes do modelo de Szekeres é a sua métrica, que se distingue por não apresentar simetria esférica nem isotropia, ao contrário dos modelos FLRW e LTB [11]. Na forma mais comum, conhecida como modelo de Szekeres quase-esférico de classe I, a métrica depende de todas as coordenadas espaciais, permitindo que a densidade e a curvatura variem não apenas com a distância radial, mas também nas direções transversais. Essa generalização é viabilizada pela função $E(r, x, y)$, que rompe explicitamente a simetria angular e introduz anisotropias na estrutura do espaço-tempo [10, 76].

A métrica pode ser expressa como

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{\left(R'(t,r) - R(t,r)\frac{E'(r,x,y)}{E(r,x,y)}\right)^2}{\epsilon - k(r)} dr^2 + \frac{R(t,r)^2}{E(r,x,y)^2}\left(dx^2 + dy^2\right), \tag{3.9}$$

onde $R(t, r)$ representa o raio areal generalizado, que determina a área física das superfícies de tempo e raio constantes. Diferente do caso esférico, aqui a interpretação de R como “raio“ é geométrica, pois a área da superfície bidimensional (θ, ϕ) é proporcional a R^2. A função $k(r)$ é a função de curvatura espacial , $\epsilon \in \{+1, 0, -1\}$ determina a geometria das hipersuperfícies bidimensionais (esférica, plana ou hiperbólica, respectivamente) , e $E(r, x, y)$ é uma função arbitrária responsável por introduzir as anisotropias espaciais que quebram a simetria esférica do modelo. [76, 11, 10].

A função $E(r, x, y)$ pode ser escrita explicitamente como

$$E(r,x,y) = \frac{1}{2S(r)}\left[(x - P(r))^2 + (y - Q(r))^2 + \epsilon S(r)^2\right], \tag{3.10}$$

onde $P(r)$, $Q(r)$ e $S(r)$ são funções arbitrárias da coordenada radial, responsáveis por controlar o deslocamento, a orientação e a intensidade das inomogeneidades espaciais [11, 10, 77]. Essa construção permite modelar distribuições de matéria altamente assimétricas, incluindo estruturas com dipolos de densidade e gradientes angulares pronunciados.

O conteúdo material do espaço-tempo é descrito por um fluido de poeira, cujo tensor energia-momento assume a forma

$$T^{\mu\nu} = \rho(t, r, x, y)\, u^\mu u^\nu, \tag{3.11}$$

onde $u^\mu = \delta^\mu_0$ no sistema de coordenadas comóvel. A densidade de energia ρ é função de todas as coordenadas espaciais, refletindo explicitamente o caráter inomogêneo e anisotrópico do modelo [11, 10].

A aplicação das equações de campo de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{3.12}$$

leva à equação dinâmica generalizada,

$$\dot{R}^2(t,r) = \frac{2GM(r)}{R(t,r)} - k(r) + \frac{\Lambda}{3} R^2(t,r), \tag{3.13}$$

formalmente idêntica à equação correspondente no modelo LTB, porém com uma estrutura geométrica muito mais rica devido à presença da função $E(r, x, y)$ [76, 11, 10].

A densidade de matéria é dada por

$$\rho(t, r, x, y) = \frac{M'(r) - 3M(r)\frac{E'(r,x,y)}{E(r,x,y)}}{4\pi R^2(t, r)\left[R'(t, r) - R(t, r)\frac{E'(r,x,y)}{E(r,x,y)}\right]}, \tag{3.14}$$

o que evidencia a contribuição explícita dos gradientes angulares para a formação de estruturas não esfericamente simétricas [76, 11, 10].

Apesar da ausência de simetria global, o modelo mantém uma folheação do espaço-tempo em hipersuperfícies espaciais quase-esféricas, permitindo a existência de bolhas locais de simetria aproximada. Essa propriedade confere grande flexibilidade à modelagem da distribuição de matéria e da geometria espacial, permitindo descrever transições suaves entre regimes quase homogêneos e fortemente não lineares [10, 78].

Pesquisas recentes demonstram que os modelos de Szekeres podem acomodar naturalmente a formação e evolução de estruturas cosmológicas realistas, reproduzindo com maior fidelidade o crescimento de estruturas observado do que modelos baseados em simetria esférica [77, 79]. Comparações com dados observacionais indicam que esses modelos podem produzir previsões competitivas com o modelo ΛCDM para certos observáveis, especialmente em escalas intermediárias [79]. Dentre essas pesquisas, destacam-se as análises de modelos que utilizam redes de estruturas de Szekeres para ajustar o contraste de densidade e a função de massa de aglomerados de galáxias, além de fornecerem interpretações para o dipolo de radiação cósmica de fundo sem a necessidade de fluxos peculiares excessivos.

Um dos usos práticos mais notáveis é o chamado modelo Swiss-cheese Szekeres, no qual regiões descritas pela solução de Szekeres são embutidas em um fundo FLRW. Essa construção tem sido amplamente utilizada para investigar o impacto de inomogeneidades não lineares na propagação da luz e nas anisotropias da radiação cósmica de fundo. Bolejko (2009), por exemplo, demonstrou que efeitos não lineares do tipo Rees–Sciama — que consistem na variação temporal dos potenciais gravitacionais durante a passagem dos fótons, provocando um deslocamento espectral (redshift ou blueshift) adicional — podem induzir flutuações mensuráveis na CMB em pequenas escalas, ainda compatíveis com os limites observacionais. [10].

Mais recentemente, Célérier (2024) [75] apresentou uma revisão abrangente desses modelos no contexto da cosmologia de precisão, destacando seu potencial para incorporar explicitamente uma constante cosmológica e ajustar dados observacionais sem recorrer a aproximações perturbativas, explorando soluções exatas das equações de Einstein em cenários cosmológicos fortemente inomogêneos.

3.5 O Modelo Locally Rotationally Symmetric (LRS)

Os modelos cosmológicos Locally Rotationally Symmetric (LRS) constituem uma classe de soluções das equações de Einstein caracterizadas por possuírem um eixo de simetria em torno do qual o espaço-tempo apresenta isotropia local, ainda que globalmente anisotrópico. Esses modelos se situam entre a simplicidade altamente simétrica da métrica FLRW e a complexidade de soluções completamente inomogêneas, oferecendo uma estrutura matemática suficientemente rica para capturar anisotropias observacionais sem abrir mão de certo grau de simetria [14, 31].

Geometricamente, os modelos LRS admitem um grupo de isometrias tridimensional G_3, contendo um subgrupo $SO(2)$ de rotações locais em torno de um eixo privilegiado. Essa propriedade implica a existência de um vetor de Killing associado às rotações locais, garantindo isotropia em planos bidimensionais ortogonais a uma direção espacial preferencial [14, 31]. Como consequência, todas as grandezas escalares físicas são invariantes sob rotações locais, embora possam variar ao longo do eixo de simetria.

A principal característica dos modelos LRS é que, embora admitam apenas um grupo de isometrias menor do que o dos modelos FLRW, eles ainda preservam isotropia em torno de direções específicas. Isso significa que a métrica admite um vetor de Killing especial associado a rotações locais, restringindo a anisotropia a apenas um eixo, o que reduz a complexidade das equações de campo de Einstein em relação a modelos totalmente anisotrópicos, como os de Bianchi em geral [31].

De maneira geral, a métrica dos modelos LRS pode ser escrita como:

$$ds^2 = -dt^2 + A(t)^2 dr^2 + B(t)^2 d\Sigma_k^2, \tag{3.15}$$

em que $A(t)$ e $B(t)$ são fatores de escala distintos, e $d\Sigma_k^2$ descreve a geometria bidimensional isotrópica das superfícies de simetria, podendo assumir as formas:

$$d\Sigma_k^2 = \begin{cases} dy^2 + dz^2, & k = 0 \quad \text{(LRS Bianchi I)}, \\ d\theta^2 + sen^2\theta\, d\phi^2, & k = +1 \quad \text{(Kantowski–Sachs)}, \\ d\theta^2 + senh^2\theta\, d\phi^2, & k = -1 \quad \text{(LRS Bianchi III)}. \end{cases}$$

O conteúdo material é descrito por um fluido cosmológico geral, cujo tensor energia-momento assume a forma

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu} + \pi_{\mu\nu}, \tag{3.16}$$

onde ρ é a densidade de energia, p a pressão isotrópica e $\pi_{\mu\nu}$ representa possíveis tensões anisotrópicas, que desempenham papel central na dinâmica desses modelos [14, 80].

A cinemática da expansão é caracterizada por dois parâmetros de Hubble direcionais,

$$H_{\parallel} = \frac{\dot{A}}{A}, \qquad H_{\perp} = \frac{\dot{B}}{B}, \tag{3.17}$$

permitindo definir a taxa de expansão média

$$H = \frac{1}{3}(H_{\parallel} + 2H_{\perp}), \tag{3.18}$$

bem como o escalar de cisalhamento

$$\sigma^2 = \frac{1}{3}(H_{\parallel} - H_{\perp})^2, \tag{3.19}$$

o qual quantifica o grau de anisotropia da expansão [14, 81].

As equações de campo de Einstein conduzem às equações dinâmicas fundamentais do modelo,

$$3H^2 = 8\pi G\rho + \sigma^2 - \frac{k}{B^2} + \Lambda, \tag{3.20}$$

e

$$\dot{H} = -4\pi G(\rho + p) - \sigma^2, \tag{3.21}$$

que generalizam as equações de Friedmann ao contexto anisotrópico dos modelos LRS [14, 31, 81].

Essas equações mostram explicitamente que a anisotropia, representada pelo cisalhamento, atua como uma fonte gravitacional adicional, influenciando a taxa de expansão do Universo e podendo desempenhar papel relevante em épocas primordiais ou em cenários cosmológicos não padrão.

Do ponto de vista físico, os modelos LRS são particularmente úteis para investigar cenários em que o Universo possa apresentar simetrias residuais. Eles têm sido empregados no estudo de regimes anisotrópicos no início do Universo, na análise da estabilidade dinâmica de soluções cosmológicas e na investigação de teorias alternativas de gravidade. Trabalhos recentes exploraram, por exemplo, modelos LRS no contexto da gravidade modificada $f(R, T)$, analisando sua estabilidade e viabilidade cosmológica frente a observações [15, 16].

Assim, os modelos LRS desempenham um papel intermediário entre a idealização dos modelos homogêneos e isotrópicos e a complexidade dos modelos genuinamente anisotrópicos, constituindo um campo de estudo relevante tanto do ponto de vista teórico quanto fenomenológico.

3.6 Modelos Intrinsecamente Simétricos

Os modelos intrinsecamente simétricos constituem uma classe de soluções das equações de campo de Einstein nas quais determinadas simetrias geométricas são preservadas de forma interna às hipersuperfícies espaciais, sem que seja necessário assumir homogeneidade ou isotropia globais do espaço-tempo. Essa abordagem surge como uma generalização natural da cosmologia relativística padrão, permitindo investigar cenários nos quais o Princípio Cosmológico é relaxado de maneira controlada, mantendo ainda uma estrutura matemática bem definida [82, 83].

Diferentemente de modelos puramente inomogêneos, a simetria intrínseca atua como um vínculo geométrico que organiza a distribuição de matéria em subvariedades, permitindo que as quantidades físicas apresentem dependência espacial apenas em direções específicas [17, 18]. Essa formulação é particularmente vantajosa para o estudo de efeitos de retroação [8, 9] e para a interpretação de observáveis em um Universo estruturado, pois fornece um laboratório teórico onde a complexidade das inomogeneidades não impede o tratamento analítico rigoroso [10, 22].

De maneira mais precisa, um modelo cosmológico apresenta simetria intrínseca quando suas hipersuperfícies espaciais admitem propriedades geométricas que atuam apenas sobre subvariedades de dimensão inferior. Em contraste com o caso FLRW, no qual o grupo de simetria atua transitivamente sobre todo o espaço tridimensional, nos modelos intrinsecamente simétricos a configuração geométrica permite a presença simultânea de inomogeneidades e anisotropias ao longo de direções preferenciais. Essa construção fornece um cenário suficientemente rico para a investigação de efeitos não lineares da estruturação do Universo, ao mesmo tempo em que mantém o sistema dinâmico matematicamente tratável para análises analíticas e numéricas [9, 10].

Do ponto de vista geométrico, a noção de simetria em Relatividade Geral é frequentemente formalizada por meio de vetores de Killing. Um campo vetorial ξ^μ é dito um vetor de Killing se satisfaz a equação

$$\nabla_{(\mu}\xi_{\nu)} = 0, \tag{3.22}$$

o que equivale a exigir que o tensor métrico permaneça invariante ao longo do fluxo gerado por ξ^μ. A existência desses vetores implica a presença de isometrias contínuas e permite classificar soluções das equações de Einstein segundo seus grupos de simetria [43, 66]. Tais simetrias são fundamentais, pois reduzem os graus de liberdade do sistema e estão associadas a quantidades conservadas ao longo de geodésicas [43, 44].

Nos modelos intrinsecamente simétricos, entretanto, a simetria pode ser definida de forma mais ampla através da estrutura das hipersuperfícies espaciais. Em vez de exigir isometrias globais em todo o espaço-tempo, assume-se que a geometria admite subvariedades bidimensionais maximamente simétricas, caracterizadas por curvatura constante. Essa estrutura assegura uma isotropia local nessas subvariedades, sem impor a homogeneidade global do espaço-tempo.

Dessa forma, as quantidades geométricas e dinâmicas podem apresentar dependência espacial adicional ao longo da direção transversal, caracterizando a natureza intrinsecamente simétrica do modelo [17, 82, 83]. Esse tipo de construção permite interpretar o espaço tridimensional como uma folheação por superfícies bidimensionais (θ, ϕ), onde a variação espacial relevante ocorre apenas na direção ortogonal x. Tal decomposição é particularmente conveniente para fornecer uma interpretação física clara das anisotropias e inomogeneidades presentes no modelo [9, 84].

A motivação para o desenvolvimento desses modelos está diretamente relacionada às limitações do modelo FLRW na descrição de um Universo realisticamente estruturado. Embora o FLRW seja bem-sucedido em escalas muito grandes, ele representa uma idealização na qual todas as regiões do espaço evoluem da mesma forma, ignorando a dinâmica local das estruturas. Estudos sobre cosmologias inomogêneas e efeitos de média espacial mostram que a presença de estruturas pode influenciar tanto a dinâmica efetiva quanto a interpretação dos observáveis cosmológicos. [8, 9, 10].

Nesse contexto, os modelos intrinsecamente simétricos surgem como modelos intermediários fundamentais entre a homogeneidade total e a completa ausência de simetrias. Eles permitem investigar, de maneira controlada, efeitos de retroação, acoplamentos entre expansão e cisalhamento, bem como desvios observacionais induzidos por gradientes espaciais, mantendo simultaneamente um nível elevado de tratabilidade analítica.

Historicamente, soluções com simetrias reduzidas foram exploradas por Collins e Szafron [85, 86], mostrando ser possível preservar propriedades geométricas bem definidas em certas superfícies mesmo na ausência de isotropia global. Mais recentemente, esse formalismo foi aprofundado para aplicações de precisão, estabelecendo equações de evolução para o fundo e para perturbações lineares [17, 18].

Como um caso específico para o desenvolvimento deste trabalho, a métrica será escrita em coordenadas adaptadas a essa folheação espacial, na forma:

$$ds^2 = -N(t,x)^2 dt^2 + A(t,x)^2 dx^2 + B(t,x)^2 \left(d\theta^2 + S_k^2(\theta) d\phi^2 \right), \tag{3.23}$$

onde $N(t,x)$ é a função lapso, $A(t,x)$ e $B(t,x)$ são funções métricas que dependem do tempo e da coordenada espacial transversal x, e $S_k(\theta)$ descreve as geometrias esférica, plana ou hiperbólica das superfícies de simetria. No limite em que $A(t,x) \to a(t)$ e $B(t,x) \to a(t)$, recupera-se imediatamente a métrica FLRW [17, 81].

O conteúdo material é descrito por um fluido cosmológico geral, cujo tensor energia-momento pode ser decomposto como

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu} + q_\mu u_\nu + q_\nu u_\mu + \pi_{\mu\nu}, \tag{3.24}$$

onde ρ é a densidade de energia, p a pressão isotrópica, u^μ o campo de quatro-velocidade, q^μ o vetor de fluxo de calor e $\pi_{\mu\nu}$ o tensor de anisotropia, satisfazendo $q^\mu u_\mu = 0$, $\pi_{\mu\nu} u^\nu = 0$ e ${\pi^\mu}_\mu = 0$. Embora esta decomposição permita analisar desvios em relação ao fluido perfeito, o modelo ainda pode ser tratado no limite de fluido perfeito, sendo comum considerar, em aplicações cosmológicas, o limite $q^\mu = 0$ e $\pi_{\mu\nu} = 0$ para isolar os efeitos puramente geométricos das inomogeneidades espaciais sobre a dinâmica cosmológica [82, 83].

Nos trabalhos de Bittencourt, Gomes e Santos [17, 18], são obtidas soluções exatas das equações de campo de Einstein para modelos cosmológicos intrinsecamente simétricos, nos quais processos dissipativos podem estar presentes já no nível do fundo. Esses modelos são caracterizados pela existência de um grupo de simetria intrínseca que impõe restrições geométricas à estrutura do espaço-tempo, permitindo a introdução de um parâmetro livre m, o qual classifica as diferentes classes de simetria do espaço-tempo admitidas pela solução.

Nesse contexto, m surge como um parâmetro geométrico associado à simetria intrínseca do espaço-tempo, controlando o grau de anisotropia e a presença de termos dissipativos no fluido cosmológico [17, 18]. Por sua vez, H_0 é uma constante dimensional associada à taxa característica de expansão do modelo, desempenhando papel análogo ao parâmetro de Hubble em cenários cosmológicos padrão [2, 83].

Com base nessas hipóteses, são deduzidas expressões explícitas para o fluxo de calor e para a pressão anisotrópica, dadas respectivamente por

$$q_i = (m-2)\, H_0\, e^{-\Phi}, \tag{3.25}$$

e

$$\pi_{ij} = -\frac{(m-2)}{(m-3)}\, E_{ij}, \tag{3.26}$$

onde E_{ij} representa a parte elétrica do tensor de Weyl [82, 83, 84]. Particularmente, para a classe de modelos onde $m = 4$, as expressões acima definem a estrutura das correções dissipativas de fundo. Cabe ressaltar que, nestas expressões, o símbolo Φ refere-se à função métrica constituinte da solução exata de fundo proposta pelos autores, não devendo ser confundido com o potencial escalar perturbativo $\Phi(t, \vec{x})$, que será introduzido no Capítulo 4, no contexto do formalismo de perturbações lineares.

Essas expressões evidenciam que, para valores genéricos de m, o modelo admite fluxos dissipativos e anisotropias dinâmicas já no nível do fundo cosmológico, refletindo a riqueza geométrica e física dessas soluções [17, 18].

No presente trabalho, entretanto, o foco recai sobre a análise de perturbações lineares em torno de soluções de fundo mais simples, para as quais se adota, por razões de clareza física, controle analítico e consistência metodológica com o formalismo padrão da cosmologia perturbativa, o limite

$$q_i = 0, \qquad \pi_{ij} = 0. \tag{3.27}$$

Essa escolha corresponde à consideração de um fluido perfeito no nível do fundo, permitindo isolar de forma mais transparente os efeitos puramente geométricos das inomogeneidades espaciais sobre a dinâmica cosmológica. Tal aproximação é amplamente empregada na literatura sobre perturbações cosmológicas relativísticas, uma vez que facilita a identificação e interpretação física dos modos perturbativos, além de possibilitar uma conexão direta com os resultados obtidos no contexto da cosmologia FLRW [2, 84, 87].

Cabe ressaltar que a imposição de $q_i = 0$ e $\pi_{ij} = 0$ no fundo não implica a ausência desses termos no nível perturbativo. Em uma abordagem geral, as flutuações associadas ao fluxo de calor e à pressão anisotrópica podem ser incluídas como quantidades de primeira ordem, de modo que

$$\delta q_i \neq 0, \qquad \delta\pi_{ij} \neq 0, \tag{3.28}$$

permitindo investigar efeitos dissipativos induzidos pelas perturbações cosmológicas [84, 87]. No escopo deste trabalho, contudo, restringe-se a análise às perturbações escalares associadas à geometria e à densidade de energia, deixando a inclusão sistemática de termos dissipativos perturbativos como uma perspectiva natural para extensões futuras.

A cinemática do fluido é caracterizada pelos escalares de expansão, cisalhamento e aceleração. Para a métrica acima, o escalar de expansão $\Theta = \nabla_\mu u^\mu$ assume a forma

$$\Theta = \frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial t}\ln(AB^2), \tag{3.29}$$

A fim de caracterizar a taxa de expansão local do Universo em um cenário inomogêneo, é conveniente introduzir um parâmetro de Hubble generalizado, definido em termos do escalar de expansão. Essa quantidade permite comparar diretamente o comportamento dinâmico do modelo intrinsecamente simétrico com o cenário homogêneo padrão. Define-se, assim, o parâmetro de Hubble local como

$$H(t,x) \equiv \frac{1}{3}\Theta = \frac{1}{3N}\frac{\partial}{\partial t}\ln(AB^2), \tag{3.30}$$

que generaliza a definição usual do modelo FLRW. No limite homogêneo, em que $A(t,x) \to a(t)$ e $B(t,x) \to a(t)$, recupera-se imediatamente a relação padrão $H = \dot{a}/a$.

Além disso, é conveniente introduzir as taxas de expansão longitudinal e transversal, dadas respectivamente por

$$H_\parallel = \frac{1}{N}\frac{\dot{A}}{A}, \qquad H_\perp = \frac{1}{N}\frac{\dot{B}}{B}, \tag{3.31}$$

de modo que o escalar de expansão pode ser escrito como

$$\Theta = H_\parallel + 2H_\perp. \tag{3.32}$$

evidenciando que a taxa de expansão local pode depender tanto do tempo quanto da coordenada espacial x. O tensor de cisalhamento não se anula em geral, refletindo a presença de anisotropias na expansão, enquanto a aceleração é nula quando se adota um referencial comóvel geodésico [81, 82, 83]. A anisotropia da expansão é quantificada pelo tensor de cisalhamento, que mede as deformações locais sofridas por pequenos volumes materiais. Essa quantidade desempenha papel central na caracterização da dinâmica dos modelos intrinsecamente simétricos, sendo definida por:

$$\sigma_{\mu\nu} = h_{(\mu}^{\ \alpha} h_{\nu)}^{\ \beta} \nabla_\alpha u_\beta - \frac{1}{3}\Theta h_{\mu\nu}, \tag{3.33}$$

onde $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$ é o projetor espacial ortogonal ao campo de quatro-velocidade. Essa quantidade mede diretamente o grau de anisotropia da expansão local e desempenha papel fundamental na dinâmica cosmológica dos modelos intrinsecamente simétricos.

Um objeto geométrico central na caracterização de modelos cosmológicos inomogêneos é o tensor de Weyl $C_{\mu\nu\alpha\beta}$, que representa a parte sem traço do tensor de curvatura de Riemann e descreve os graus de liberdade gravitacionais livres do campo gravitacional. Diferentemente do tensor de Ricci, que está diretamente relacionado ao conteúdo material por meio das equações de Einstein, o tensor de Weyl codifica efeitos puramente geométricos, tais como forças de maré, propagação de ondas gravitacionais e acoplamentos não locais da gravidade [43, 83, 84].

Na decomposição covariante $1 + 3$, o tensor de Weyl pode ser decomposto, em relação ao campo de quatro-velocidade u^μ, em suas partes elétrica e magnética, definidas respectivamente por

$$E_{\mu\nu} = C_{\mu\alpha\nu\beta} u^\alpha u^\beta, \qquad H_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\lambda\alpha\beta} C^{\alpha\beta}{}_{\nu\gamma} u^\lambda u^\gamma, \tag{3.34}$$

onde $\varepsilon_{\mu\nu\alpha}$ é o tensor completamente antissimétrico definido nas hipersuperfícies ortogonais a u^μ. O tensor $E_{\mu\nu}$ está associado às forças de maré gravitacionais, enquanto $H_{\mu\nu}$ está relacionado à propagação de ondas gravitacionais e a efeitos gravitomagnéticos.

Em cosmologia homogênea e isotrópica do tipo FLRW, o tensor de Weyl se anula identicamente, refletindo a ausência de graus de liberdade gravitacionais livres. Em contraste, em modelos cosmológicos inomogêneos, como os modelos intrinsecamente simétricos, o tensor de Weyl é, em geral, não nulo e desempenha um papel fundamental na dinâmica do sistema, estando diretamente relacionado ao cisalhamento e à evolução das anisotropias geométricas [81, 82, 84]. Dessa forma, o estudo do tensor de Weyl fornece uma ferramenta essencial para compreender o acoplamento entre geometria e matéria em cenários cosmológicos além do paradigma homogêneo.

A dinâmica do conteúdo material é governada pelas equações de conservação do tensor energia-momento, dadas por $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. A conservação local da energia e do momento é garantida pela condição de divergência nula do tensor energia-momento. No limite de fluido perfeito comóvel, essa condição conduz a uma equação de continuidade generalizada, que governa a evolução temporal da densidade de energia em cada ponto do espaço-tempo:

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\Theta = 0, \tag{3.35}$$

que generaliza a equação de conservação de energia da cosmologia homogênea e evidencia explicitamente o papel da expansão local na evolução da densidade de energia.

A evolução temporal do escalar de expansão é governada pela equação de Raychaudhuri, a qual descreve como a taxa de expansão local é influenciada pela presença de matéria, anisotropias e pela constante cosmológica:

$$\dot{\Theta} + \frac{1}{3}\Theta^2 + 2\sigma^2 + 4\pi G(\rho + 3p) - \Lambda = 0, \tag{3.36}$$

onde $\sigma^2 = \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$ é o escalar de cisalhamento e Λ representa a constante cosmológica. Essa equação mostra como a presença de anisotropias, codificadas pelo cisalhamento, atua como uma fonte gravitacional adicional, modificando a taxa de expansão local.

A dinâmica do espaço-tempo é governada pelas equações de campo de Einstein, as quais estabelecem a relação fundamental entre a geometria do espaço-tempo e o conteúdo material. No contexto dos modelos intrinsecamente simétricos, essas equações conduzem a um sistema de equações diferenciais parciais para as funções métricas $N(t,x)$, $A(t,x)$ e $B(t,x)$, generalizando as equações de Friedmann da cosmologia homogênea. De forma compacta, as equações de campo podem ser escritas como

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{3.37}$$

a aplicação das equações de campo de Einstein, conduz a um sistema de equações diferenciais parciais que generalizam as equações de Friedmann. Em particular, uma equação dinâmica generalizada para o fator $B(t,x)$ pode ser escrita simbolicamente como

$$\left(\frac{\dot{B}}{NB}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{B^2} + \frac{\sigma^2}{2}, \tag{3.38}$$

onde $\sigma^2 = \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$ é o escalar de cisalhamento. Essa expressão evidencia explicitamente o papel do cisalhamento como fonte efetiva de energia gravitacional adicional, modificando a taxa de expansão local em relação ao caso homogêneo.

No limite homogêneo, em que $A(t,x) \to a(t)$ e $B(t,x) \to a(t)$, recuperam-se exatamente as equações usuais da cosmologia FLRW, assegurando consistência com o modelo padrão [43, 81, 82, 83].

Dessa forma, os modelos intrinsecamente simétricos fornecem um cenário intermediário altamente controlado para investigar, de forma não perturbativa, o impacto das inomogeneidades espaciais sobre a dinâmica cosmológica e sobre parâmetros observáveis. Ao contrário da teoria de perturbações usual, essa abordagem permite capturar efeitos não lineares diretamente através de soluções exatas das equações de Einstein. Eles constituem uma ponte conceitual entre a cosmologia homogênea padrão e modelos completamente inomogêneos, como os modelos LTB e Szekeres, sendo particularmente adequados para estudos de cosmologia de precisão que buscam explorar a física além do paradigma ΛCDM [9, 10, 17, 18, 88].

Essa fundamentação teórica é essencial para o desenvolvimento do formalismo perturbativo que será apresentado no próximo capítulo, onde analisaremos como pequenas flutuações se comportam sobre esse fundo geometricamente mais rico.

Em suma, a análise dos modelos cosmológicos apresentada neste capítulo permitiu identificar como a quebra das hipóteses de homogeneidade e isotropia globais enriquece a estrutura geométrica e física do espaço-tempo. A introdução dos modelos intrinsecamente simétricos destaca-se por oferecer uma solução de compromisso entre a complexidade das inomogeneidades reais e a necessidade de tratabilidade analítica. Ao adotarmos o limite de fluido perfeito no nível do fundo, estabelecemos uma base sólida e consistente para a investigação de flutuações. No capítulo seguinte, utilizaremos este cenário como ponto de partida para o desenvolvimento do formalismo de perturbações lineares, visando isolar e interpretar os efeitos das inomogeneidades sobre a dinâmica da densidade de energia e da geometria espacial.

4 Teoria de perturbações lineares

4.1 Introdução ao Capítulo de Perturbações Lineares

Os capítulos anteriores desta dissertação foram dedicados à apresentação dos fundamentos teóricos da cosmologia moderna, à discussão do modelo cosmológico padrão e à introdução de cenários alternativos baseados em geometrias inomogêneas e modelos intrinsecamente simétricos. Em particular, foram explorados os aspectos geométricos e físicos desses modelos, bem como suas motivações conceituais e possíveis implicações cosmológicas.

O presente capítulo tem como objetivo consolidar esses desenvolvimentos por meio do estudo das perturbações cosmológicas. A análise perturbativa constitui uma etapa essencial na construção de modelos cosmológicos realistas, uma vez que as observações não acessam diretamente o comportamento médio do espaço-tempo, mas sim as flutuações em torno desse fundo geométrico. Quantidades observáveis, como anisotropias da radiação cósmica de fundo, crescimento de estruturas e distorções gravitacionais da luz, são descritas precisamente a partir da dinâmica dessas perturbações.

Neste trabalho, as perturbações são tratadas como pequenas flutuações em torno de uma métrica de fundo previamente especificada, respeitando a notação, o sistema de coordenadas e a assinatura adotados ao longo de toda a dissertação. Em particular, considera-se a assinatura $(-,+,+,+)$ e um sistema de coordenadas comóveis, de modo a manter consistência com os capítulos anteriores. A métrica perturbada será escrita explicitamente, e as quantidades geométricas e dinâmicas relevantes serão calculadas de forma sistemática.

Diferentemente de abordagens puramente fenomenológicas, este capítulo enfatiza o cálculo explícito das quantidades perturbadas, evidenciando como o formalismo se constrói a partir das equações de Einstein e das propriedades geométricas do espaço-tempo. O objetivo não é apenas recuperar resultados conhecidos no contexto de modelos homogêneos e isotrópicos, mas também estabelecer a base necessária para a aplicação do formalismo a cenários mais gerais, como os modelos intrinsecamente simétricos discutidos anteriormente.

Assim, este capítulo está organizado de modo a apresentar, inicialmente, as definições fundamentais do formalismo perturbativo e a estrutura da métrica perturbada. Em seguida, são discutidas as equações dinâmicas resultantes e os principais resultados físicos associados às perturbações em cosmologias do tipo FLRW. Essa construção prepara o terreno para análises futuras em modelos mais gerais, permitindo avaliar de forma consistente o impacto das inomogeneidades e das simetrias internas na descrição do Universo.

4.1.1 Motivação Física e Conceitual da Teoria de Perturbações

A teoria de perturbações cosmológicas baseia-se na ideia de que o Universo real pode ser descrito como uma pequena deformação de um modelo idealizado altamente simétrico. Embora a métrica de fundo capture de forma precisa o comportamento médio da expansão cósmica, as observações indicam a presença de flutuações de pequena amplitude na densidade de matéria, na curvatura do espaço-tempo e nos campos físicos. Essas flutuações, embora pequenas, desempenham papel fundamental na formação de estruturas e na determinação das propriedades observáveis do Universo [3, 89, 90].

Matematicamente, esse procedimento consiste em decompor as grandezas físicas em uma parte de fundo, que satisfaz exatamente as equações de Einstein, e uma parte perturbativa, tratada como uma correção de pequena amplitude. De forma esquemática, para uma grandeza genérica $Q(x^\mu)$, escreve-se

$$Q(x^\mu) = Q^{(0)}(x^\mu) + \epsilon\, \delta Q(x^\mu), \tag{4.1}$$

onde $Q^{(0)}$ representa a solução de fundo, δQ é a perturbação e $\epsilon \ll 1$ é um parâmetro adimensional que controla a ordem da expansão. No regime linear, consideram-se apenas termos até primeira ordem em ϵ, o que permite linearizar as equações de campo e obter um sistema de equações diferenciais mais simples e fisicamente interpretável [89, 91].

Fisicamente, essa decomposição expressa o fato de que as flutuações cosmológicas observadas apresentam amplitudes muito pequenas quando comparadas às grandezas médias. Em particular, as anisotropias da radiação cósmica de fundo possuem amplitude relativa da ordem de 10^{-5}, justificando plenamente a validade da aproximação linear durante grande parte da história cosmológica [3, 90].

No contexto do modelo cosmológico padrão, as perturbações primordiais são interpretadas como sementes para a formação das estruturas em larga escala. Pequenas flutuações iniciais, geradas durante o período inflacionário, crescem sob a ação da gravidade, dando origem às galáxias, aglomerados e filamentos observados atualmente. Além disso, a teoria de perturbações permite calcular diretamente observáveis fundamentais, como o espectro de potência das anisotropias da radiação cósmica de fundo, a taxa de crescimento das estruturas e os efeitos de lente gravitacional fraca [2, 92].

Quando se consideram cenários cosmológicos mais gerais, como os modelos inomogêneos e os modelos intrinsecamente simétricos, a importância da teoria de perturbações torna-se ainda mais evidente. Nesses casos, a geometria do espaço-tempo apresenta dependência espacial explícita, impossibilitando a aplicação direta de muitos resultados obtidos no contexto FLRW. Assim, o desenvolvimento de um formalismo perturbativo consistente nesses modelos permite investigar como as simetrias internas e as inomogeneidades influenciam a dinâmica cosmológica e os observáveis físicos [64].

Neste trabalho, o formalismo de perturbações lineares é empregado com o objetivo de estudar como pequenas flutuações evoluem sobre um fundo cosmológico intrinsecamente simétrico. A motivação central consiste em compreender de que maneira essas simetrias internas modificam as equações de evolução das perturbações e podem impactar parâmetros cosmológicos efetivos, tais como os potenciais gravitacionais, o contraste de densidade e a taxa de crescimento das estruturas, permitindo uma comparação direta com o cenário cosmológico padrão.

4.2 Métrica Perturbada e Convenções Adotadas

Nesta seção introduzimos o formalismo básico das perturbações cosmológicas empregado ao longo deste trabalho, estabelecendo as convenções matemáticas, o sistema de coordenadas e a forma explícita da métrica perturbada utilizada. O objetivo é definir de maneira clara o ponto de partida geométrico a partir do qual serão calculadas as quantidades físicas relevantes, garantindo consistência formal e facilitando a interpretação física dos resultados obtidos.

Adotamos, em todo o trabalho, a assinatura do espaço-tempo $(-,+,+,+)$. Esta escolha, conhecida como "convenção de tempo próprio", é amplamente utilizada na literatura de relatividade geral e cosmologia por preservar a identificação direta do tempo próprio com a componente temporal da métrica e conduzir a uma forma particularmente simples das equações de movimento para partículas e campos. [2, 43]. Essa convenção assegura compatibilidade direta com grande parte dos textos clássicos da área, facilitando comparações analíticas e interpretações físicas dos resultados perturbativos obtidos nos capítulos subsequentes. Além disso, a manutenção desta assinatura é fundamental para garantir a consistência dos sinais algébricos no cálculo dos símbolos de Christoffel e dos tensores de curvatura apresentados nesta seção.

Utilizamos um sistema de coordenadas comóveis $x^\mu = (t, x, y, z)$, no qual os observadores associados ao fluido cosmológico de fundo permanecem em repouso em relação à expansão do Universo. Nessa escolha, o tempo t corresponde ao tempo cósmico medido por esses observadores, permitindo uma interpretação física direta das grandezas dinâmicas e simplificando a descrição da evolução cosmológica [3, 4].

A geometria de fundo considerada é do tipo Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW) espacialmente plana, caracterizada por uma expansão homogênea e isotrópica com simetria espacial plana. Trata-se de um caso particular da métrica (3.23), descrita pela expressão:

$$ds^2 = -e^{f_0(t,\vec{x})}dt^2 + a(t)^2\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right), \tag{4.2}$$

onde $a(t)$ é o fator de escala cosmológico e $f_0(t, \vec{x})$ é uma função escalar geral que parametriza o setor temporal da métrica. A introdução dessa função permite uma descrição mais flexível da geometria temporal, acomodando diferentes escolhas de gauge e preservando a compatibilidade formal com modelos mais gerais.

Em particular, para manter coerência conceitual com o modelo intrinsecamente simétrico apresentado no Capítulo 3, retomamos a função de lapso $N(t, \vec{x})$ e estabelecemos a identificação:

$$e^{f_0(t,\vec{x})} \equiv N^2(t, \vec{x}). \tag{4.3}$$

Neste limite de fundo homogêneo e isotrópico, as funções métricas da solução geral (3.23) reduzem-se a $A = B = a(t)$, garantindo que a expansão ocorra de forma idêntica em todas as direções espaciais.

Essa reparametrização é conveniente para o tratamento das equações de campo linearizadas, pois explicita a estrutura funcional do setor temporal da métrica e permite incorporar, de maneira sistemática, possíveis dependências espaciais do lapso, mantendo a generalidade geométrica do modelo de fundo. Por simplicidade notacional, ao longo deste capítulo omitiremos explicitamente as dependências funcionais, escrevendo apenas f_0, Ψ e Φ.

As perturbações cosmológicas são introduzidas como pequenas flutuações em torno dessa métrica de fundo. Para isso, introduzimos um parâmetro adimensional $\epsilon \ll 1$, que controla a ordem da expansão perturbativa. A métrica total pode então ser decomposta como

$$g_{ab} = g^{(0)}_{ab} + \epsilon\, \delta g_{ab}, \tag{4.4}$$

onde $g^{(0)}_{ab}$ representa a métrica de fundo e δg_{ab} descreve as perturbações métricas. Essa decomposição expressa a hipótese fundamental da teoria de perturbações cosmológicas, segundo a qual as flutuações gravitacionais apresentam amplitudes pequenas em comparação com os valores médios das grandezas cosmológicas, permitindo a linearização consistente das equações de campo [89, 91].

Neste trabalho, restringimo-nos ao estudo de perturbações escalares, que são as mais relevantes no regime linear para a formação de estruturas e para a descrição das anisotropias cosmológicas observadas. Essa escolha decorre do fato de que as perturbações escalares estão diretamente associadas às flutuações de densidade da matéria e dominam a dinâmica cosmológica em grandes escalas, enquanto os modos vetoriais decaem rapidamente com a expansão e os modos tensoriais contribuem principalmente para a geração de ondas gravitacionais [89, 90].

Com essas escolhas, a métrica total perturbada, escrita no calibre longitudinal (ou calibre de Newton), assume a forma

$$ds^2 = \, - \, e^{f_0(t,\vec{x})} \left(1 + 2\epsilon\Psi(t, \vec{x})\right) dt^2 + a(t)^2 \left(1 + 2\epsilon\Phi(t, \vec{x})\right) \delta_{ij}\, dx^i dx^j , \tag{4.5}$$

onde $\Psi(t, \vec{x})$ e $\Phi(t, \vec{x})$ são os potenciais gravitacionais escalares que caracterizam as perturbações métricas no setor temporal e espacial, respectivamente.

No limite $\epsilon \to 0$, a métrica acima reduz-se suavemente à métrica de fundo, garantindo a consistência interna do esquema perturbativo. As funções Ψ e Φ descrevem flutuações locais no intervalo de tempo próprio e nas distâncias espaciais, estando diretamente associadas às inomogeneidades na distribuição de matéria e energia. Embora, no contexto da cosmologia padrão e na ausência de tensões anisotrópicas, seja comum encontrar a igualdade $\Psi = \Phi$ no regime linear, neste trabalho essas quantidades são mantidas independentes, a fim de preservar a generalidade formal do tratamento e permitir extensões futuras para cenários mais gerais [2, 90].

Além da métrica, as quantidades físicas associadas ao conteúdo material do Universo também são perturbadas. O tensor energia-momento é decomposto como

$$T_{ab} = T_{ab}^{(0)} + \epsilon\, \delta T_{ab}, \tag{4.6}$$

onde $T_{ab}^{(0)}$ descreve o fluido cosmológico de fundo e δT_{ab} contém as flutuações de densidade, pressão e fluxo de energia. Essa decomposição permite estudar, de forma sistemática, a resposta do espaço-tempo às inomogeneidades da matéria por meio das equações de campo de Einstein linearizadas [2, 3].

A partir dessas definições, o próximo passo consiste no cálculo das quantidades geométricas perturbadas, como o tensor métrico inverso, os símbolos de Christoffel, o tensor de Ricci e o tensor de Einstein, todos expandidos até primeira ordem em ϵ. Esses cálculos serão apresentados nas seções seguintes e constituem a base analítica para o estudo da dinâmica das perturbações cosmológicas desenvolvido neste capítulo.

4.3 Quantidades Geométricas Perturbadas

Nesta seção calculamos as principais quantidades geométricas associadas à métrica perturbada introduzida na Seção 4.2. Em particular, determinamos o tensor métrico inverso e os símbolos de Christoffel até primeira ordem no parâmetro perturbativo ϵ. Esses resultados constituem a base geométrica necessária para o cálculo do tensor de Ricci e, consequentemente, para a obtenção das equações de campo de Einstein linearizadas.

Tensor Métrico Inverso

A métrica perturbada adotada ao longo deste trabalho é escrita na forma

$$ds^2 = -\, e^{f_0} \left(1 + 2\epsilon\Psi\right) dt^2 + a(t)^2 \left(1 + 2\epsilon\Phi\right) \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right), \tag{4.7}$$

onde $\Psi = \Psi(t, x, y, z)$ e $\Phi = \Phi(t, x, y, z)$ são funções escalares que representam pequenas perturbações em torno de um espaço-tempo homogêneo e isotrópico de fundo, enquanto f_0 é uma função geral associada ao setor temporal da métrica.

A escolha desta forma funcional para a métrica baseia-se no formalismo padrão da teoria de perturbações cosmológicas, no qual se introduzem pequenas flutuações sobre a métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW). O parâmetro adimensional $\epsilon \ll 1$ controla a ordem da expansão perturbativa, permitindo a separação sistemática entre o comportamento do espaço-tempo de fundo e os efeitos associados às inomogeneidades. As funções Ψ e Φ correspondem às chamadas perturbações escalares, que são fisicamente associadas às flutuações na densidade de energia e no potencial gravitacional, desempenhando papel central na descrição da formação de estruturas no Universo.

Do ponto de vista geométrico, essa decomposição permite tratar as perturbações como campos definidos sobre um espaço-tempo homogêneo, facilitando a interpretação física e o cálculo das quantidades relevantes, como símbolos de Christoffel, tensores de curvatura e equações de campo linearizadas. Além disso, a introdução do fator exponencial e^{f_0} no setor temporal confere maior generalidade à métrica, possibilitando a descrição de diferentes escolhas de parametrização temporal, incluindo transformações de calibre que podem ser exploradas ao longo da análise.

O tensor métrico de fundo, obtido ao se tomar o limite $\epsilon \to 0$, pode ser escrito na forma matricial

$$g^{(0)}_{ab} = \mathrm{diag}\left(-e^{f_0},\, a(t)^2,\, a(t)^2,\, a(t)^2\right), \tag{4.8}$$

o que corresponde à métrica FLRW espacialmente plana, escrita em coordenadas cartesianas com um fator temporal geral. A inversa deste tensor é dada por

$$g^{ab}_{(0)} = \mathrm{diag}\left(-e^{-f_0},\, a(t)^{-2},\, a(t)^{-2},\, a(t)^{-2}\right), \tag{4.9}$$

satisfazendo a relação fundamental $g^{(0)\,ac} g^{(0)}_{cb} = \delta^a{}_b$.

Para obter o tensor métrico inverso completo, expandimos g^{ab} perturbativamente até primeira ordem em ϵ. Esse procedimento é consistente com a hipótese de pequenas perturbações e garante que apenas termos lineares em Ψ e Φ sejam mantidos, desprezando-se contribuições de ordem superior. Como resultado, obtém-se

$$g^{tt} = -e^{-f_0}\left(1 - 2\epsilon\Psi\right), \tag{4.10}$$

$$g^{ij} = a(t)^{-2}\left(1 - 2\epsilon\Phi\right)\delta^{ij}, \tag{4.11}$$

com todos os demais componentes nulos.

Essa forma do tensor métrico inverso será essencial nos cálculos subsequentes, particularmente na determinação dos símbolos de Christoffel, dos tensores de curvatura e das equações de Einstein linearizadas. Por fim, verifica-se diretamente que a relação de consistência

$$g^{ac} g_{cb} = \delta^a{}_b \tag{4.12}$$

é satisfeita até termos de ordem $\mathcal{O}(\epsilon)$, assegurando a validade da expansão perturbativa adotada e a coerência interna do formalismo.

Símbolos de Christoffel

Os símbolos de Christoffel associados à conexão de Levi-Civita são dados por

$$\Gamma^{a}{}_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad} \left(\partial_b g_{cd} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc} \right), \tag{4.13}$$

e codificam a forma como os vetores variam sob transporte paralelo no espaço-tempo, estando diretamente relacionados à curvatura e à dinâmica gravitacional. No contexto da relatividade geral, esses coeficientes determinam tanto as equações das geodésicas quanto a estrutura dos tensores de curvatura, desempenhando papel central na formulação geométrica da gravitação.

No formalismo perturbativo adotado, os símbolos de Christoffel são decompostos em uma contribuição de fundo e flutuações de primeira ordem. Esta etapa é fundamental, pois permite que os dados geométricos das perturbações escalares Φ e Ψ sejam propagados para o tensor de Einstein, estabelecendo a conexão necessária entre a métrica perturbada e a evolução das inomogeneidades cósmicas.

No formalismo perturbativo adotado neste trabalho, os símbolos de Christoffel são calculados expandindo-se a métrica e sua inversa até primeira ordem no parâmetro ϵ. Esse procedimento permite separar claramente as contribuições provenientes do espaço-tempo de fundo daquelas associadas às perturbações escalares. Todos os cálculos foram realizados com o auxílio do *Wolfram Mathematica*, garantindo consistência algébrica e controle rigoroso da ordem dos termos retidos na expansão. Ao longo desta análise, mantemos apenas termos lineares em ϵ, desprezando contribuições de ordem superior.

As componentes puramente espaciais dos símbolos de Christoffel refletem diretamente a presença de gradientes espaciais do potencial escalar Φ, indicando que as inomogeneidades espaciais induzem acelerações efetivas na dinâmica das geodésicas. Os componentes não nulos relevantes são dados por

$$\Gamma^{z}_{xx} = \Gamma^{z}_{yy} = -\epsilon\, \Phi_{,z}, \tag{4.14}$$

$$\Gamma^{y}_{xx} = \Gamma^{y}_{zz} = -\epsilon\, \Phi_{,y}, \tag{4.15}$$

$$\Gamma^{x}_{yy} = -\epsilon\, \Phi_{,x}, \tag{4.16}$$

$$\Gamma^{x}_{xy} = \epsilon\, \Phi_{,y}, \tag{4.17}$$

$$\Gamma^{y}_{xy} = \epsilon\, \Phi_{,x}. \tag{4.18}$$

Esses termos expressam o acoplamento direto entre as perturbações escalares e a curvatura espacial efetiva, sendo responsáveis por desvios locais da trajetória das partículas em relação ao movimento puramente comóvel.

Além disso, as componentes espaciais diagonais também recebem contribuições das perturbações, resultando em

$$\Gamma^{x}_{xz} = \Gamma^{y}_{yz} = \Gamma^{z}_{zz} = \epsilon\, \Phi_{,z}, \tag{4.19}$$

o que evidencia que as variações longitudinais do potencial gravitacional afetam diretamente a conexão ao longo das direções espaciais, introduzindo correções na expansão local do espaço.

As componentes envolvendo o índice temporal são particularmente relevantes, pois descrevem o acoplamento entre a dinâmica temporal do espaço-tempo de fundo e as flutuações escalares. Nesse caso, surgem contribuições tanto da função temporal geral f_0 quanto das perturbações, resultando em

$$\Gamma^x_{tt} = \frac{1}{2} f_{0,x} + \epsilon\, \Phi_{,x}, \tag{4.20}$$

$$\Gamma^y_{tt} = \frac{1}{2} f_{0,y} + \epsilon\, \Phi_{,y}, \tag{4.21}$$

$$\Gamma^z_{tt} = \frac{1}{2} f_{0,z} + \epsilon\, \Phi_{,z}, \tag{4.22}$$

$$\Gamma^t_{tt} = \frac{1}{2} f_{0,t} + \epsilon\, \Phi_{,t}. \tag{4.23}$$

Esses termos estão diretamente associados às acelerações induzidas pelo campo gravitacional e desempenham papel central na dinâmica das partículas teste, bem como na evolução temporal das perturbações cosmológicas.

As componentes mistas espaço–tempo também apresentam correções perturbativas, sendo dadas por

$$\Gamma^t_{tx} = \Gamma^t_{xt} = \frac{1}{2} f_{0,x} + \epsilon\, \Phi_{,x}, \tag{4.24}$$

$$\Gamma^t_{ty} = \Gamma^t_{yt} = \frac{1}{2} f_{0,y} + \epsilon\, \Phi_{,y}, \tag{4.25}$$

$$\Gamma^t_{tz} = \Gamma^t_{zt} = \frac{1}{2} f_{0,z} + \epsilon\, \Phi_{,z}, \tag{4.26}$$

bem como

$$\Gamma^x_{tx} = \Gamma^y_{ty} = \Gamma^z_{tz} = \frac{\dot{a}}{a} + \epsilon\, \Phi_{,t}. \tag{4.27}$$

Esses termos expressam a influência combinada da expansão cosmológica, caracterizada pela taxa de Hubble $\dot{a}/a$, e das flutuações temporais do potencial escalar, que afetam a taxa local de expansão e a evolução dinâmica das perturbações.

No limite $\epsilon \to 0$, recuperam-se imediatamente os símbolos de Christoffel associados à métrica de fundo homogênea e isotrópica, garantindo a consistência do formalismo adotado. Por sua vez, os termos proporcionais a ϵ codificam os efeitos geométricos induzidos pelas inomogeneidades escalares. Esses resultados constituem a base para o cálculo do tensor de Ricci perturbado e, subsequentemente, do tensor de Einstein linearizado, que serão analisados na próxima seção.

Tensor de Ricci

O tensor de Ricci é obtido a partir da contração do tensor de curvatura de Riemann,

$$R_{ab} = R^{c}{}_{acb}, \tag{4.28}$$

podendo ser expresso explicitamente em termos dos símbolos de Christoffel por meio da relação

$$R_{ab} = \partial_c \Gamma^{c}{}_{ab} - \partial_b \Gamma^{c}{}_{ac} + \Gamma^{c}{}_{cd}\Gamma^{d}{}_{ab} - \Gamma^{c}{}_{bd}\Gamma^{d}{}_{ac}. \tag{4.29}$$

Essa grandeza desempenha papel central na relatividade geral, uma vez que codifica a resposta geométrica do espaço-tempo à presença de matéria e energia, aparecendo diretamente nas equações de campo de Einstein.

No contexto da teoria de perturbações cosmológicas, o tensor de Ricci fornece informações detalhadas sobre como pequenas flutuações métricas alteram a curvatura do espaço-tempo de fundo. Dessa forma, sua expansão perturbativa até primeira ordem em ϵ permite descrever, de maneira sistemática, os efeitos das inomogeneidades escalares sobre a dinâmica gravitacional. Em particular, essa abordagem conduz naturalmente às equações lineares que governam a evolução das perturbações cosmológicas, fundamentais para o estudo da formação de estruturas no Universo.

A partir dos símbolos de Christoffel obtidos na subseção anterior, o tensor de Ricci foi calculado de forma explícita, mantendo-se apenas termos até primeira ordem no parâmetro perturbativo ϵ. Devido à complexidade algébrica das expressões envolvidas, os cálculos foram realizados com o auxílio do *Wolfram Mathematica*, o que garante tanto a consistência das manipulações simbólicas quanto o controle rigoroso das aproximações adotadas. Esse procedimento permite obter expressões analíticas completas, preservando a estrutura física dos termos relevantes.

A seguir, apresentamos os componentes não nulos do tensor de Ricci, organizados de acordo com a natureza de seus índices.

Componentes espaciais mistas. As componentes mistas puramente espaciais refletem diretamente os gradientes espaciais das perturbações escalares, bem como suas interações com o setor temporal da métrica. Essas contribuições descrevem o acoplamento entre variações espaciais do potencial gravitacional e a geometria do espaço tridimensional.

Explicitamente, obtém-se

$$R_{yz} = R_{zy} = -\frac{1}{4}f_{,0z}f_{,0y} + \frac{1}{2}\epsilon\,\Phi_{,z}f_{,0y} - \frac{1}{2}\epsilon\,\Psi_{,z}f_{,0y} + \frac{1}{2}\epsilon\,f_{,0z}\Phi_{,y} - \frac{1}{2}\epsilon\,f_{,0z}\Psi_{,y} - \frac{1}{2}f_{,0yz} - \epsilon\,\Phi_{,yz} - \epsilon\,\Psi_{,yz}, \tag{4.30}$$

$$R_{xz} = R_{zx} = -\frac{1}{4}f_{,0z}f_{,0x} + \frac{1}{2}\epsilon\,\Phi_{,z}f_{,0x} - \frac{1}{2}\epsilon\,\Psi_{,z}f_{,0x} + \frac{1}{2}\epsilon\,f_{,0z}\Phi_{,x} - \frac{1}{2}\epsilon\,f_{,0z}\Psi_{,x} - \frac{1}{2}f_{,0xz} - \epsilon\,\Phi_{,xz} - \epsilon\,\Psi_{,xz}, \tag{4.31}$$

$$R_{xy} = R_{yx} = -\frac{1}{4}f_{,0y}f_{,0x} + \frac{1}{2}\epsilon\,\Phi_{,y}f_{,0x} - \frac{1}{2}\epsilon\,\Psi_{,y}f_{,0x} + \frac{1}{2}\epsilon\,f_{,0y}\Phi_{,x} - \frac{1}{2}\epsilon\,f_{,0y}\Psi_{,x} - \frac{1}{2}f_{,0xy} - \epsilon\,\Phi_{,xy} - \epsilon\,\Psi_{,xy}. \tag{4.32}$$

Essas componentes são particularmente sensíveis às variações espaciais cruzadas das perturbações, refletindo diretamente a estrutura geométrica das flutuações escalares.

Componentes mistas espaço–tempo. As componentes que envolvem simultaneamente índices espaciais e temporais descrevem o acoplamento entre a expansão cosmológica e as variações espaciais dos potenciais escalares. Elas desempenham papel fundamental na dinâmica das perturbações, pois governam o transporte de energia e momento no espaço-tempo perturbado. Explicitamente,

$$R_{tz} = R_{zt} = \frac{\dot a}{a}f_{,0z} + \frac{2\epsilon\dot a}{a}\Psi_{,z} + \epsilon f_{,0z}\Phi_{,t} - 2\epsilon\Phi_{,tz}, \tag{4.33}$$

$$R_{ty} = R_{yt} = \frac{\dot a}{a}f_{,0y} + \frac{2\epsilon\dot a}{a}\Psi_{,y} + \epsilon f_{,0y}\Phi_{,t} - 2\epsilon\Phi_{,ty}, \tag{4.34}$$

$$R_{tx} = R_{xt} = \frac{\dot a}{a}f_{,0x} + \frac{2\epsilon\dot a}{a}\Psi_{,x} + \epsilon f_{,0x}\Phi_{,t} - 2\epsilon\Phi_{,tx}. \tag{4.35}$$

Esses termos evidenciam como a expansão do Universo, caracterizada por $\dot a/a$, interage com os gradientes espaciais das perturbações, produzindo efeitos dinâmicos relevantes para a evolução cosmológica. Dentre esses efeitos, destacam-se a geração de fluxos de velocidade peculiar no fluido e a indução de correntes de energia, que vinculam diretamente a taxa de expansão global aos gradientes locais do potencial gravitacional.

Componentes espaciais diagonais. As componentes diagonais espaciais incorporam simultaneamente contribuições do fundo homogêneo e das perturbações escalares, refletindo tanto a dinâmica global da expansão quanto as correções locais associadas às inomogeneidades. Para a componente R_{zz}, obtém-se

$$\begin{aligned} R_{zz} = {} & e^{-f}a\ddot a - \frac{1}{2}f_{,0zz} - \epsilon\left(\Phi_{,xx} + \Phi_{,yy} + 2\Phi_{,zz}\right) - \epsilon\,\Psi_{,zz} + 2\epsilon e^{-f}a\dot a\Phi_{,t} - 2\epsilon e^{-f}a\ddot a\Psi \\ & + 2e^{-f}\dot a^2 + 4\epsilon e^{-f}\Phi\dot a^2 - 4\epsilon e^{-f}\Psi\dot a^2 - \frac{1}{4}(f_{,0z})^2 + \frac{1}{2}\epsilon f_{,0z}\Phi_{,z} - \epsilon f_{,0z}\Psi_{,z} \\ & - \frac{1}{2}\epsilon f_{,0y}\Phi_{,y} - \frac{1}{2}\epsilon f_{,0x}\Phi_{,x} - \frac{1}{2}e^{-f}a\dot a f_{,0t} - \epsilon e^{-f}a^2\dot a f_{,0t} \\ & - \epsilon e^{-f}a\dot a\Psi_{,t} + \epsilon e^{-f}a\dot a\Phi_{,t} + 6\epsilon e^{-f}a\ddot a\Phi + \frac{1}{2}\epsilon e^{-f}a^2 f_{,0t}\Phi_{,t}. \end{aligned} \tag{4.36}$$

As expressões correspondentes às componentes R_{yy} e R_{xx} são obtidas de maneira análoga, respeitando-se a simetria espacial da métrica adotada.

Componente puramente temporal. A componente temporal do tensor de Ricci é especialmente importante, pois está diretamente associada à dinâmica da expansão cósmica e às flutuações da densidade de energia. Para essa componente, encontra-se

$$\begin{aligned} R_{tt} = {} & e^{-f}a\ddot{a} - 2\epsilon e^{-f}a\Psi - 2e^{-f}\dot{a}^2 - 4\epsilon e^{-f}\Phi\dot{a}^2 + 4\epsilon e^{-f}\Psi\dot{a}^2 \\ & - \frac{1}{2}f_{,0zz} - \epsilon\Phi_{,zz} - \frac{1}{4}(f_{,0y})^2 + \frac{1}{2}\epsilon f_{,0y}\Phi_{,y} - \epsilon f_{,0y}\Psi_{,y} \\ & - \frac{1}{2}f_{,0yy} - 2\epsilon\Phi_{,yy} - \epsilon\Psi_{,yy} - \frac{1}{2}\epsilon f_{,0x}\Phi_{,x} - \epsilon\Phi_{,xx} - 4\epsilon e^{-f}a\dot{a}\Phi_{,y}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Em conjunto, essas expressões fornecem a forma completa do tensor de Ricci até primeira ordem em ϵ para a métrica perturbada considerada. Esses resultados constituem a base para a construção do tensor de Einstein linearizado, que será analisado na próxima seção, bem como para a dedução das equações dinâmicas que governam a evolução das perturbações cosmológicas.

4.4 Equações de Einstein Perturbadas

Nesta seção derivamos explicitamente as equações de campo de Einstein perturbadas até primeira ordem no parâmetro ϵ, a partir da métrica perturbada introduzida na Seção 4.2 e das quantidades geométricas calculadas ao longo das subseções anteriores. O objetivo central é estabelecer a relação dinâmica entre as flutuações geométricas do espaço-tempo e as perturbações físicas associadas ao conteúdo material do Universo, fornecendo assim a base teórica para o estudo do crescimento das estruturas cosmológicas.

No contexto da relatividade geral, as equações de Einstein expressam o princípio fundamental segundo o qual a geometria do espaço-tempo é determinada pela distribuição de matéria e energia. Em cosmologia, essa relação assume papel ainda mais relevante, pois governa simultaneamente a expansão global do Universo e a evolução local das perturbações. Ao introduzir pequenas flutuações sobre uma métrica de fundo homogênea e isotrópica, torna-se possível investigar como irregularidades iniciais evoluem ao longo do tempo, dando origem às estruturas observadas atualmente.

Todos os cálculos algébricos envolvidos — incluindo a determinação dos símbolos de Christoffel, do tensor de Ricci e, consequentemente, do tensor de Einstein — foram realizados com o auxílio do *Wolfram Mathematica*. Essa abordagem permite lidar de maneira eficiente com a complexidade das expressões analíticas, garantindo consistência algébrica e controle da ordem dos termos retidos na expansão perturbativa. Ao longo desta análise, mantemos exclusivamente contribuições até primeira ordem em ϵ, compatíveis com o regime de pequenas perturbações.

As equações de campo de Einstein são dadas por

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G\, T_{\mu\nu}, \tag{4.38}$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, que descreve a curvatura do espaço-tempo, e $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia–momento, responsável por caracterizar o conteúdo material. No formalismo perturbativo, cada uma dessas grandezas é decomposta em uma contribuição de fundo e uma perturbação linear,

$$G_{\mu\nu} = G^{(0)}_{\mu\nu} + \delta G_{\mu\nu}, \qquad T_{\mu\nu} = T^{(0)}_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu}. \tag{4.39}$$

Essa decomposição permite separar claramente os efeitos associados à expansão cosmológica média daqueles provenientes das flutuações locais, conduzindo a um sistema de equações acopladas para os potenciais escalares Φ e Ψ.

Componente temporal

A componente puramente temporal das equações de Einstein desempenha papel central na descrição da expansão cosmológica e na dinâmica das flutuações da densidade de energia. No nível de fundo, definido por uma geometria homogênea e isotrópica (FLRW) ou por uma solução exata intrinsecamente simétrica , ela fornece a equação de Friedmann, que estabelece a relação entre o parâmetro de Hubble $H = \dot{a}/a$ e a densidade de energia média do fluido. Quando perturbações são incluídas, essa componente passa a codificar também como pequenas variações espaciais na densidade de matéria afetam o potencial gravitacional. No regime linear, essa relação é expressa por uma generalização relativística da equação de Poisson, vinculando o Laplaciano do potencial Φ às flutuações locais de densidade e à dinâmica da expansão global.

Nesse contexto, a componente temporal do tensor de Einstein perturbado assume a forma

$$G_{tt} + \delta G_{tt} = \frac{3\dot{a}^2}{a^2} + \epsilon \left(-2e^{-f_0} \frac{\partial_x^2 \Phi}{a^2} - 2e^{-f_0} \frac{\partial_y^2 \Phi}{a^2} - 2e^{-f_0} \frac{\partial_z^2 \Phi}{a^2} + 6\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} \right) \tag{4.40}$$

$$= 3H^2 + \epsilon \left(-2e^{-f_0} \frac{\nabla^2 \Phi}{a^2} + 6H\dot{\Phi} \right), \tag{4.41}$$

onde ∇^2 representa o operador Laplaciano no espaço tridimensional. O termo de fundo $3H^2$ corresponde exatamente à equação de Friedmann para um Universo homogêneo e isotrópico. Já os termos proporcionais a ϵ expressam correções induzidas pelas perturbações escalares do potencial gravitacional Φ. O termo envolvendo o Laplaciano de Φ está diretamente relacionado às flutuações espaciais da densidade de matéria, desempenhando papel análogo ao da equação de Poisson na gravitação newtoniana. Por sua vez, o termo proporcional a $H\dot{\Phi}$ descreve a evolução temporal dessas flutuações em um espaço em expansão, refletindo o amortecimento ou crescimento das perturbações gravitacionais devido à dinâmica cosmológica.

Essa equação pode ser interpretada como a generalização relativística da equação de Poisson em um Universo em expansão, estabelecendo o vínculo fundamental entre densidade, potencial gravitacional e expansão cósmica.

Componentes espaço–temporais

As componentes mistas espaço–temporais das equações de Einstein fornecem vínculos dinâmicos entre as flutuações do campo gravitacional e os fluxos de energia e momento do fluido cosmológico. Elas desempenham papel essencial na conservação do momento linear e no acoplamento entre variações espaciais e temporais das perturbações.

No caso de um Universo estritamente homogêneo e isotrópico, essas componentes se anulam identicamente, refletindo a ausência de correntes de energia preferenciais. Entretanto, no cenário mais geral considerado neste trabalho, surgem contribuições adicionais associadas à estrutura temporal geral da métrica, codificada pela função f_0, e às flutuações escalares.

Explicitamente, obtém-se

$$G_{ti} + \delta G_{ti} = H\partial_i f_0 + \epsilon\left(2H\partial_i\Psi + \partial_i f_0\,\dot{\Phi} - 2\partial_i\dot{\Phi}\right). \tag{4.42}$$

Fisicamente, os termos envolvendo gradientes espaciais dos potenciais Φ e Ψ descrevem o transporte de momento associado às flutuações gravitacionais, enquanto os termos proporcionais a $\partial_i f_0$ refletem a influência da estrutura temporal do espaço-tempo de fundo sobre a dinâmica local. Essas equações estabelecem, portanto, um vínculo fundamental entre a expansão cósmica, os gradientes gravitacionais e os fluxos de energia do fluido cosmológico.

Componentes espaciais diagonais

As componentes puramente espaciais das equações de Einstein governam a resposta dinâmica do espaço tridimensional às perturbações cosmológicas. Em particular, as componentes diagonais estão diretamente associadas à equação de aceleração da expansão e às flutuações de pressão do fluido cosmológico, desempenhando papel central na evolução temporal das estruturas.

Do ponto de vista físico, essas equações descrevem como pequenas variações nos potenciais gravitacionais alteram localmente a taxa de expansão, introduzindo regiões de compressão e rarefação que, ao longo do tempo, conduzem ao crescimento das perturbações. Elas também controlam a propagação das flutuações no espaço, estabelecendo a dinâmica ondulatória das perturbações escalares.

Nesse contexto, as componentes espaciais diagonais do tensor de Einstein assumem a forma

$$\begin{aligned} G_{ij} + \delta G_{ij} = {} & \frac{(\partial_i f_0)^2 + 2\,\partial_i^2 f_0 + (\partial_j f_0)^2 + 2\,\partial_j^2 f_0}{4} + (a\ddot{a} - 2\dot{a}^2 - a^2)e^{-f_0} \\ & + \epsilon\Big[\partial_i f_0\,\partial_i(\Phi - \Psi) + \nabla f_0 \cdot \nabla\Psi + \nabla^2(\Phi + \Psi) - \partial_i^2(\Phi + \Psi) \\ & + e^{-f_0}\Big(2(\dot{a}^2 + 2a\ddot{a} - a\dot{a}f_0)(\Psi - \Phi) + 2a\dot{a}(\dot{\Psi} - 3\dot{\Phi}) + a^2(\dot{f}_0\dot{\Phi} - 2\ddot{\Phi})\Big)\Big]. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Componentes espaciais não diagonais e tensões anisotrópicas

As componentes espaciais não diagonais desempenham papel fundamental na caracterização das tensões anisotrópicas do fluido cosmológico. Elas fornecem informações diretas sobre desvios da isotropia local e permitem investigar a presença de fontes anisotrópicas, como campos vetoriais, radiação livremente propagante ou efeitos geométricos intrínsecos ao modelo considerado.

Para $i \neq j$, obtém-se

$$G_{ij}+\delta G_{ij} = -\frac{1}{4}\partial_i f_0\,\partial_j f_0 - \frac{1}{2}\partial_{ij} f_0 + \frac{1}{2}\Big[\partial_i f_0\,\partial_j(\Phi-\Psi) + \partial_j f_0\,\partial_i(\Phi-\Psi) - 2\partial_{ij}(\Phi+\Psi)\Big]. \tag{4.44}$$

Em cosmologias padrão compostas por fluidos perfeitos, tais componentes se anulam, conduzindo naturalmente à condição $\Phi = \Psi$. Essa igualdade reflete a ausência de tensões anisotrópicas e é uma característica central do modelo cosmológico padrão. No contexto mais geral adotado neste trabalho, essas equações permitem investigar desvios desse comportamento, oferecendo um instrumento teórico poderoso para analisar a consistência dinâmica e as propriedades geométricas do modelo cosmológico intrinsecamente simétrico considerado.

Em conjunto, as equações de Einstein perturbadas estabelecem um sistema completo de equações diferenciais que governa a evolução das perturbações escalares em um Universo em expansão. Elas descrevem como pequenas flutuações iniciais na densidade de energia e no potencial gravitacional evoluem ao longo do tempo, conduzindo ao crescimento hierárquico das estruturas cosmológicas observadas.

Além disso, a presença da função f_0 permite explorar extensões do cenário cosmológico padrão, incorporando graus adicionais de liberdade geométrica que podem capturar efeitos associados a simetrias intrínsecas e possíveis desvios da homogeneidade exata. Dessa forma, o formalismo desenvolvido nesta seção fornece a base teórica necessária para a análise dinâmica e observacional dos modelos cosmológicos investigados ao longo desta dissertação. Ao permitir que os potenciais gravitacionais Φ e Ψ evoluam sob a influência de um fundo com gradientes espaciais não nulos, estabelecemos o arcabouço para prever como assinaturas de inomogeneidade podem ser detectadas em observáveis de precisão, como as flutuações da radiação cósmica de fundo e a taxa de crescimento de estruturas.

4.5 Tensor Energia–Momento

O tensor energia–momento desempenha um papel central na relatividade geral, pois codifica completamente o conteúdo material do espaço–tempo e sua interação com o campo gravitacional. Em cosmologia, ele descreve não apenas a densidade de energia e a pressão do fluido cósmico, mas também possíveis efeitos dissipativos, como fluxos de calor e tensões anisotrópicas, que podem tornar-se relevantes em cenários mais gerais.

Neste trabalho, adotamos a forma mais geral para o tensor energia–momento de um fluido cosmológico,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + p\, g_{\mu\nu} + q_\mu u_\nu + q_\nu u_\mu + \pi_{\mu\nu}, \tag{4.45}$$

onde ρ representa a densidade de energia, p a pressão isotrópica, u^μ o quadrivetor velocidade do fluido, q_μ o vetor de fluxo de calor e $\pi_{\mu\nu}$ o tensor de tensões anisotrópicas. Essa decomposição permite tratar, de maneira sistemática, tanto o caso de um fluido perfeito quanto situações mais gerais envolvendo dissipação e anisotropias.

No contexto da teoria de perturbações cosmológicas, todas as quantidades físicas são escritas como pequenas flutuações em torno de um fundo homogêneo e isotrópico,

$$X = X^{(0)} + \delta X, \tag{4.46}$$

onde $X^{(0)}$ representa a contribuição de fundo e δX denota a perturbação linear. Esse procedimento é consistente com o regime em que as inhomogeneidades são pequenas, permitindo uma descrição linearizada das equações dinâmicas.

Aplicando essa decomposição ao tensor energia–momento, obtemos

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu} = {} & (\rho + \delta\rho + p + \delta p)(u_\mu + \delta u_\mu)(u_\nu + \delta u_\nu) \\ & + (p + \delta p)(g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}) \\ & + (q_\mu + \delta q_\mu)(u_\nu + \delta u_\nu) + (q_\nu + \delta q_\nu)(u_\mu + \delta u_\mu) + \pi_{\mu\nu} + \delta\pi_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{4.47}$$

Ao expandir essa expressão e reter apenas termos até primeira ordem nas perturbações, garante-se a consistência do tratamento linear adotado neste capítulo.

Condições de Ortogonalidade

Os termos dissipativos do fluido satisfazem condições de ortogonalidade em relação ao quadrivetor velocidade,

$$q^\mu u_\mu = 0, \qquad \pi^{\mu\nu} u_\nu = 0. \tag{4.48}$$

Essas relações asseguram que o fluxo de calor e as tensões anisotrópicas são definidos exclusivamente no espaço tridimensional ortogonal à trajetória do fluido, refletindo o caráter puramente espacial desses efeitos no referencial comóvel.

Ao introduzir perturbações, essas condições devem ser preservadas no regime linear, o que conduz a

$$\delta q^{\mu} u_{\mu}^{(0)} + q^{(0)\mu} \delta u_{\mu} = 0, \tag{4.49}$$

$$\delta \pi^{\mu\nu} u_{\nu}^{(0)} + \pi^{(0)\mu\nu} \delta u_{\nu} = 0. \tag{4.50}$$

Essas expressões mostram que as flutuações nos termos dissipativos permanecem ortogonais ao fluxo principal do fluido, assegurando a consistência geométrica da decomposição perturbativa.

No nível de fundo, o fluido é tomado como comóvel, isto é,

$$u_{(0)}^{\mu} = (u^0, 0, 0, 0), \tag{4.51}$$

o que reflete o fato de que, em média, a matéria acompanha a expansão do Universo.

Condição de Normalização

O quadrivetor velocidade satisfaz a condição de normalização

$$g_{\mu\nu} u^{\mu} u^{\nu} = -1, \tag{4.52}$$

a qual expressa o caráter temporal da trajetória das partículas do fluido. No nível de fundo, utilizando $g_{00} = -e^{f_0(t)}$ e $u^i = 0$, obtemos

$$-e^{f_0} (u^0)^2 = -1, \tag{4.53}$$

o que implica diretamente

$$u^0 = e^{-f_0/2}. \tag{4.54}$$

A componente covariante correspondente é dada por

$$u_0 = g_{00} u^0 = -e^{f_0/2}. \tag{4.55}$$

Essas expressões mostram que o fator e^{f_0} modifica a relação entre o tempo coordenado e o tempo próprio medido pelos observadores comóveis.

Normalização com Velocidade Perturbada

Ao introduzir perturbações tanto na métrica quanto na velocidade,

$$u^{\mu} = u_{(0)}^{\mu} + \delta u^{\mu}, \qquad g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + \delta g_{\mu\nu}, \tag{4.56}$$

a condição de normalização passa a fornecer, até primeira ordem,

$$2\,\delta u^\mu u^{(0)\nu} g^{(0)}_{\mu\nu} + u^{(0)\mu} u^{(0)\nu} \delta g_{\mu\nu} = 0. \tag{4.57}$$

Substituindo explicitamente as componentes do fundo, obtemos

$$2\,\delta u^0 u_0^{(0)} + (u_0^{(0)})^2 \delta g_{00} = 0, \tag{4.58}$$

o que conduz à relação

$$\delta u^0 = -\frac{1}{2}\frac{\delta g_{00}}{g_{00}^{(0)}}, \qquad \delta u^i = 0. \tag{4.59}$$

Fisicamente, esse resultado indica que, no regime escalar e comóvel, apenas a componente temporal da velocidade sofre correções, enquanto as componentes espaciais permanecem nulas, refletindo a ausência de movimento peculiar médio do fluido.

Componente Temporal

A componente temporal do tensor energia–momento descreve diretamente a densidade de energia efetiva percebida pelo campo gravitacional. Substituindo as expansões perturbativas, obtemos

$$T_{tt} + \delta T_{tt} = (\rho + \delta\rho + p + \delta p)(u_0 + \delta u_0)^2 + (p + \delta p)(g_{00} + \delta g_{00}), \tag{4.60}$$

onde, em virtude das condições de ortogonalidade, os termos envolvendo q_μ e $\pi_{\mu\nu}$ não contribuem.

Mantendo apenas termos até primeira ordem, chega-se a

$$T_{tt} + \delta T_{tt} = e^{f_0}\left[\rho + \delta\rho - 2(\rho + 2p)\epsilon\Psi\right]. \tag{4.61}$$

Esse resultado evidencia que o potencial gravitacional Ψ atua modificando diretamente a densidade de energia efetiva do fluido. O termo proporcional a $(\rho + p)\Psi$ expressa o acoplamento entre as flutuações geométricas e o conteúdo material do Universo, desempenhando papel central na dinâmica das perturbações escalares.

Componentes Mistas

As componentes mistas T_{ti} estão associadas ao fluxo de energia no espaço. No fundo comóvel, temos

$$u_i = 0, \qquad g_{ti} = 0, \qquad \pi_{ti} = 0, \tag{4.62}$$

de modo que a expressão geral se reduz a

$$T_{ti} + \delta T_{ti} = (q_i + \delta q_i)(u_0 + \delta u_0). \tag{4.63}$$

Substituindo as expressões para u_0 e δu_0, obtemos

$$T_{ti} + \delta T_{ti} = -e^{f_0/2} \left(q_i + \delta q_i - \delta q_i \, \epsilon \Psi \right). \tag{4.64}$$

Esse resultado mostra que as componentes mistas são diretamente controladas pelo fluxo de calor espacial, podendo ser interpretadas como correntes de momento–energia induzidas pelas perturbações escalares.

Componentes Espaciais Diagonais

As componentes espaciais diagonais descrevem a pressão efetiva exercida pelo fluido. Para $i = j$, temos

$$T_{ij} = p \, g_{ij} + \pi_{ij}. \tag{4.65}$$

Introduzindo as perturbações e utilizando a forma da métrica perturbada,

$$g_{ij} = a^2(t) \left(1 + 2\epsilon\Phi\right) \delta_{ij}, \tag{4.66}$$

obtém-se

$$T_{ij} + \delta T_{ij} = a^2 \left(p + \delta p + 2p \, \epsilon \Phi \right) \delta_{ij} + \pi_{ij} + \delta \pi_{ij}. \tag{4.67}$$

Observa-se que o potencial Φ atua modulando diretamente a pressão efetiva do fluido, o que influencia a dinâmica das flutuações de densidade.

Componentes Espaciais Fora da Diagonal

Para $i \neq j$, como $u_i = 0$ e $g_{ij} = 0$, resta apenas o termo anisotrópico,

$$T_{ij} + \delta T_{ij} = \pi_{ij} + \delta \pi_{ij}. \tag{4.68}$$

Essas componentes são controladas exclusivamente pelas tensões anisotrópicas e desempenham papel fundamental na geração e evolução de anisotropias espaciais, bem como na dinâmica de modos tensoriais.

Em conjunto, essas expressões mostram de forma clara como as perturbações geométricas se acoplam ao conteúdo material do Universo, determinando a evolução das inhomogeneidades cosmológicas no regime linear.

Igualando as Equações de Einstein: Componentes Temporais, Mistas e Espaciais

Uma vez obtidas as expressões explícitas para o tensor de Einstein perturbado e para o tensor energia–momento perturbado, estamos em condições de impor as equações de campo de Einstein,

$$G_{\mu\nu} + \delta G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu}, \tag{4.69}$$

as quais governam a dinâmica do espaço–tempo em presença de matéria.

No regime perturbativo, essas equações fornecem um conjunto de relações diferenciais que conectam as flutuações geométricas, representadas pelos potenciais gravitacionais Φ e Ψ, às perturbações do conteúdo material do Universo, descritas por $\delta\rho$, δp, δq_μ e $\delta\pi_{\mu\nu}$. Para uma análise sistemática, organizamos os resultados de acordo com as diferentes componentes tensoriais, separando as contribuições de fundo e de primeira ordem no parâmetro perturbativo ϵ.

A imposição dessa igualdade componente a componente permite derivar as equações de evolução para as perturbações escalares. A componente temporal (tt) resultará na generalização da equação de Poisson , enquanto as componentes mistas (ti) e espaciais ($i \neq j$) vincularão os potenciais gravitacionais aos fluxos de energia e às tensões anisotrópicas, respectivamente.

Componente Temporal (tt)

A componente temporal das equações de Einstein desempenha um papel fundamental, pois está diretamente associada à evolução da densidade de energia e, no limite homogêneo, reduz-se à equação de Friedmann que governa a dinâmica do fator de escala.

Igualando as componentes temporais do tensor de Einstein e do tensor energia–momento, obtemos

$$3H^2 + \epsilon \left(-2e^{f_0} \frac{\nabla^2 \Phi}{a^2} + 6H\dot{\Phi} \right) = e^{f_0} \left[\rho + \delta\rho - 2(\rho + 2p)\epsilon\Psi \right]. \tag{4.70}$$

Como no nível de fundo consideramos a ausência de fluxo de calor e de tensões anisotrópicas, impõem-se as condições

$$q_0 = 0, \qquad \pi_{00} = 0. \tag{4.71}$$

Essas hipóteses são compatíveis com a suposição de um fluido cosmológico médio isotrópico e sem dissipação.

Separando explicitamente as contribuições por ordem em ϵ, a equação de ordem zero fornece

$$3H^2 = e^{f_0}\rho, \tag{4.72}$$

a qual corresponde à equação de Friedmann generalizada para a métrica adotada. Essa relação determina a dinâmica de fundo do Universo, estabelecendo o vínculo direto entre a taxa de expansão e a densidade de energia média do fluido cosmológico.

Na primeira ordem em ϵ, obtemos

$$-2e^{f_0} \frac{\nabla^2 \Phi}{a^2} + 6H\dot{\Phi} = e^{f_0} \left[\delta\rho - 2(\rho + 2p)\Psi \right]. \tag{4.73}$$

Isolando a perturbação da densidade de energia, resulta

$$\delta\rho = -2\frac{\nabla^2 \Phi}{a^2} + 6He^{-f_0}\dot{\Phi} + 2\rho\Psi + 4p\Psi. \tag{4.74}$$

Essa equação representa a generalização da equação de Poisson cosmológica no regime relativístico, mostrando explicitamente como os potenciais gravitacionais e sua evolução temporal atuam como fontes das flutuações de densidade. O termo laplaciano de Φ descreve a influência das inhomogeneidades espaciais, enquanto os termos proporcionais a $\dot{\Phi}$ e Ψ codificam os efeitos dinâmicos da expansão e da geometria perturbada.

Componentes Mistas (ti)

As componentes mistas das equações de Einstein estão diretamente associadas ao transporte de energia e momento no espaço, desempenhando papel central na descrição dos fluxos induzidos pelas perturbações.

Igualando as componentes ti dos tensores geométrico e material, temos

$$G_{ti} + \delta G_{ti} = T_{ti} + \delta T_{ti}. \tag{4.75}$$

No nível de fundo, essa igualdade conduz à relação

$$H\, \partial_i f_0 = -e^{f_0/2} q_i, \tag{4.76}$$

a qual estabelece um vínculo direto entre possíveis gradientes espaciais da função temporal f_0 e a presença de fluxo de calor no fluido cosmológico. Essa equação mostra que, no modelo considerado, uma estrutura espacial não trivial da métrica pode sustentar fluxos energéticos mesmo no nível de fundo.

Na primeira ordem em ϵ, obtemos

$$2H\, \partial_i \Psi + \dot{\Phi} \partial_i f_0 - 2\partial_i \dot{\Phi} = -e^{f_0/2} \left(\delta q_i - q_i \Psi\right). \tag{4.77}$$

Isolando a perturbação do fluxo de calor, resulta

$$\delta q_i = -e^{-f_0/2} \left(2H\, \partial_i \Psi + \dot{\Phi} \partial_i f_0 - 2\partial_i \dot{\Phi}\right) + q_i \Psi. \tag{4.78}$$

Fisicamente, essa equação expressa como os gradientes espaciais e a evolução temporal dos potenciais gravitacionais atuam como fontes diretas de correntes de energia no fluido cosmológico. Esse mecanismo é fundamental para compreender a geração de fluxos induzidos por perturbações escalares, mesmo em modelos inicialmente comóveis.

Componentes Espaciais Fora da Diagonal $(i \neq j)$

As componentes espaciais fora da diagonal das equações de Einstein fornecem informações cruciais sobre a presença de anisotropias no fluido cosmológico. Enquanto em modelos FLRW padrão essas componentes se anulam identicamente, no presente cenário elas podem conter contribuições não triviais associadas às tensões anisotrópicas.

Igualando as componentes correspondentes do tensor de Einstein e do tensor energia-momento, obtemos:

$$-\frac{1}{4}\partial_i f_0\, \partial_j f_0 - \frac{1}{2}\partial_{ij} f_0 + \frac{1}{2}\Big[\partial_i f_0\, \partial_j(\Phi-\Psi) + \partial_j f_0\, \partial_i(\Phi-\Psi) - 2\,\partial_{ij}(\Phi+\Psi)\Big] = \pi_{ij} + \delta\pi_{ij}. \quad (4.79)$$

Contribuição de Fundo

No nível de fundo, as perturbações são desprezadas, isto é, $\Phi = \Psi = 0$, e a equação acima reduz-se a

$$-\frac{1}{4}\partial_i f_0\, \partial_j f_0 - \frac{1}{2}\partial_{ij} f_0 = \pi_{ij}. \quad (4.80)$$

Esta relação descreve um equilíbrio entre volume e tensão, onde a curvatura e a tensão de maré do fundo geométrico sustentam tensões anisotrópicas não nulas. Como discutido por Gomes em "Spacetimes with homogeneous and isotropic expansion"[93], esse resultado revela uma estrutura espacial mais geral do que aquela presente em cosmologias perfeitamente isotrópicas. Tal cenário é particularmente relevante no contexto de modelos intrinsecamente simétricos, nos quais a simetria global pode ser relaxada sem comprometer a consistência dinâmica do sistema.

Contribuição Perturbada

Na primeira ordem em ϵ, obtemos

$$\delta\pi_{ij} = \frac{1}{2}\Big[\partial_i f_0\, \partial_j(\Phi-\Psi) + \partial_j f_0\, \partial_i(\Phi-\Psi) - 2\,\partial_{ij}(\Phi+\Psi)\Big]. \quad (4.81)$$

Essa equação estabelece como as perturbações escalares da métrica, descritas pelos potenciais Φ e Ψ, geram correções anisotrópicas no conteúdo material do Universo. Observa-se que combinações simétricas de gradientes espaciais e derivadas mistas dos potenciais gravitacionais atuam como fontes diretas de tensões anisotrópicas.

Em particular, no limite de fluido perfeito, para o qual $\pi_{ij} = 0$, essa equação impõe restrições geométricas que conduzem à igualdade $\Phi = \Psi$, resultado bem conhecido na literatura de perturbações cosmológicas. No presente modelo, entretanto, a presença explícita de anisotropias permite que os dois potenciais gravitacionais sejam distintos, fornecendo um quadro mais geral para a análise da dinâmica das perturbações.

Essa diferenciação entre Φ e Ψ indica que a geometria do espaço-tempo e a distribuição de matéria não estão vinculadas de forma tão rígida quanto no modelo FLRW. Na prática, isso implica que a luz (fótons) e a matéria massiva "sentem"o poço gravitacional de maneiras ligeiramente diferentes. Assim, as componentes fora da diagonal das equações de Einstein tornam-se essenciais para descrever um Universo onde a estrutura de grande escala e os efeitos de lentes gravitacionais podem revelar desvios da simetria perfeita, consolidando este formalismo como uma ferramenta necessária para o estudo de cosmologias mais realistas.

5 Conclusão

Neste trabalho, desenvolvemos uma investigação sobre modelos cosmológicos inomogêneos dotados de simetria intrínseca, com ênfase na formulação geométrica do problema, na construção dinâmica das equações de campo e na análise perturbativa em primeira ordem. O fio condutor da dissertação foi o estudo das consequências físicas e matemáticas da relaxação da hipótese de homogeneidade espacial global, característica fundamental do modelo cosmológico padrão, e a exploração de estruturas geométricas mais gerais, capazes de acomodar, de maneira natural, observáveis como as anisotropias residuais e as flutuações de densidade em escalas onde o modelo padrão apresenta tensões.

A motivação central para este estudo reside no reconhecimento de que, embora o modelo FLRW constitua uma descrição extremamente bem-sucedida do Universo em grandes escalas, ele se apoia em pressupostos idealizados cuja validade deve ser constantemente testada frente ao progresso observacional. Fenômenos como a presença de estruturas em larga escala, tensões observacionais entre diferentes conjuntos de dados cosmológicos e possíveis assinaturas anisotrópicas motivam a busca por modelos alternativos ou generalizados, capazes de incorporar, de maneira controlada, desvios da homogeneidade e da isotropia estritas.

Nesse contexto, o conceito de *simetria intrínseca* surge como uma ferramenta para a construção de soluções cosmológicas geometricamente bem definidas, porém mais gerais do que o cenário FLRW. Ao contrário da imposição de simetrias espaciais globais, a simetria intrínseca permite caracterizar propriedades geométricas locais da métrica por meio da existência de campos vetoriais de Killing e da análise das congruências fundamentais do espaço-tempo. Essa abordagem fornece um arcabouço matemático consistente para a modelagem de universos nos quais a isotropia e a homogeneidade emergem apenas de forma aproximada, ou em regimes específicos.

No Capítulo 2, estabelecemos os fundamentos matemáticos necessários para o desenvolvimento do trabalho, revisitando os conceitos centrais da relatividade geral, tais como variedades diferenciáveis, métricas pseudo-riemannianas, conexões, curvatura e as equações de campo de Einstein. Além disso, apresentamos uma revisão detalhada da cosmologia padrão, enfatizando tanto seus sucessos fenomenológicos quanto suas limitações conceituais. Essa revisão teve como objetivo situar o leitor no contexto atual da cosmologia relativística e justificar, de maneira rigorosa, a necessidade de explorar extensões mais gerais do paradigma FLRW.

No Capítulo 3, introduzimos formalmente a noção de simetria intrínseca e analisamos suas implicações geométricas. Mostramos como a presença de vetores de Killing e a estrutura das hipersuperfícies espaciais determinam propriedades fundamentais da dinâmica cosmológica. Em particular, discutimos em detalhe o papel das simetrias na classificação dos modelos cosmológicos, destacando a distinção entre simetrias globais e intrínsecas. Essa distinção revelou-se crucial para a formulação dos modelos investigados neste trabalho, permitindo a construção de métricas suficientemente gerais para acomodar anisotropias e inomogeneidades, sem perder controle analítico sobre as equações dinâmicas.

O Capítulo 4 constituiu o núcleo técnico da dissertação, no qual desenvolvemos a análise perturbativa linear em torno de um fundo cosmológico inomogêneo com simetria intrínseca. A formulação das perturbações escalares foi cuidadosamente construída, respeitando as convenções geométricas adotadas e mantendo consistência com o formalismo covariante da relatividade geral. O cálculo dos símbolos de Christoffel, dos tensores de Ricci e de Einstein perturbados, bem como a decomposição do tensor energia–momento em seus componentes físicos, permitiu derivar um conjunto completo de equações dinâmicas para as perturbações.

Um dos resultados centrais obtidos foi a dedução das equações de Einstein linearizadas em um cenário que não pressupõe homogeneidade espacial estrita. Esse aspecto representa um avanço conceitual significativo em relação ao formalismo padrão de perturbações cosmológicas, no qual o fundo FLRW impõe severas restrições à estrutura das equações. No presente modelo, a presença explícita de gradientes espaciais no fundo geométrico gera novos termos de acoplamento entre as perturbações escalares e a geometria subjacente, revelando mecanismos adicionais de geração e evolução de anisotropias.

Em particular, a análise detalhada das componentes temporais, mistas e espaciais fora da diagonal das equações de Einstein evidenciou o papel central das tensões anisotrópicas e dos fluxos de energia-momento na dinâmica perturbativa. Mostramos que, diferentemente do caso FLRW com fluido perfeito, no qual os potenciais gravitacionais satisfazem a condição $\Phi = \Psi$, o presente modelo admite naturalmente soluções em que essa igualdade é violada, refletindo a presença de fontes anisotrópicas genuínas. Tal característica abre novas possibilidades fenomenológicas, especialmente no que diz respeito à interpretação de possíveis assinaturas observacionais associadas à anisotropia primordial.

Do ponto de vista físico, os resultados obtidos indicam que modelos cosmológicos intrinsecamente simétricos fornecem uma riqueza estrutural capaz de capturar aspectos críticos da dinâmica do Universo em escalas intermediárias. A presença de termos adicionais nas equações perturbativas sugere que a evolução das flutuações de densidade, bem como o processo de formação de estruturas em larga escala, podem apresentar comportamentos qualitativamente distintos daqueles previstos pelo modelo ΛCDM, oferecendo novos mecanismos para explicar a taxa de crescimento observada.

Além disso, a formulação apresentada neste trabalho estabelece uma base sólida para investigações futuras em diferentes direções. Uma extensão natural consiste na inclusão de perturbações vetoriais e tensoriais, permitindo uma análise completa da geração de ondas gravitacionais e modos vorticais em universos inomogêneos. Outra perspectiva promissora envolve o acoplamento do formalismo aqui desenvolvido com modelos específicos de matéria e energia escura, possibilitando o estudo de assinaturas observacionais potencialmente mensuráveis.

No âmbito observacional, os modelos analisados oferecem um quadro conceitual fértil para a interpretação de possíveis desvios em relação às previsões do modelo ΛCDM. Tensões atuais relacionadas à constante de Hubble, à amplitude das flutuações de densidade e a indícios de anisotropias em mapas da radiação cósmica de fundo podem, em princípio, encontrar explicações naturais dentro do contexto de modelos intrinsecamente simétricos. Embora uma análise quantitativa detalhada dessas questões esteja além do escopo da presente dissertação, os resultados obtidos aqui fornecem os fundamentos teóricos necessários para tais investigações.

Em síntese, este trabalho contribui para o avanço da cosmologia relativística ao explorar as implicações geométricas e dinâmicas da simetria intrínseca em modelos cosmológicos inomogêneos. Ao desenvolver um formalismo perturbativo consistente e ao derivar explicitamente as equações de campo linearizadas, estabelecemos uma ponte conceitual entre a geometria diferencial avançada e a fenomenologia cosmológica contemporânea. Espera-se que os resultados aqui apresentados sirvam como ponto de partida para estudos mais aprofundados, contribuindo para uma compreensão mais abrangente da estrutura e da evolução do Universo.

Referências

[1] P. J. E. Peebles. *Principles of Physical Cosmology*. Princeton University Press, 1993. 1, 4, 5, 6, 7, 12

[2] Viatcheslav Mukhanov. *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press, 2005. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 23, 24, 29, 30, 32

[3] Scott Dodelson. *Modern Cosmology*. Academic Press, 2003. 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 29, 30, 32

[4] S. Weinberg. *Cosmology*. Oxford University Press, 2008. 1, 2, 4, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 30

[5] Adam G. Riess, Alexei V. Filippenko, Peter Challis, Alejandro Clocchiatti, Alan Diercks, Peter M. Garnavich, Ron L. Gilliland, Craig J. Hogan, Saurabh Jha, Robert P. Kirshner, B. Leibundgut, M. M. Phillips, David Reiss, Brian P. Schmidt, Robert A. Schommer, R. Chris Smith, Jason Spyromilio, Christopher Stubbs, Nicholas B. Suntzeff, and John Tonry. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, 116(3):1009–1038, 1998. 1, 7, 8

[6] Saul Perlmutter, Gerson Goldhaber, S. E. Deustua, R. M. Knop, Peter Nugent, Peter G. Castro, Susana Deustua, Saul Perlmutter, Robert A. Knop, Mario Hamuy, Alexei V. Filippenko, Carl R. Pennypacker, Brian P. Schmidt, Nicholas B. Suntzeff, and The Supernova Cosmology Project. Measurements of omega and lambda from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, 517(2):565–586, 1999. 1, 7, 8

[7] M. Tegmark et al. Cosmological parameters from sdss and wmap. *Physical Review D*, 69(10):103501, 2004. 1, 4

[8] Thomas Buchert. On average properties of inhomogeneous fluids in general relativity: backreaction. *General Relativity and Gravitation*, 32:105–125, 2000. 1, 2, 12, 13, 21, 22

[9] Chris Clarkson, George Ellis, Obinna Umeh, and Roy Maartens. Does the growth of structure affect our dynamical models of the universe? the averaging, backreaction and fitting problems in cosmology. *Reports on Progress in Physics*, 74(11):112901, 2011. 1, 2, 3, 12, 13, 14, 21, 22, 26

[10] Krzysztof Bolejko, Andrzej Krasiński, Charles Hellaby, and Marie-Noëlle Célérier. *Structures in the Universe by Exact Methods: Formation, Evolution, Interactions*. Cambridge University Press, 2009. 1, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 21, 22, 26

[11] Andrzej Krasiński. *Inhomogeneous Cosmological Models*. Cambridge University Press, 1997. 1, 2, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18

[12] Juan García-Bellido and Troels Haugboelle. Confronting lemaître–tolman–bondi models with observational cosmology. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2008(04):003, 2008. 1, 15

[13] Roberto A. Sussman. Weighed scalar averaging in ltb dust models, part i: statistical fluctuations and gravitational entropy. *Classical and Quantum Gravity*, 30(6):065015, 2013. 1, 2, 12, 13, 14

[14] G. F. R. Ellis. Dynamics of pressure-free matter in general relativity. *Journal of Mathematical Physics*, 9(7):1083–1092, 1968. 1, 19, 20

[15] P. K. Sahoo, B. Mishra, and S. K. Tripathy. Locally rotationally symmetric bianchi type-i cosmological model in $f(r,t)$ theory of gravity. *Chinese Physics Letters*, 32(11):119801, 2015. 1, 20

[16] Umesh Kumar Sharma and Anirudh Pradhan. Locally rotationally symmetric bianchi type-i cosmology in $f(r,t)$ gravity with variable deceleration parameter. *New Astronomy*, 70:1–9, 2019. 1, 20

[17] Eduardo H. S. Bittencourt, Leandro G. Gomes, and Grasiele B. Santos. Intrinsically symmetric cosmological model in the presence of dissipative fluids. *General Relativity and Gravitation*, 53(11):107, 2021. 1, 21, 22, 23, 26

[18] Eduardo H. S. Bittencourt, Leandro G. Gomes, and Grasiele B. Santos. On the intrinsically flat cosmological models in a lattice. *Classical and Quantum Gravity*, 39(22):225008, 2022. 1, 21, 22, 23, 26

[19] T. Buchert. Cosmological parameters are dressed. *General Relativity and Gravitation*, 33:1381–1405, 2001. 2

[20] E. W. Kolb, S. Matarrese, and A. Riotto. On cosmic acceleration without dark energy. *New Journal of Physics*, 8:322, 2005. 2

[21] Hideo Kodama and Misao Sasaki. Cosmological perturbation theory. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 78:1–166, 1984. 2, 3, 6, 10

[22] Krzysztof Bolejko, Marie-Noëlle Célérier, and Andrzej Krasiński. Inhomogeneous cosmological models: Exact solutions and their applications. *Classical and Quantum Gravity*, 2011. 2, 3, 12, 21

[23] Planck Collaboration. Planck 2018 results. X. Constraints on inflation. *Astronomy & Astrophysics*, 641:A10, September 2020. 3

[24] S. Alam et al. Completed sdss-iv extended baryon oscillation spectroscopic survey: cosmological implications from two decades of spectroscopic surveys. *Physical Review D*, 103:083533, 2021. 3

[25] DES Collaboration. Dark energy survey year 1 results: Cosmological constraints. *Physical Review D*, 98:043526, 2019. 3

[26] T. Buchert. Dark energy from structure: A status report. *General Relativity and Gravitation*, 40:467–527, 2008. 3

[27] Andrew R. Liddle and David H. Lyth. *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*. Cambridge University Press, 2000. 4, 5, 6, 7, 8

[28] A. A. Penzias and R. W. Wilson. A measurement of excess antenna temperature at 4080 mc/s. *Astrophysical Journal*, 142:419–421, 1965. 4

[29] M. Colless et al. The 2df galaxy redshift survey: spectra and redshifts. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 328:1039–1063, 2001. 4

[30] John A. Peacock. *Cosmological Physics*. Cambridge University Press, 1999. 4, 5

[31] G. F. R. Ellis and M. A. H. MacCallum. A class of homogeneous cosmological models. *Communications in Mathematical Physics*, 12:108–141, 1969. 5, 19, 20

[32] M. Lachièze-Rey and J.-P. Luminet. Cosmic topology. *Physics Reports*, 254:135–214, 1995. 5

[33] Janna Levin. Topology and the cosmic microwave background. *Physics Reports*, 365:251–333, 2002. 5

[34] Planck Collaboration. Planck 2018 results. iv. diffuse component separation. *Astronomy & Astrophysics*, 641:A4, 2020. 5, 11

[35] Amanda Freitas Cruz. Um estudo sobre o modelo padrão da cosmologia, 2023. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) — Universidade de Brasília (UnB). 5, 6, 7, 8

[36] Barbara Ryden. *Introduction to Cosmology*. Addison Wesley, San Francisco, 2003. 5, 6, 7, 8

[37] Bernard F. Schutz. *A primeira introdução à relatividade geral*. LTC, Rio de Janeiro, 2 edition, 2009. Tradução da obra original: A First Course in General Relativity. 5

[38] Peter Coles and Francesco Lucchin. *Cosmology: The Origin and Evolution of Cosmic Structure*. Wiley, 2nd edition, 2002. 6, 10, 12

[39] H. P. Robertson. Kinematics and world-structure. *The Astrophysical Journal*, 82:284–301, 1935. 6

[40] A. G. Walker. On milne's theory of world-structure. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 42(1):90–127, 1936. 6

[41] Albert Einstein. Die feldgleichungen der gravitation. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, pages 844–847, 1915. 6

[42] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, and John Archibald Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1973. 6

[43] Robert M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, Chicago, 1984. 6, 7, 21, 25, 26, 30

[44] Sean M. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, San Francisco, 2004. 6, 7, 21

[45] Steven Weinberg. The cosmological constant problem. *Reviews of Modern Physics*, 61(1):1–23, 1989. 7, 8

[46] Stephen W. Hawking and George F. R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge University Press, Cambridge, 1973. 7

[47] Bernard F. Schutz. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985. 7

[48] Edward W. Kolb and Michael S. Turner. *The Early Universe*. Addison Wesley, Reading, Massachusetts, 1990. 7, 8

[49] I. Zlatev, L. Wang, and P. J. Steinhardt. Quintessence, cosmic coincidence, and the cosmological constant. *Physical Review Letters*, 82:896–899, 1999. 9

[50] Adam G. Riess et al. Large magellanic cloud cepheid standards provide a 1% foundation for the determination of the hubble constant. *The Astrophysical Journal*, 876(1):85, 2019. 9

[51] George Dias Alves. Tensão de hubble e suas implicações. Master's thesis, Universidade Federal de Campina Grande, 2024. 9

[52] C. Heymans et al. Kids-1000 cosmology: Multi-probe weak lensing and galaxy clustering constraints. *Astronomy & Astrophysics*, 646:A140, 2021. 9

[53] Valerio Marra. *Cosmology Beyond the Standard Model: Inhomogeneities and Backreaction*. PhD thesis, University of Geneva, 2007. 9

[54] Thomas Buchert and Syksy Räsänen. Backreaction in late-time cosmology. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 62:57–92, 2011. 9

[55] W. J. C. da Silva Junior, H. A. Borges, and R. F. L. Holanda. Inhomogeneous cosmology and its observational tests. *Classical and Quantum Gravity*, 35:135003, 2018. 9

[56] Gianfranco Bertone and Dan Hooper. *History of Dark Matter*, volume 90. Reviews of Modern Physics, 2018. 9

[57] J. M. Bardeen. Gauge-invariant cosmological perturbations. *Physical Review D*, 22(8):1882–1905, 1980. 10

[58] V. F. Mukhanov. Quantum theory of gauge-invariant cosmological perturbations. *Soviet Physics JETP*, 67:1297–1302, 1988. 10

[59] P. J. E. Peebles. *The Large-Scale Structure of the Universe*. Princeton University Press, Princeton, 1980. 10

[60] W. Hu and S. Dodelson. Cosmic microwave background anisotropies. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 40:171–216, 2002. 11

[61] M. Bartelmann and P. Schneider. Weak gravitational lensing. *Physics Reports*, 340(4–5):291–472, 2001. 11

[62] George F. R. Ellis. Dynamics of pressure-free matter in general relativity. *Journal of Mathematical Physics*, 8:1171–1194, 1967. 12, 13

[63] Marie-Noëlle Célérier. Do we really see a cosmological constant in the supernovae data? *Astronomy and Astrophysics*, 353:63–71, 2000. 12, 14, 15

[64] George F. R. Ellis. Inhomogeneity effects in cosmology. *Classical and Quantum Gravity*, 28(16):164001, 2011. 12, 13, 29

[65] Hermann Bondi. Spherically symmetrical models in general relativity. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 107:410–425, 1947. 14, 15

[66] Hans Stephani, Dietrich Kramer, Malcolm MacCallum, Cornelius Hoenselaers, and Eduard Herlt. *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*. Cambridge University Press, 2 edition, 2003. 14, 21

[67] Georges Lemaître. L'univers en expansion. *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, A53:51–85, 1933. 15

[68] Richard C. Tolman. Effect of inhomogeneity on cosmological models. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 20:169–176, 1934. 15

[69] Tirthankar Biswas, Alessio Notari, and Wessel Valkenburg. Testing the void against cosmological data: fitting cmb, bao, sn and h0. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2010(11):030, 2010. 15

[70] James P. Zibin, Adam Moss, and Douglas Scott. Can decaying modes save void models for acceleration? *Physical Review Letters*, 101:251303, 2008. 15

[71] Adam Moss, James P. Zibin, and Douglas Scott. Precision cosmology defeats void models for acceleration. *Physical Review D*, 83(10):103515, 2011. 15

[72] Valerio Marra, Robert Crittenden, Rodrigo de Pita, et al. The behomo project: simulations of ltb models with dark energy. *Astronomy & Astrophysics*, 667:A34, 2022. 16

[73] Thomas P. Sotiriou and Valerio Faraoni. f(r) theories of gravity. *Reviews of Modern Physics*, 82(1):451–497, 2010. 16

[74] Takuya Morita and Kei ichi Maeda. Cosmological inhomogeneities in f(r) gravity. *Physical Review D*, 96(2):023519, 2017. 16

[75] Marie-Noëlle Célérier. Precision cosmology with exact inhomogeneous solutions of general relativity: the szekeres models. *Phys. Rev. D*, 110:123526, 2024. 16, 18

[76] Peter Szekeres. A class of inhomogeneous cosmological models. *Communications in Mathematical Physics*, 41:55–64, 1975. 17, 18

[77] Roberto A. Sussman. Weighed scalar averaging in ltb dust models, part i: statistical fluctuations and gravitational entropy. *Classical and Quantum Gravity*, 32(6):065012, 2015. 17, 18

[78] Austin Peel, Mustapha Ishak, and M. A. Troxel. Large-scale growth evolution in the szekeres inhomogeneous cosmological models with comparison to growth data. *Phys. Rev. D*, 86:123517, 2012. 18

[79] Ísmal Delgado Gaspar and Thomas Buchert. Lagrangian theory of structure formation in relativistic cosmology. vi. comparison with szekeres exact solutions. *Phys. Rev. D*, 103:023513, 2021. 18

[80] Roy Maartens. Causal thermodynamics in relativity: A review. *Classical and Quantum Gravity*, 13(6):1455–1480, 1996. 19

[81] John Wainwright and George F. R. Ellis, editors. *Dynamical Systems in Cosmology*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. 20, 22, 25, 26

[82] G. F. R. Ellis. Relativistic cosmology. *Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi"*, 47:104–182, 1971. 21, 22, 23, 25, 26

[83] George F. R. Ellis, Roy Maartens, and Malcolm A. H. MacCallum. *Relativistic Cosmology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2012. 21, 22, 23, 25, 26

[84] Christos G. Tsagas, Anthony Challinor, and Roy Maartens. Relativistic cosmology and large-scale structure. *Physics Reports*, 465(2–3):61–147, 2008. 22, 23, 24, 25

[85] C. B. Collins. Intrinsic symmetries in general relativity. *Journal of Mathematical Physics*, 20:2298–2303, 1979. 22

[86] D. A. Szafron and C. B. Collins. A new approach to inhomogeneous cosmologies: exact solutions and their evolution. *Journal of Mathematical Physics*, 20:2354–2360, 1979. 22

[87] George F. R. Ellis and Marco Bruni. Covariant and gauge-invariant approach to cosmological density fluctuations. *Physical Review D*, 40(6):1804–1818, 1989. 24

[88] Leandro G. Gomes. Breaking the cosmological principle into pieces: a prelude to the intrinsically homogeneous and isotropic spacetimes. *arXiv:2401.01992*, 2024. 26

[89] Viatcheslav F. Mukhanov, H. A. Feldman, and Robert H. Brandenberger. Theory of cosmological perturbations. *Physics Reports*, 215(5-6):203–333, 1992. 29, 31

[90] Chung-Pei Ma and Edmund Bertschinger. Cosmological perturbation theory in the synchronous and conformal newtonian gauges. *The Astrophysical Journal*, 455:7–25, 1995. 29, 31, 32

[91] Robert H. Brandenberger. Cosmological perturbations and the origin of structure. *Reviews of Modern Physics*, 57:1–60, 1985. 29, 31

[92] Scott Dodelson and Fabian Schmidt. *Modern Cosmology*. Academic Press, 2 edition, 2020. 29

[93] Leandro G. Gomes. Spacetimes with homogeneous and isotropic expansion. *arXiv:2404.07757*, 2024. 48