

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

**Máxima Verossimilhança Restrita e Propagação de Erro na  
Modelagem de Média-Variância da Vida de Ferramenta de  
corte em processos de usinagem**

Mirelli de Castro Cesário

ITAJUBÁ  
MARÇO DE 2026

MIRELLI DE CASTRO CESÁRIO

**Máxima Verossimilhança Restrita e Propagação de Erro na Modelagem de Média-Variância da Vida de Ferramenta de corte em processos de usinagem**

Tese submetida para **defesa** no Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Itajubá, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutora em Ciências em Engenharia de Produção.

**Área de concentração:** Engenharia de Produção.

**Orientador:** Prof. Anderson Paulo de Paiva, Dr.

ITAJUBÁ

MARÇO DE 2026

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

Mirelli de Castro Cesário

**Máxima Verossimilhança Restrita e Propagação de Erro na Modelagem de Média-Variância da Vida de Ferramenta de corte em processos de usinagem**

Tese submetida para **defesa** do tema ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Itajubá, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutora em Ciências em Engenharia de Produção.

**Banca examinadora:**

Prof. Dr. Roberto da Costa Quinino (UFMG)

Dr. Fabricio José Pontes (EMBRAER)

Prof. Dra. Juliana Helena Daroz Gaudêncio  
(UNIFEI)

Prof. Dr. Matheus Brendon Francisco (UNIFEI)

ITAJUBÁ

MARÇO DE 2026

## RESUMO

A vida da ferramenta constitui um critério fundamental para a tomada de decisão orientada à excelência em processos de usinagem, uma vez que impacta diretamente os custos de produção, a qualidade do produto final, a eficiência operacional, os indicadores de sustentabilidade e o consumo de energia. Contudo, na maioria dos ensaios experimentais, a ferramenta não é monitorada continuamente, sendo registrado apenas o tempo efetivo de corte ou o comprimento usinado até o atingimento do limite de desgaste especificado. Assim, cada observação representa apenas uma fração da vida da ferramenta, induzindo um padrão de variância não-constante, o que viola as suposições dos Mínimos Quadrados Ordinários e demanda abordagens de modelagem capazes de representar simultaneamente a média e a variância da variável resposta. Esta tese propõe uma abordagem metodológica integrada para a modelagem simultânea da média e da variância da vida da ferramenta, baseada em Propagação de Erro (POE) e Máxima Verossimilhança Restrita (REML). A metodologia foi aplicada a um conjunto de dados proveniente de um Delineamento Composto Central, obtido a partir de ensaios com sete pastilhas *Sandvik Coromant*, sendo cinco classes cerâmicas e duas classes de PCBN, empregadas no torneamento duro do aço AISI H13. Os resultados evidenciaram a superioridade das abordagens propostas em relação aos Mínimos Quadrados Ordinários, tanto em termos de qualidade de ajuste quanto de desempenho preditivo. Entre os algoritmos avaliados, os métodos baseados em POE apresentaram o melhor desempenho, demonstrando maior capacidade de representar adequadamente a média e a variância da vida da ferramenta. Na etapa de otimização, foi realizada uma otimização multiobjetivo média-variância por meio do método da Interseção Normal à Fronteira. A seleção da solução ótima foi conduzida utilizando um critério de decisão baseado na distância de Mahalanobis, sendo os resultados posteriormente validados por experimentos de confirmação. De modo geral, os achados demonstram que a modelagem conjunta da média e da variância fornece uma estrutura metodológica mais robusta para a predição da vida da ferramenta e para a definição de parâmetros de usinagem sob incerteza, contribuindo para o aumento da confiabilidade, da eficiência operacional e da sustentabilidade dos processos de manufatura.

**Palavras-chave:** Vida da ferramenta, resíduos heteroscedásticos, desgaste de flanco, modelagem média-variância, torneamento.

## ABSTRACT

*Tool life constitutes a fundamental criterion for decision-making aimed at excellence in machining processes, as it directly impacts production costs, final product quality, operational efficiency, sustainability indicators, and energy consumption. However, in most experimental trials, the tool is not continuously monitored, and only the effective cutting time or the machined length until the specified wear limit is reached is recorded. Thus, each observation represents only a fraction of the tool life, inducing a pattern of non-constant variance (heteroscedasticity), which violates the assumptions of Ordinary Least Squares and requires modeling approaches capable of simultaneously representing the mean and the variance of the response variable. This thesis proposes an integrated methodological approach for the simultaneous modeling of the mean and variance of tool life, based on Propagation of Error (POE) and Restricted Maximum Likelihood. The methodology was applied to a dataset obtained from a Central Composite Design, derived from experiments conducted with seven Sandvik Coromant inserts, including five ceramic grades and two PCBN grades, used in the hard turning of AISI H13 steel. The results demonstrated the superiority of the proposed approaches compared to Ordinary Least Squares, both in terms of goodness of fit and predictive performance. Among the evaluated algorithms, the methods based on POE exhibited the best performance, showing a greater ability to adequately represent both the mean and the variance of tool life. In the optimization stage, a mean–variance multiobjective optimization was performed using the Normal Boundary Intersection method. The selection of the optimal solution was conducted using a decision criterion based on the Mahalanobis distance, and the results were subsequently validated through confirmation experiments. Overall, the findings demonstrate that the joint modeling of mean and variance provides a more robust methodological framework for predicting tool life and defining machining parameters under uncertainty, contributing to increased reliability, operational efficiency, and sustainability in manufacturing processes.*

**Keywords:** *Tool life, heteroscedastic residuals, flank wear, mean–variance modeling, turning.*

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Produção científica anual .....	28
Figura 2: Produção por área de pesquisa .....	29
Figura 3: Produção por revista.....	30
Figura 4: Produção mundial .....	31
Figura 5: Documentos por autor .....	31
Figura 6: Nuvem de palavras para os termos buscados.....	32
Figura 7: Diferentes tipos de desgaste .....	35
Figura 8: Tipos de monitoramento de desgaste .....	36
Figura 9: Representação CCD 2 e 3 variáveis.....	47
Figura 10 : Superfície de resposta e gráfico de contorno .....	48
Figura 12: Descrição gráfica do método NBI.....	66
Figura 13: Metodologia de pesquisa.....	58
Figura 14: Fluxograma metodológico da pesquisa.....	59
Figura 15: Amostra das sete pastilhas utilizadas no torneamento do aço AISI H13 endurecido .....	70
Figura 16: Média e variância para a vida de sete ferramentas de corte diferentes .....	72
Figura 17: Comportamento do desgaste da ferramenta PCBN 7025 de acordo com cada configuração de usinagem do CCD.....	74
Figura 18: Gráfico de Pareto e gráfico do efeito principal para a vida da pastilha PCN 7025 .....	74
Figura 19: Comportamento do desgaste da ferramenta lateral PCBN 7025 (Ampliação: 500x).....	76
Figura 20: Comportamento do desgaste da ferramenta PCBN 7025W de acordo com cada configuração de usinagem CCD .....	77
Figura 21: Gráfico de Pareto e gráfico do efeito principal para a vida da pastilha PCBN 7025W .....	77
Figura 22: Comportamento do desgaste da ferramenta CC6070 e mecanismos de desgaste (Ampliação: 500x).....	78
Figura 23: Comportamento do desgaste da ferramenta CC670 de acordo com cada configuração de usinagem CC670.....	79
Figura 24: Comportamento do desgaste da ferramenta CC6050 convencional e Wiper 79	
Figura 25: Comportamento do desgaste da ferramenta CC650 convencional e Wiper..	80

Figura 26: ANOVA da métrica de desempenho da previsibilidade estatística versus métodos de modelagem .....	83
Figura 27: Comportamento quadrático da variância residual absoluta ( $\text{Var }  e_i $ ) em termos de $C_t$ .....	87
Figura 28: Gráfico de contorno sobreposto para vida, variância e $C_t$ da ferramenta PCBN 7025 (min) .....	88
Figura 29: Modelos mais adequados para $e_i^2$ utilizando os resíduos dos pontos centrais de sete inserções .....	88
Figura 30: Fronteira de Pareto para o dual média-variância do inserto PCBN 7025 .....	92
Figura 31: Fronteira de Pareto para a dualidade média-variância das inserções PCBN 7025 e PCBN 7025W .....	92
Figura 32: Fronteira de Pareto para média e variância das inserções CC6050 e CC6050W .....	93
Figura 33: Fronteira de Pareto para média e variância das inserções CC650 e CC650W .....	94
Figura 34: Fronteira de Pareto para média e variância da inserção CC670 .....	95
Figura 35: Desempenho comparativo de sete ferramentas com base em fronteiras de Pareto sobrepostas para média-variância.....	96
Figura 36: Gráfico de contorno sobreposto para a média e a variância de todas as ferramentas dentro do espaço de solução $x^T x \leq 2,67$ .....	96
Figura 37: TOPSIS multivariado (d) versus pesos (w) .....	97
Figura 38: Elipses de confiança de 95% para a média e a variância das sete ferramentas em $d_{\max}$ .....	98
Figura 39: TOPSIS (d) versus parâmetros decodificados do processo $V_c$ , $f$ e $a_p$ .....	100
Figura 40: Medidas sequenciais do desgaste lateral do CC670 com a configuração ideal de $V_c = 58,3$ m/s, $f = 0,15$ mm/rev e $a_p = 0,25$ mm (NOMATI-UNIFEI).....	101
Figura 41: Medidas sequenciais do desgaste do flanco CC670 com a configuração ideal de $V_c=58,3$ m/min, $f=0,15$ mm/rev. e $a_p=0,25$ mm (NOMATI-UNIFEI).....	102
Figura 42: Curva de desgaste da ferramenta cerâmica CC670 na configuração ideal de $V_c=58,3$ m/min, $f=0,15$ mm/rev. e $a_p=0,25$ mm (NOMATI-UNIFEI).....	103
Figura 43: MEV dos tipos de desgaste lateral e em cratera do CC670 observados durante os testes de confirmação (LCE-UNIFEI) .....	103
Figura 44: MEV e EDS do chip H13 observados durante os testes de confirmação executados com a ferramenta cerâmica CC670.....	104

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Pastilhas usadas para torneamento do aço AISI H13 endurecido .....	70
Tabela 2: Variáveis de controle utilizadas no experimento.....	71
Tabela 3: CCD para vida da ferramenta das sete ferramentas usadas no torneamento do AISI H13 .....	71
Tabela 4: Valores absolutos para os resíduos da vida de cada ferramenta de usinagem	72
Tabela 5: Variações estimadas para a vida de cada ferramenta de usinagem .....	73
Tabela 6: Resumo estatístico da capacidade preditiva do modelo quadrático completo	81
Tabela 7: Resumo estatístico da capacidade preditiva do modelo quadrático completo do CC670.....	81
Tabela 8: Resumo estatístico da capacidade preditiva do modelo quadrático completo	82
Tabela 9: Resumo estatístico da capacidade preditiva dos modelos quadráticos completos do CC670.....	82
Tabela 10: Coeficientes para o modelo quadrático completo da média e da variância da vida da ferramenta (Parte I).....	84
Tabela 11: Coeficientes para o modelo quadrático completo da média e da variância da vida da ferramenta (Parte II).....	84
Tabela 12: Pontos ótimos e viáveis de Pareto (em unidades codificadas) para a média e a variância da vida da ferramenta PCBN 7025 .....	90
Tabela 13: Valores decodificados para pontos ótimos de Pareto, GD e pertencimento TOPSIS de Mahalanobis para a média e a variância da vida da ferramenta PCBN 7025 .....	91
Tabela 14: Soluções ótimas de Pareto para $d_{\max}$ (por inserto).....	97
Tabela 15: MANOVA para testar diferenças entre os vários centróides .....	99
Tabela 17: Resultados da modelagem para os estudos de referência .....	109

## **LISTA DE QUADROS**

Quadro 1: Parâmetros de busca utilizados na pesquisa .....	28
Quadro 2: Publicações relacionadas à vida de ferramenta em processos de usinagem..	39
Quadro 3: Principais resultados dos artigos pesquisados .....	42

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AISI	<i>American Iron and Steel Institute</i>
ANOVA	<i>Analysis of Variance</i>
ap	Profundidade de corte
AWG	<i>Adaptive Weighting Method</i>
BBD	<i>Box-Behnken Design</i>
CBN	<i>Cubic Boron Nitride</i>
CC	<i>Ceramic Cutting Tool</i>
CCD	<i>Central Composite Design</i>
CHIM	<i>Convex Individual Minima</i>
CNC	Controle Numérico Computadorizado
CNGA	Inserto cerâmico tipo CNGA
CNGN	Inserto cerâmico tipo CNGN
$C_t$	Tempo de corte
DOE	<i>Design of Experiments</i>
DRS	<i>Dual Response Surface</i>
EDS	Espectroscopia de Dispersão de Energia
EXP	Experimento
f	Avanço por rotação
FA	<i>Factor Analysis</i>
FFD	<i>Full Factorial Design</i>
GD	<i>Gradient Descent</i>
GD	<i>Generalized Distance</i>
GLM	<i>Generalized Linear Model</i>
GRG	<i>Generalized Reduced Gradient</i>
HRC	<i>Hardness Rockwell C</i>
IEPG	Instituto de Engenharia de Produção e Gestão
LOF	<i>Lack of Fit</i>
MANOVA	<i>Multivariate Analysis of Variance</i>
MD	Distância de Mahalanobis
MOP	<i>Multiobjective Optimization Problem</i>
MSE	<i>Mean Squared Error</i>
NBI	<i>Normal Boundary Intersection</i>
NBR	Norma Brasileira

OLS	<i>Ordinary Least Squares</i>
PCBN	<i>Polycrystalline Cubic Boron Nitride</i>
POE	<i>Propagation of Error</i>
PSO	<i>Particle Swarm Optimization</i>
REML	<i>Restricted Maximum Likelihood</i>
RPD	<i>Robust Parameter Design</i>
RSM	<i>Response Surface Methodology</i>
TOPSIS	<i>Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution</i>
UNIFEI	Universidade Federal de Itajubá
Vb	Desgaste de flanco
Vc	Velocidade de corte
WLS	<i>Weighted Least Squares</i>
WS	<i>Weighted Sum</i>

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	<b>14</b>
1.1. Justificativa .....	19
1.2. Objetivos .....	23
1.2.1. Objetivo principal .....	23
1.2.2. Objetivo secundário .....	23
1.3. Delimitações da pesquisa .....	24
1.4. Limitações da pesquisa .....	24
1.5. Alinhamento aos Objetivos de Desenvolvimento Sustentável .....	25
1.6. Estrutura do trabalho .....	25
<b>2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> .....	<b>27</b>
2.1. Análise bibliométrica .....	27
2.2. Vida de ferramenta em processos de usinagem .....	33
2.3. Metodologia de Superfície de Resposta .....	46
2.4. Características básicas da modelagem .....	51
2.5. Máxima Verossimilhança Restrita .....	55
2.6. Média e variância de funções de variáveis aleatórias .....	55
<b>3. METODOLOGIA</b> .....	<b>58</b>
3.1. Classificação do método de pesquisa .....	58
3.2. Metodologia da pesquisa .....	59
3.2.1. Seleção de Problema .....	59
3.2.2. Modelagem da variável .....	60
3.2.3. Comparação dos modelos .....	60
3.2.4. Otimização da vida da ferramenta .....	60
3.2.5. Validação experimental .....	61
<b>4. MODELAGEM MÉDIA-VARIÂNCIA E OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO DA VIDA DA FERRAMENTA</b> .....	<b>62</b>
4.1. Procedimentos iterativos para modelar vida de ferramenta .....	62
4.2. Otimização da média e da variância da vida da ferramenta .....	64
<b>5. APLICAÇÃO DA METODOLOGIA DE MODELAGEM E OTIMIZAÇÃO DA VIDA DA FERRAMENTA</b> .....	<b>69</b>
5.1. Torneamento do aço AISI H13 endurecido .....	69
5.2. Modelagem da vida de ferramenta e comparação entre os métodos .....	80

5.3.	Otimização de superfície de resposta para a vida da ferramenta .....	89
5.4.	Validação experimental .....	100
5.5.	Análises e discussões .....	105
5.6.	Análise comparativa da metodologia em diferentes contextos experimentais 107	
<b>6.</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>111</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>115</b>
	<b>APÊNDICE .....</b>	<b>127</b>

## 1. INTRODUÇÃO

A vida da ferramenta é um dos mais importantes critérios de decisão para a excelência em processos de usinagem, devido à sua influência nos custos fixos de produção, a qualidade do produto final, a eficiência do processo, a sustentabilidade e o consumo de energia durante a operação (Iqbal, Al-Ghamdi e Hussain, 2016; Kadu *et al.*, 2014; Liang *et al.*, 2025; Shui *et al.*, 2026). No processo de torneamento, especificamente, a vida da ferramenta é geralmente medida em termos do tempo total de usinagem ou do comprimento usinado que a ferramenta é capaz de completar antes que ocorra falha ou, de modo mais conservador, antes que seja atingido o desgaste máximo especificado (Axinte, Belluco e Chiffre, 2001; Khan *et al.*, 2018). Esses critérios frequentemente coincidem com o número de passes realizados até que a ferramenta alcance um limite de desgaste, ou podem ser expressos como uma função do número de peças produzidas, do volume de material removido ou até mesmo considerando o tempo total de usinagem (Axinte, Belluco e Chiffre, 2001; García-Martínez *et al.*, 2023; Khadka *et al.*, 2025).

Contrariamente ao que frequentemente se assume, a vida da ferramenta nem sempre é medida de forma contínua e, em muitos contextos experimentais, não se comporta como uma variável aleatória contínua com distribuição normal. Em muitas operações de usinagem, o comprimento da peça e o tempo de corte ( $C_t$ ) necessário para percorrê-la à velocidade de corte selecionada ( $V_c$ ) representam apenas uma fração do tempo total de utilização da ferramenta até que o critério de fim de vida seja atingido. Assim, várias passadas precisam ser realizadas antes que um critério de fim de vida seja atingido. Como indicado em diversos trabalhos (Aggarwal *et al.*, 2008; Campos *et al.*, 2017; Choudhury e El-Baradie, 1998, 1999; Davim, 2008; Davoodi e Eskandari, 2015; Khadka *et al.*, 2025; Paiva, Ferreira e Balestrassi, 2007; Saedon, J. B. *et al.*, 2012), o desgaste máximo de flanco ( $VB_{max}$ ) com 0,30 mm é um valor-limite amplamente aceito. Assim, as passadas na peça usinada são repetidas até que esse limite de desgaste seja atingido. Considerando que cada passada possui um tempo de corte conhecido ( $C_t$ ), a vida da ferramenta pode ser estimada pelo produto entre o número total de passadas realizadas e o tempo de corte correspondente. Nesse contexto, o número de passadas observadas em um determinado intervalo de tempo pode ser interpretado como uma variável de contagem. Sob a hipótese de que essas passadas ocorrem de forma independente e com taxa média aproximadamente constante ao longo do tempo, o número de passadas realizadas em um intervalo de tempo fixo pode ser modelado por uma distribuição de Poisson, cuja taxa média ( $\lambda$ ) representa o número esperado de passadas por unidade de

tempo, adotando-se o minuto como unidade temporal de referência. De forma análoga, quando a vida da ferramenta é expressa em termos do comprimento total usinado, obtido pela soma dos comprimentos individuais das peças, ou ainda em termos do número de peças produzidas ou de operações realizadas em um intervalo de tempo, essas quantidades também podem ser interpretadas como contagens de eventos ao longo do tempo, passíveis de modelagem por distribuições de contagem, como a distribuição de Poisson, sob hipóteses semelhantes de independência e taxa média aproximadamente constante.

A principal implicação de considerar a vida da ferramenta como uma variável aleatória contínua com distribuição normal está relacionada ao comportamento dos resíduos preditivos em modelos de Mínimos Quadrados Ordinários (*Ordinary Least Squares* - OLS). Em modelagem tradicional com Delineamento Composto Central (*Central Composite Design* - CCD), espera-se que os resíduos sejam independentes dos valores preditos, da média ou dos fatores envolvidos no modelo, com distribuição normal e variância constante. Contudo, tais pressupostos nem sempre são atendidos na prática.

Após testar diversos casos na literatura (Aggarwal *et al.*, 2008; Campos *et al.*, 2017; Choudhury e El-Baradie, 1998, 1999; Davim, 2008; Davoodi e Eskandari, 2015; Hernández *et al.*, 2025; Paiva, Ferreira e Balestrassi, 2007; Saedon, J. B. *et al.*, 2012; Severino *et al.*, 2012; Souza, L. G. P. *et al.*, 2025), observa-se que, ao se ajustar modelos por OLS para os valores absolutos ou quadráticos dos resíduos, obtêm-se coeficientes de determinação ( $R^2$  e  $R^2$  ajustado) relativamente elevados. Esse resultado indica que a magnitude dos resíduos apresenta relação sistemática com as variáveis do modelo, caracterizando a presença de heterocedasticidade, isto é, uma situação em que a variância do erro depende dos níveis das variáveis de entrada e de possíveis efeitos não lineares associados ao processo. Nessas condições, abordagens baseadas em Modelos Lineares Generalizados (*Generalized Linear Model* - GLM) podem fornecer uma estrutura de modelagem mais adequada (Myers *et al.*, 2010).

Como indicado na literatura (Brito *et al.*, 2014; Khuri e Cornell, 2018b; Montgomery, Douglas C., 2017; Myers *et al.*, 2010; Myers, Montgomery e Anderson-Cook, 2016), quando os resíduos de um modelo OLS são heterocedásticos, deve-se aplicar algum tipo de transformação à resposta ou algum tipo de ponderação que equilibre os resíduos e restabeleça a condição ideal de homocedasticidade. Entre os procedimentos capazes de realizar esses ajustes estão o método GLM (Myers *et al.*, 2010), Mínimos Quadrados Ponderados (*Weighted Least Squares* - WLS) e Estimação de Máxima

Verossimilhança Restrita (*Restricted Maximum Likelihood Estimation - REML*) (Myers, Montgomery e Anderson-Cook, 2016).

Os métodos baseados em GLM e WLS incorporam procedimentos destinados a lidar com situações em que a variância dos resíduos não é constante. Em tais abordagens, estimativas da variância são utilizadas para construir uma matriz de ponderação, cujos elementos ocupam a diagonal principal de uma matriz auxiliar. O algoritmo consiste em aplicar pesos inversamente proporcionais à variância estimada aos termos da matriz do delineamento experimental e ao vetor de respostas, de modo que observações associadas a maiores variâncias recebam menor peso no ajuste do modelo, enquanto observações com menor variância exerçam maior influência na estimação dos parâmetros (Myers *et al.*, 2010; Myers, Montgomery e Anderson-Cook, 2016). Em muitos casos, as próprias estimativas dos resíduos podem ser utilizadas como base para a modelagem da estrutura de variância. Dessa forma, além de lidar com a presença de heterocedasticidade, os métodos GLM e WLS possibilitam também a obtenção de expressões analíticas para a variância da resposta de interesse,  $\text{Var}[f(\mathbf{x})]$  (Khuri e Cornell, 2018b; Montgomery, Douglas C., 2017). Essas expressões são particularmente relevantes em estudos de otimização robusta de processos, pois sua minimização conduz a condições operacionais menos sensíveis à influência de fatores de ruído, contribuindo para o aumento dos índices de capacidade do processo e para a redução da probabilidade de não conformidades, retrabalhos e desperdícios.

Segundo a literatura, dependendo das informações disponíveis, existem quatro maneiras de criar equações para a variância: (a) matrizes combinadas (Brito *et al.*, 2014; Costa *et al.*, 2016; Khuri e Cornell, 2018b; Montgomery, Douglas C., 2017; Myers, Montgomery e Anderson-Cook, 2016; Paiva *et al.*, 2014), (b) matrizes cruzadas (*crossed arrays*) (Gaudêncio *et al.*, 2019; Gomes, *et al.*, 2012; Lopes *et al.*, 2016), (c) réplicas (Montgomery, Douglas C., 2017; Myers, Montgomery e Anderson-Cook, 2016), e (d) resíduos de modelos ajustados (Köksalan e Plante, 2003; Myers *et al.*, 2010; Plante, 2001). As abordagens (a) e (b) são planejadas para permitir a medição da variância do processo mediante a inclusão prévia de variáveis de ruído no delineamento. As abordagens (c) e (d), embora não tenham esse objetivo, permitem derivar a variância a partir das medições de  $y$  por procedimentos relativamente simples. Entre esses, destaca-se o método de Propagação de Erro (*Propagation of Error - POE*) (Köksalan e Plante, 2003; Paiva *et al.*, 2014; Plante, 2001).

O POE é derivado do valor esperado da expansão multidimensional da série de Taylor ao quadrado para  $f(\mathbf{x})$ , assumindo que essa função é composta por variáveis aleatórias com média ( $\mu_{x_i}$ ) e variância ( $\sigma_{x_i}^2$ ). Assim, a variância de uma variável de entrada ( $x_j$ ) é transmitida (ou propagada) para  $f(\mathbf{x})$ , assim como a covariância entre  $x_i$  e  $x_j$ . Dessas variâncias e covariâncias forma  $\text{Var}[f(\mathbf{x})]$  (para detalhes, ver **Apêndice 1**).

O POE é amplamente utilizado em engenharia e em diversas áreas do conhecimento, particularmente na estimativa de incertezas associadas a medições indiretas e a grandezas correlacionadas (Arruda *et al.*, 2019; Herrador, Asuero e González, 2005; Sepahi-Boroujeni, Mayer e Khameneifar, 2021). Analogamente, esse princípio também pode ser empregado para derivar intervalos de confiança de  $(1-\alpha)$  % da média da resposta ou para novas observações em modelos de regressão e em estudos de planejamento de experimentos (*Design of Experiments* – DOE). Em aplicações voltadas à estimativa de incerteza de medição, as variáveis aleatórias correspondem tipicamente aos fatores de entrada  $x_j$ . No contexto de regressão e DOE, por sua vez, a incerteza está associada aos coeficientes estimados  $\beta_j$ , cujas variâncias são derivadas da variância do erro experimental  $\sigma_e^2$ .

Seguindo esse mesmo conceito, Plante (2001) criou um procedimento capaz de gerar equações de variância para  $f(\mathbf{x})$  com base no comportamento heterocedástico dos resíduos associados ao modelo médio. A ideia central é que, na presença de heterocedasticidade, apenas parte do erro experimental  $\sigma_e^2$  corresponde a um efeito puramente aleatório, permanecendo uma parcela de variância que pode ser explicada pelos fatores de entrada e por seus efeitos não lineares (Köksalan e Plante, 2003). Ressalta-se que o erro experimental e outras fontes de variação do processo são substancialmente superiores à variabilidade associada ao sistema de medição, uma vez que um estudo repetibilidade e reprodutibilidade (R&R) foi previamente conduzido, confirmando a adequação do sistema de medição para a realização dos experimentos (Arruda *et al.*, 2019).

Neste trabalho, a modelagem da vida da ferramenta é conduzida por meio de três abordagens distintas: (a) **POE-WLS**, (b) **POE-GLM**, e (c) **REML-GLM**. O método POE-WLS emprega a partição da variância do erro originalmente proposta por Plante (Köksalan e Plante, 2003; Plante, 2001) como base para a definição dos pesos utilizados no ajuste por WLS. No método POE-GLM, a modelagem é realizada no contexto dos Modelos Lineares Generalizados, assumindo distribuição Gamma para a variável resposta

e parâmetro de dispersão igual a 2. Por sua vez, o método REML-GLM substitui a estimação da estrutura de variância baseada no princípio da POE por estimativas obtidas via máxima verossimilhança restrita (Myers, Montgomery e Anderson-Cook, 2016).

Para avaliar as abordagens propostas, os dados experimentais do estudo conduzido por Campos (2015) foram revisitados, aplicando-se os três algoritmos e suas respectivas sub-rotinas ao conjunto de dados obtido por meio de um CCD. Os testes consistiram na modelagem da vida da ferramenta de sete pastilhas *Sandvik Coromant* utilizadas no torneamento de aço endurecido AISI H13, sendo cinco cerâmicas (CNGA120408 S01525, CNGA120408 S01525WH, CNGA120408 T01020, CNGA120408 T01020WG e CNGN 120408 T01020) e duas de PCBN (CNGA 120408 S01030A e CNGA 120408 S01030 AWG).

Após a realização dos testes e verificações preliminares, a vida média da ferramenta e sua variância foram submetidas a um processo de otimização utilizando o método de Interseção Normal à Fronteira (*Normal Boundary Intersection - NBI*), conforme proposto por Das e Dennis (1998). A fronteira de Pareto obtida permitiu explorar o compromisso entre a maximização da vida da ferramenta e a minimização de sua variabilidade, resultando em um conjunto de soluções eficientes não dominadas.

Para a seleção do ponto ótimo dentre as soluções pertencentes à fronteira de Pareto, foi empregado o método TOPSIS (*Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution*), no contexto da tomada de decisão multicritério. As vinte e uma alternativas geradas para cada ferramenta foram inicialmente classificadas com base na proximidade relativa à solução ideal positiva e no afastamento da solução ideal negativa. A alternativa considerada mais adequada correspondeu àquela com maior coeficiente de proximidade ( $d_{max}$ ), refletindo o melhor equilíbrio simultâneo entre média e variância da vida da ferramenta. Entretanto, verificou-se que os valores de média e variância estimados pelo NBI apresentaram correlação alta e estatisticamente significativa. Diante dessa dependência estrutural entre os critérios, as pontuações ( $d_{max}$ ) foram calculadas com base na Distância de Mahalanobis (MD), conforme Johnson e Wichern (2014) e Rencher e William (2012), assegurando a consideração explícita da estrutura de covariância entre as respostas. Adicionalmente, observou-se que os pontos da fronteira de Pareto não são mutuamente exclusivos e que as diferenças entre soluções ótimas adjacentes não se mostraram estatisticamente significativas. Esse comportamento favorece a formação de agrupamentos ao longo da fronteira.

Por fim, foram conduzidos experimentos de confirmação no ponto ótimo identificado para a ferramenta CC670. Essa ferramenta foi selecionada por apresentar o melhor equilíbrio entre desempenho e custo dentre as alternativas avaliadas, considerando simultaneamente sua vida, variabilidade associada e viabilidade econômica. Os resultados obtidos nos experimentos de confirmação corroboraram a robustez e a consistência da metodologia proposta.

Após a análise detalhada do estudo de caso principal, com o objetivo de ampliar a avaliação da metodologia proposta e verificar sua aplicabilidade em diferentes contextos experimentais, são apresentados exemplos adicionais extraídos da literatura. A inclusão desses casos possibilita investigar a consistência e a capacidade de generalização da abordagem desenvolvida quando aplicada a diferentes cenários experimentais, abrangendo distintos materiais, condições de usinagem e estruturas de planejamento experimental. Dessa forma, busca-se não apenas reproduzir os procedimentos de modelagem, mas também analisar comparativamente o desempenho dos métodos propostos em relação à abordagem convencional de modelagem.

### **1.1. Justificativa**

A modelagem de processos baseada no método dos mínimos quadrados ordinários pressupõe que os resíduos apresentem variância constante e distribuição normal. Entretanto, em diversos contextos industriais e científicos, essas premissas nem sempre são atendidas, o que pode comprometer a validade dos modelos estatísticos e a confiabilidade das inferências obtidas.

Na literatura sobre DOE aplicada à modelagem de vida da ferramenta, encontram-se evidências consistentes de heterocedasticidade nos resíduos da vida média da ferramenta, em diferentes processos, ferramentas e condições de usinagem (Aggarwal *et al.*, 2008; Campos *et al.*, 2017; Choudhury e El-Baradie, 1998, 1999; Davim, 2008; Davoodi e Eskandari, 2015; Hernández *et al.*, 2025; Paiva, Ferreira e Balestrassi, 2007; Saedon, J. B. *et al.*, 2012; Severino *et al.*, 2012; Souza, L. G. P. *et al.*, 2025). Esses resultados sugerem possíveis relações entre esse comportamento e a natureza estatística da variável resposta, uma vez que a vida da ferramenta nem sempre apresenta comportamento compatível com a distribuição normal, podendo estar associada a distribuições assimétricas, como a distribuição de Poisson ou pertencentes à família Gamma.

Apesar da ampla utilização de técnicas de modelagem para estimar a vida média da ferramenta, observa-se que a maioria dos estudos se concentra predominantemente na modelagem da média da variável resposta, dedicando pouca atenção à análise e modelagem de sua variância. Em muitos casos, a variabilidade observada nos dados experimentais é tratada apenas como componente do erro experimental, sem que sejam investigadas possíveis relações estruturais entre a variância da resposta e os fatores de entrada do processo. Essa lacuna é particularmente relevante no contexto da vida da ferramenta, uma vez que essa variável apresenta natureza essencialmente estocástica, resultante da interação de diversos mecanismos físicos e tribológicos envolvidos no processo de desgaste.

Nesse sentido, considerar apenas a média da vida da ferramenta pode conduzir a interpretações incompletas sobre o comportamento do processo de usinagem. A variância associada à vida da ferramenta fornece informações importantes sobre a estabilidade e a previsibilidade do processo, permitindo avaliar o grau de dispersão dos resultados em torno do valor médio esperado. Processos que apresentam variâncias mais elevadas tendem a ser menos previsíveis e mais suscetíveis a falhas prematuras ou substituições inesperadas da ferramenta, o que pode impactar diretamente a produtividade, os custos de produção e a qualidade das peças usinadas.

Além disso, a modelagem explícita da variância possibilita incorporar aspectos relacionados à confiabilidade do processo produtivo nas análises estatísticas. Em termos práticos, condições operacionais que resultam em menor variabilidade da vida da ferramenta podem ser interpretadas como configurações mais robustas, uma vez que produzem resultados mais consistentes e menos sensíveis a pequenas variações nas condições de operação. Sob essa perspectiva, processos caracterizados por variâncias mais estáveis e próximas da homocedasticidade tendem a apresentar maior confiabilidade operacional.

Considerando que os métodos tradicionais frequentemente apresentam limitações quando aplicados a processos caracterizados por autocorrelação, heterocedasticidade ou estruturas de erro não normais, observa-se um crescente interesse na literatura por estratégias alternativas de modelagem capazes de lidar adequadamente com essas características (Ding *et al.*, 2017).

Essa limitação metodológica tem impulsionado, nos últimos anos, o surgimento de abordagens alternativas mais robustas, capazes de lidar com heterocedasticidade e distribuições de erros não normais. Kim e Li (2023) apresentam

uma análise abrangente dessas alternativas, destacando os métodos de M-estimação, que generalizam os mínimos quadrados ao utilizar funções de perda menos sensíveis a observações extremas, as S-estimações, que minimizam a escala dos resíduos e são altamente resistentes a *outliers*; e a regressão múltipla, que combina robustez e eficiência assintótica. Além disso, os autores ressaltam a aplicabilidade da regressão quantílica, particularmente eficaz em contextos de heterocedasticidade e distribuições assimétricas, bem como da técnica *Least Trimmed Squares*, que se baseia na minimização dos resíduos, ignorando os maiores desvios.

De forma semelhante, Gorji e Aminghafari (2020) propõem um modelo de regressão não paramétrica robusta baseado na estimativa de função de regressão combinando técnicas de suavização e funções de perda robustas, sendo útil essa abordagem em aplicações onde a variância dos erros é elevada ou irregular. Complementando essa perspectiva, Güney *et al.* (2021) apresentam um método de estimação robusta que combina técnicas de seleção de variáveis com estimação iterativa baseada em pesos adaptativos. A principal inovação do trabalho desses autores consiste na integração entre robustez frente à heterocedasticidade e capacidade de identificar variáveis relevantes mesmo em ambientes de alta dimensionalidade. Por meio de simulações e estudos empíricos, os autores demonstram que o método supera os tradicionais estimadores de mínimos quadrados em termos de precisão e estabilidade, sendo uma alternativa promissora para modelagens com variância não constante.

Li e Deng (2021) propõem um algoritmo para encontrar projetos experimentais ótimos em GLMs, usando um critério chamado *Elastic I-optimality*, que melhora a precisão das previsões ao combinar dois algoritmos clássicos: o algoritmo multiplicativo e Fedorov–Wynn. Perumal *et al.* (2024) usam um planejamento experimental baseado no método Taguchi, combinando Análise de Variância (ANOVA), GLM e Metodologia de Superfície de Resposta (*Response Surface Methodology*- RSM) para encontrar os melhores parâmetros de torneamento da liga A359 com o objetivo de maximizar a taxa de remoção de material e minimizar a rugosidade superficial. Venkatesh *et al.* (2024) investigam um nanocompósito de alumínio-magnésio reforçado com carvão de silício utilizando um planejamento L16 com ANOVA-GLM, e os resultados mostraram que a profundidade de corte foi o fator mais importante na determinação da taxa de remoção de material, temperatura e desgaste da ferramenta.

De maneira similar, Zubair *et al.* (2023) investigam a usinagem a seco do alumínio AA7075, comparando seis insertos de metal duro com diferentes revestimentos. Os

modelos estatísticos obtidos por GLM, regressão linear e *Stepwise Forward Regression* foram analisados, sendo esse último o selecionado por atender melhor aos critérios de eliminação e considerar apenas as variáveis relevantes para o processo. A otimização dos parâmetros operacionais resultou em melhorias significativas na rugosidade superficial e na vida da ferramenta, com até 42% de melhoria na rugosidade e um aumento superior a 300% na vida em relação aos experimentos iniciais. Hayat e Higgins (2014) discutem a análise de dados de contagem na pesquisa em enfermagem, destacando a inadequação de métodos tradicionais que tratam esses dados como contínuos e normalmente distribuídos. O artigo fornece uma visão geral da distribuição de *Poisson* abordando violações de pressupostos do modelo padrão e alternativas para corrigi-las, como a inclusão de um parâmetro de superdispersão ou o uso da regressão binomial negativa. Navarro *et al.* (2017) investigam o desgaste da ferramenta na usinagem de compósitos de plástico reforçado com fibra de basalto. A ANOVA foi aplicada para estudar o desgaste da ferramenta e a taxa de remoção de material, enquanto um GLM foi desenvolvido para identificar as variáveis de maior influência no desgaste da ferramenta. Os resultados mostraram que as condições de corte são os fatores mais influentes no desgaste da ferramenta, sendo a velocidade de corte a variável mais significativa e a profundidade de corte a de menor influência. Para o estudo da taxa de remoção, as variáveis mais relevantes são avanço e profundidade, sendo que o modelo desenvolvido apresentou  $R^2$ -ajustado superiores a 80%.

Souza *et al.* (2025) propõem uma metodologia baseada em simulação para estimar a confiabilidade de ferramentas de corte a partir de um único conjunto experimental, reduzindo custos e tempo de ensaios. A abordagem modela a vida esperada da ferramenta por RSM, estima a variância por regressão de *Poisson* e ajusta os parâmetros da distribuição de Weibull por otimização, incorporando a incerteza por simulações de Monte Carlo. A validação experimental, realizada no torneamento do aço endurecido AISI 52100, demonstrou elevada acurácia e robustez preditiva, evidenciando o potencial da integração entre modelagem estatística, simulação e confiabilidade para suporte à decisão.

Apesar dos avanços observados, nota-se que ainda existem lacunas quanto à integração sistemática entre a modelagem simultânea da média e da variância, a avaliação comparativa de diferentes estratégias de estimação sob heterocedasticidade e o suporte estruturado à tomada de decisão em problemas de vida da ferramenta. Nesse contexto, justifica-se o desenvolvimento de uma abordagem metodológica integrada que permita

representar adequadamente a variabilidade inerente ao processo, ampliar a robustez preditiva dos modelos e fornecer subsídios quantitativos consistentes para a definição de parâmetros de usinagem sob incerteza.

A relevância dessa proposta não se limita à contribuição metodológica, alcançando implicações diretas no desempenho industrial. Ao incorporar explicitamente a variabilidade na modelagem da vida da ferramenta, reduz-se a incerteza associada às estimativas de desgaste e falha, o que possibilita decisões mais assertivas quanto à seleção de parâmetros de corte e ao momento ótimo de substituição da ferramenta. Como consequência, observam-se impactos mensuráveis, tais como redução de custos com ferramental, diminuição de paradas não planejadas, aumento da disponibilidade operacional dos equipamentos e melhoria de indicadores globais de desempenho produtivo. Adicionalmente, a maior previsibilidade do processo contribui para a redução de refugo e retrabalho, promovendo uso mais eficiente de recursos materiais e energéticos, aspecto alinhado às demandas contemporâneas de competitividade e sustentabilidade na manufatura.

## **1.2. Objetivos da pesquisa**

### **1.2.1. Objetivo principal**

Propor uma abordagem metodológica para a modelagem simultânea da média e da variância da vida da ferramenta em processos de usinagem baseada em estratégias de POE e REML.

### **1.2.2. Objetivos secundários**

- a) Implementar estratégias de modelagem baseadas em POE e REML para a estimação simultânea da média e da variância da vida da ferramenta.
- b) Comparar o desempenho das abordagens propostas com a regressão por OLS, utilizando métricas de qualidade de ajuste e capacidade preditiva.
- c) Avaliar os modelos em diferentes condições experimentais, investigando sua robustez estatística e preditiva.
- d) Utilizar os modelos obtidos para as variáveis analisadas em um processo de otimização multiobjetivo (média-variância) por meio do método da Interseção Normal à Fronteira.
- e) Aplicar um critério de decisão baseado na distância de Mahalanobis e TOPSIS para seleção da solução ótima.

- f) Validar os resultados por meio de experimentos de confirmação.
- g) Aplicar os métodos de modelagem propostos a dados experimentais reportados na literatura, visando avaliar sua robustez e consistência em diferentes condições de usinagem e estruturas experimentais.

### **1.3. Delimitações da pesquisa**

Esta pesquisa apresenta as seguintes delimitações:

- A investigação concentra-se na modelagem estatística de dados experimentais de processos de usinagem, com foco exclusivo na variável resposta vida da ferramenta, não contemplando outras variáveis de desempenho do processo.
- A análise comparativa restringe-se à regressão por OLS e a três abordagens alternativas específicas baseadas em POE e REML, não abrangendo outras técnicas de modelagem disponíveis na literatura.
- A etapa de otimização e tomada de decisão utiliza o método da NBI para geração das soluções eficientes.
- Para a seleção da solução ótima na fronteira de Pareto, emprega-se uma métrica baseada na distância de Mahalanobis integrada ao método TOPSIS.
- A base experimental utilizada é específica, envolvendo parâmetros de corte, material e ferramentas previamente definidos, sem variação sistemática desses elementos além das condições estabelecidas no planejamento experimental.

### **1.4. Limitações da pesquisa**

As principais limitações da pesquisa são:

- A viabilidade e a generalização da abordagem proposta estão condicionadas aos processos, materiais, ferramentas e faixas operacionais analisados como objeto de estudo, não sendo possível assegurar, sem validações adicionais, sua aplicabilidade irrestrita a outros contextos industriais.
- Os resultados obtidos na etapa de otimização foram avaliados em ambiente experimental controlado, não tendo sido validados em ambiente industrial real, o que restringe a extrapolação direta dos ganhos operacionais estimados para sistemas produtivos em escala industrial.

## **1.5. Alinhamento aos Objetivos de Desenvolvimento Sustentável**

Esta pesquisa está alinhada aos Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS) da Organização das Nações Unidas, especialmente aos ODS 9, 12 e, de forma indireta, aos ODS 7 e 13. A proposta contribui para o ODS 9 ao desenvolver métodos avançados de modelagem estatística e otimização aplicados a processos de manufatura, promovendo inovação tecnológica, aumento da confiabilidade dos sistemas produtivos e suporte à tomada de decisão baseada em dados.

No contexto do ODS 12, a modelagem simultânea da média e da variância da vida da ferramenta possibilita a definição mais precisa de parâmetros de usinagem, reduzindo desperdícios, retrabalhos, consumo excessivo de ferramentas e variabilidade do processo, favorecendo padrões mais eficientes e responsáveis de produção. A melhoria da previsibilidade do desempenho das ferramentas também contribui para o uso racional de insumos e para a extensão da vida de componentes industriais.

Adicionalmente, ao promover maior eficiência operacional, o trabalho impacta indiretamente o ODS 7 e o ODS 13, ao contribuir para a redução do consumo energético específico e das emissões associadas à manufatura. Dessa forma, a pesquisa reforça a integração entre inovação científica, desempenho industrial e sustentabilidade, em consonância com as diretrizes globais de desenvolvimento sustentável.

## **1.6. Estrutura do trabalho**

Este trabalho está organizado em seis capítulos principais, além dos apêndices, de forma a conduzir o leitor desde a contextualização do problema até as considerações finais, assegurando clareza na apresentação dos fundamentos teóricos, metodológicos e dos resultados obtidos.

O **Capítulo 1** apresenta a introdução do estudo, na qual são contextualizados o tema de pesquisa, a motivação e a relevância do trabalho no contexto científico e tecnológico. Nesse capítulo também são estabelecidos o objetivo geral e os objetivos específicos que orientam o desenvolvimento da pesquisa, além de uma breve apresentação da estrutura do documento, descrevendo a organização dos capítulos que compõem a tese.

No **Capítulo 2**, é desenvolvido o referencial teórico que fundamenta a pesquisa. Inicialmente, é apresentada uma análise breve bibliométrica com o objetivo de mapear o estado da arte e sistematizar os principais direcionamentos da produção científica na área.

Em seguida, são discutidos conceitos relacionados à vida da ferramenta em processos de usinagem e às técnicas de modelagem de variáveis.

O **Capítulo 3** descreve a metodologia adotada no trabalho, além do detalhamento dos procedimentos empregados. Esse capítulo estabelece a base metodológica necessária para a aplicação consistente da abordagem proposta.

O **Capítulo 4** apresenta a metodologia proposta neste trabalho, detalhando os procedimentos iterativos empregados na modelagem da vida da ferramenta. Além disso, são descritos o método *Normal Boundary Intersection* e as técnicas de otimização multiobjetivo utilizadas para a modelagem simultânea da média e da variância da vida da ferramenta em processos de usinagem.

No **Capítulo 5**, a metodologia proposta é aplicada de forma detalhada a um estudo de caso específico, permitindo uma análise aprofundada do desempenho dos modelos, da etapa de otimização e dos resultados obtidos. Essa primeira aplicação tem caráter demonstrativo e visa evidenciar, de maneira sistemática, as etapas de implementação da metodologia desenvolvida. Ainda neste capítulo, a abordagem é também aplicada a outros estudos de caso reportados na literatura. Nessa etapa, a aplicação é conduzida de forma mais sucinta, com ênfase na apresentação e comparação dos resultados obtidos na modelagem dos dados. O objetivo é ampliar a avaliação da metodologia proposta, investigando sua robustez e sua capacidade de generalização quando aplicada a diferentes cenários experimentais.

O **Capítulo 6** apresenta as considerações finais do trabalho, nas quais são sintetizadas as principais contribuições científicas, discutidas as limitações do estudo e apontadas sugestões para pesquisas futuras.

Os **Apêndices**, organizados em quatro seções, são utilizados para apresentar de forma detalhada o equacionamento matemático e os desenvolvimentos analíticos que sustentam a metodologia proposta, complementando o conteúdo apresentado ao longo dos capítulos sem comprometer a fluidez do texto principal.

## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1. Análise bibliométrica

Com o objetivo de identificar, sistematizar e analisar a produção científica relacionada ao tema desta pesquisa, foi realizada uma revisão da literatura baseada em uma estratégia estruturada de busca bibliográfica. A base de dados escolhida foi a *Scopus*, selecionada como única fonte de busca bibliográfica por apresentar ampla cobertura multidisciplinar, com forte representatividade nas áreas de engenharia, manufatura e modelagem computacional, diretamente relacionadas ao escopo desta pesquisa. Outro fator determinante foi a disponibilidade de recursos avançados de filtragem diretamente na estratégia de busca, permitindo maior controle metodológico, reprodutibilidade e padronização dos resultados.

Após a definição da base de dados, foram selecionadas palavras-chave relacionadas à modelagem e à otimização, bem como termos associados ao processo de usinagem e à vida da ferramenta, as quais foram pesquisadas no título, no resumo ou nas palavras-chave dos documentos. Adicionalmente, foram aplicados filtros referentes ao período de publicação (2020–2025) e ao tipo de documento, considerando apenas artigos publicados em língua inglesa.

Os parâmetros utilizados para a busca estão detalhados no **Quadro 1**. A busca inicial, sem aplicação de filtro temporal, resultou em 1152 documentos, com registros a partir de 1970. Após a aplicação do recorte temporal correspondente ao período de 2020 a 2025, o número de documentos elegíveis foi reduzido para 616 artigos.

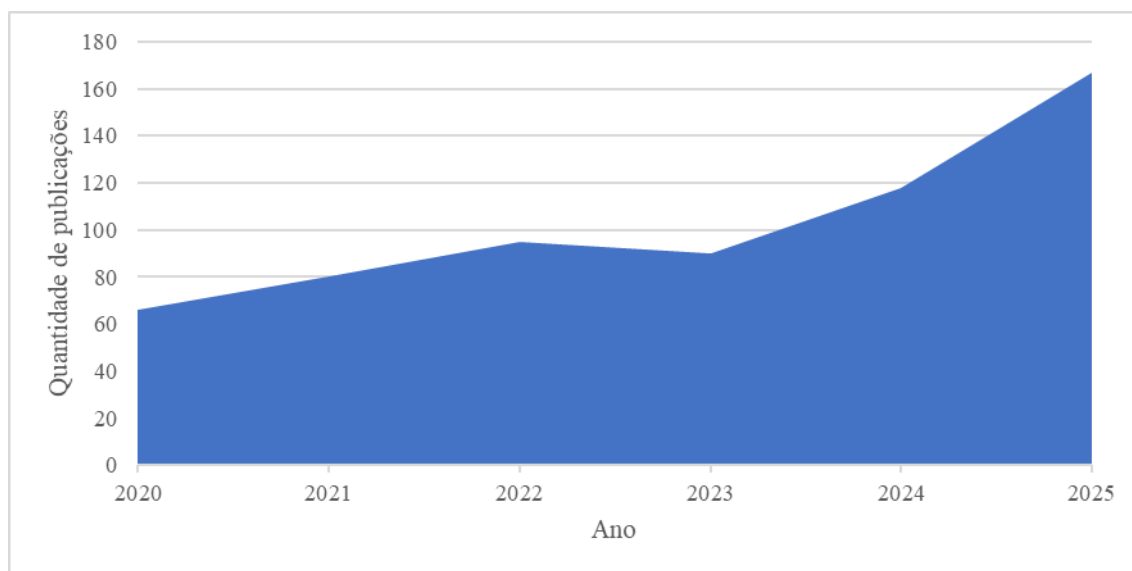
A **Figura 1** apresenta a evolução temporal das publicações. Os dados revelam uma tendência clara de crescimento da produção científica ao longo do período analisado. Em 2020, foram registrados 66 documentos, número que aumentou para 80 em 2021 e para 95 em 2022, indicando uma trajetória de expansão contínua. Após uma leve redução em 2023, com 90 publicações, observa-se uma retomada expressiva em 2024, alcançando 118 documentos, e um crescimento ainda mais acentuado em 2025, com 167 publicações. Esse comportamento sugere intensificação do interesse acadêmico no tema, possivelmente impulsionada pelo avanço das técnicas de modelagem preditiva, otimização multiobjetivo e integração de métodos de inteligência artificial. O crescimento recente pode também refletir a maturidade do campo e a ampliação de aplicações industriais orientadas à eficiência, sustentabilidade e tomada de decisão baseada em dados.

**Quadro 1: Parâmetros de busca utilizados na pesquisa**

<b>String de busca</b> ( <i>ARTICLE TITLE, ABSTRACT, OR KEYWORDS</i> )	<b>Grupo 1</b> (Termos relacionados à usinagem)	<i>(Machin*)</i>	
	<b>Grupo 2</b> (Termos relacionados à vida ou desgaste de ferramenta)	<i>("tool life" OR "tool wear")</i>	
	<b>Grupo 3</b> (Termos relacionados à modelagem)	<i>(model* OR modell*)</i>	
	<b>Grupo 4</b> (Termos relacionados à otimização)	<i>(optimization OR optimisation)</i>	
<b>Idioma</b>	Inglês		
<b>Tipo de publicação</b>	Artigos		
<b>Fase de publicação</b>	Final	<b>Anos de publicação</b>	2020 - 2025

Fonte: Autora (2026).

**Figura 1: Produção científica anual**



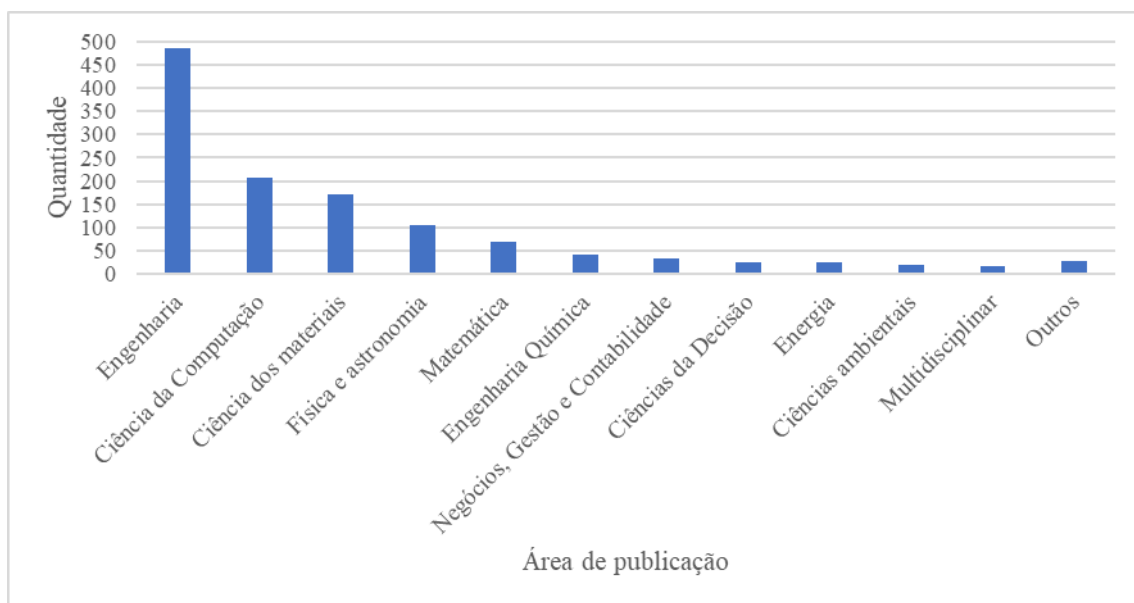
Fonte: Autora (2026).

A **Figura 2** organiza as publicações segundo a área de publicação, evidenciando o caráter interdisciplinar do tema, com forte concentração na área de Engenharia, que reúne 486 registros, correspondendo à maior parcela da produção científica. Esse resultado é esperado, uma vez que os estudos relacionados à vida da ferramenta, desgaste,

modelagem e otimização estão diretamente associados a processos de manufatura e engenharia. Em seguida, destacam-se Ciência da Computação (206) e Ciência dos Materiais (172), refletindo a crescente incorporação de técnicas de modelagem computacional, aprendizado de máquina e análise de dados, bem como o papel central das propriedades dos materiais no comportamento do desgaste e no desempenho de ferramentas de corte. As áreas de Física e Astronomia (104) e Matemática (68) indicam a contribuição de fundamentos físicos, modelagem matemática e métodos estatísticos na formulação e validação dos modelos.

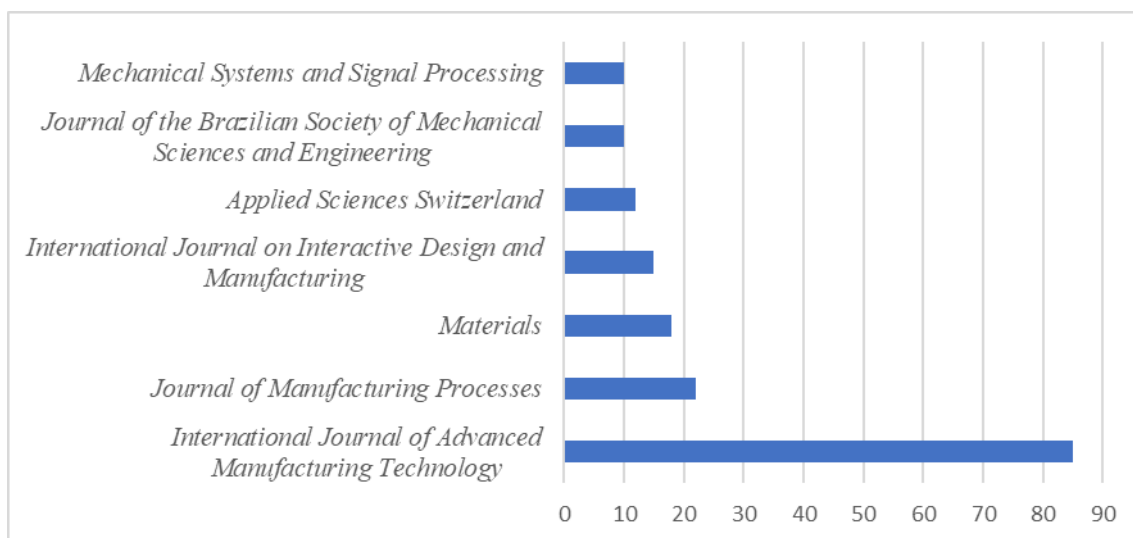
A distribuição das publicações por periódico (**Figura 3**) indica forte concentração em revistas especializadas em manufatura e engenharia aplicada. O *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* destaca-se como o principal periódico, com 85 publicações no período analisado e crescimento consistente ao longo dos anos, confirmando sua centralidade na disseminação de estudos relacionados à modelagem e otimização em processos de usinagem. Em seguida, o *Journal of Manufacturing Processes* (22 publicações) e o periódico *Materials* (18 publicações) apresentam contribuição relevante, reforçando a interface entre processos de manufatura e ciência dos materiais. Observa-se ainda a consolidação recente de periódicos como o *International Journal on Interactive Design and Manufacturing* e o *Applied Sciences Switzerland*, com aumento de publicações a partir de 2023, indicando ampliação do escopo temático e maior transversalidade das pesquisas.

**Figura 2: Produção por área de pesquisa**



Fonte: Autora (2026).

**Figura 3: Produção por revista**

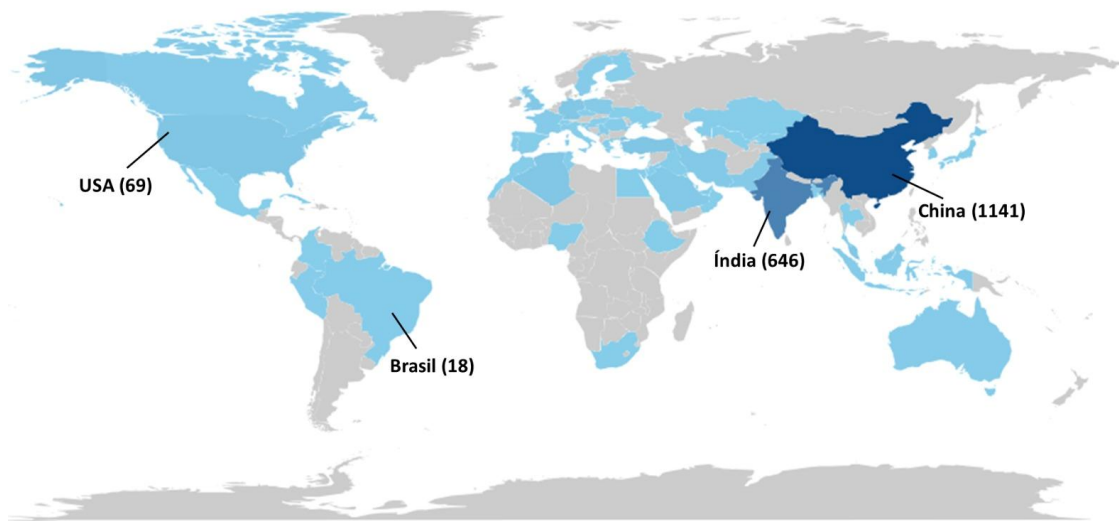


Fonte: Autora (2026).

A **Figura 4** apresenta a distribuição das publicações por região geográfica, evidenciando forte concentração da produção científica em países com elevada capacidade industrial e investimento contínuo em pesquisa e desenvolvimento. Observa-se a liderança da China, com 1141 publicações, seguida pelos Estados Unidos (690) e pela Índia (646), que, em conjunto, concentram parcela significativa dos estudos publicados no período analisado. Esse resultado sugere que a pesquisa na área está fortemente associada a contextos industriais intensivos em manufatura e inovação tecnológica.

Em contraste, o Brasil apresenta apenas 18 publicações no período considerado, indicando participação ainda limitada no cenário internacional. Esse resultado pode estar relacionado a restrições estruturais, menor volume de investimentos em Pesquisa e Desenvolvimento (P&D) e menor integração entre academia e setor produtivo. Assim, a baixa representatividade nacional reforça a relevância e a oportunidade de desenvolvimento de pesquisas no contexto brasileiro, especialmente considerando a importância estratégica da área para a competitividade industrial e a modernização dos processos produtivos.

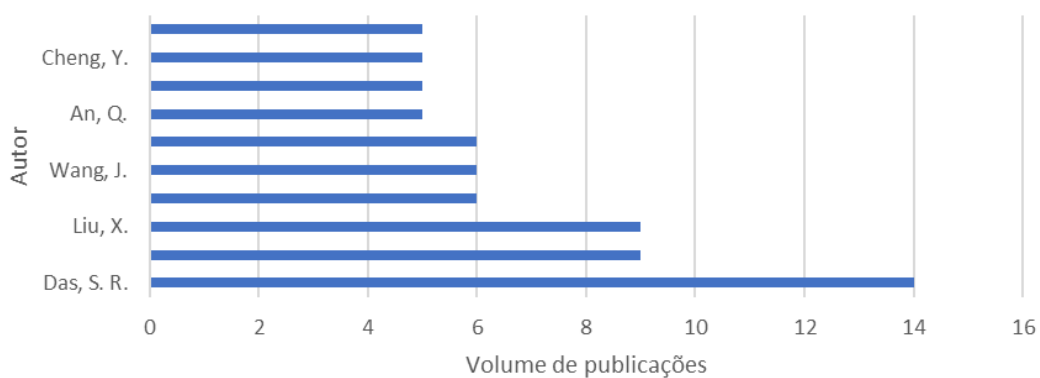
**Figura 4: Produção mundial**



Fonte: Autora (2026).

A **Figura 5** apresenta os dez autores que mais publicaram artigos relacionados à área de interesse. O autor Sudhansu Ranjan Das. lidera em número de publicações, com 14 artigos, seguido por Anshuman Das e Xianli Liu., ambos com 9 publicações. Outros autores variam entre 5 e 6 publicações cada. A concentração moderada indica um campo relativamente diversificado e com múltiplos centros de pesquisa.

**Figura 5: Documentos por autor**



Fonte: Autora (2026).

A **Figura 6** apresenta a nuvem de palavras construída a partir da *string* de busca utilizada, permitindo uma visualização sintética dos termos mais recorrentes nos artigos analisados. Esse tipo de representação evidencia a concentração temática da literatura e



## 2.2. Vida de ferramenta em processos de usinagem

A usinagem consolidou-se, nas últimas décadas, como o método predominante empregado na fabricação de uma ampla gama de componentes e produtos industriais (Babu e Rao, 2023; Bernini *et al.*, 2024). Seu propósito central consiste em conformar peças, geralmente metálicas, até que atinjam as dimensões e tolerâncias requeridas, mediante a remoção gradual de material (Derani e Ratnam, 2021). Esse método de manufatura, dinâmico e multifacetado, permite conferir à peça sua geometria final, características de superfície e precisão dimensional conforme as especificações de projeto (Goindi e Sarkar, 2017).

No contexto industrial, há um esforço contínuo para reduzir custos, elevar a qualidade dos produtos acabados e operar em condições otimizadas de corte e sustentabilidade ambiental, de modo que os resultados desejados sejam alcançados de maneira economicamente e tecnicamente viável (Kumar *et al.*, 2018).

Considerando esse contexto, as operações de usinagem abrangem processos como torneamento, fresamento, retificação, perfuração, dentre outros (Das, Monojit, Naikan e Panja, 2024; Pervaiz, Kannan e Kishawy, 2018). Tais operações são amplamente aplicadas em diferentes setores industriais, incluindo a produção de componentes automotivos, além de motores aeroespaciais, sistemas hidráulicos e da indústria de moldes e matrizes (Aman *et al.*, 2023; Chinchankar e Choudhury, 2015; Mallick *et al.*, 2023; Parida *et al.*, 2024).

Nesse processo, variáveis como parâmetros de corte (avanço, velocidade e profundidade), condições de refrigeração e lubrificação, propriedades dos materiais envolvidos e estabilidade da máquina-ferramenta atuam de forma interdependente na determinação do desgaste da ferramenta e na definição da rugosidade resultante (Derani e Ratnam, 2021; Vavruska *et al.*, 2023). A combinação adequada desses fatores conduz à redução do desgaste, ao prolongamento da vida e a acabamentos superficiais superiores (Wickramasinghe *et al.*, 2020).

Desse modo, a definição dos parâmetros ótimos de corte constitui um esforço contínuo, direcionado à redução do tempo de produção e da rugosidade superficial, ao mesmo tempo em que se busca prolongar a vida da ferramenta. A modelagem e a otimização desses parâmetros são determinantes para o êxito das ferramentas de corte na usinagem. A busca por maior produtividade, qualidade e vida da ferramenta constitui uma das principais direções de pesquisa e desenvolvimento no campo da usinagem de

geometrias complexas (Hameed *et al.*, 2023; Vavruska *et al.*, 2023) e deve considerar, além dos aspectos técnico-operacionais, as análises econômicas, uma vez que a seleção adequada de ferramentas deve considerar não apenas o desempenho, mas também sua viabilidade e conveniência de uso no ambiente industrial (Kumar *et al.*, 2018).

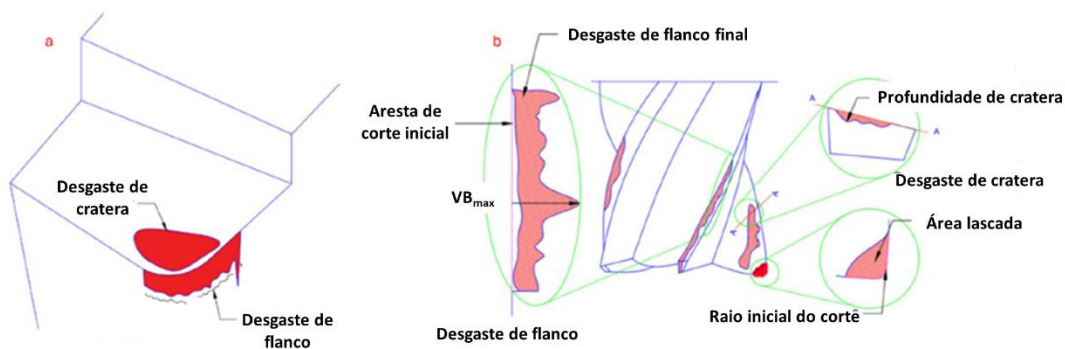
Sob a perspectiva econômica, o custo de usinagem constitui um dos fatores determinantes no planejamento de processos de corte de metais, uma vez que influencia diretamente a competitividade dos produtos manufaturados. Nesse contexto, a estimativa precisa do custo total do processo torna-se fundamental para a definição de estratégias operacionais eficientes, visto que a manufatura busca sistematicamente a redução do custo final do produto por meio da otimização de insumos, parâmetros de corte e recursos produtivos. De acordo com (Kumar *et al.*, 2018), o custo total de usinagem é convencionalmente segmentado em três componentes: custo efetivo da operação, custo associado às trocas de ferramenta (tempo ocioso) e custo das ferramentas. A má gestão desses elementos pode resultar em subutilização, redução da vida da ferramenta, aumento do tempo de produção, desperdícios operacionais e queda de produtividade (Sun *et al.*, 2020). Portanto, a previsão da vida da ferramenta assume um papel estratégico ao influenciar o tempo total de fabricação, o consumo de matéria-prima e os custos operacionais envolvidos (Bagga *et al.*, 2022).

Segundo Das, Naikan e Panja (2025), a vida da ferramenta pode ser avaliada a partir de diferentes critérios, a depender do objetivo da análise e do contexto produtivo. Uma das abordagens consiste em determinar o número de peças que podem ser usinadas por uma única ferramenta até que sua substituição se torne necessária. Alternativamente, a vida da ferramenta pode ser expressa pela quantidade total de material removido durante o processo antes que o desgaste crítico seja atingido. Há ainda a possibilidade de mensurar a vida em termos do tempo efetivo de corte, considerando o intervalo até a ocorrência de falha da ferramenta ou até que o desgaste atinja um limite previamente estabelecido. Como a qualidade da superfície se degrada rapidamente com a progressão do desgaste, sua avaliação costuma ser realizada em condições ideais de corte, monitorando-se sucessivos intervalos de usinagem até a falha (Souza, L. *et al.*, 2025). Esse desgaste ferramental pode decorrer de múltiplos fatores, como elevadas taxas de avanço, altas velocidades de corte, temperaturas excessivas, vibrações e outras condições operacionais adversas (Hameed *et al.*, 2023). Em particular, o aumento da temperatura na interface ferramenta-peça intensifica tensões térmicas, podendo provocar amolecimento do

substrato, deformação plástica da aresta de corte e consequente falha prematura da ferramenta (Bagga *et al.*, 2022).

A **Figura 7** apresenta esquematicamente os principais mecanismos de desgaste em ferramentas de corte, destacando o desgaste de cratera na face de saída e o desgaste de flanco na face de folga. Esses tipos de desgaste são característicos de ferramentas de aresta única utilizadas em operações de usinagem, como no torneamento, e constituem parâmetros amplamente adotados para a avaliação do estado da ferramenta e para a definição de critérios de fim de vida, como o desgaste máximo de flanco.

**Figura 7: Diferentes tipos de desgaste**



Fonte: Adaptado de Khadka *et al.* (2025).

No caso das ferramentas de ponta única, observam-se diferentes mecanismos de desgaste, com destaque para o desgaste de flanco, que se desenvolve na face de folga em decorrência do contato contínuo entre a ferramenta e a superfície usinada. A figura também evidencia o desgaste de cratera, localizado na face de saída, resultante da ação combinada de elevadas temperaturas, mecanismos de difusão e abrasão associados ao escoamento do cavaco.

Para ferramentas rotativas, como as fresas de topo, observa-se a formação da faixa de desgaste de flanco ao longo do comprimento da aresta de corte, bem como o valor máximo desse desgaste, usualmente quantificado pelo parâmetro  $VB_{max}$ . A ocorrência de desgaste de cratera e sua profundidade associada indicam a severidade das condições térmicas impostas ao processo. Além disso, o lascamento da aresta de corte é caracterizado como um modo de falha potencialmente crítico, pois pode comprometer abruptamente a capacidade de corte da ferramenta.

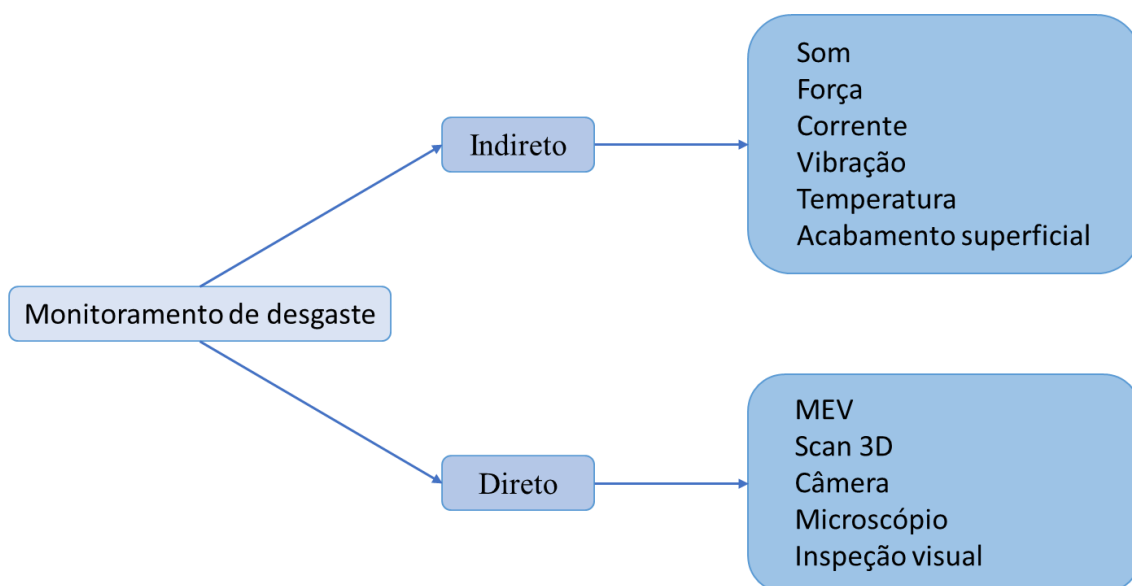
De forma normativa, a definição do fim de vida da ferramenta com base no desgaste de flanco é estabelecida pela NBR ISO 3685:1995, que prescreve procedimentos

e critérios para ensaios de vida de ferramenta em operações de torneamento com ferramentas de aço rápido, metal duro e cerâmica (ABNT, 1995). Conforme explicitado nessa norma, o desgaste médio de flanco deve ser limitado a  $VB = 0,30$  mm, valor adotado como critério padrão para a interrupção do ensaio de vida de ferramenta. Esse limite é definido pela norma e independe do estudo específico, sendo amplamente utilizado na literatura técnica e científica como referência (Campos *et al.*, 2014; Cui *et al.*, 2023; Das, M., Naikan e Panja, 2024; Gaudêncio, Almeida, Sabioni, *et al.*, 2019; Saloniitis e Kolios, 2020; Zaretalab, Sharifi e Taghipour, 2020).

O desgaste da ferramenta é amplamente reconhecido como um fenômeno de natureza estocástica e de difícil previsão, em função das variações inerentes ao desempenho entre diferentes ferramentas e das flutuações associadas às condições do processo (Huang *et al.*, 2021). Apesar dessa complexidade, o controle do desgaste constitui um aspecto estratégico da usinagem, uma vez que impacta diretamente a estabilidade do processo, a qualidade superficial e a conformidade dimensional do produto final (Kumar *et al.*, 2018). Nesse contexto, tornam-se fundamentais o desenvolvimento e a aplicação de estratégias capazes de acompanhar a evolução do desgaste ao longo da usinagem.

A **Figura 8** ilustra uma classificação conceitual das principais abordagens empregadas no monitoramento do desgaste e da vida da ferramenta, as quais podem ser agrupadas, de modo geral, em métodos de monitoramento direto e indireto.

**Figura 8: Tipos de monitoramento de desgaste**



Fonte: Adaptado de (Khadka *et al.*, 2025).

O monitoramento direto baseia-se na observação física do desgaste da ferramenta, permitindo a mensuração explícita de parâmetros geométricos como desgaste de flanco, desgaste de cratera e alterações no raio de ponta. Entre as técnicas mais empregadas destacam-se a inspeção visual assistida por câmeras, a microscopia óptica, a microscopia eletrônica de varredura (MEV) e métodos de digitalização tridimensional, que oferecem elevada precisão na caracterização dos mecanismos de desgaste e são amplamente utilizados em validações experimentais, estudos laboratoriais e análises pós-processo (Khadka *et al.*, 2025). Entretanto, tais abordagens são predominantemente aplicadas de forma *offline*, exigindo a interrupção da usinagem e a remoção da ferramenta para medição direta, o que restringe sua viabilidade em ambientes industriais que demandam monitoramento contínuo e em tempo real (Lara De Leon *et al.*, 2024; Mohamed *et al.*, 2022).

Em contraste, o monitoramento indireto fundamenta-se na análise de sinais de processo que apresentam correlação com o estado de desgaste da ferramenta. Variáveis como forças de corte, vibrações, emissão acústica, sinais sonoros, rugosidade superficial da peça, temperatura na zona de corte e corrente elétrica do motor são comumente empregadas como indicadores indiretos da condição da ferramenta (Khadka *et al.*, 2025). A principal vantagem dessa abordagem é a possibilidade de aquisição contínua de dados durante a operação, sem interferir no processo produtivo, o que a torna particularmente atrativa para aplicações industriais e sistemas de manufatura inteligentes. Contudo, a interpretação desses sinais exige o desenvolvimento de modelos capazes de relacionar, de forma confiável, as variações observadas aos níveis reais de desgaste, o que torna o monitoramento indireto fortemente dependente de técnicas de modelagem estatística, aprendizado de máquina e processamento de sinais.

Após a discussão dos principais conceitos relacionados à vida da ferramenta, bem como dos mecanismos de desgaste e dos fatores que influenciam seu comportamento ao longo do processo de usinagem, torna-se oportuno apresentar como esses aspectos têm sido tratados em estudos recentes.

A literatura reúne uma diversidade de trabalhos que investigam diferentes processos de usinagem, materiais e parâmetros de corte, evidenciando a relevância contínua do tema sob distintas abordagens experimentais e analíticas. Com esse propósito, apresentam-se no **Quadro 2** alguns trabalhos selecionados da literatura, nos quais são sistematizadas informações relativas ao tipo de processo de usinagem, aos

materiais investigados e às variáveis de entrada e de saída consideradas nos estudos. Na sequência, o **Quadro 3** apresenta os principais resultados reportados em cada estudo. apresenta os principais resultados reportados em cada trabalho analisado.

A análise dessas publicações permite identificar algumas tendências relevantes na literatura relacionada à modelagem da vida da ferramenta em processos de usinagem. Observa-se uma predominância de estudos voltados ao processo de torneamento, enquanto um número menor de trabalhos aborda operações de fresamento. Essa predominância pode ser atribuída ao fato de o torneamento constituir um dos processos de usinagem mais amplamente utilizados na indústria, além de apresentar condições de corte mais estáveis e maior facilidade de instrumentação experimental quando comparado a processos intermitentes, como o fresamento.

**Quadro 2: Publicações relacionadas à vida de ferramenta em processos de usinagem**

<b>Autoria</b>	<b>Material</b>	<b>Processo</b>	<b>Variáveis de entrada</b>	<b>Variáveis de resposta</b>
Paiva, Ferreira e Balestrassi (2007)	AISI 52100	Torneamento	Velocidade de corte, taxa de avanço e profundidade de corte	Vida da ferramenta, custo por peça, tempo de corte, tempo total de torneamento, rugosidade superficial e taxa de remoção
Aggarwal <i>et al.</i> (2008)	AISI P-20	Torneamento	Velocidade de corte, taxa de avanço, profundidade de corte, e raio de ponta	Vida da ferramenta, rugosidade média, força de corte e consumo de energia
Khorasani <i>et al.</i> , (2011)	Al 7075	Fresamento	Velocidade de corte, taxa de avanço e profundidade de corte	Vida da ferramenta
Severino <i>et al.</i> (2012)	Ferro fundido martensítico	Torneamento	Taxa de avanço, rotação e geometria	Vida da ferramenta, produtividade e custo
Saedon <i>et al.</i> (2012)	AISI D2	Fresamento	velocidade de corte, profundidade de corte e avanço por dente	Vida da ferramenta e taxa de remoção
Khorasani e Kootsookos, (2013)	St52	Fresamento	Fluxo de fluido de corte, velocidade do fuso / velocidade de corte, taxa de avanço e profundidade de corte	Vida da ferramenta
Davoodi e Eskandari (2015)	Superliga N-155 à base de ferro-níquel	Torneamento	Velocidade de corte e taxa de avanço	Vida da ferramenta e volume de material removido
Masood, Jahanzaib e Haider (2016)	Ti-6Al-4V	Fresamento	Velocidade de corte, taxa de avanço e profundidade de corte	Vida da ferramenta, taxa de desgaste da ferramenta, custo de usinagem e rugosidade média
Khairusshima e Sharifah (2017)	Plástico reforçado com fibra de carbono	Fresamento	Velocidade de corte, taxa de avanço e profundidade de corte	Vida da ferramenta e rugosidade média
Laghari <i>et al.</i> (2018)	Al/SiCp	Torneamento	Velocidade de corte, taxa de avanço e profundidade de corte	Vida da ferramenta e rugosidade média

Fonte: Autora (2026).

(Continua)

**Quadro 2: Publicações relacionadas à vida de ferramenta em processos de usinagem (continuação)**

<b>Autoria</b>	<b>Material</b>	<b>Processo</b>	<b>Variáveis de entrada</b>	<b>Variáveis de resposta</b>
Rohith e Manikanta (2018)	Liga de alumínio 7075	Fresamento	Velocidade de corte, taxa de avanço e profundidade de corte	Vida da ferramenta, taxa de remoção e rugosidade média
Kumar <i>et al.</i> (2018)	AISI D2	Torneamento	Velocidade de corte, taxa de avanço e profundidade de corte	Vida da ferramenta, temperatura, desgaste da ferramenta e rugosidade média
Halim <i>et al.</i> (2019)	Inconel 718	Fresamento	velocidade de corte, avanço por dente, profundidade axial e profundidade radial	Vida da ferramenta
Gaudêncio <i>et al.</i> (2019)	AISI H13	Torneamento	Velocidade de corte, taxa de avanço e profundidade de corte	Vida da ferramenta, tempo total de torneamento, custo, temperatura, energia específica de corte, nível de pressão sonora e rugosidade
Oliveira <i>et al.</i> (2019)	AISI H13	Torneamento	Velocidade de corte, taxa de avanço e profundidade de corte	Vida da ferramenta e rugosidade média
Bhushan (2020)	AA7075/SiC	Torneamento	Velocidade de corte, taxa de avanço, profundidade de corte e raio de ponta da ferramenta	Vida da ferramenta, desgaste da ferramenta e rugosidade média
Amorim <i>et al.</i> (2022)	AISI 52100 e AISI H13	Torneamento	Velocidade de corte, taxa de avanço e profundidade de corte	Vida da ferramenta e custo
Hegde <i>et al.</i> (2022)	Ferrita + bainita	Torneamento	Velocidade de corte, taxa de avanço, profundidade de corte e temperatura	Vida da ferramenta e rugosidade média
Rathod <i>et al.</i> , (2022)	AISI 304	Torneamento	Velocidade de corte, taxa de avanço e profundidade de corte	Vida da ferramenta, tempo de ciclo e rugosidade média
Roslim <i>et al.</i> (2022)	Nimonic C-263	Torneamento	Velocidade de corte, taxa de avanço e profundidade de corte	Vida da ferramenta
Sivalingam <i>et al.</i> (2022)	Inconel 718	Torneamento	Velocidade de corte, taxa de avanço e profundidade de corte	Vida da ferramenta, custo, rugosidade média e consumo de energia

Fonte: Autora (2026).

(Continua)

**Quadro 2: Publicações relacionadas à vida de ferramenta em processos de usinagem (continuação)**

<b>Autoria</b>	<b>Material</b>	<b>Processo</b>	<b>Variáveis de entrada</b>	<b>Variáveis de resposta</b>
Soori e Arezoo (2023)	AISI 1038	Fresamento	Velocidade de corte, taxa de avanço e profundidade de corte	Vida da ferramenta e temperatura
Valic <i>et al.</i> (2023)	X20Cr13	Torneamento	Velocidade de corte, taxa de avanço e profundidade de corte	Vida da ferramenta e rugosidade média
Surya (2024)	AISI 316	Torneamento	Velocidade de corte, taxa de avanço e profundidade de corte	Vida da ferramenta, força de corte, rugosidade e consumo de energia
Souza <i>et al.</i> (2024)	AISI H13	Torneamento	Velocidade de corte, taxa de avanço e profundidade de corte	Vida da ferramenta, nível de pressão sonora, taxa de remoção de cavacos, força de usinagem e custo de usinagem
Phokobye <i>et al.</i> (2024)	Ti6Al4V	Fresamento	Velocidade de corte, taxa de avanço e avanço por dente	Vida da ferramenta
Palaniappan e Subramaniam (2024)	E2-BS970	Torneamento	Velocidade de rotação, profundidade de corte, taxa de avanço e a condição de lubrificação	Vida da ferramenta, taxa de remoção e temperatura
Hernández <i>et al.</i> (2025)	AISI D2	Fresamento	Velocidade de corte e avanço por dente	Vida da ferramenta e rugosidade média
Adil, Krishnaiah e Rao (2025)	MDN 350	Torneamento	Velocidade de corte, taxa de avanço, profundidade de corte, geometria e ângulo de saída	Vida da ferramenta, custo, desgaste da ferramenta e rugosidade média
Souza <i>et al.</i> (2025)	AISI 52100	Torneamento	Velocidade de corte e taxa de avanço	Vida da ferramenta, tempo de ciclo, tempo total de usinagem, custo de usinagem e rugosidade
Kramar e Cica (2025)	Inconel 718	Torneamento	Velocidade de corte, taxa de avanço, diâmetro do bocal, distância de impacto do jato e pressão do jato	Vida da Ferramenta
Jouini <i>et al.</i> (2025)	AISI 4340	Torneamento	Velocidade de corte, taxa de avanço e profundidade de corte	Vida da ferramenta, força de corte e rugosidade média

Fonte: Autora (2026).

**Quadro 3: Principais resultados dos artigos pesquisados**

Paiva, Ferreira e Balestrassi (2007)	Aplicaram uma abordagem multivariada híbrida (aliando Metodologia de Superfície de Resposta e Componentes Principais) para a otimização do torneamento do aço endurecido AISI 52100, avaliando simultaneamente o tempo de usinagem, vida útil da ferramenta e rugosidade da superfície.
Aggarwal <i>et al.</i> (2008)	Otimizaram múltiplas respostas na usinagem utilizando a função de perda de qualidade do método de Taguchi para processos CNC, abordando também os efeitos do uso de fluidos de corte e resfriamento criogênico.
Khorasani <i>et al.</i> (2011)	Abordaram controle da força de corte e o monitoramento do desgaste da ferramenta em processos de fresamento de topo ( <i>end milling</i> ), apontando o uso de índices baseados na força de fresamento para avaliar a degradação da ferramenta
Severino <i>et al.</i> (2012)	Desenvolveram uma nova geometria de ferramenta de metal duro (quadrada especial com corte escalonado) para otimizar o torneamento vertical de anéis de pistão de ferro fundido cinzento martensítico. Utilizando o planejamento de experimentos acoplado ao algoritmo de otimização Gradiente Reduzido Generalizado (GRG), definiram os parâmetros ótimos de avanço em 0,37 mm/v e rotação em 264 rpm. Com essa solução, alcançaram um aumento significativo de 81,35% na vida útil da ferramenta, um ganho de 23,91% na taxa de produção e uma redução de 35,50% no custo de usinagem por peça.
Saedon <i>et al.</i> (2012)	Avaliaram o microfresamento do aço AISI D2 com pastilhas revestidas de TiAlN. Concluíram por meio de análises de ANOVA que a velocidade de corte é o principal fator de influência sobre a vida útil da ferramenta de corte.
Khorasani e Kootsookos (2013)	Focou na supervisão inteligente do processo de usinagem, utilizando algoritmos genéticos e metodologias preditivas para estimar e monitorar o desgaste e a vida útil da ferramenta de corte.
Davoodi e Eskandari (2015)	Modelaram o processo de torneamento da superliga N-155 (base ferro-níquel) e verificaram alta aderência na predição de desgaste da ferramenta, constatando a adesão como o mecanismo dominante de falha
Masood, Jahanzaib e Haider (2016)	Demonstraram que o uso de resfriamento criogênico no fresamento da liga de Titânio Ti-6Al-4V protegeu o revestimento e garantiu um prolongamento na vida útil da ferramenta, destacando-se perante o corte a seco convencional.
Khairusshima e Sharifah (2017)	Investigaram os impactos do fresamento a seco e sob ar refrigerado no desgaste de ferramentas de metal duro durante a usinagem de compósitos de polímero reforçado com fibra de carbono.
Laghari <i>et al.</i> (2018)	Estudaram o torneamento de compósitos de matriz metálica de Al/SiC. Por meio da RSM, determinaram que as falhas ocorreram via desgaste abrasivo e adesivo, e que a taxa de avanço e velocidade de corte têm forte influência no decaimento da ferramenta.
Rohith e Manikanta (2018)	Investigaram a otimização de parâmetros focando principalmente no controle matemático adaptativo para prever a rugosidade superficial em processos de usinagem CNC.

Fonte: Autora (2026).

(Continua)

**Quadro 3: Principais resultados dos artigos pesquisados**

Kumar <i>et al.</i> (2018)	Conduziram um estudo comparativo de usinabilidade no torneamento duro utilizando pastilhas de metal duro com e sem revestimento. O trabalho focou na modelagem matemática, avaliação de aspectos econômicos e otimização multivariada, aplicando a análise de Relacionamento Grey (GRG) para aprimorar os resultados e a vida útil da ferramenta
Halim <i>et al.</i> (2019)	Conduziram análises com a Metodologia de Superfície de Resposta para a otimização do tempo de vida útil da ferramenta no processo de fresamento criogênico (com CO <sub>2</sub> ) da superliga Inconel 718.
Gaudêncio <i>et al.</i> (2019)	Desenvolveram um modelo combinando a técnica de Erro Quadrático Médio Multivariado <i>Fuzzy</i> em fronteiras de Pareto equiespaçadas para otimizar variáveis conflitantes (como custo e qualidade) em processos de manufatura e torneamento.
Oliveira <i>et al.</i> (2019)	Propuseram uma nova estratégia multicritério baseada nos índices de capacidade do modelo visando aumentar o nível de predição em conjuntos de soluções ótimas de Pareto, validando a metodologia no torneamento de aços duros.
Bhushan (2020)	Identificou que a usinagem de compósitos AA7075 reforçados com partículas de SiC requer velocidades de corte mais baixas a fim de reduzir o rápido desgaste da ferramenta provocado pela abrasão do silício.
Amorim <i>et al.</i> (2022)	Propuseram um algoritmo inovador de otimização multiobjetivo ( <i>Fuzzy Decision Maker</i> e análise multivariada) desenhado para o torneamento de aço AISI 52100, permitindo um equilíbrio eficiente entre os custos totais do processo e a preservação da ferramenta.
Hegde <i>et al.</i> (2022)	Realizaram estudos extensivos sobre usinabilidade e desgaste de ferramenta voltados especificamente à otimização da vida da ferramenta e da rugosidade de superfície na usinagem do aço de fase dupla (ferrita-bainita) AISI 1040.
Rathod <i>et al.</i> , 2022)	Integraram o método Taguchi com análise de variância (ANOVA) para a otimização de torneamento em CNC, buscando otimizar o tempo de produção atrelado ao desgaste da pastilha e rugosidade gerada.
Roslim <i>et al.</i> (2022)	Analizaram o desempenho prático de pastilhas no torneamento da liga aeroespacial Nimonic C-263, descobrindo que o calor térmico e a adesão severa da peça eram fatores críticos para a diminuição da vida da ferramenta.
Sivalingam <i>et al.</i> (2022)	Aplicaram métodos de Tomada de Decisão Multicritério associados ao conceito de "Desirability" para melhorar as condições de torneamento do Inconel 718 assistido por sistemas de fluidos de corte pulverizados.

Fonte: Autora (2026).

(Continua)

**Quadro 3: Principais resultados dos artigos pesquisados**

Soori e Arezoo (2023)	Investigaram o efeito dos parâmetros de corte na temperatura gerada e na vida útil da ferramenta durante operações de fresamento do aço carbono AISI 1038. O estudo focou na aplicação de métodos preditivos para analisar essas variáveis, com o objetivo de otimizar e aumentar a produtividade nos processos de fabricação de peças utilizando máquinas-ferramenta CNC
Valic <i>et al.</i> (2023)	Validaram de forma estatística os desempenhos da usinagem sustentável em aço inoxidável martensítico, unindo sistemas MQL a resfriamento de vórtice. Constataram forte correlação do desgaste ao aumento das velocidades de corte e avanços.
Surya (2024)	Estudou modelos de superfície de resposta (RSM) provando que reduções balanceadas das taxas de avanço e velocidade favorecem tanto o acabamento quanto a integridade de tempo de máquina e vida da pastilha de corte.
Souza <i>et al.</i> (2024)	Previram o tempo da vida útil da ferramenta bem como a variação da qualidade utilizando modelagem com técnicas de <i>Machine Learning</i> vinculadas aos níveis de pressão e emissão sonora emitidas em processos a seco.
Phokobye <i>et al.</i> (2024)	Realizou uma avaliação de desempenho ao fresar ligas de Titânio Ti-6Al-4V usando diferentes ferramentas. Foi notada a superioridade econômica do carboneto (metal duro) se comparado com ferramentas de cerâmica SiAlON e CBN.
Palaniappan e Subramaniam (2024)	Avaliaram a otimização dos parâmetros no torneamento do aço doce E2-BS970 com ferramenta de metal duro tratada criogenicamente, sob condição de lubrificação NFMQL (nanofluido de SiC+MoS <sub>2</sub> ). Utilizaram o planejamento de Box-Behnken associado a Redes Neurais Profundas (DBN) e ao algoritmo de otimização <i>Coot</i> . O modelo DBN obteve precisão altíssima ( $R^2 > 0,995$ ) para prever a taxa de remoção de material (MRR), a temperatura de corte e a vida útil da ferramenta. Sob os parâmetros ótimos estipulados, a vida da ferramenta alcançou 1543,12 s com desvio mínimo na validação experimental.
Hernández <i>et al.</i> (2025)	Desenvolveram a otimização multiobjetivo de dados no processo de fresamento de aços AISI D2 empregando conjuntamente o mapeamento em RSM de segunda ordem à <i>Desirability Function</i> .
Adil, Krishnaiah e Rao (2025)	Desenvolveram um modelo matemático preditivo de alta confiabilidade baseado em Redes Neurais Artificiais (ANN) para estimar a rugosidade da superfície no torneamento do aço MDN 350. Empregou algoritmos genéticos para determinar o conjunto ótimo de parâmetros geométricos da ferramenta, visando aprimorar a qualidade superficial, reduzir o desperdício de material e aumentar a eficiência do processo.
Souza <i>et al.</i> (2025)	Estruturaram um moderno quadro de otimização em processos de torneamento duro de alta velocidade (aço AISI 52100) focado em diretrizes de sustentabilidade de usinagem e limitação dos tempos de substituição (desgastes de flanco) da ferramenta.
Kramar e Cica (2025)	Investigaram exaustivamente o torneamento do Inconel 718 sob jatos de refrigeração em altíssima pressão. Foi atestado que a velocidade de corte é o influenciador quase absoluto (74% da variância) frente ao fim da vida da ferramenta.
Jouini <i>et al.</i> (2025)	Constataram que a associação da refrigeração híbrida criogênica com o MQL propiciou significativas reduções nos desgastes termomecânicos na usinagem rápida do aço AISI 4340, ampliando também a melhoria de acabamento superficial.

Fonte: Autora (2026).

Em relação aos materiais investigados, verifica-se uma grande diversidade de ligas metálicas, com destaque para aços endurecidos e ligas de elevada resistência, tais como AISI H13, AISI 52100, Inconel 718 e AISI D2. A recorrência desses materiais na literatura está associada à sua ampla aplicação em setores industriais de alta exigência, como as indústrias automotiva, aeroespacial e de moldes e matrizes. Esses materiais apresentam elevada dureza e resistência ao desgaste, o que torna a análise da vida da ferramenta particularmente relevante para a otimização das condições de usinagem.

Outro aspecto importante refere-se às variáveis de entrada consideradas nos experimentos. Nota-se que a velocidade de corte, a taxa de avanço e a profundidade de corte constituem os fatores mais frequentemente investigados nos estudos revisados. Esses parâmetros são tradicionalmente reconhecidos como os principais fatores capazes de influenciar o desempenho do processo de usinagem, afetando diretamente fenômenos como geração de calor, forças de corte e mecanismos de desgaste da ferramenta. Em alguns estudos, outras variáveis adicionais também são consideradas, como geometria da ferramenta, temperatura, condição de lubrificação e parâmetros associados ao sistema de refrigeração.

No que diz respeito às variáveis de resposta, a vida da ferramenta destaca-se como o indicador de desempenho mais frequentemente analisado. Em diversos trabalhos, essa variável é estudada isoladamente ou em conjunto com outras métricas de desempenho, como rugosidade superficial, forças de corte, consumo de energia, temperatura e custo de usinagem. Essa abordagem reflete uma tendência crescente de avaliar o desempenho do processo de usinagem de forma integrada, considerando simultaneamente aspectos de produtividade, qualidade superficial e eficiência econômica.

Entretanto, observa-se na literatura uma certa ambiguidade conceitual quanto à definição da variável vida da ferramenta. Embora diversos estudos indiquem explicitamente a vida da ferramenta como variável de interesse, o indicador efetivamente mensurado em muitos casos corresponde ao desgaste da ferramenta, frequentemente representado por parâmetros como desgaste de flanco ( $VB$  ou  $VB_{max}$ ). Nesses casos, o desgaste é utilizado como uma medida indireta da vida da ferramenta, servindo como critério para determinar o momento de substituição da ferramenta. Embora essa abordagem seja amplamente adotada em estudos experimentais de usinagem, ela pode dificultar a comparação direta entre diferentes trabalhos, uma vez que distintos critérios de desgaste e limites de fim de vida podem ser empregados. Essa constatação evidencia uma limitação recorrente na literatura e aponta para a necessidade de abordagens

metodológicas que explicitem de forma mais clara a relação entre desgaste e vida da ferramenta.

De modo geral, a análise dos estudos revisados evidencia a consolidação do uso de planejamento de experimentos e de técnicas de modelagem estatística para compreender o comportamento da vida da ferramenta em diferentes condições de usinagem. Essas abordagens permitem não apenas identificar os fatores mais influentes no processo, mas também estabelecer relações quantitativas entre os parâmetros de corte e as respostas de interesse.

### **2.3. Metodologia de Superfície de Resposta**

Para compreender o comportamento de um processo ou sistema específico, é comum a realização de experimentos, independentemente do campo de investigação. A fim de tornar essa tarefa mais eficiente e sistemática, pode-se recorrer ao Planejamento de Experimentos (*Design of Experiments* – DOE). Segundo Montgomery (2017), o DOE é uma ferramenta que auxilia na identificação dos fatores que influenciam o processo, na determinação da relação entre as variáveis e na quantificação da variabilidade. Além disso, essa abordagem possibilita a condução de experimentos de maneira planejada e eficiente.

Por meio do DOE, os experimentos podem ser organizados de modo a permitir a manipulação controlada dos fatores de entrada e o monitoramento das variáveis de resposta. Essa estratégia possibilita identificar os fatores mais relevantes, bem como compreender os efeitos individuais e as interações entre eles. Após a coleta dos dados experimentais, técnicas estatísticas, como a análise de variância (ANOVA) e a regressão, são empregadas para o desenvolvimento de modelos matemáticos capazes de descrever o comportamento do processo (Amorim, Paiva, A. P., *et al.*, 2022).

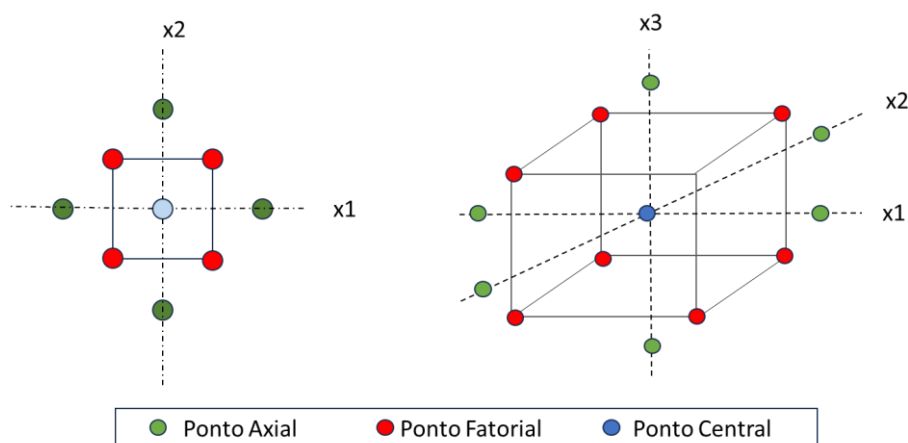
Os modelos mais comuns no DOE são: fatorial completo, fatorial fracionado e superfície de resposta (Arora, 2025). O *design* fatorial possibilita testar todas as combinações de níveis de fatores, facilitando a análise dos efeitos de cada fator, bem como sua interação. Por outro lado, no fatorial fracionado, explora-se apenas uma parte dos tratamentos possíveis, sendo adequado quando o número de combinações possíveis de níveis de fatores se torna impraticável para testar de forma abrangente (Vasconcelos *et al.*, 2024). Por fim, o modelo de superfície de resposta é usado quando a relação entre as variáveis de entrada e a resposta não é linear (Myers, Montgomery e Anderson-Cook, 2016).

A metodologia de superfície de resposta foi desenvolvida por George Box (Box e Wilson, 1951) e associados na década de 1950 e vem sendo estudada por diversos pesquisadores ao longo dos anos (Box e Draper, 2007; Khuri e Cornell, 2018a; Khuri e Mukhopadhyay, 2010; Montgomery, D.C., 2017; Myers e Carter, 1973; Myers, Khuri e Carter Jr, 1989; Myers, Montgomery e Anderson-Cook, 2016; Oliveira, L. G. *et al.*, 2019; WH *et al.*, 1986). Apesar dos diferentes métodos existentes encontrados na literatura, a metodologia de superfície de resposta é um dos métodos mais efetivos no processo de otimização, ao combinar planejamento e análise de experimentos, técnicas de modelagem e métodos de otimização (Oliveira, L. G. *et al.*, 2019).

Historicamente, muitas técnicas vêm sendo desenvolvidas para lidar com desafios relacionados à modelagem e experimentação, tais como *Central Composite Design (CCD)*, *Box-Behnken design (BBD)* e planejamentos que consideram ruídos, como Taguchi.

A aplicação de técnicas de *design* experimental no início do desenvolvimento do processo pode resultar em: melhoria nos rendimentos do processo, redução da variabilidade, redução do tempo de desenvolvimento e redução dos custos (Montgomery, D.C., 2017). Dentre as técnicas da superfície de resposta, o CCD é o delineamento mais utilizado, apresentando maiores vantagens que outros tipos de delineamento (Almeida *et al.*, 2018). A escolha de um CCD é baseada na região de interesse: quando essa região é uma esfera, o planejamento deve incluir pontos centrais para fornecer uma variância razoavelmente estável da resposta prevista (Montgomery, D.C., 2017). Essa configuração é composta por  $2^k$  pontos fatoriais,  $2*k$  pontos axiais e  $n$  pontos centrais. A **Figura 9** ilustra o CCD para dois e três fatores.

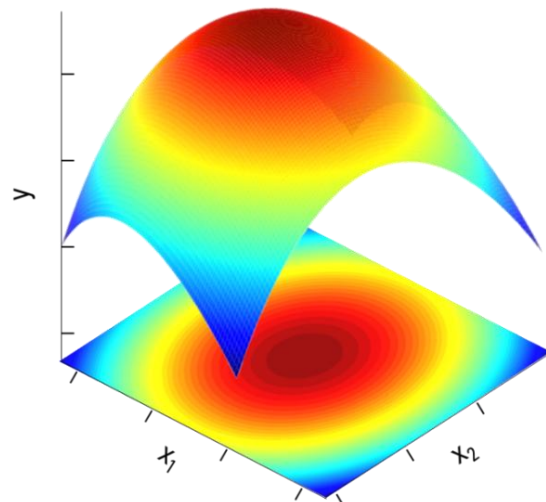
**Figura 9: Representação CCD 2 e 3 variáveis**



Fonte: Adaptado de Myers, Montgomery e Anderson-Cook (2016).

Para simplificar a visualização da forma da superfície de resposta, geralmente plotam-se os contornos da superfície de resposta, conforme mostrado na **Figura 10**. Os gráficos de contorno permitem projetar uma superfície tridimensional em um plano bidimensional, facilitando a interpretação do comportamento da variável resposta em função de dois fatores de controle, usualmente representados pelos eixos  $x_1$  e  $x_2$ . Nesse tipo de gráfico, são traçadas linhas que conectam pontos com o mesmo valor da resposta, denominadas linhas de nível. Cada contorno, portanto, corresponde a uma altura específica da superfície de resposta, possibilitando identificar regiões de máximo, mínimo ou estabilidade da resposta, bem como avaliar a sensibilidade da variável em relação às variações simultâneas dos fatores.

**Figura 10 : Superfície de resposta e gráfico de contorno**



Fonte: Autora (2026).

Diversos estudos utilizam a RSM para otimizar e modelar seus processos devido à sua capacidade de identificar as condições ideais de operação e explorar as interações entre múltiplos fatores. A seguir, serão apresentados alguns trabalhos que utilizam essa metodologia em diferentes aplicações.

Myers, Khuri e Carter (1989) realizaram uma revisão sobre o progresso de RSM em diversas áreas de planejamento experimental durante o período de 1966-1988. Oliveira *et al.* (2023) também realizaram uma revisão bibliográfica focada RSM, porém voltada para modelagem e otimização do processo de fresamento de topo de aço. Esses autores buscaram identificar os principais fatores, níveis e respostas utilizados pelos pesquisadores em seus experimentos, bem como os principais delineamentos

experimentais e métodos de otimização utilizados. Nessa pesquisa constataram que os principais fatores que influenciam esse processo são profundidade de corte, velocidade de corte, velocidade da mesa e avanço, enquanto as respostas são rugosidade superficial, forças de corte e o desgaste da ferramenta. Além disso, dentre os delineamentos experimentais, o mais utilizado foi o CCD, seguido do *Box–Behnken* e *Taguchi*.

Aquila *et al.* (2020) propuseram uma metodologia de otimização combinando RSM e NBI para determinar a melhor combinação para o *layout* de parque eólico e tipo de equipamento, com o objetivo de maximizar o bem-estar do setor elétrico. De modo similar, Rocha *et al.* (2021) utilizaram essa combinação de métodos para otimizar o processo de extração de mucilagem de linho. Além desses autores, Uzoh *et al.* (2021) utilizaram os mesmos métodos para otimizar a produção de biodiesel de alta qualidade, conseguindo uma conversão eficiente de óleo de semente de borracha de seringueira em biodiesel com propriedades de combustível desejadas.

Kazemian *et al.* (2021) desenvolveram um modelo preditivo para investigar a relação entre os fatores operacionais, como a espessura da camada de material de mudança de fase, radiação solar, temperatura de fusão e temperatura ambiente, e variáveis de resposta, incluindo energia elétrica, energia térmica, energia elétrica, energia térmica e geração de entropia, em um sistema fotovoltaico térmico.

Terrab *et al.* (2022) investigaram as condições operacionais ideais para reduzir a temperatura de um painel fotovoltaico, visando melhorar seu desempenho elétrico e térmico. Para isso, utilizaram o DOE para analisar os efeitos de fatores como a velocidade da água, comprimento do tubo, diâmetro, espessura e temperatura do fluido de entrada no desempenho do sistema, além de descrever as interações entre esses fatores.

Okafor *et al.* (2022) aplicaram RSM para modelar e otimizar o processo de compósitos de madeira carbonizada/dióxido de silício. El-Sanabary *et al.* (2024) combinaram técnicas de aprendizado de máquina com análises estatísticas, como DOE e ANOVA, para otimizar os parâmetros do processo de prensagem de canal com o objetivo de melhorar o comportamento de desgaste de uma liga composta por magnésio.

Sibiya *et al.*,(2022) modelaram a coagulação por amido de arroz magnetizado para tratamento de águas residuais, utilizando o *design Box-Behnken* (BBD) e comparando os resultados com redes neurais artificiais, mostrando boa concordância entre os métodos. Pinheiro *et al.* (2024) realizaram um estudo sobre um depressor à base de amido modificado, com o intuito de reduzir a tensão superficial da água e, assim, aumentar a estabilidade e a formação de nano e microbolhas. Akal, Eminoglu e Özer (2023)

otimizaram a concentração de estabilizador e o tempo de inchaço da aveia na produção de leite de aveia, utilizando um delineamento rotativo para estudar os efeitos nas propriedades reológicas e sensoriais.

Souza *et al.* (2025) utilizaram RSM para estimar a vida média e regressão aplicada aos resíduos para modelar a variabilidade, integrando posteriormente a distribuição de Weibull para análise de confiabilidade. O método incorporou simulações de Monte Carlo para considerar a incerteza dos parâmetros estimados, permitindo a geração de cenários de confiabilidade a partir de um único conjunto experimental. Os resultados demonstraram elevada capacidade preditiva, evidenciando o potencial da integração entre modelagem estatística e análise probabilística para suporte à decisão em substituição de ferramentas.

Souza *et al.* (2025a) utilizaram RSM para estruturar os ensaios com variação de velocidade de corte, avanço e profundidade de corte em um processo de usinagem a seco do Ti-6Al-4V. A partir dos dados obtidos, foram incorporadas variáveis derivadas de princípios físicos, como energia específica de corte e tensão de cisalhamento, que alimentaram modelos de *Machine Learning* para predição da rugosidade superficial. Os resultados evidenciaram elevada capacidade preditiva, destacando o potencial da integração entre planejamento experimental baseado em RSM e técnicas avançadas de modelagem para a otimização da qualidade superficial.

Considerando aspectos ambientais, Pires *et al.* (2023) modelaram duas funções objetivo sendo uma referente à Pegada de Carbono e a outra financeira (Valor Presente Líquido) em relação a quatro variáveis controláveis, aplicando o método NBI para construir a fronteira de Pareto.

Os trabalhos apresentados evidenciam a ampla aplicação da Metodologia de Superfície de Resposta na modelagem de fenômenos associados aos processos de usinagem, destacando sua relevância na análise de desempenho, otimização de parâmetros de corte e planejamento experimental. A versatilidade da RSM, aliada à sua fundamentação estatística, consolida-a como uma ferramenta amplamente empregada na literatura para representação funcional de variáveis tecnológicas. Na seção seguinte, são apresentados os métodos de modelagem de funções considerados nesta pesquisa, enfatizando os fundamentos teóricos que sustentam sua aplicação no contexto deste estudo.

## 2.4. Características básicas da modelagem

A modelagem de respostas obtidas por meio de delineamentos experimentais é frequentemente realizada por OLS. Esse método eficiente pressupõe que os resíduos decorrentes do processo de estimação atendam às condições de normalidade e independência, sendo esta última majoritariamente caracterizada pela homogeneidade da variância. Em outras palavras, os resíduos devem ser normais, não correlacionados e homoscedásticos, com realizações independentes dos valores ajustados (Gomes *et al.*, 2012; Montgomery, 2017; Myers, Montgomery e Anderson-Cook, 2016).

Nos métodos clássicos de OLS, o vetor de respostas observadas ( $\mathbf{y}$ ) mantém uma relação com a matriz de delineamento ( $\mathbf{X}$ ) definida por um vetor de coeficientes ( $\boldsymbol{\beta}$ ) *a priori* desconhecidos. Como essa relação não é determinística, um vetor de termos de erro ( $\boldsymbol{\varepsilon}$ ) acompanha o vetor de valores ajustados ( $\hat{\mathbf{Y}}$ ), de modo que:

$$\mathbf{y}_{(n \times 1)} = \mathbf{X}_{(n \times p)} \boldsymbol{\beta}_{(p \times 1)} + \boldsymbol{\varepsilon}_{(n \times 1)} \quad (1)$$

Onde:  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$  representa o vetor de resíduos do modelo de média  $\mathbf{y}$ ,  $n$  é o número de observações, e  $p$  representa o número de coeficientes que devem ser estimados.

Na Eq. (1), o vetor de coeficientes  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ , é obtido minimizando os resíduos ao quadrado  $\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})$ , o que leva a:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left[ (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \mathbf{y}) \right] \quad (2)$$

Com esses coeficientes, um modelo quadrático completo para  $k$  fatores pode ser representado como:

$$f(\mathbf{x}) = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \beta_{ij} x_i x_j = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{z}(\mathbf{x}) \quad (3)$$

Onde:  $k$  é o número de variáveis independentes;  $\beta_0$  é o termo independente;  $\beta_i$  é o coeficiente referente ao efeito linear;  $\beta_{ii}$  é o coeficiente referente ao efeito quadrático;  $\beta_{ij}$  é o coeficiente referente aos efeitos de interação medidos entre as variáveis de entrada  $x_i$  e  $x_j$ .

$$f(\mathbf{x}) = \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{z}(\mathbf{x}) \quad \text{where:} \begin{cases} \mathbf{z}^T(\mathbf{x}) = [1 \ x_1 \ x_2 \ \dots \ x_k \ x_1^2 \ x_2^2 \ \dots \ x_k^2 \ x_1 x_2 \ x_1 x_3 \ \dots \ x_{k-1} x_k] \\ \hat{\boldsymbol{\beta}}^T = [\beta_0 \ \beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_k \ \beta_{11} \ \beta_{22} \ \dots \ \beta_{kk} \ \beta_{12} \ \beta_{13} \ \dots \ \beta_{k-1,k}] \end{cases} \quad (4)$$

Os valores ajustados ( $\hat{\mathbf{y}}$ ) também podem ser resumidos como:

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}\left[(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}^T\mathbf{y})\right] = \mathbf{H}\mathbf{y} \quad (5)$$

Na Eq. (6),  $\mathbf{H}$  representa a “matriz de projeção” (*Hat matrix*) usada para calcular os valores ajustados e o coeficiente de determinação ( $R^2_{\text{pred.}}$ ), como:

$$\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T \quad (6)$$

Tomando os elementos da diagonal principal de  $\mathbf{H}$ ,  $h_{ii}$ , o coeficiente de determinação de previsão ( $R^2_{\text{pred.}}$ ) pode ser calculado como:

$$R^2_{\text{pred}} = \frac{\mathbf{y}^T\mathbf{y} - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2 - \sum_{i=1}^n \left(\frac{e_i}{1-h_{ii}}\right)^2}{\mathbf{y}^T\mathbf{y} - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad n = 2^k + 2k + n_0 \quad (7)$$

Sendo  $R^2$  e  $R^2_{\text{adj.}}$  dados por:

$$R^2 = 1 - \frac{\mathbf{y}^T\mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{y}) - \mathbf{y}^T\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\boldsymbol{\beta}}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})\hat{\boldsymbol{\beta}}}{\mathbf{y}^T\mathbf{y} - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2} \quad R^2_{\text{adj}} = 1 - \left(\frac{n-1}{n-p}\right)(1-R^2) \quad (8)$$

Para avaliar a qualidade do modelo proposto, calcula-se a soma dos quadrados relacionada ao “*Lack-of-Fit*” do modelo:

$$SS_{LOF} = \mathbf{y}^T \left[ \mathbf{I}_N - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1} \right] \mathbf{y} - \mathbf{y}_0^T \mathbf{y}_0 \left( \mathbf{I}_{n_0} - \frac{\mathbf{1}_{n_0} \mathbf{1}_{n_0}^T}{n_0} \right) \quad (9)$$

Onde:  $\mathbf{I}_N$  representa uma matriz identidade de ordem  $N$ ,  $N$  é o número total de observações ou experimentos (Para CCD,  $N = 2^k + 2k + n_0$ ),  $n_0$  é o número de pontos centrais do CCD e  $\mathbf{y}_0$  é o vetor que contém as réplicas da variável resposta de interesse avaliadas com os pontos centrais,  $\mathbf{1}_{n_0}$  é um vetor unitário com  $n_0$  linhas e  $\mathbf{I}_{n_0}$  representa uma matriz identidade de ordem  $n_0$ .

Do Apêndice 2 a Apêndice 3, é possível observar que o intervalo de confiança de  $(1-\alpha)\%$  pode ser derivado do POE, resultando em um intervalo dado por:

$$E[f(\mathbf{x})] = \hat{\mathbf{y}} \pm t_{\alpha/2, n-p} \sqrt{\sigma_\varepsilon^2 \left[ \mathbf{z}^T(\mathbf{x})(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1} \mathbf{z}^T(\mathbf{x}) \right]} \quad (10)$$

Onde:  $\sigma_\varepsilon^2$  é o termo do erro quadrático médio (*Mean Squared Error* - MSE), responsável por contabilizar o erro experimental e eventuais efeitos aleatórios ou influência de fatores de ruído;  $n$  é o número de experimentos,  $p$  é o número de coeficientes

considerados no modelo,  $\alpha$  é o nível de significância e  $t$  é uma variável aleatória de *t-student* com  $n-p$  graus de liberdade.

O método OLS funciona corretamente quando os resíduos são independentes, homoscedásticos e normalmente distribuídos, com média zero e variância  $\sigma_e^2$ . Quando essa suposição é violada, a heterocedasticidade deve ser corrigida usando algum tipo de transformação ou, mais comumente, usando o método WLS, que compreende uma matriz de peso diagonal  $\mathbf{W}$  cujos elementos diagonais são iguais ao inverso da variância prevista no ponto  $\mathbf{x}_0$ . Para corrigir os efeitos nos coeficientes causados por essa influência, o OLS é aprimorado pela introdução da matriz  $\mathbf{W} = \text{diag} \{1/s_1^2, 1/s_2^2, \dots, 1/s_n^2\}$  em **Eq. (11)**, como:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{W}} = \left[ (\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{y}) \right] \quad (11)$$

A **Eq. (11)** é uma escolha adequada para a modelagem simultânea da média e da variância. No entanto, nessa abordagem, a distribuição de  $s_i^2$  geralmente não é levada em consideração. Como resultado, o procedimento de estimativa fornecido pela OLS claramente não consegue explorar a distribuição da variância amostral. Geralmente, as amostras de variância aleatória  $s_1^2, s_2^2, \dots, s_n^2$ , são estimativas independentes das variâncias em cada ponto do projeto e seguem uma distribuição *qui-quadrada* ( $\chi^2_{\nu}$ ), que, por sua vez, representa um caso especial de uma distribuição gamma com parâmetro de dispersão  $2/\nu$ . Portanto, o WLS também deve ser usado com cuidado para modelar variáveis de resposta não normais. Para tais casos, o GLM pode se tornar uma opção mais adequada, pois integra várias propriedades atraentes do modelo *log-linear* para variância seguindo uma transformação *log-link* acoplada.

Suponhamos que  $\text{Var}(\mathbf{y}) = \sigma^2 \mathbf{W}$ . Se a matriz  $\mathbf{W}$  for diagonal, mas tiver elementos idênticos, serão obtidas observações independentes com variância constante; se os elementos da matriz  $\mathbf{W}$  forem distintos, as observações de  $\mathbf{y}$  serão independentes entre si, mas com variâncias diferentes; se, no entanto, a matriz  $\mathbf{W}$  tiver elementos diferentes de zero fora da diagonal principal, as observações serão correlacionadas (Myers *et al.*, 2010). Assim, independentemente das características de  $\mathbf{W}$ , um procedimento adequado para promover a estimativa de parâmetros não enviesados para o modelo é a aplicação do método dos mínimos quadrados generalizados. Esse método modifica o algoritmo OLS, considerando a distância de Mahalanobis (MD) ao quadrado como a métrica de interesse ( $\mathbf{M}^2$ ), que é definida como:

$$\mathbf{M}^2 = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{y}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{y} - 2\mathbf{y}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\beta} + \mathbf{X}^T \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} \quad (12)$$

Procedendo à minimização da Eq. (13), obtém-se o vetor de coeficientes estimado pelo método GLM, tal que:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{wls} = \frac{\mathbf{X}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{y}}{\mathbf{X}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{X}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{y}) \quad (13)$$

Existem diversas situações em que a variável resposta deve ser tratada por meio de GLM, especialmente quando os dados assumem a forma de contagens, isto é, número de ocorrências em um intervalo específico, ou de proporções, contextos normalmente associados às distribuições de Poisson e Binomial. Além disso, a variável resposta pode seguir distribuições contínuas assimétricas, distintas da normal, como lognormal, gama, exponencial ou Weibull, bem como estar relacionada a funções de confiabilidade, a exemplo da função de risco (Myers, Montgomery e Anderson-Cook, 2016).

Adicionalmente, o uso de GLM é indicado sempre que a variância depende do valor médio da resposta, caracterizando heterocedasticidade estrutural. Um exemplo clássico é a distribuição de Poisson, na qual a média e a variância da variável aleatória coincidem e são ambas iguais ao parâmetro  $\lambda$ , que representa a taxa média de ocorrência por unidade de tempo, comprimento, área, volume, entre outros. Dessa forma, quando um DOE é empregado para modelar respostas que seguem esse tipo de comportamento probabilístico, a abordagem via GLM torna-se mais apropriada do que os modelos lineares clássicos.

Considerando a modelagem por Poisson, uma suposição GLM pode ser escrita como:

$$\lambda = E(Y|\mathbf{x}) = Var(Y|\mathbf{x}) = \mu_i = e^{\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}} \quad (14)$$

Substituindo essa identidade na função de densidade de probabilidade de uma variável aleatória de *Poisson* e escrevendo sua função de máxima verossimilhança, temos (Myers *et al.*, 2010):

$$P(y|\mathbf{x}; \boldsymbol{\beta}) = \frac{e^{-e^{\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}}} e^{(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta})y}}{y!} \therefore \ell(\boldsymbol{\beta}|\mathbf{x}; y) = \prod_{i=1}^m \frac{e^{-e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} e^{(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})y_i}}{y_i!} \quad (15)$$

Segue-se que o logaritmo desta função de verossimilhança é escrito como:

$$\log \ell(\boldsymbol{\beta}|\mathbf{x}; y) = \sum_{i=1}^m \left[ (\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}) y_i - e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}} - \log(y_i!) \right] \quad (16)$$

Ao maximizar a expressão dada pela Eq. (16), obtemos o estimador de máxima verossimilhança para os coeficientes de regressão de *Poisson*. Assim:

$$\frac{\partial \log \ell(\boldsymbol{\beta}|\mathbf{x}; y)}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} \sum_{i=1}^m \left[ (\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}) y_i - e^{\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}} - \log(y_i!) \right] = \sum_{i=1}^m \left[ (y_i \mathbf{x}_i) - e^{\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}} \mathbf{x}_i \right] = 0 \quad (17)$$

A Eq. (17) não tem uma solução de forma fechada; no entanto, como é uma função convexa, pode ser resolvida por algoritmos de otimização baseados em gradiente.

## 2.5. Máxima Verossimilhança Restrita

A escolha dos resíduos ao quadrado ( $e_i^2$ ) como dados de resposta utilizados para estimar a variância nem sempre reflete verdadeiramente o comportamento de  $\sigma^2$ , a menos que o estimador  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  seja o vetor de parâmetros verdadeiro  $\boldsymbol{\beta}$  (Myers *et al.*, 2010; Myers, Montgomery e Anderson-Cook, 2016). Como resultado, não se espera obter um estimador não enviesado  $\hat{\gamma}$  para o modelo de variância, embora a quantidade de viés possa ser bastante pequena neste caso.

Considerando que  $E(e_i^2) = \text{Var}(e_i)$  e  $\text{Var}(\mathbf{e}) = \mathbf{W} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T$ . A matriz  $\mathbf{H}$  neste caso será consideravelmente modificada, resultando na seguinte forma:

$$\mathbf{H} = \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{W}^{1/2} \quad (18)$$

Assim, os elementos diagonais em  $\mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T$  também são os elementos diagonais de  $\mathbf{H}\mathbf{W}$ . Portanto, se apenas o elemento diagonal estiver envolvido  $\mathbf{W} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T$ , então:

$$E(e_i^2) = \sigma_i^2 - h_{ii} \sigma_i^2 \quad (19)$$

Vale a pena notar que, na Eq. (19) o ajuste necessário em  $\sigma_i^2$  pode ser obtido usando  $\sigma_i^2 = e_i^2 + h_{ii} \hat{\sigma}_i^2$  em vez de  $e_i^2$ , sendo  $h_{ii} \hat{\sigma}_i^2$  considerado um termo de correção de viés. Em termos práticos,  $\hat{\sigma}_i^2$  pode ser alterado pelo MSE. Assim, a variância pode ser modelada diretamente a partir dos resíduos corrigidos pelo viés.

## 2.6. Média e variância de funções de variáveis aleatórias

Outra abordagem para modelar a variância usando os resíduos do modelo médio envolve a partição da variância experimental  $\sigma_e^2$ . Quando os resíduos são heterocedásticos,  $\sigma_e^2$  não é totalmente uma “fonte de variância comum”, e parte desse valor pode ser explicada pelas modificações introduzidas na configuração do processo descrita por cada linha da matriz de projeto (Köksalan e Plante, 2003; Plante, 2001). A partição de  $\sigma_e^2$  segue o POE da seguinte maneira:

$$\sigma^2 = \sigma_p^2 + \sum_{i=1}^n \left\{ \sigma_{x_i}^2 \times E \left[ \left( \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right)^2 \right] \right\} \quad (20)$$

As provas da **Eq. (21)** são apresentadas no **Apêndice 1**. Considerando uma possível covariância ( $\sigma_{x_i, x_j}$ ) entre duas variáveis de entrada aleatórias (ou fatores de projeto) substituídas por seus respectivos coeficientes de correlação de *Pearson* ( $\rho_{x_i, x_j}$ ),  $\text{Var}[f(\mathbf{x})]$  pode ser representado como:

$$\text{Var}[f(\mathbf{x})] = \sum_{i=1}^k \left\{ \left[ \frac{\partial f(\mu_x)}{\partial x_i} \right]^2 \sigma_{x_i}^2 \right\} + 2 \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \left[ \frac{\partial f(\mu_x)}{\partial x_i} \right] \left[ \frac{\partial f(\mu_x)}{\partial x_j} \right] \times \rho_{x_i, x_j} \times \sqrt{\sigma_{x_i}^2 \sigma_{x_j}^2} \right\} \quad (21)$$

Na forma matricial **Eq. (22)** é representada por:

$$\text{Var}[f(\mathbf{x})] \Big|_{\mu_x} = \mathbf{J}[f(\mathbf{x})] \boldsymbol{\Sigma}_x \mathbf{J}^T[f(\mathbf{x})] \Big|_{\mu_x} \quad (22)$$

$$\text{Onde: } \mathbf{J}[f(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} \frac{\partial [f(\mathbf{x})]}{\partial x_1} & \frac{\partial [f(\mathbf{x})]}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial [f(\mathbf{x})]}{\partial x_k} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_x = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1 x_2} & \dots & \sigma_{x_1 x_k} \\ \sigma_{x_1 x_2} & \sigma_{x_2}^2 & \dots & \sigma_{x_2 x_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{x_1 x_k} & \sigma_{x_2 x_k} & \dots & \sigma_{x_k}^2 \end{bmatrix}$$

De acordo com Plante (2001) as seguintes etapas podem ser seguidas para obter uma partição de  $\sigma_\varepsilon^2$ :

**Passo 1:** Estimar a função da superfície de resposta da média esperada, conforme sugerido pela **Eq. (23)**, e armazenar os respectivos resíduos.

**Passo 2:** Considerar uma estimativa da resposta da variância impulsionada pelos resíduos quadrados do modelo médio ou pela estimativa do valor absoluto dos resíduos médios do modelo, como:

$$|\hat{e}(\mathbf{x})| = \gamma_0 + \sum_{i=1}^k \gamma_i x_i + \sum_{i=1}^k \gamma_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \gamma_{ij} x_i x_j = \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{z}(\mathbf{x}) \quad (23)$$

Então, a variância estimada torna-se:

$$\sigma_{e_i}^2 = |\hat{e}(\mathbf{x})|^2 = \left( \gamma_0 + \sum_{i=1}^k \gamma_i x_i + \sum_{i=1}^k \gamma_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \gamma_{ij} x_i x_j \right)^2 \quad (24)$$

**Passo 3:** A expressão da **Eq. (24)** não é suficiente para explicar toda a variância residual associada à resposta de interesse, permanecendo uma parte inexplicada. De acordo com Plante (2001), esse valor pode ser calculado usando a seguinte razão:

$$R^2 = \frac{\sum_{k=1}^n |\hat{e}_k|^2}{\sum_{k=1}^n \hat{e}_k^2} \quad (25)$$

A **Eq. (26)** representa o  $R^2$  para o modelo criado com os valores absolutos dos resíduos derivados da equação da média  $|\hat{e}(\mathbf{x})|$ . A partição da variância do erro original em porções explicadas e não explicadas é então aproximada por:

$$\sigma_p^2 \cong |\hat{e}(\mathbf{x})|^2 + \left\{ \left( 1 - R^2_{|\hat{e}(\mathbf{x})|} \right) \left[ \sigma_{\varepsilon[f(\mathbf{x})]}^2 \right] \right\} \quad (26)$$

Onde:  $\sigma_{\varepsilon[f(\mathbf{x})]}^2$  é o MSE de  $\mathbf{y}$ .

A variância de partição  $\sigma_p^2$  pode ser usada como um peso para WLS, uma vez  $\mathbf{W} = \text{diag} \{1/\sigma_{p_1}^2, 1/\sigma_{p_2}^2, \dots, 1/\sigma_{p_n}^2\}$ .  $\sigma_p^2$  também pode integrar os mínimos quadrados iterativos GLM *log-link*, conforme será discutido na próxima seção.

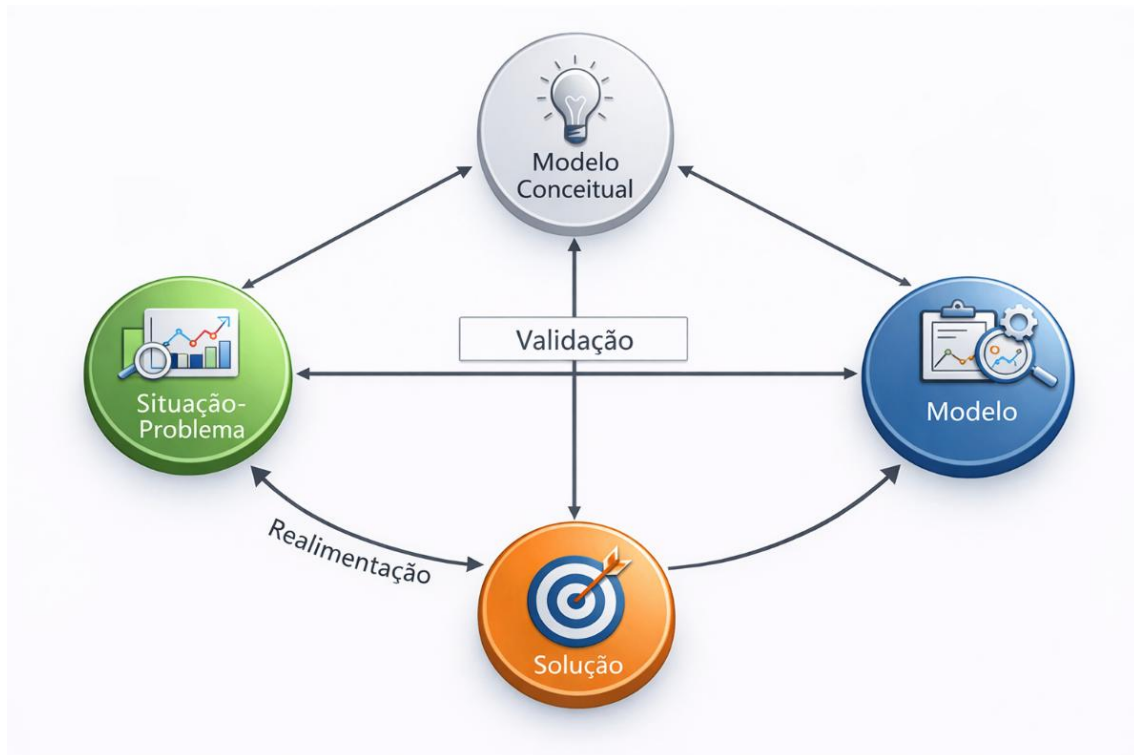
### 3. METODOLOGIA

#### 3.1. Classificação do método de pesquisa

A pesquisa foi desenvolvida com base em uma abordagem de Modelagem e Simulação, proposta por Mitroff *et al.* (1974), conforme ilustrado na **Figura 11**. O ponto de partida consistiu na definição da situação-problema, associada à necessidade de adequar a modelagem da vida da ferramenta à presença de heterocedasticidade intrínseca ao processo de medição dessa variável. Em seguida, foi estruturada uma abordagem metodológica fundamentada na aplicação de técnicas de Propagação de Erro (POE) e de Máxima Verossimilhança Restrita (REML), com o objetivo de representar simultaneamente a média e a variabilidade da resposta.

Na etapa subsequente, o modelo conceitual foi formalizado por meio da especificação dos modelos estatísticos e dos procedimentos de estimação dos parâmetros. A validação da proposta foi realizada a partir de dados experimentais provenientes de processos de usinagem, permitindo avaliar o desempenho dos modelos em condições reais de aplicação e comparar as abordagens alternativas em relação à modelagem tradicional.

**Figura 11: Metodologia de pesquisa**



Fonte: Adaptado de Mitroff *et al.* (1974).

Quanto à classificação da pesquisa, de acordo com Gil (2021), o estudo caracteriza-se como pesquisa aplicada, uma vez que busca resolver um problema prático relacionado à modelagem da vida da ferramenta em processos de usinagem. Em relação aos objetivos, trata-se de uma pesquisa explicativa, pois procura identificar e analisar os fatores que influenciam o comportamento da variabilidade da resposta. No que se refere à abordagem do problema, a pesquisa é classificada como quantitativa, visto que os dados são mensurados e analisados por meio de técnicas estatísticas, conforme a definição apresentada por (Gerhardt e Silveira, 2019).

### 3.2. Metodologia da pesquisa

A **Figura 12** sintetiza, de forma estruturada e sequencial, o encadeamento lógico adotado nesta tese, integrando modelagem estatística sob heteroscedasticidade, otimização multiobjetivo e validação experimental. Cada etapa do fluxograma corresponde a um bloco metodológico claramente definido e será detalhado a seguir.



Fonte: Autora (2026).

#### 3.2.1. Seleção de Problema

A primeira etapa da metodologia consiste na definição do problema de pesquisa, que envolve a modelagem e a otimização da vida da ferramenta em cenários caracterizados por variância não constante. Parte-se da constatação de que a modelagem tradicional baseada em mínimos quadrados ordinários (OLS) pode se tornar inadequada na presença de heteroscedasticidade, uma vez que tal condição viola um dos principais pressupostos desse método. Além disso, considera-se a importância de analisar e modelar explicitamente a variância da vida da ferramenta, dado seu impacto em aspectos relevantes do processo produtivo, como qualidade, estabilidade e confiabilidade operacional.

Com esse objetivo, foi selecionado um estudo de caso principal. Para investigar essa limitação e avaliar a abordagem metodológica proposta, foi revisitado o estudo de

Campos (2015), utilizando dados provenientes de um Delineamento Composto Central (CCD) aplicado ao torneamento de aço endurecido AISI H13. Os experimentos envolvem sete pastilhas da Sandvik Coromant, incluindo ferramentas cerâmicas e de PCBN. A escolha desse conjunto de dados assegura relevância prática e fornece uma base experimental consolidada para a avaliação dos métodos propostos.

### 3.2.2. Modelagem da variável

Na etapa de modelagem, a variável resposta vida da ferramenta é ajustada por três algoritmos distintos, desenvolvidos especificamente para lidar com heteroscedasticidade:

- **POE-WLS:** Utiliza a partição da variância do erro original proposta por Plante como estrutura de ponderação no ajuste via mínimos quadrados ponderados;
- **POE-GLM:** Adota a distribuição Gamma com parâmetro de dispersão igual a 2, permitindo modelar explicitamente a variância dependente da média;
- **REML-GLM:** Substitui a estimação por POE pelo método REML, aumentando a consistência das estimativas dos componentes de variância.

Após a aplicação desses três algoritmos, seus resultados são comparados à modelagem tradicional por OLS, permitindo avaliar ganhos em termos de ajuste, coerência estatística e capacidade de representação da variabilidade experimental.

### 3.2.3. Comparação dos modelos

A terceira etapa envolve a análise comparativa entre os modelos ajustados. Para essa finalidade, são considerados diferentes critérios estatísticos e diagnósticos destinados a avaliar o desempenho, a qualidade do ajuste e a adequação dos modelos aos pressupostos estatísticos. Diferentemente das abordagens tradicionais, essa comparação não se restringe apenas à análise da média estimada da vida da ferramenta, mas considera explicitamente a variância associada à resposta, elemento central da proposta metodológica deste trabalho. Essa etapa permite identificar o modelo mais adequado para representar simultaneamente o comportamento médio e a variabilidade da vida da ferramenta, servindo de base para a etapa subsequente de otimização.

### 3.2.4. Otimização da vida da ferramenta

Com o modelo selecionado, procede-se à otimização simultânea da vida média da ferramenta e de sua variância por meio do método *Normal Boundary Intersection* (NBI), que permite gerar a fronteira de Pareto associada ao problema de otimização

multiobjetivo. Essa abordagem possibilita explorar o compromisso entre a maximização da vida da ferramenta e a minimização de sua variabilidade, resultando em um conjunto de soluções eficientes não dominadas.

A seleção do ponto ótimo dentre as soluções pertencentes à fronteira de Pareto é realizada por meio do método *Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution* (TOPSIS). Inicialmente, as alternativas são classificadas com base no coeficiente de proximidade ( $d_{\max}$ ). Entretanto, devido à elevada correlação observada entre a média e a variância da vida da ferramenta, o processo de decisão multicritério passa a incorporar a Distância de Mahalanobis, de modo a considerar explicitamente a estrutura de covariância entre as respostas. Adicionalmente, a ausência de diferenças estatisticamente significativas entre soluções adjacentes na fronteira de Pareto motiva a aplicação da análise multivariada de variância (MANOVA), permitindo avaliar a formação de possíveis agrupamentos entre as soluções eficientes.

### 3.2.5. Validação experimental

A etapa final da metodologia corresponde à validação experimental e estatística da solução ótima identificada. Para isso, foram conduzidos experimentos de confirmação no ponto ótimo obtido para a ferramenta CC670, com o objetivo de verificar a robustez e a reprodutibilidade dos resultados obtidos na etapa de otimização. Essa fase é fundamental para assegurar que a metodologia proposta não apenas produza soluções matematicamente eficientes, mas também resultados consistentes e aplicáveis em condições reais de operação.

Além disso, alguns estudos de caso apresentados no referencial teórico foram revisitados, permitindo avaliar o desempenho da abordagem de modelagem proposta em diferentes condições de processo. Essa etapa adicional contribui para verificar a capacidade de generalização da metodologia e sua aplicabilidade em distintos cenários experimentais.

#### 4. MODELAGEM MÉDIA-VARIÂNCIA E OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO DA VIDA DA FERRAMENTA

Esta seção apresenta os fundamentos teóricos relacionados à modelagem estatística e à otimização multiobjetivo da vida da ferramenta. Inicialmente, são descritos os algoritmos utilizados para ajustar modelos capazes de representar o comportamento da vida da ferramenta e de sua variabilidade. Em seguida, são apresentadas as equações associadas ao processo de modelagem. A partir desses modelos, discute-se o método *Normal Boundary Intersection* (NBI) para tratamento de problemas de otimização multiobjetivo, voltados à análise conjunta da média e da variância da vida da ferramenta. Por fim, são apresentados conceitos relacionados à análise estatística e à tomada de decisão multicritério, incluindo técnicas como MANOVA e o método TOPSIS associado à distância de Mahalanobis.

##### 4.1. Procedimentos iterativos para modelar vida de ferramenta

Como observado em diversos estudos (Aggarwal *et al.*, 2008; Campos *et al.*, 2017; Choudhury e El-Baradie, 1998, 1999; Davim, 2008; Davoodi e Eskandari, 2015; Hernández *et al.*, 2025; Paiva, Ferreira e Balestrassi, 2007; Saedon *et al.*, 2012; Severino *et al.*, 2012; Souza *et al.*, 2025), a vida da ferramenta frequentemente apresenta comportamento não normal e resíduos com heterocedasticidade significativa. Diante dessas características, a modelagem simultânea da média e da variância da vida da ferramenta pode ser conduzida por meio dos três algoritmos descritos a seguir, os quais podem ser implementados com ou sem a etapa de seleção de variáveis pelo procedimento *Stepwise*. Esses algoritmos são:

- a) **POE-WLS**: a partição da variância do erro original é utilizada para definir os pesos empregados no ajuste do modelo por mínimos quadrados ponderados, permitindo considerar explicitamente a heterocedasticidade observada nos resíduos.
- b) **POE-GLM**: nesse método, em vez de estimar separadamente equações para a média e para a variância, como ocorre no WLS, a modelagem é conduzida no contexto dos Modelos Lineares Generalizados, assumindo distribuição Gamma para a variável resposta, parâmetro de dispersão igual a 2 e função de ligação logarítmica.
- c) **REML-GLM**: inicialmente, utiliza-se uma estimativa preliminar da variância como valor inicial. Em seguida, aplica-se um modelo GLM com distribuição

Gamma, parâmetro de dispersão igual a 2 e função de ligação logarítmica, sendo a estrutura de variância estimada por meio do método de máxima verossimilhança restrita.

---

**Algoritmo 1: POE-WLS**

---

**Passo 1:** Calcular  $\beta_{iter=0}$  usando OLS.

**Passo 2:** Armazenar os resíduos ( $e_i$ ) da média obtidos no **Passo 1** e armazenar seus valores absolutos e respectivo MSE.

**Passo 3:** Calcular  $\gamma_{iter=0}$  usando OLS com o valor absoluto do resíduo obtido no **Passo 2**.

**Passo 4:** Obter a equação da variância para  $\mathbf{y}$ ,  $\text{Var}[f(\mathbf{x})]$ ,  $|\hat{e}(\mathbf{x})|$  elevando ao quadrado a superfície de resposta criada no **Passo 3**.

**Passo 5:** Calcular  $\sigma_p^2 \cong |\hat{e}(\mathbf{x})|^2 + \left\{ \left(1 - R^2_{|\hat{e}(\mathbf{x})|}\right) \left[\sigma_{\hat{e}[f(\mathbf{x})]}^2\right] \right\}$  para cada  $\mathbf{z}^T(\mathbf{x})$  (CCD linhas) e construir uma matriz de pesos cujos elementos da diagonal principal sejam iguais ao inverso da variância da partição prevista  $\sigma_p^2$ , como  $\mathbf{W} = \text{diag} \{1/\sigma_{p_1}^2, 1/\sigma_{p_2}^2, \dots, 1/\sigma_{p_n}^2\}$ .

**Passo 6:** Calcular a nova estimativa de  $\beta_{iter=0}$  para a equação da média

$$\hat{\beta}_{\mathbf{W}} = \left[ (\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{y}) \right] \text{ com os pesos obtidos no Passos 5.}$$

**Passo 7:** Repetir os **Passos 1-6** até a convergência.

**Passo 8:** Armazenar as métricas de desempenho de qualidade da regressão  $R^2$ ,  $R^2_{\text{adj.}}$ ,  $R^2_{\text{pred.}}$ , S (raiz quadrada do MSE-ANOVA), e valor-F para *lack of fit* ( $F_{\text{LOF}}$ ).

**Passo 9:** Finalizar a rotina se as métricas de desempenho apresentarem valores satisfatórios. Caso contrário, executar uma rotina *Stepwise* considerando o Princípio da Hierarquia por meio de um processo de “*Forward Selection*”.

---



---

**Algoritmo 2: REML-GLM**

---

**Passo 1:** Calcular  $\beta_{iter=0}$  usando OLS.

**Passo 2:** Calcular os resíduos ( $e_i$ ) do modelo médio obtido no **Passo 1** e um conjunto de respostas  $\sigma_i^2 = e_i^2 + h_{ii} \hat{\sigma}_i^2$ , onde  $h_{ii}$  são os elementos diagonais da matriz “chapéu”  $\mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T$ , e  $\hat{\sigma}_i^2$  é o MSE obtido da ANOVA de  $\mathbf{y}$ .

**Passo 3:** Utilizar  $\sigma_i^2 = e_i^2 + h_{ii} \hat{\sigma}_i^2$  como uma estimativa da variância no modelo, considerando a distribuição Gamma com parâmetro de dispersão igual a 2 e função de ligação log, para calcular o valor inicial  $\gamma_0$ .

**Passo 4:** Utilizar  $\gamma_0$  para produzir pesos a partir de  $\hat{\sigma}_i^2 = e_i^2 + h_{ii} \hat{\sigma}_i^2$ , e calcular a matriz de pesos  $\mathbf{W}$ . Calcular a nova estimativa de  $\beta_{iter=0}$  para a equação da média como  $\hat{\beta}_{\mathbf{W}} = \left[ (\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{y}) \right]$

**Passo 5:** Calcular os novos resíduos a partir de  $\beta_{iter=0}$  e, assim, novos valores de  $\sigma_i^2 = e_i^2 + h_{ii} \hat{\sigma}_i^2$ .

**Passo 6:** Usar  $\sigma_i^2 = e_i^2 + h_{ii} \hat{\sigma}_i^2$  como respostas em um GLM Gamma com ligação log para calcular novos valores  $\gamma$  com  $\gamma_0$ . Retornar para o **Passo 4** e atualizar  $\gamma_0$ .

**Passo 7:** Repetir **Passo 1-6** até a convergência.

**Passo 8:** Armazenar os indicadores de desempenho de qualidade da regressão  $R^2$ ,  $R^2_{\text{adj.}}$ ,  $R^2_{\text{pred.}}$ , S (Raiz quadrada do MSE-ANOVA), e valor-F para *lack of fit* ( $F_{\text{LOF}}$ ).

**Passo 9:** Finalizar a rotina se as métricas de desempenho apresentarem valores satisfatórios. Caso contrário, executar uma rotina *Stepwise* considerando o Princípio da Hierarquia por meio de um processo de “*Forward Selection*”.

---

---

**Algoritmo 3: POE-GLM**

---

**Passo 1:** Calcular  $\beta_{iter=0}$  usando OLS.

**Passo 2:** Armazenar os resíduos ( $e_i$ ) da média obtidos no **Passo 1** e considerar seus valores absolutos  $|\hat{e}(\mathbf{x})|$  e o respectivo MSE.

**Passo 3:** Calcular  $\gamma_{iter=0}$  usando OLS com o valor absoluto dos resíduos obtido no **Passo 2**.

**Passo 4:** Obter a equação de variância para  $\mathbf{y}$ ,  $\text{Var}[f(\mathbf{x})]$ , usando o quadrado de  $|\hat{e}(\mathbf{x})|$  da superfície de resposta criada no **Passo 3**.

**Passo 5:** Calcular e armazenar  $\sigma_p^2 \cong |\hat{e}(\mathbf{x})|^2 + \left\{ \left(1 - R^2_{|\hat{e}(\mathbf{x})}\right) \left[\sigma_{\varepsilon[f(\mathbf{x})]}^2\right] \right\}$  para cada linha do CCD.

**Passo 6:** Usar  $\hat{\sigma}_p^2$  como resposta em um GLM Gamma e uma ligação log para a regressão de Poisson  $\hat{\sigma}_i^2 = e^{\mathbf{u}_i^T \hat{\gamma}_0}$ , e calcular a matriz diagonal de pesos  $\mathbf{W}$  cujos elementos não-nulos correspondem aos valores de variância predita pelo modelo Poisson. Calcular uma nova estimativa de  $\beta_{iter=0}$  para a equação da média com  $\hat{\beta}_w = \left[ (\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{y}) \right]$ .

**Passo 7:** Calcular os novos resíduos e os novos valores de  $\hat{\sigma}_p^2$ .

**Passo 8:** Repetir **Passo 5-7** até a convergência.

**Passo 9:** Armazenar os indicadores de desempenho de qualidade da regressão  $R^2$ ,  $R^2_{adj}$ ,  $R^2_{pred}$ , S (Raiz quadrada do MSE-ANOVA), e valor-F para *lack of fit* ( $F_{LOF}$ ).

**Passo 10:** Finalizar a rotina se as métricas de desempenho apresentarem valores satisfatórios. Caso contrário, executar uma rotina Stepwise considerando o Princípio da Hierarquia por meio de um processo de “*Forward Selection*”.

---

#### 4.2. Otimização da média e da variância da vida da ferramenta

Esta seção apresenta o procedimento de otimização simultânea da média e da variância da vida da ferramenta, com base nos modelos obtidos na etapa de modelagem. O objetivo consiste em identificar condições operacionais que maximizem a vida média da ferramenta e, simultaneamente, minimizem sua variabilidade, caracterizando um problema de otimização multiobjetivo.

Para tratar esse problema, será empregado o método de Interseção Normal à Fronteira (Arruda *et al.*, 2019; Das e Dennis, 1998; Pereira *et al.*, 2025; Pereira e Paiva, 2025), o qual permite gerar um conjunto de soluções Pareto-ótimas que representam o compromisso entre as funções objetivo associadas à média e à variância da vida da ferramenta. O método NBI constrói sistematicamente a fronteira de Pareto por meio da interseção normal à fronteira convexa formada pelas funções objetivo, possibilitando a obtenção de soluções factíveis e bem distribuídas ao longo da fronteira eficiente em problemas de otimização multiobjetivo (*Multiobjective Problem*, MOP) (Das e Dennis, 1998).

Adicionalmente será aplicado o Planejamento Robusto de Parâmetros (*Robust Parameter Design - RPD*) (Arruda *et al.*, 2019; Gaudêncio, Almeida *et al.*, 2019; Lopes *et al.*, 2016; Plante, 2001) o qual permite tratar simultaneamente múltiplas superfícies de

resposta associadas à vida média da ferramenta e às suas respectivas variâncias. Essa abordagem possibilita identificar configurações de processo que não apenas otimizem o desempenho médio, mas também reduzam a sensibilidade do sistema a fontes de variabilidade.

O método NBI gera uma fronteira de Pareto com soluções factíveis entre as diversas funções objetivo em um problema de otimização multiobjetivo (*Multiobjective Problem* - MOP) Desenvolvido para encontrar soluções em regiões não convexas da fronteira de otimização, o método tornou-se uma alternativa adequada às somas ponderadas (WS) (Gomes, 2012; Paiva *et al.*, 2010). Além disso, o NBI é capaz de fornecer soluções Pareto-ótimas equiespaçadas ao longo da fronteira (Das e Dennis, 1998). Considerando um subespaço afim de dimensão inferior contendo uma estrutura de Mínimos individuais convexos (*Convex Individual Minima* - CHIM), tal que  $\{\Phi\beta: \beta \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n \beta_i = 1, \beta_i \geq 0\}$ , o NBI encontra o ponto de interseção entre o limite  $\partial\mathcal{F}$  e a normal apontando para a origem, começando a partir de qualquer ponto no CHIM. Considerando  $\hat{\mathbf{n}}$  como o vetor normal unitário para o CHIM apontando para a origem, então  $\Phi\beta + D\hat{\mathbf{n}}$ ,  $D \in \mathbb{R}$ , o conjunto de pontos nessa normal. O ponto de interseção entre a normal e o limite  $\mathcal{F}$  mais próximo da origem será um ponto de Pareto viável pertencente ao limite. Para manter a ortogonalidade de  $\Phi\beta + D\hat{\mathbf{n}}$  em cada interação (fornecida por diferentes vetores de peso,  $\beta$ ), esse valor deve ser igual à distância de  $F(\mathbf{x})-F^U(\mathbf{x})$ , que é representada pelo vetor de funções objetivas escalonadas,  $\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ . O parâmetro  $D$  é um escalar equivalente ao comprimento de um segmento perpendicular à linha da utopia, e  $\Phi$  representa a matriz *payoff*, uma matriz que contém os mínimos individuais  $f_i^*(\mathbf{x}_i^*)$  para cada função objetivo. Assim, a matriz  $\bar{\Phi}$  representa a matriz *payoff* escalonada. Por fim,  $\hat{\mathbf{n}}$  pode ser substituída por um vetor *quasi-normal* que mantém uma equivalência com a matriz escalonada, como  $\hat{\mathbf{n}} = -\bar{\Phi}\mathbf{e}$ , onde  $\mathbf{e}$  é um vetor coluna unitário. Considerando os elementos acima, a versão multiobjetivo do método NBI pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
& \underset{(\mathbf{x}, D)}{\text{Max}} D \\
& \text{S.t.: } g_1(\mathbf{x}) = \bar{\Phi}_{(p \times p)} \beta_{(p \times 1)} - D \bar{\Phi}_{(p \times p)} \mathbf{e}_{(p \times 1)} - \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x})_{(p \times 1)} = 0 \\
& g_2(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k x_i^2 \leq \rho^2 \quad i = 1, 2, \dots, k \\
& g_3(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^p \beta_j = 1 \quad 0 \leq \beta_j \leq 1 \quad j = 1, 2, \dots, p \\
& g_m(\mathbf{x}) \leq 0 \quad m = 1, 2, \dots, r \\
& h_n(\mathbf{x}) = 0 \quad n = 3, 4, \dots, q \\
& \mathbf{x} \in \Omega: \rho = \sqrt[4]{2^k}
\end{aligned} \tag{27}$$

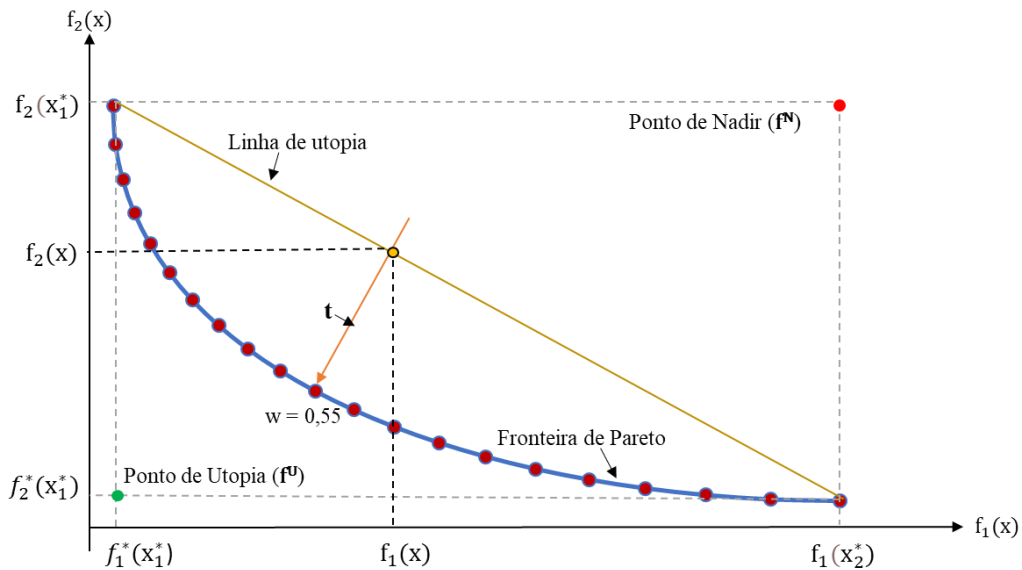
Onde  $p$  é o número de funções objetivas,  $q$  é o número de restrições de igualdade,  $r$  é o número de restrições de desigualdade e  $\Omega$  representa o espaço de solução.

Em um problema de otimização biobjetivo, há dois pontos de ancoragem dados por  $\mathbf{A}_1^T = [f_1(\mathbf{x}_1^*), f_2(\mathbf{x}_1^*)]$ , onde  $\mathbf{x}_1^*$  é o ótimo individual para  $f_1(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{A}_2^T = [f_1(\mathbf{x}_2^*), f_2(\mathbf{x}_2^*)]$ , onde  $\mathbf{x}_2^*$  é o ótimo individual para  $f_2(\mathbf{x})$ . A ligação entre os dois pontos de ancoragem é chamada de “Linha da Utopia” ou CHIM. Em MOP, “Utopia” significa a idealização de um estado em que todas as funções objetivas atingem seus respectivos alvos (Das e Dennis, 1998; Pereira *et al.*, 2025; Pereira e Paiva, 2025). O ponto de utopia ( $\mathbf{f}^U$ ) é o vetor que contém os ótimos individuais de cada função, como  $\mathbf{f}^U(\mathbf{x}) = [f_1^*(x_1^*), f_2^*(x_2^*)]$  e geralmente é colocado fora da região viável. Por outro lado, o ponto Nadir  $\mathbf{f}^N(\mathbf{x}) = [f_1(x_2^*), f_2(x_1^*)]$  contém os valores não ótimos de cada função objetivo, representando a pior solução possível no espaço viável. Os pontos Utopia  $\mathbf{f}^U(\mathbf{x})$  e Nadir  $\mathbf{f}^N(\mathbf{x})$  são usados para normalizar as funções objetivos originais  $f_i(\mathbf{x})$  de acordo com a seguinte interpolação linear:

$$\bar{f}_i(\mathbf{x}_i) = \frac{f_i(\mathbf{x}) - f_i^U(\mathbf{x})}{f_i^N(\mathbf{x}) - f_i^U(\mathbf{x})} \quad (28)$$

A Fronteira de Pareto, e alguns elementos importantes para o NBI, encontram-se representados na **Figura 13**.

**Figura 13: Descrição gráfica do método NBI**



Fonte: Adaptado de Bacci *et al.* (2019).

A formulação do método NBI para um problema com apenas duas funções objetivo pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
& \text{Min}_{\mathbf{x} \in \Omega} \bar{f}_1(\mathbf{x}) \\
& \text{S. t.}: \bar{f}_1(\mathbf{x}) - \bar{f}_2(\mathbf{x}) + 2\beta_i - 1 = 0 \\
& \quad g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \\
& \quad 0 \leq \beta_i \leq 1
\end{aligned} \tag{29}$$

Após executar todas as iterações do método NBI, várias alternativas viáveis e ótimas para a relação de compromisso dual entre a média e a variância da vida da ferramenta estarão disponíveis. Essas soluções podem ser discriminadas, agrupadas e classificadas de acordo com sua capacidade de atingir ambos os objetivos usando algoritmos de tomada de decisão, como a TOPSIS (Ahmadi *et al.*, 2015; Gaudêncio, Almeida *et al.*, 2019).

No contexto da TOPSIS, a melhor solução entre as soluções ótimas de Pareto será a alternativa que estiver simultaneamente mais próxima do ponto Utopia e mais distante do ponto Nadir (ou Pseudo-Nadir) (Ahmadi *et al.*, 2015; Gaudêncio *et al.*, 2019). A relação entre essas duas métricas de distância pode ser expressa matematicamente pela **Eq. (30)**.

$$d = \frac{\rho^{(-)}}{\rho^{(-)} + \rho^{(+)}} \tag{30}$$

Onde  $\rho^{(+)}$  é a distância da solução de Pareto até o ponto de Utopia e  $\rho^{(-)}$  é a distância até o ponto de Nadir ou Pseudo-Nadir. Os valores obtidos previamente indicam quão longe a solução não-dominada satisfaz o  $i^{\text{th}}$  objetivo. Quanto maior o valor da função (**d**), melhor é o candidato ao status de Pareto-ótimo. Neste trabalho, é sugerido que  $\rho^{(+)}$  e  $\rho^{(-)}$  sejam calculados como uma Distância Generalizada(GD),  $\rho[\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varphi}]$ , (Khuri e Conlon, 1981), considerando o vetor de solução  $\mathbf{x}$ , um vetor que contém as funções objetivo individuais,  $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ , o vetor-alvo  $\boldsymbol{\varphi}$ , e a matriz de covariância estimada dos dados de média e variância  $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ , de modo que:

$$\rho[f(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varphi}] = \sqrt{\frac{[\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varphi}]^T \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} [\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varphi}]}{\mathbf{z}^T(\mathbf{x}) (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{z}(\mathbf{x})}} \tag{31}$$

Onde:  $\boldsymbol{\varphi}^T(\mathbf{x}) = [f_1^*(\mathbf{x}_1^*), f_2^*(\mathbf{x}_2^*), \dots, f_r^*(\mathbf{x})]$ ,  $\hat{\mathbf{F}}^T(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_r(\mathbf{x})]$  e  $\mathbf{z}^T(\mathbf{x})$ . A matriz de variância-covariância das respostas esperadas,  $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ , pode ser obtida utilizando a **Eq. (32)**:

$$\tilde{\Sigma} = \frac{\mathbf{Y}^T [\mathbf{I}_n - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T] \mathbf{Y}}{(n - p)} \quad (32)$$

Onde:  $\mathbf{X}$  representa a matriz de delineamento experimental (um CCD, por exemplo),  $\mathbf{Y}$  é o vetor contendo os dados de média e variância da vida da ferramenta,  $n$  é o número de experimentos e  $p$  é o número de coeficientes nos modelos preditos para cada superfície de resposta.

## 5. APLICAÇÃO DA METODOLOGIA DE MODELAGEM E OTIMIZAÇÃO DA VIDA DA FERRAMENTA

Este capítulo apresenta a aplicação da metodologia de modelagem e otimização da vida da ferramenta proposta neste trabalho. Inicialmente, descreve-se o estudo de caso selecionado, incluindo as características do processo de usinagem, os materiais envolvidos e o planejamento experimental adotado. Em seguida, são aplicados os métodos de modelagem desenvolvidos para representar simultaneamente a média e a variância da vida da ferramenta, considerando a presença de heterocedasticidade nos dados experimentais. A partir dos modelos obtidos, realiza-se a comparação entre as diferentes abordagens estatísticas empregadas e procede-se à etapa de otimização multiobjetivo, com o objetivo de identificar condições operacionais que maximizem a vida média da ferramenta e, simultaneamente, minimizem sua variabilidade. Por fim, os resultados são analisados e discutidos à luz da literatura, destacando as contribuições da metodologia proposta para a modelagem e a tomada de decisão em processos de usinagem.

### 5.1. Torneamento do aço AISI H13 endurecido

Como estudo de caso de acompanhamento para a modelagem e otimização da vida da ferramenta, apresenta-se a operação de torneamento de barras cilíndricas de aço AISI H13 temperado ( $\Phi$  50 mm  $\times$  100 mm) realizada por Campos (2015). As barras cilíndricas apresentam composição química de 0,40% C, 0,35% Mn, 1,00% Si, 5,25% Cr, 1,00% V e 1,50% Mo. As peças de trabalho de AISI H13 utilizadas nos experimentos foram previamente temperadas em atmosfera a vácuo em uma faixa de 1000–1040 °C e posteriormente revenidas, atingindo dureza média de  $54 \pm 1$  HRC.

Para fins de comparação, o mesmo CCD foi replicado para sete diferentes tipos de pastilhas (**Figura 14**) seguindo os mesmos parâmetros e níveis descritos na **Tabela 2**. A descrição das características de cada uma das pastilhas utilizadas é apresentada na **Tabela 1**. Cada pastilha possui quatro arestas de corte disponíveis por ferramenta e é substituída após atingir um desgaste máximo de flanco de  $VB_{\max} = 0,30$  mm, que é o critério de fim de vida adotado ao longo deste trabalho.

Figura 14: Amostra das sete pastilhas utilizadas no torneamento do aço AISI H13 endurecido



Fonte: Adaptado de Campos (2015).

Tabela 1: Pastilhas usadas para torneamento do aço AISI H13 endurecido

Cerâmica	Geometria ISO	Composição Química
CC6050	CNGA120408 S01525	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> + TiN
CC 6050 ( <i>Wiper</i> )	CNGA120408 S01525WH	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> + TiN
CC 650	CNGA120408 T01020	70% Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> + Ti [22.5% C, 7.5% N]
CC 650 ( <i>Wiper</i> )	CNGA120408 T01020WG	70% Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> + Ti [22.5% C, 7.5% N]
CC 670	CNGN 120408 T01020	80% Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> + 20% SIC <sub>w</sub>
PCBN	Padrão ISO	Composição Química
PCBN 7025	CNGA 120408 S01030A	CBN + TiC
PCBN 7025 ( <i>Wiper</i> )	CNGA 120408 S01030 AWG	CBN + TiC

Um CCD com 19 experimentos foi realizado para obter o desgaste e a vida da ferramenta em cada execução. A **Tabela 2** apresenta as variáveis de controle consideradas no experimento, bem como seus respectivos níveis experimentais codificados e valores reais.

Após a execução dos experimentos, para cada uma das sete ferramentas de corte avaliadas, foram obtidos os valores de vida da ferramenta correspondentes a cada combinação experimental. As ferramentas analisadas foram PCBN 7025, PCBN 7025W,

CC6050, CC6050W, CC650, CC650W e CC670. Para cada execução experimental, a vida da ferramenta foi medida em minutos, considerando o critério de fim de vida previamente estabelecido para o processo de usinagem.

Os resultados obtidos para a variável resposta vida da ferramenta são apresentados na **Tabela 3**. Cada linha da tabela corresponde a uma execução experimental do planejamento CCD, contendo os valores das variáveis de entrada velocidade de corte ( $V_c$ ), avanço ( $f$ ) e profundidade de corte ( $ap$ ), bem como as respectivas respostas de vida da ferramenta para cada uma das sete pastilhas analisadas.

**Tabela 2: Variáveis de controle utilizadas no experimento**

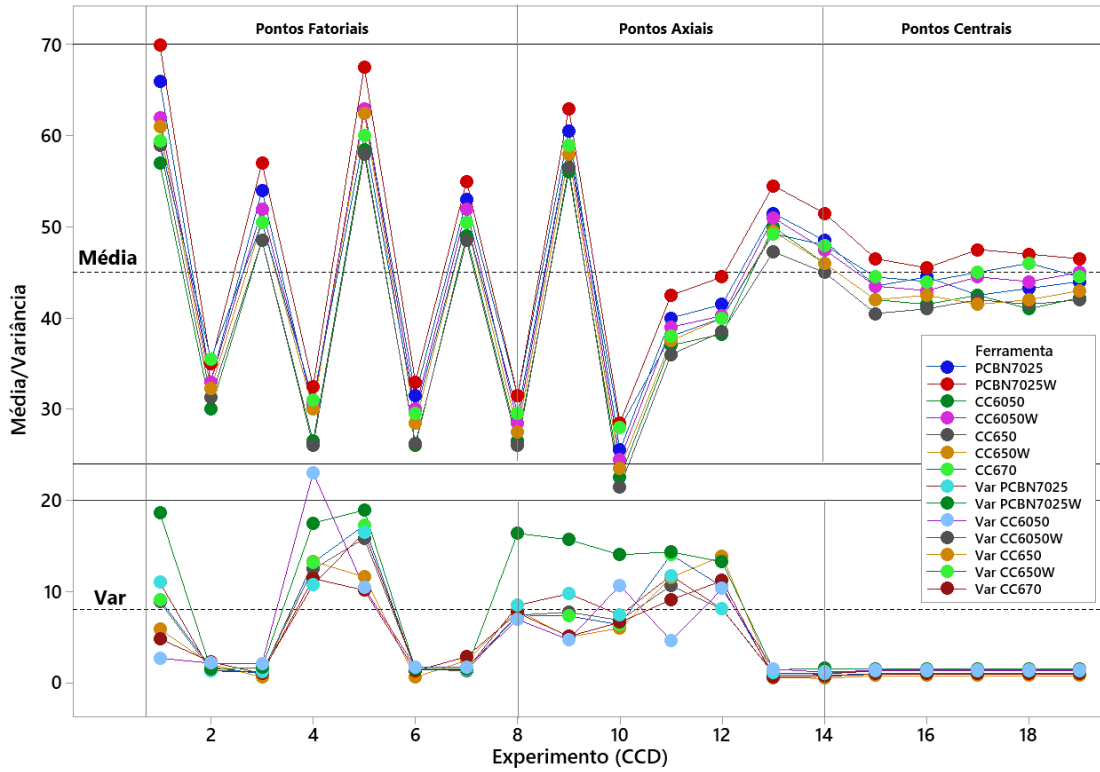
Variáveis de controle	Símbolo	Unidade	Níveis Experimentais				
			-1,682	-1,000	0,000	1,000	1,682
Velocidade de corte	$V_c$	m/min	57,390	100,000	150,000	225,000	267,610
Avanço	$f$	mm/rev	0,060	0,100	0,150	0,225	0,270
Profundidade de corte	$ap$	mm	0,090	0,150	0,225	0,330	0,390

Fonte: Campos (2015)

**Tabela 3: CCD para vida da ferramenta das sete ferramentas usadas no torneamento do AISI H13**

Fatores				Respostas: Vida (min.)						
N	$V_c$	$f$	$ap$	PCBN 7025	PCBN 7025W	CC6050	CC6050W	CC650	CC650W	CC670
1	100,00	0,10	0,15	66,00	70,00	57,00	62,00	59,00	61,00	59,50
2	225,00	0,10	0,15	33,00	35,00	30,00	33,00	31,25	32,25	35,50
3	100,00	0,22	0,15	54,00	57,00	48,50	52,00	48,50	50,50	50,50
4	225,00	0,22	0,15	30,00	32,50	26,50	30,50	26,00	30,00	31,00
5	100,00	0,10	0,33	63,00	67,50	58,50	63,00	58,00	62,50	60,00
6	225,00	0,10	0,33	31,50	33,00	26,00	30,00	26,25	28,50	29,50
7	100,00	0,22	0,33	53,00	55,00	49,00	52,00	48,50	50,50	50,50
8	225,00	0,22	0,33	31,50	31,50	26,50	28,50	26,00	27,50	29,50
9	57,39	0,16	0,24	60,50	63,00	56,00	59,00	56,50	58,00	59,00
10	267,61	0,16	0,24	25,50	28,50	22,50	24,50	21,50	23,50	28,00
11	162,50	0,05	0,24	40,00	42,50	37,00	39,00	36,00	37,50	38,00
12	162,50	0,26	0,24	41,50	44,50	38,25	40,25	38,50	40,00	40,00
13	162,50	0,16	0,09	51,50	54,50	50,00	51,00	47,25	49,50	49,25
14	162,50	0,16	0,39	48,50	51,50	46,00	47,50	45,00	46,00	48,00
15	162,50	0,16	0,24	43,50	46,50	42,00	43,50	40,50	42,00	44,50
16	162,50	0,16	0,24	44,50	45,50	41,50	43,00	41,00	42,50	44,00
17	162,50	0,16	0,24	42,50	47,50	42,50	44,50	42,00	41,50	45,00
18	162,50	0,16	0,24	43,25	47,00	41,00	44,00	41,50	42,00	46,00
19	162,50	0,16	0,24	44,00	46,50	42,25	45,00	42,00	43,00	44,50

Figura 15: Média e variância para a vida de sete ferramentas de corte diferentes



Fonte: Autora (2026).

Tabela 4: Valores absolutos para os resíduos da vida de cada ferramenta de usinagem

n	PCBN 7025	PCBN 7025W	CC6050	CC6050W	CC650	CC650W	CC670
1	2,818	3,654	0,943	2,410	2,136	2,530	1,965
2	0,298	0,108	0,325	0,327	0,935	0,712	1,013
3	0,110	0,231	0,289	0,013	0,121	0,065	0,341
4	2,911	3,564	4,058	3,070	3,322	3,257	3,111
5	3,393	3,741	2,971	3,358	3,069	3,588	2,798
6	0,372	0,055	0,797	0,275	0,133	0,395	0,654
7	0,185	0,068	0,761	0,039	1,188	0,382	1,326
8	2,336	3,477	2,030	2,122	2,389	2,200	2,278
9	3,636	4,490	2,227	3,276	2,438	3,213	2,398
10	2,954	4,240	3,764	2,868	2,797	2,746	2,840
11	3,859	4,343	2,184	3,649	3,693	4,137	3,197
12	3,177	4,094	3,720	3,241	4,052	3,670	3,639
13	0,045	0,170	1,694	0,329	0,099	0,207	0,275
14	0,727	0,080	0,157	0,736	0,259	0,674	0,717
15	0,027	0,091	0,097	0,486	0,912	0,184	0,315
16	0,973	1,091	0,403	0,986	0,412	0,316	0,815
17	1,027	0,909	0,597	0,514	0,588	0,684	0,185
18	0,277	0,409	0,903	0,014	0,088	0,184	1,185
19	0,473	0,091	0,347	1,014	0,588	0,816	0,315
MSE <sub>(T)</sub>	9,269	14,245	8,200	8,569	8,737	9,531	7,785
R <sup>2</sup> ( e <sub>i</sub>  )	89,630	91,640	86,560	88,120	94,650	91,730	92,280
[1-R <sup>2</sup> ( e <sub>i</sub>  )]×MSE <sub>(T)</sub>	0,9612	1,1906	1,1018	1,0177	0,4670	0,7884	0,6008

**Tabela 5: Variâncias estimadas para a vida de cada ferramenta de usinagem**

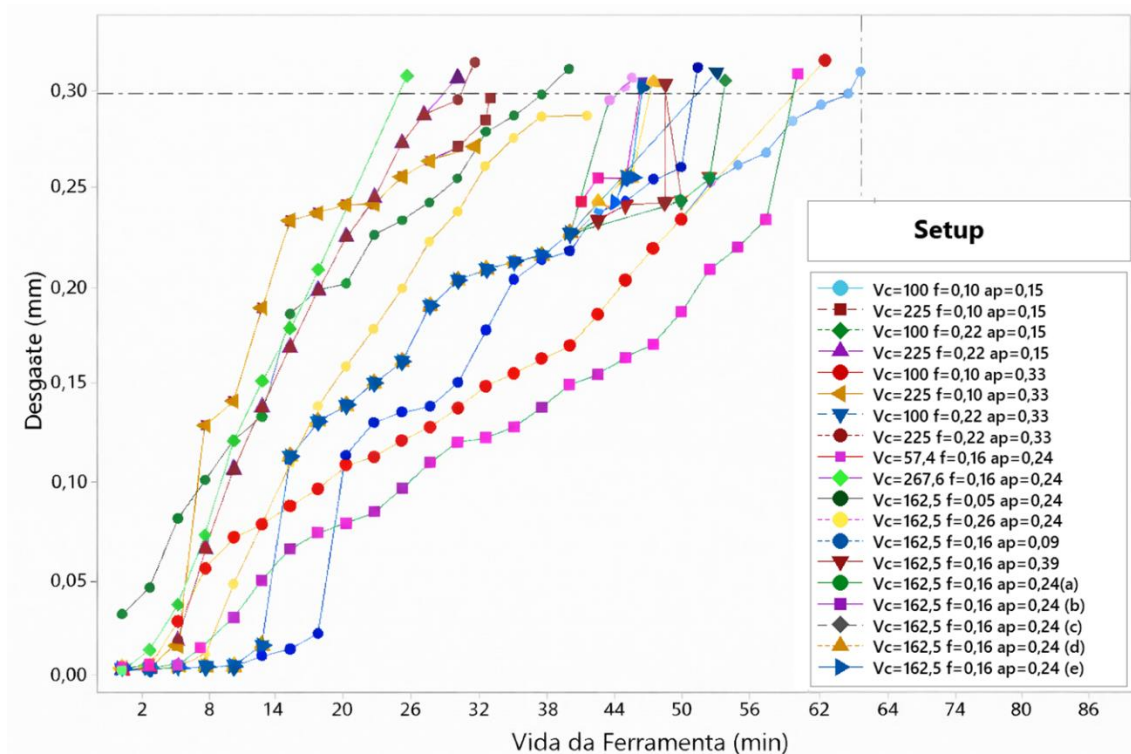
N	PCBN 7025	PCBN 7025W	CC6050	CC6050W	CC650	CC650W	CC670	$\lambda$
1	11,035	18,650	2,692	8,876	5,879	9,123	4,829	0,637
2	1,302	1,513	2,152	1,397	2,035	1,699	2,302	1,449
3	1,186	1,630	2,109	1,191	0,618	0,985	1,001	1,449
4	10,761	17,505	23,027	12,452	13,311	13,186	11,429	3,226
5	16,472	18,930	10,397	15,821	11,604	17,270	10,148	0,637
6	1,560	1,514	1,718	1,471	0,624	1,353	1,295	1,449
7	1,402	1,498	1,685	1,322	2,430	1,555	2,866	1,449
8	8,499	16,386	6,930	7,419	7,915	7,437	7,667	3,226
9	9,767	15,692	4,728	7,741	5,027	7,323	5,085	0,595
10	7,413	14,035	10,673	6,862	5,985	6,371	6,628	2,778
11	11,740	14,354	4,632	10,636	11,561	14,058	9,107	0,595
12	8,094	13,241	10,299	8,067	13,887	10,546	11,190	2,778
13	1,060	1,439	1,500	1,031	0,536	0,820	0,601	1,695
14	0,961	1,538	1,153	1,020	0,484	0,789	0,711	1,695
15	1,312	1,509	1,355	1,429	0,762	1,012	0,944	1,695
16	1,312	1,509	1,355	1,429	0,762	1,012	0,944	1,695
17	1,312	1,509	1,355	1,429	0,762	1,012	0,944	1,695
18	1,312	1,509	1,355	1,429	0,762	1,012	0,944	1,695
19	1,312	1,509	1,355	1,429	0,762	1,012	0,944	1,695

**Nota:** o parâmetro  $\lambda$  é a média de uma variável aleatória de Poisson e representa o número médio de passagens de torneamento por minuto em uma direção de corte longitudinal.  $\lambda$  também é igual ao inverso de  $C_t$ .

A **Figura 15** mostra o comportamento da média e da variância da vida da ferramenta ao longo das dezenove experiências realizadas. É possível observar que a dinâmica de cada série temporal associada à média apresenta comportamento semelhante e elevado grau de correlação entre as diferentes pastilhas analisadas, indicando que a vida da ferramenta responde de maneira consistente às condições de corte avaliadas, independentemente do inserto empregado. Por outro lado, a variância exibe um comportamento mais heterogêneo, com variações mais pronunciadas para a pastilha PCBN7025W em determinadas configurações experimentais.

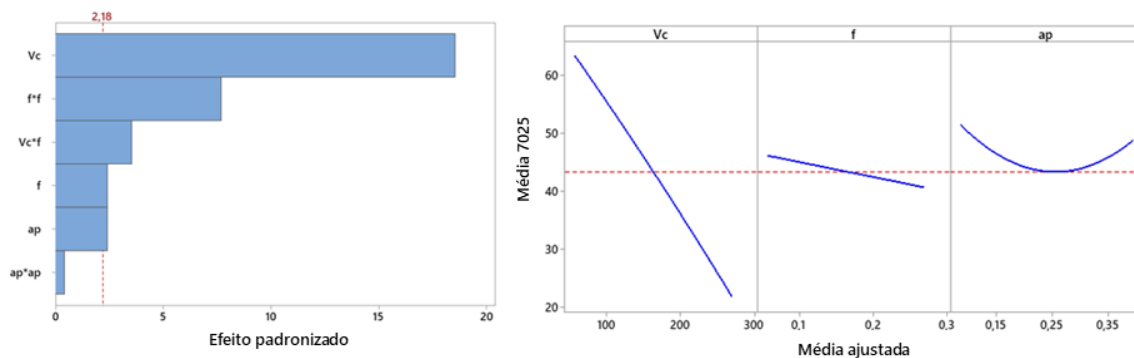
Os valores da variância mostrada na **Figura 15** foram obtidos a partir de valores absolutos para os resíduos provenientes dos modelos de média da vida da ferramenta (**Tabela 4**). Em seguida, aplicou-se o método POE, resultando nos dados de resposta da **Tabela 5**. A vida da ferramenta em cada execução experimental foi determinada no momento em que o desgaste máximo de flanco atingiu um  $VB_{max}$  de aproximadamente 0,30 mm. A **Figura 16** mostra as curvas de vida da ferramenta para cada execução experimental realizada durante o torneamento de AISI H13 com insertos PCBN 7025.

**Figura 16: Comportamento do desgaste da ferramenta PCBN 7025 para cada configuração de usinagem do CCD**



Fonte: Autora (2026).

**Figura 17: Gráfico de Pareto e gráfico do efeito principal para a vida da pastilha PCN 7025**



Fonte: Autora (2026).

Observa-se na **Figura 16** que a curva mais íngreme ocorre em uma configuração formada por  $Vc=267,6$  m/min,  $f=0,16$  mm/rev e  $ap=0,24$  mm, enquanto a mais suave (representada em cor rosa) é alcançada quando a velocidade de corte cai para to  $Vc=57,4$  m/min, mantendo  $f$  e  $ap$  nos mesmos valores, como esperado. O comportamento estável das curvas de vida da ferramenta é verificado pelos pontos centrais. Nessa condição, as curvas apresentaram inclinação intermediária, mostrando que, com uma taxa de remoção

de material intermediária, também é possível atingir vidas úteis intermediárias da ferramenta. Em geral,  $V_c$  é o fator mais importante para explicar a vida da ferramenta PCBN 7025, seguido pelo efeito da taxa de avanço ao quadrado ( $f^2$ ) e a interação entre  $V_c$  e  $f$  (**Figura 17**).

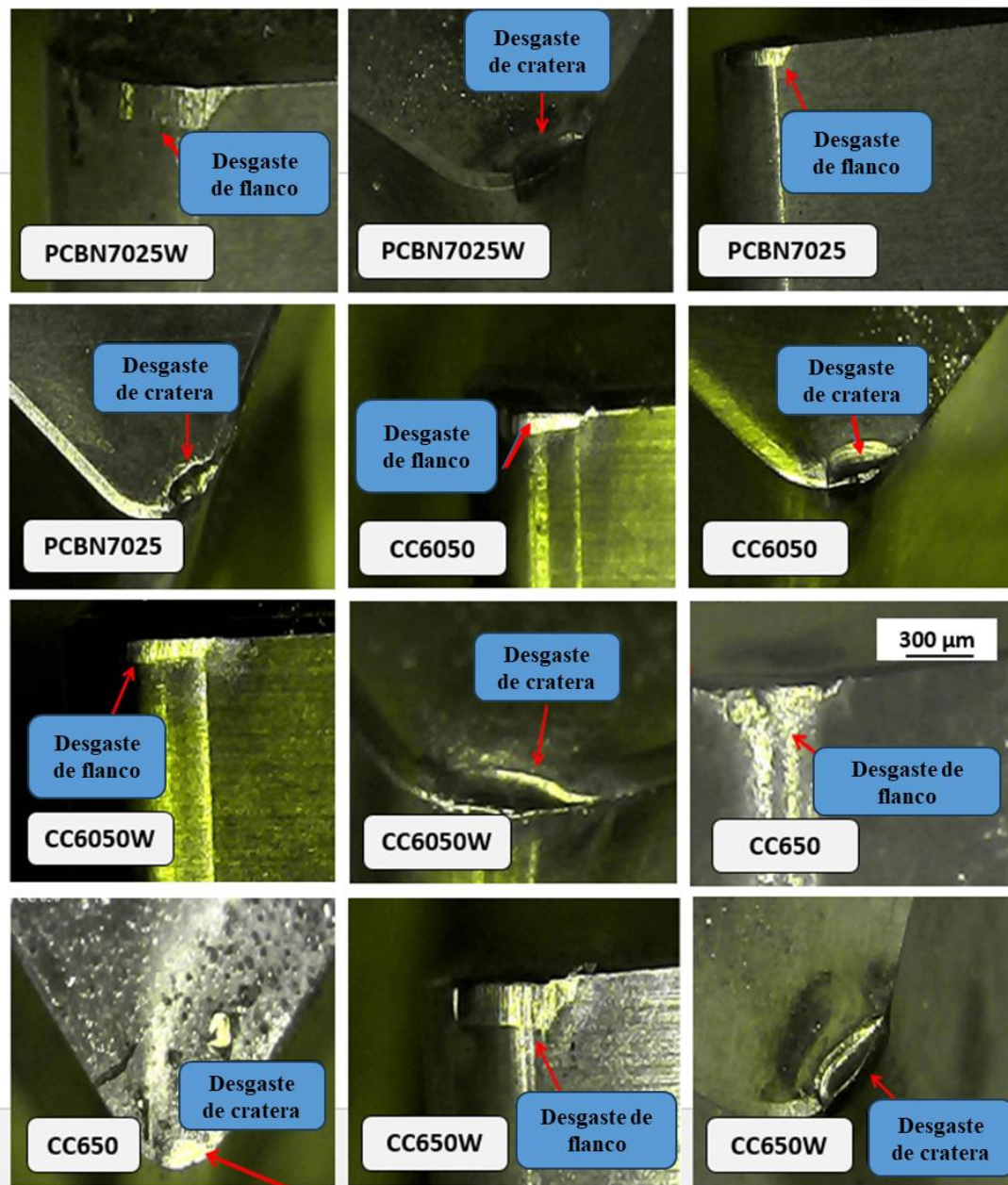
A **Figura 18** apresenta imagens microscópicas das arestas de corte das diferentes pastilhas analisadas após os ensaios de usinagem. As micrografias permitem observar as condições da aresta de corte após o processo de torneamento do aço endurecido AISI H13, evidenciando os principais mecanismos de desgaste associados ao contato entre ferramenta, cavaco e peça. A análise visual dessas imagens contribui para a compreensão dos mecanismos responsáveis pela degradação progressiva das ferramentas ao longo do processo de usinagem.

De maneira geral, observam-se predominantemente dois tipos de desgaste característicos em ferramentas de corte: o desgaste de flanco e o desgaste de cratera. O desgaste de flanco ocorre na face de folga da ferramenta e está diretamente relacionado ao atrito entre a aresta de corte e a superfície recém-usinada da peça. Esse tipo de desgaste tende a evoluir de forma relativamente gradual ao longo do tempo de corte e é frequentemente utilizado como critério para definição do fim de vida da ferramenta. Já o desgaste de cratera se desenvolve na face de saída da ferramenta, sendo associado principalmente ao escoamento do cavaco sobre essa superfície, além de fenômenos de difusão, adesão e abrasão em condições de elevada temperatura.

As imagens também evidenciam a ocorrência desses mecanismos de desgaste em diferentes materiais de ferramenta utilizados no estudo, incluindo insertos de PCBN (PCBN7025 e PCBN7025W) e insertos cerâmicos (CC6050, CC6050W, CC650 e CC650W). De modo geral, observa-se que ambos os tipos de desgaste podem ocorrer simultaneamente, embora sua predominância possa variar de acordo com o material da ferramenta e as condições de corte empregadas. Nos insertos de PCBN, por exemplo, observa-se frequentemente a presença de desgaste de flanco bem definido, acompanhado em alguns casos por formação de cratera. Já nos insertos cerâmicos, dependendo da configuração analisada, também são observadas regiões de desgaste de cratera mais pronunciadas.

A escala apresentada na figura permite visualizar a extensão dos danos na aresta de corte, evidenciando a degradação progressiva da ferramenta ao longo do processo de usinagem.

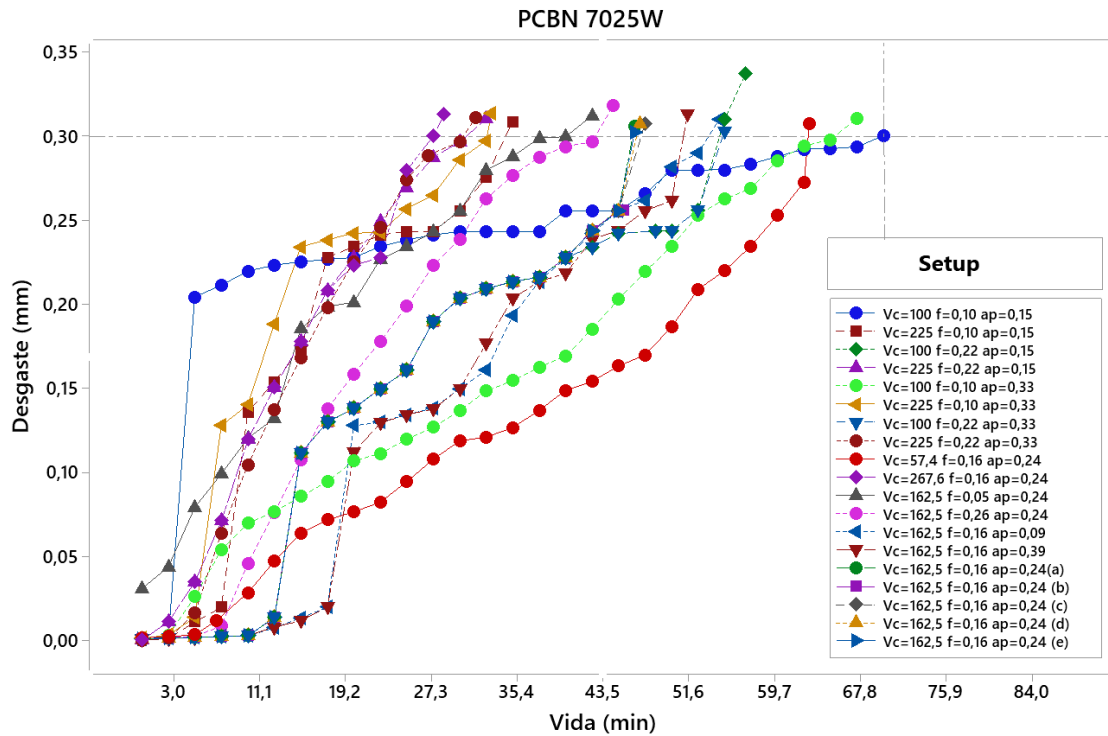
Figura 18: Comportamento do desgaste da ferramenta lateral PCBN 7025 (Ampliação: 500x)



Fonte: Adaptado de Campos (2015).

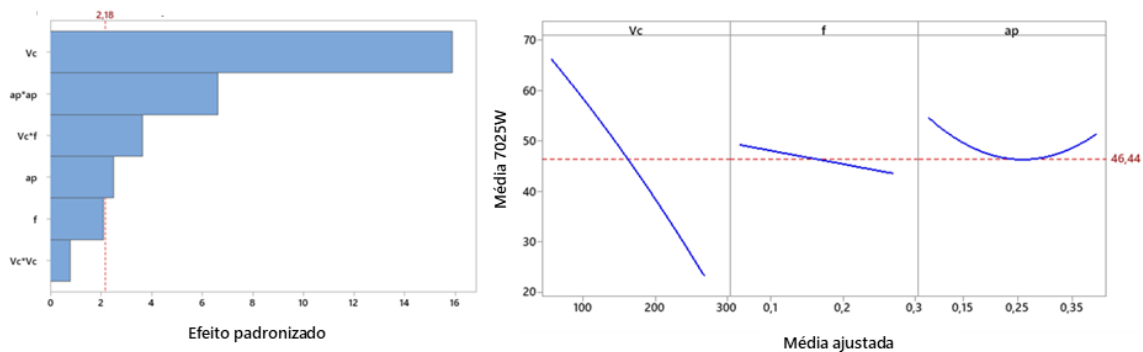
A **Figura 19** apresenta as curvas de vida da ferramenta PCBN 7025W. É possível observar que a curva mais íngreme também ocorre em uma configuração  $V_c=267,6$  m/min,  $f=0,16$  mm/rev and  $ap=0,24$  mm, enquanto a mais suave é alcançada quando  $V_c=100$  m/min,  $f=0,10$  mm/rev e  $ap=0,15$  mm, superando o desempenho de velocidades de corte mais baixas, como  $V_c=57,4$  m/min, combinadas com uma taxa de avanço de  $f=0,16$  mm/rev e uma profundidade de corte  $ap=0,24$  mm.

**Figura 19: Comportamento do desgaste da ferramenta PCBN 7025W em cada configuração de usinagem CCD**



Fonte: Autora (2026).

**Figura 20: Gráfico de Pareto e gráfico do efeito principal para a vida da pastilha PCBN 7025W**



Fonte: Autora (2026).

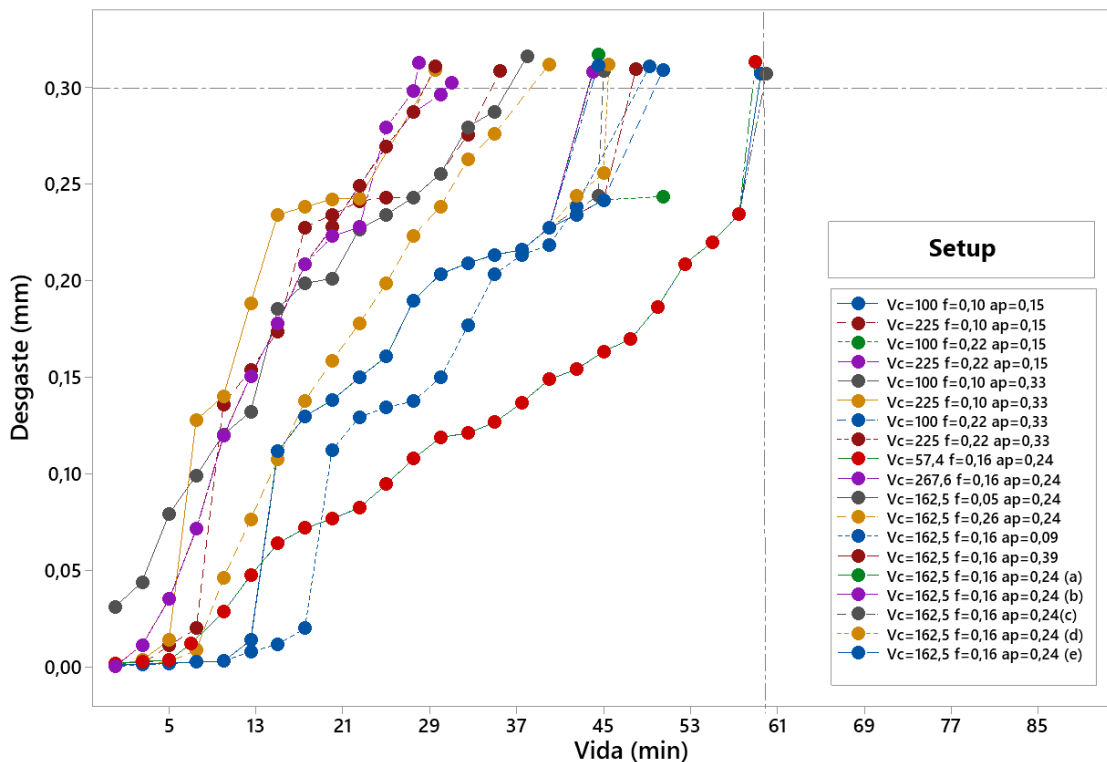
Analogamente ao PCBN 7025, para o caso do *wiper*,  $V_c$  também é o fator mais importante para explicar a vida da ferramenta, seguido pela profundidade de corte quadrada ( $ap^2$ ) e a interação entre  $V_c$  e  $f$  (Figura 20). Enquanto o inserto PCBN apresenta vida da ferramenta de aproximadamente 65 min, o inserto do tipo *Wiper* é capaz de atingir 69,7 min, um valor 6,7% superior ao do inserto convencional, considerando condições de corte caracterizadas por baixo nível de energia e taxa de remoção de material controlada. O fato de o PCBN 7025W operar por mais de uma hora antes da necessidade de

substituição constitui um aspecto relevante para aplicações industriais, uma vez que contribui para a redução de paradas no processo produtivo. Consequentemente, essa maior durabilidade pode resultar em aumento da produtividade, permitindo a fabricação de um maior número de peças sob as mesmas condições operacionais.

De forma semelhante ao observado para o inserto PCBN 7025W, a análise das curvas de desgaste apresentadas na **Figura 21** indica que a  $V_c$  é o fator mais influente na vida da ferramenta. Observa-se que maiores valores de  $V_c$  resultam em inclinações mais acentuadas nas curvas de desgaste, indicando aumento da taxa de desgaste e, conseqüentemente, redução da vida da ferramenta. Esse comportamento está associado ao aumento da temperatura e das tensões na zona de corte, que intensificam os mecanismos de desgaste.

Além disso, os parâmetros  $f$  e  $ap$  também influenciam a evolução do desgaste, especialmente quando associados a maiores taxas de remoção de material. Em contraste, condições intermediárias de corte, próximas aos pontos centrais do planejamento experimental, apresentam curvas com inclinação mais moderada, indicando comportamento mais estável da ferramenta ao longo do processo de usinagem.

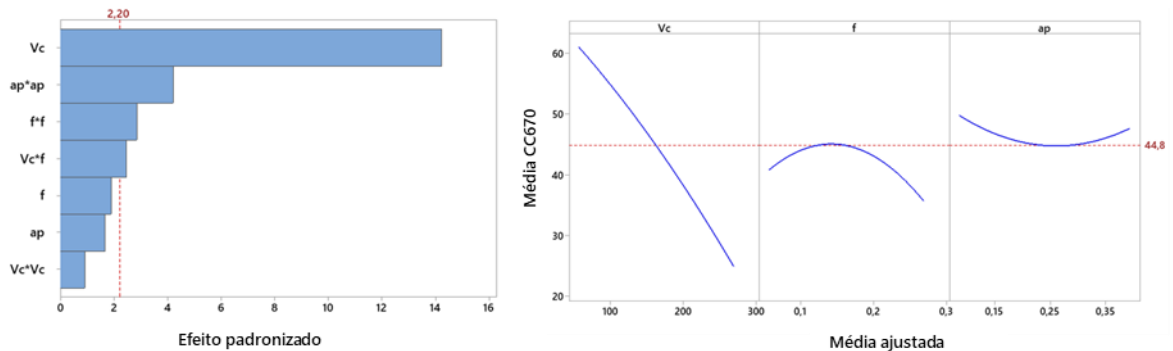
**Figura 21: Comportamento do desgaste da ferramenta CC670 e mecanismos de desgaste**



Fonte: Autora (2026).

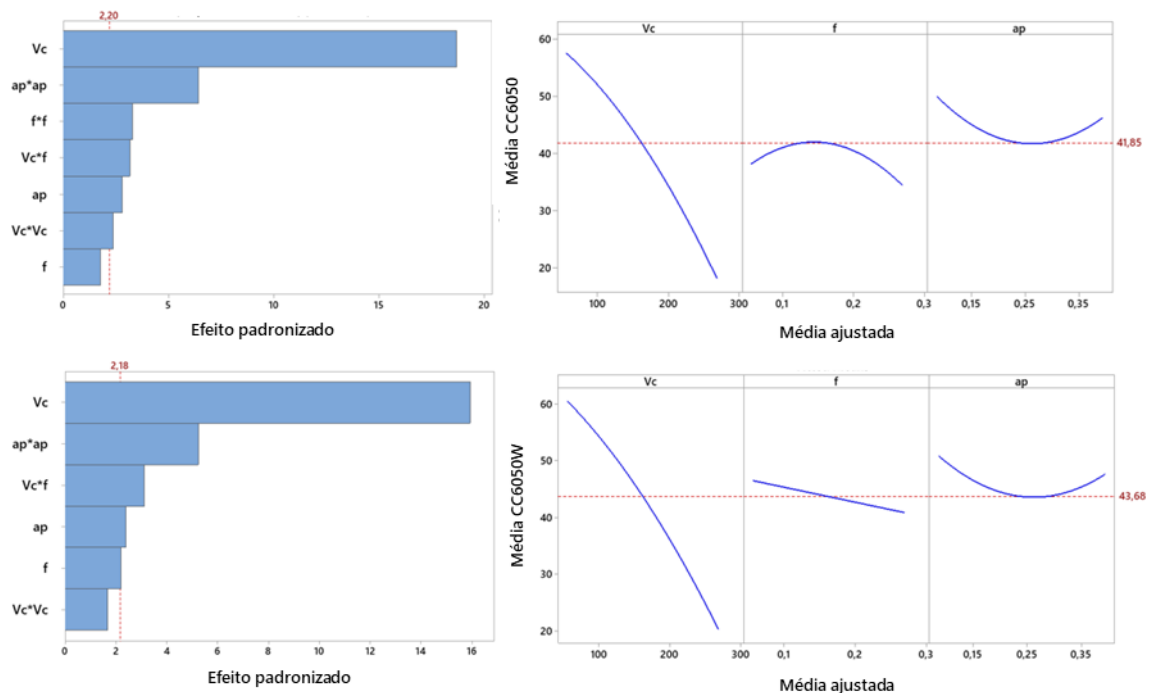
As **Figura 22 a 24** apresentam os gráficos de Pareto e os efeitos principais para os insertos CC670, CC6050 (nas geometrias *wiper* e convencional) e CC650 (também nas geometrias *wiper* e convencional). De modo geral, observa-se um comportamento semelhante no desgaste de flanco da ferramenta entre esses insertos, indicando que, sob as condições de corte avaliadas, essas pastilhas apresentam desempenho comparável. Esse resultado sugere que tais ferramentas podem ser utilizadas de forma intercambiável na operação de torneamento do aço AISI H13, sem diferenças relevantes no comportamento de desgaste.

**Figura 22: Comportamento do desgaste da ferramenta CC670 de acordo com cada configuração de usinagem**



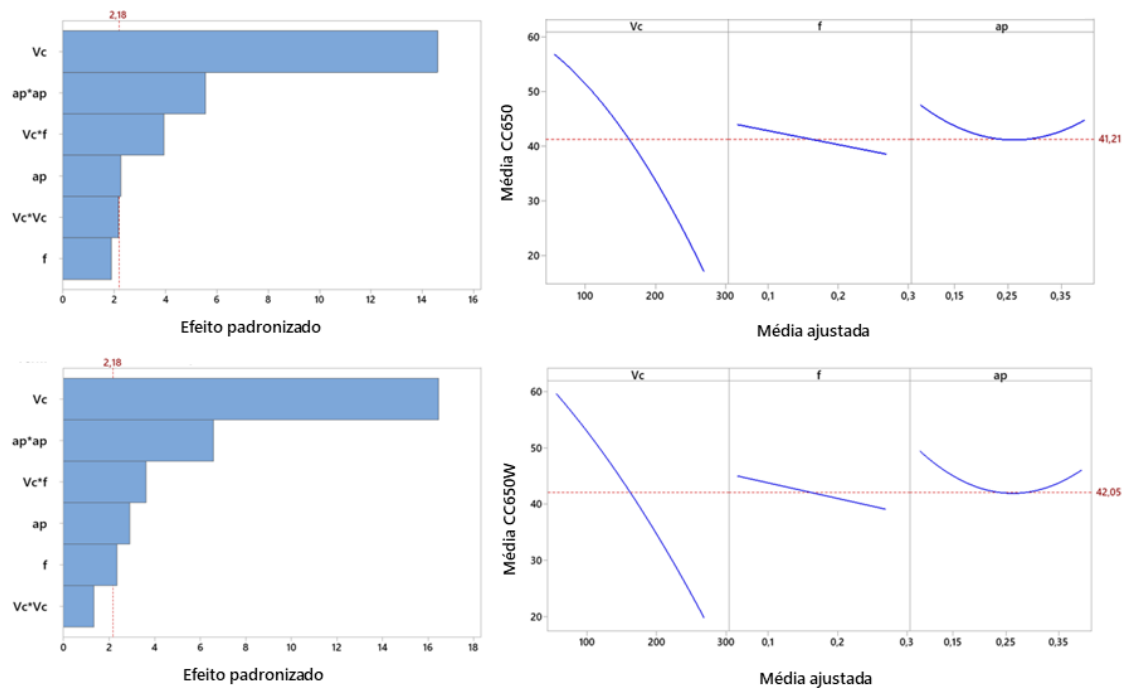
Fonte: Autora (2026).

**Figura 23: Comportamento do desgaste da ferramenta CC6050 convencional e Wiper**



Fonte: Autora (2026).

**Figura 24: Comportamento do desgaste da ferramenta CC650 convencional e *Wiper***



Fonte: Autora (2026).

## 5.2. Modelagem da vida de ferramenta e comparação entre os métodos

Para atingir os objetivos deste estudo, os dados sobre a vida da ferramenta foram submetidos a modelagem em cenários heterocedásticos de acordo com quatro algoritmos distintos: (a) OLS, (b) POE-WLS, (c) POE-GLM e (d) REML-GLM. Essas abordagens foram seguidas por um procedimento “*Stepwise*” para a eliminação dos coeficientes não significativos, utilizando  $\alpha=5\%$  e P-Valor  $< \alpha$  como critérios para a remoção dos termos. Na avaliação dos modelos apresentados nas **Tabela 6 a 9**, foram considerados os valores críticos da estatística F ao nível de significância de 5%, sendo  $F(0,05,5, 4) = 6,256$ ;  $F(0,05,7, 4) = 6,094$ ;  $F(0,05, 8, 4) = 6,04$ ;  $F(0,05, 9, 4) = 5,99$ . Além disso, os coeficientes  $R^2$ ,  $R^2_{adj}$  e  $R^2_{pred}$  são dados em porcentagem.

**Tabela 6: Resumo estatístico da capacidade preditiva do modelo quadrático completo**

Métrica	PCBN 7025				PCBN 7025W			
	OLS	OLS ( $ e_i $ )	POE WLS	POE Stepwise	OLS	OLS ( $ e_i $ )	POE WLS	POE Stepwise
$R^2$	96,47	89,63	98,36	98,24	95,08	91,64	98,12	98,10
$R^2_{adj.}$	92,95	79,26	96,71	97,36	90,16	83,28	96,24	97,15
$R^2_{pred.}$	73,79	33,91	93,05	96,21	63,13	44,92	92,53	96,20
S	3,044	0,656	1,034	0,926	3,774	0,771	1,024	0,891
F (LOF)	28,22	3,27	3,59	2,44	45,82	4,20	4,38	2,77

Métrica	CC6050				CC6050W			
	OLS	OLS ( $ e_i $ )	POE WLS	POE Stepwise	OLS	OLS ( $ e_i $ )	POE WLS	POE Stepwise
$R^2$	96,57	86,56	98,57	98,56	96,59	88,12	98,34	98,34
$R^2_{adj.}$	93,14	73,13	97,13	97,41	93,17	76,25	96,68	97,01
$R^2_{pred.}$	74,12	4,65	93,55	95,42	74,71	22,52	92,85	94,74
S	2,864	0,688	0,944	0,896	2,927	0,667	1,031	0,978
F (LOF)	39,92	8,63	5,19	4,34	23,88	3,88	3,57	2,98

Métrica	CC650				CC650W			
	OLS	OLS ( $ e_i $ )	POE WLS	POE Stepwise	OLS	OLS ( $ e_i $ )	POE WLS	POE Stepwise
$R^2$	96,42	94,65	98,73	98,69	96,18	91,73	98,44	98,34
$R^2_{adj.}$	92,84	89,31	97,47	97,65	92,37	83,46	96,88	97,28
$R^2_{pred.}$	73,13	66,04	92,03	93,62	71,29	42,96	93,62	96,51
S	2,956	0,447	1,095	1,055	3,087	0,595	1,002	0,936
F (LOF)	36,20	3,19	3,07	2,66	51,99	6,54	4,83	3,72

**Tabela 7: Resumo estatístico da capacidade preditiva do modelo quadrático completo do CC670**

Métrica	OLS	OLS ( $ e_i $ )	POE WLS	POE Stepwise
$R^2$	96,16	92,28	97,60	97,31
$R^2_{adj.}$	92,35	84,57	95,21	95,60
$R^2_{pred.}$	71,30	58,82	80,00	84,93
S	2,790	0,460	1,17	1,122
F (LOF)	23,57	1,33	3,25	2,68

**Tabela 8: Resumo estatístico da capacidade preditiva do modelo quadrático completo**

Métrica	PCBN 7025				PCBN 7025W			
	POE GLM	Stepwise	REML GLM	Stepwise	POE GLM	Stepwise	REML GLM	Stepwise
R <sup>2</sup>	98,30	98,19	96,96	96,76	97,93	97,90	95,84	95,79
R <sup>2</sup> <sub>adj.</sub>	96,61	97,28	93,91	95,15	95,85	96,85	94,69	93,69
R <sup>2</sup> <sub>pred.</sub>	92,81	96,03	85,42	92,29	91,68	95,72	79,48	90,02
S	1,035	0,927	0,819	0,731	1,027	0,894	0,802	0,698
F (LOF)	3,66	2,48	4,31	2,90	4,55	2,88	6,49	4,11

Métrica	CC6050				CC6050W			
	POE GLM	Stepwise	REML GLM	Stepwise	POE GLM	Stepwise	REML GLM	Stepwise
R <sup>2</sup>	98,51	98,51	97,50	97,50	98,29	98,29	97,04	96,45
R <sup>2</sup> <sub>adj.</sub>	97,02	97,32	95,00	95,49	96,59	96,93	94,08	94,68
R <sup>2</sup> <sub>pred.</sub>	93,38	95,28	88,39	91,11	92,65	94,54	85,99	91,49
S	0,945	0,897	0,776	0,737	1,032	0,979	0,827	0,784
F (LOF)	5,26	4,39	5,36	4,47	3,63	3,02	3,78	2,93

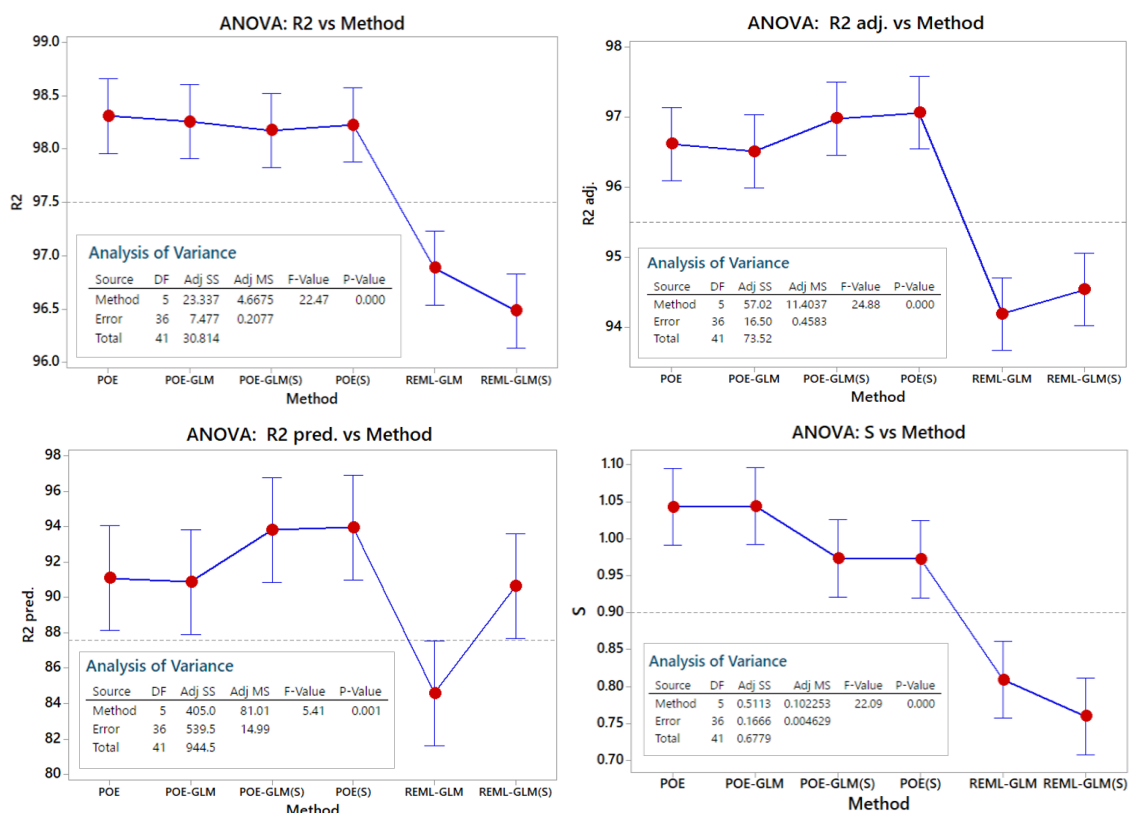
Métrica	CC650				CC650W			
	POE GLM	Stepwise	REML GLM	Stepwise	POE GLM	Stepwise	REML GLM	Stepwise
R <sup>2</sup>	98,69	98,65	97,22	96,13	98,44	98,33	97,05	96,54
R <sup>2</sup> <sub>adj.</sub>	97,39	97,57	94,44	94,2	96,87	97,26	94,09	94,81
R <sup>2</sup> <sub>pred.</sub>	91,64	93,32	86,12	90,19	93,59	96,47	85,5	91,54
S	1,095	1,055	0,802	0,820	1,003	0,939	0,787	0,737
F (LOF)	3,1	2,68	5,14	4,67	4,9	3,78	7,04	5,23

**Tabela 9: Resumo estatístico da capacidade preditiva dos modelos quadráticos completos do CC670**

Métrica	POE GLM	Stepwise	REML GLM	Stepwise
R <sup>2</sup>		97,63	97,35	96,57
R <sup>2</sup> <sub>adj.</sub>		95,27	95,66	93,13
R <sup>2</sup> <sub>pred.</sub>		80,40	85,34	81,12
S		1,170	1,121	0,849
F (LOF)		3,24	2,67	3,93

A análise descritiva dos resultados resumidos nas tabelas anteriores foi complementada pela aplicação da ANOVA, com o objetivo de verificar possíveis diferenças estatisticamente significativas entre os métodos avaliados. Conforme ilustrado na **Figura 25**, os algoritmos de modelagem baseados na abordagem POE apresentaram desempenho superior aos baseados em REML, com valores de coeficiente de determinação aproximadamente 2% maiores. Resultado semelhante é observado para o coeficiente de determinação ajustado (R<sup>2</sup><sub>adj.</sub>). No caso do R<sup>2</sup><sub>pred.</sub>, os modelos baseados em POE também apresentam desempenho superior em comparação aos modelos concorrentes. Entretanto, quando se aplica o procedimento de seleção de variáveis *Stepwise*, os modelos baseados em REML tornam-se estatisticamente equivalentes aos modelos baseados em POE ao nível de significância de  $\alpha=5\%$ .

**Figura 25: ANOVA da métrica de desempenho da previsibilidade estatística *versus* métodos de modelagem**



Fonte: Autora (2026).

O agrupamento formado pelos métodos baseados em POE não apresentou diferenças estatisticamente significativas ao nível de significância de 5% para  $R^2$ ,  $R^2_{adj}$  e  $R^2_{pred}$ . Esse resultado indica que qualquer um dos algoritmos desse grupo (POE, POE-GLM, POE-GLM com *stepwise* e POE com *stepwise*) pode ser considerado equivalente em termos de desempenho para esses critérios. Essa equivalência é assumida com base na sobreposição dos intervalos de confiança de 95% das médias, o que sugere ausência de diferenças estatisticamente significativas entre os métodos avaliados.

No entanto, quando o critério de comparação é o erro padrão da previsão (S), os algoritmos REML baseados em GLM e com o procedimento *Stepwise*, apresentam desempenho inferior em relação aos métodos baseados em POE. Esse resultado é particularmente relevante, uma vez que valores menores de S implicam intervalos de confiança  $(1-\alpha) \%$  mais estreitos e, conseqüentemente, maior precisão preditiva dos modelos.

Embora S e  $R^2$  sejam métricas frequentemente correlacionadas na prática, a divergência observada neste estudo foi interpretada considerando o desempenho global

dos métodos avaliados. Nesse sentido, as abordagens baseadas em POE apresentaram melhor desempenho em três dos quatro critérios de avaliação considerados. Além disso, dado que os algoritmos baseados em POE se mostraram estatisticamente equivalentes entre si, optou-se pela utilização do algoritmo POE com regressão *stepwise* para a modelagem da vida da ferramenta neste estudo de caso.

Com base nesse algoritmo, foram estimados os modelos para a média e para o valor absoluto da resposta. A **Tabela 10** e a **Tabela 11** apresentam os coeficientes da média e do valor absoluto para a vida das sete pastilhas estudadas.

**Tabela 10: Coeficientes para o modelo quadrático completo da média e da variância da vida da ferramenta (Parte I)**

Termos	PCBN7025		PCBN7025W		CC6050		CC6050W	
	$ e_i $	$E[f(x)]$	$ e_i $	$E[f(x)]$	$ e_i $	$E[f(x)]$	$ e_i $	$E[f(x)]$
$\beta_0$	0,592	43,542	0,564	46,567	0,504	41,850	0,642	44,000
$\beta_1$	-0,127	-12,134	-0,067	-12,653	0,354	-11,523	-0,052	-11,775
$\beta_2$	-0,182	-1,521	-0,047	-1,650	0,343	-1,144	-0,133	-1,531
$\beta_3$	0,095	-0,793	-0,027	-0,936	-0,120	-1,105	0,048	-0,946
$\beta_{11}$	0,764	0,000	1,107	0,000	0,705	-1,279	0,659	-0,747
$\beta_{22}$	0,843	-0,767	1,056	-1,120	0,690	-1,836	0,791	-1,399
$\beta_{33}$	-0,264	2,281	-0,392	2,264	-0,026	2,168	-0,239	1,855
$\beta_{12}$	1,312	2,196	1,747	2,692	0,979	2,501	1,288	1,965
$\beta_{13}$	-0,144	0,000	-0,008	0,000	-0,507	-1,086	-0,247	-0,699
$\beta_{23}$	-0,144	0,000	-0,035	0,000	-0,507	0,000	-0,227	0,064

**Tabela 11: Coeficientes para o modelo quadrático completo da média e da variância da vida da ferramenta (Parte II)**

Termos	CC650		CC650W		CC670	
	$ e_i $	$E[f(x)]$	$ e_i $	$E[f(x)]$	$ e_i $	$E[f(x)]$
$\beta_0$	0,543	41,401	0,472	42,112	0,586	44,686
$\beta_1$	0,064	-11,731	-0,058	-11,674	0,100	-10,663
$\beta_2$	0,099	-1,642	-0,154	-1,632	0,100	-1,427
$\beta_3$	0,039	-0,800	0,058	-1,017	0,100	-0,625
$\beta_{11}$	0,601	-0,941	0,703	0,000	0,601	0,000
$\beta_{22}$	1,044	-1,652	1,029	-1,208	0,884	-2,308
$\beta_{33}$	-0,262	1,672	-0,195	1,978	-0,149	1,369
$\beta_{12}$	1,067	1,885	1,253	2,396	0,852	2,160
$\beta_{13}$	-0,467	0,000	-0,344	-0,956	-0,376	-1,340
$\beta_{23}$	0,000	1,156	-0,185	0,000	-0,040	0,000

Com base nos modelos apresentados anteriormente, os resíduos associados aos modelos de média foram armazenados e utilizados para a estimação das variâncias correspondentes. Posteriormente, essas variâncias foram analisadas em função do tempo de corte por passada ( $C_t$ ), o qual é equivalente ao inverso da taxa de Poisson ( $\lambda$ ). Os resultados dessa análise são apresentados nos gráficos da **Figura 26**, e revelaram um comportamento notável.

Para todas as sete ferramentas avaliadas, o logaritmo da variância apresentou elevados valores de  $R^2_{adj}$ , quando modelado em função de  $C_t$ , por meio de um modelo quadrático (modelo de segunda ordem), caracterizando uma função convexa. Conforme ilustrado na **Figura 27** tanto a variância quanto o seu logaritmo assumem valores mais elevados para valores baixos e altos de  $C_t$ , apresentando um mínimo para valores medianos. Considerando que a velocidade de corte é inversamente proporcional ao tempo de corte, valores elevados de  $C_t$  correspondem a baixas velocidades de corte, situação em que a variância da vida da ferramenta tende a ser elevada. Por outro lado, valores baixos de  $C_t$  implicam velocidades de corte mais altas; entretanto, nessa condição a variância também se mantém elevada, ainda que inferior à observada para  $C_t$  muito alto. Assim, a variância mínima ocorre apenas nas proximidades de valores intermediários de  $C_t$ . Esse comportamento foi observado de forma consistente para as sete ferramentas analisadas.

Os gráficos apresentados na **Figura 27** também evidenciam o caráter não linear, e, portanto, heterocedástico, da variação da vida da ferramenta. A vida da ferramenta PCBN 7025 (T), sua respectiva variância,  $Var[T(x)]$ , e o tempo  $C_t$  apresenta os seguintes modelos quadráticos:

$$T = 43.542 - 12.134 Vc - 1.521f - 0.793 ap - 0.767 f^2 + 2.281 ap^2 + 2.196Vc \times f$$

$$Var[T(x)] = 1.166 - 0.874 Vc - 1.073f + 0.255 ap + 2.535Vc^2 + 3.004 f^2 - 0.957Vc \times ap - 0.968f \times ap$$

$$Ct = 0.577 - 0.347Vc - 0.347f + 0.138 Vc^2 + 0.138 f^2 + 0.125Vc \times f$$

Os resíduos quadrados dos modelos médios de vida da ferramenta para as sete pastilhas ( $\epsilon_i^2$ ) obtidos na configuração dos pontos centrais do planejamento experimental, não apresentaram diferenças estatisticamente significativas entre si ao nível de significância considerado (P-valor = 0,965). Esse resultado indica que as distribuições associadas aos resíduos são estatisticamente equivalentes, permitindo que esses valores sejam combinados em uma única amostra representativa. A agregação dessas observações tem como principal objetivo aumentar o poder estatístico dos testes de aderência

utilizados para identificar a distribuição de probabilidade mais adequada para representar o comportamento dos resíduos quadráticos.

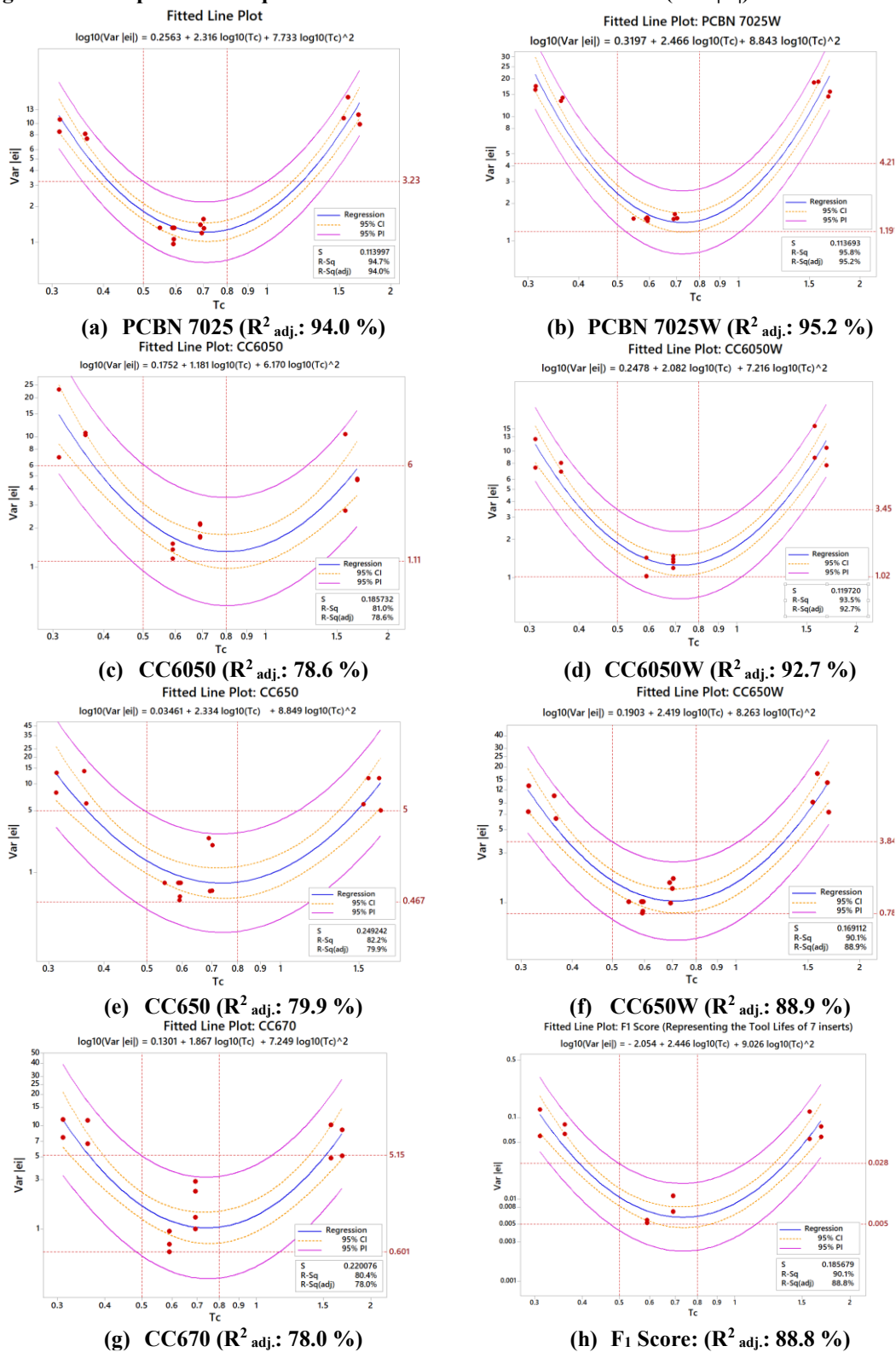
A análise da distribuição dos resíduos quadráticos é particularmente relevante no contexto deste trabalho, pois esses valores estão diretamente associados à modelagem da variância da vida da ferramenta. Em cenários caracterizados por heterocedasticidade, como os observados nos dados experimentais deste estudo, a variância da resposta tende a depender dos níveis das variáveis de entrada e do próprio valor médio da resposta. Dessa forma, a investigação da distribuição de probabilidade dos resíduos quadráticos constitui um passo importante para compreender a estrutura da variabilidade presente nos dados e para selecionar modelos estatísticos capazes de representá-la de maneira adequada.

Considerando que o comportamento dos resíduos segue um modelo quadrático e que esse comportamento está relacionado à taxa de Poisson ( $\lambda$ ), espera-se, conforme discutido na literatura, que esses valores possam ser ajustados por distribuições pertencentes à família Gamma. Entre as distribuições frequentemente associadas a esse tipo de variável estão as distribuições Weibull, Exponencial, Lognormal, Qui-quadrado e Gamma. Essas distribuições apresentam propriedades adequadas para modelar variáveis positivas e assimétricas, características típicas de resíduos quadráticos derivados de modelos estatísticos.

A avaliação do melhor ajuste foi realizada por meio de testes de aderência e critérios estatísticos associados à qualidade do ajuste das distribuições candidatas. Conforme apresentado na **Figura 28**, a distribuição Gamma apresentou o melhor desempenho entre as alternativas consideradas, uma vez que apresentou o maior P-valor ( $> 0,250$ ) e a menor estatística de Anderson–Darling ( $AD = 0,468$ ). Esses resultados indicam que a distribuição Gamma fornece a representação mais adequada para o comportamento observado dos resíduos quadráticos.

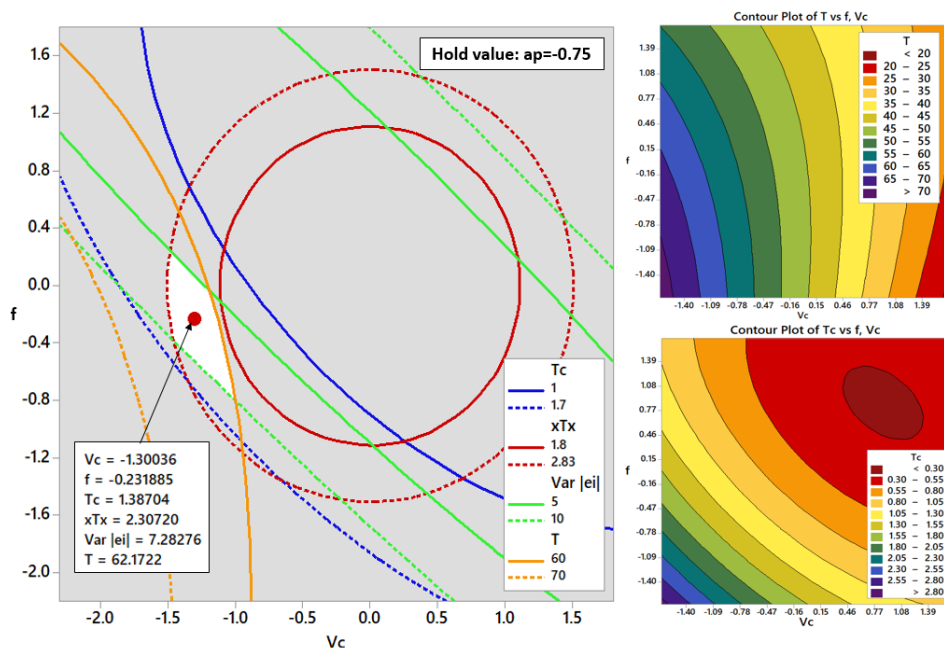
Esse resultado reforça a adequação do uso de modelos baseados em GLM para tratar explicitamente a variabilidade associada à vida da ferramenta. Em particular, a utilização de distribuições da família Gamma permite modelar diretamente a relação entre média e variância da resposta, característica frequentemente observada em processos heterocedásticos. Dessa forma, a evidência empírica obtida neste estudo sustenta a escolha de abordagens baseadas em GLM para a modelagem da variância derivada dos resíduos quadráticos, contribuindo para uma representação estatística mais realista do comportamento da vida da ferramenta.

Figura 26: Comportamento quadrático da variância residual absoluta (Var |e<sub>ij</sub>) em termos de Ct



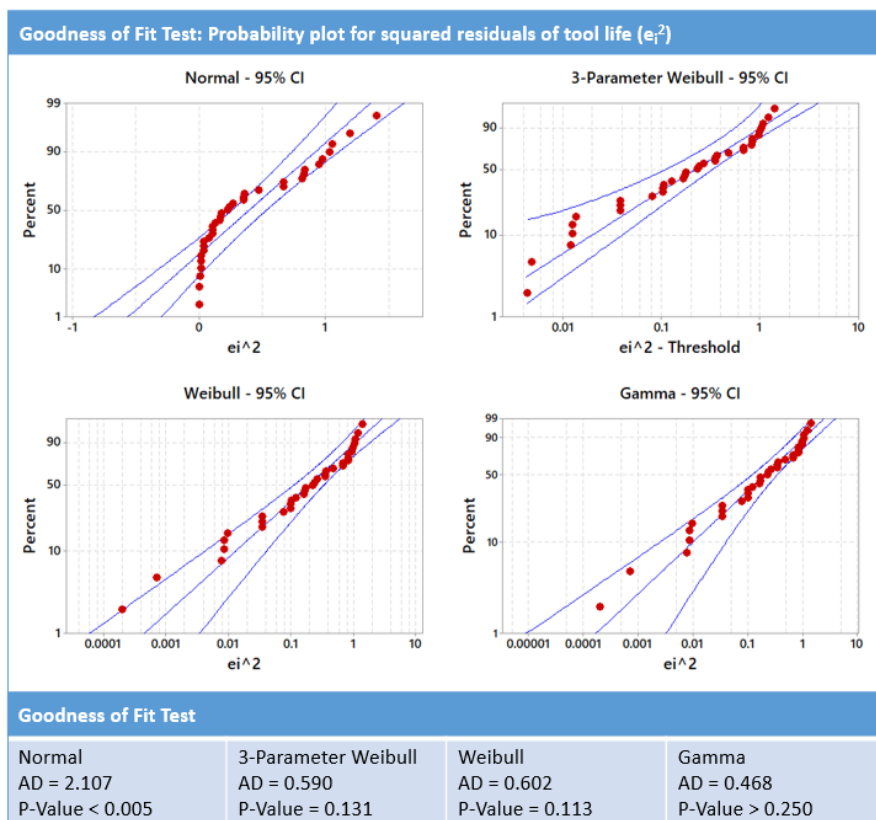
Fonte: Autora (2026).

Figura 27: Gráfico de contorno sobreposto para vida, variância e Ct da ferramenta PCBN 7025 (min)



Fonte: Autora (2026).

Figura 28: Modelos mais adequados para  $ei^2$  utilizando os resíduos dos pontos centrais de sete inserções



Fonte: Autora (2026).

### 5.3. Otimização de superfície de resposta para a vida da ferramenta

Uma vez concluída a fase de modelagem, torna-se pertinente identificar condições operacionais que maximizem a vida da ferramenta, ao mesmo tempo em que minimizem sua variabilidade. Esse objetivo pode ser alcançado por meio de técnicas de otimização multiobjetivo não linear, como o método NBI, que permite explorar o compromisso entre diferentes funções objetivo. Nesse método, o processo de otimização inicia-se pela determinação dos ótimos individuais de cada função objetivo considerada. A aplicação dessa abordagem é apresentada a seguir.

O primeiro passo na otimização da Superfície de Resposta utilizando o NBI consiste na identificação da média e da variância individuais associadas à média e variância da vida da ferramenta. Esses resultados são comumente resumidos em uma matriz *payoff*, cuja diagonal principal contém os valores ótimos individuais de cada função objetivo, definindo o ponto Utopia.

Observa-se que, quando o ótimo individual de uma determinada resposta é alcançado, os valores correspondentes das demais respostas tendem a se afastar de seus respectivos ótimos individuais, especialmente quando as direções de otimização são opostas, como ocorre no caso da maximização da média e da minimização da variância. Para lidar com esse compromisso entre objetivos conflitantes, é necessário determinar a configuração ótima de cada variável que define o ponto de Utopia e, simultaneamente, estimar uma aproximação do pior cenário possível para as respostas consideradas, conhecido como ponto *Pseudo-Nadir*.

Maximizar a superfície de resposta da vida da ferramenta seguindo o esquema proposto e, subsequentemente, minimizar a variância associada de acordo com a formulação correspondente, torna possível organizar esses dados na matriz  $\Phi$ . A primeira linha de  $\Phi$  representa o melhor valor para a vida da ferramenta ( $T_{Utopia}=65,45$  min.), alcançado ao usar  $Vc=63,13$  m/min,  $f=0,13$  mm/rev e  $ap=0,22$  mm. O pior valor possível dentro da região experimental, obtido quando se minimiza a variância da vida da ferramenta, é igual a  $T_{Nadir}=58,22$  min., alcançado ao usar  $Vc=118,25$  m/min,  $f=0,17$  mm/rev e  $d\ ap=0,10$  mm. Analogamente, a minimização individual da variação leva a um  $Var(T)_{Utopia}=0,965$  min<sup>2</sup>, enquanto o pior valor atinge  $Var(T)_{Nadir}=0,965$  min<sup>2</sup>. Portanto, a matriz  $\Phi$  será dada por:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 65,450 & 58,224 \\ 16,966 & 0,965 \end{bmatrix} \quad (33)$$

A formulação do NBI para esse problema pode ser implementada utilizando a relação previamente definida juntamente com as funções objetivas normalizadas da forma correspondente. Após atribuir diferentes pesos ao NBI, obtêm-se os resultados de 21 subproblemas, gerando uma fronteira de Pareto entre a média e a variância da vida da pastilha. Os resultados para as distâncias aos pontos Utopia e Nadir, bem como o valor da métrica de pertencimento, são mostrados na **Tabela 12**.

**Tabela 12: Pontos ótimos e viáveis de Pareto (em unidades codificadas) para a média e a variância da vida da ferramenta PCBN 7025**

$w$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f_1(x)_{\text{Scaled}}$	$f_2(x)_{\text{Scaled}}$	$T(x)$	$\text{Var} [T(x)]$
0,000	-0,708	0,124	-1,521	1,000	0,000	58,224	0,965
0,050	-0,788	0,107	-1,482	0,902	0,002	58,933	0,994
0,100	-0,866	0,086	-1,440	0,806	0,006	59,623	1,066
0,150	-0,942	0,059	-1,392	0,715	0,015	60,285	1,200
0,200	-1,015	0,030	-1,341	0,628	0,028	60,912	1,412
0,250	-1,084	-0,001	-1,286	0,547	0,047	61,496	1,719
0,300	-1,149	-0,034	-1,229	0,473	0,073	62,034	2,129
0,350	-1,208	-0,067	-1,169	0,405	0,105	62,522	2,647
0,400	-1,264	-0,100	-1,106	0,344	0,144	62,963	3,271
0,450	-1,314	-0,132	-1,042	0,289	0,189	63,358	3,997
0,500	-1,360	-0,163	-0,977	0,241	0,241	63,710	4,817
0,550	-1,402	-0,194	-0,909	0,197	0,297	64,023	5,723
0,600	-1,439	-0,224	-0,841	0,159	0,359	64,301	6,708
<b>0,650</b>	<b>-1,474</b>	<b>-0,253</b>	<b>-0,770</b>	<b>0,125</b>	<b>0,425</b>	<b>64,547</b>	<b>7,765</b>
0,700	-1,504	-0,283	-0,698	0,095	0,495	64,763	8,887
0,750	-1,531	-0,313	-0,624	0,069	0,569	64,951	10,070
0,800	-1,554	-0,343	-0,546	0,047	0,647	65,112	11,314
0,850	-1,572	-0,376	-0,465	0,028	0,728	65,246	12,617
0,900	-1,585	-0,413	-0,382	0,014	0,814	65,351	13,985
0,950	-1,592	-0,456	-0,296	0,004	0,904	65,422	15,427
1,000	-1,590	-0,508	-0,210	0,000	1,000	65,450	16,966

A **Figura 29** apresenta a Fronteira de Pareto para a Média e a Variância da vida da ferramenta PCBN 7025. Os vinte e um subproblemas apresentados neste gráfico foram avaliados de acordo com suas semelhanças, utilizando uma análise de agrupamento. Com base no comportamento dos dados, a Fronteira de Pareto foi discriminada em cinco grupos de soluções ótimas, representadas por cores diferentes. Pode-se observar que, para vidas úteis entre 58 e 62 minutos, a variância é mínima e não difere significativamente para as sete soluções subsequentes. Portanto, neste primeiro grupo, se desejada pelo tomador de decisão, a vida máxima da ferramenta (62 min.) pode ser escolhida, mantendo a menor variância possível. A partir deste ponto, a variância aumenta exponencialmente com a vida da ferramenta. Assim, cada aumento na vida da ferramenta implica diretamente uma maior variação associada, o que significa que quanto maior a vida da ferramenta, maior é a instabilidade do processo.

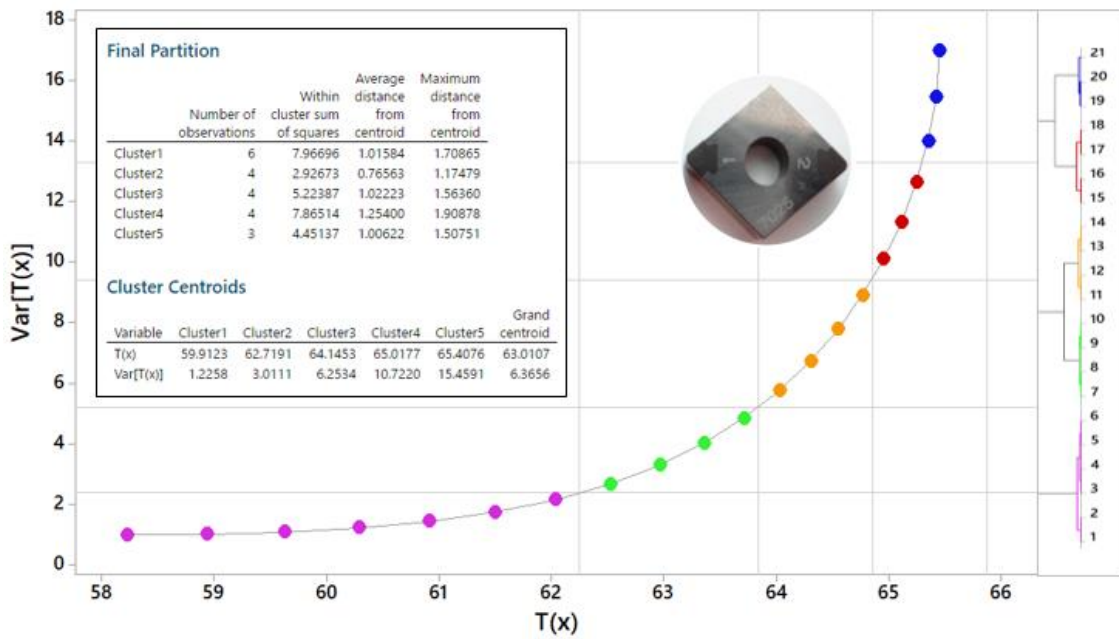
**Tabela 13: Valores decodificados para pontos ótimos de Pareto, GD e pertencimento TOPSIS de Mahalanobis para a média e a variância da vida da ferramenta PCBN 7025**

$w$	$Vc$	$f$	$ap$	$z^T(x)(X^T X)^{-1}z(x)$	$GD_{Utopia}$	$GD_{Nadir}$	$D$
0,000	118,250	0,170	0,103	0,639	16,604	7,487	0,311
0,050	113,255	0,169	0,107	0,636	14,936	7,409	0,332
0,100	108,361	0,168	0,110	0,633	13,321	7,653	0,365
0,150	103,611	0,166	0,115	0,630	11,775	8,147	0,409
0,200	99,058	0,164	0,119	0,629	10,317	8,802	0,460
0,250	94,751	0,162	0,124	0,627	8,960	9,539	0,516
0,300	90,717	0,160	0,129	0,626	7,717	10,296	0,572
0,350	86,979	0,158	0,135	0,626	6,598	11,036	0,626
0,400	83,525	0,156	0,140	0,627	5,613	11,737	0,676
0,450	80,383	0,154	0,146	0,627	4,778	12,390	0,722
0,500	77,505	0,152	0,152	0,629	4,120	12,994	0,759
0,550	74,881	0,150	0,158	0,631	3,676	13,549	0,787
0,600	72,536	0,148	0,164	0,632	3,480	14,058	0,802
<b>0,650</b>	<b>70,384</b>	<b>0,147</b>	<b>0,171</b>	<b>0,635</b>	<b>3,539</b>	<b>14,527</b>	<b>0,804</b>
0,700	68,498	0,145	0,177	0,637	3,818	14,958	0,797
0,750	66,831	0,143	0,184	0,639	4,258	15,354	0,783
0,800	65,384	0,141	0,191	0,641	4,807	15,715	0,766
0,850	64,230	0,139	0,198	0,643	5,427	16,039	0,747
0,900	63,419	0,137	0,206	0,645	6,093	16,320	0,728
0,950	62,996	0,134	0,213	0,646	6,794	16,545	0,709
1,000	63,132	0,131	0,221	0,645	7,526	16,691	0,689

A **Figura 30** combina uma Fronteira de Pareto e um gráfico de contorno sobreposto para a média e a variação da vida da ferramenta PCBN 7025 com geometrias convencionais (C) e *Wiper* (W). Apesar de compartilhar o mesmo substrato, o PCBN 7025W exibe um desempenho consideravelmente superior para todas as vinte e uma alternativas. Essa característica ilustra a dominância estocástica completa da fronteira de Pareto para o PCBN 7025W em relação ao PCBN 7025. Comparando ambas as fronteiras, observa-se que, para o mesmo nível de variação, a ferramenta *Wiper* apresenta uma maior vida.

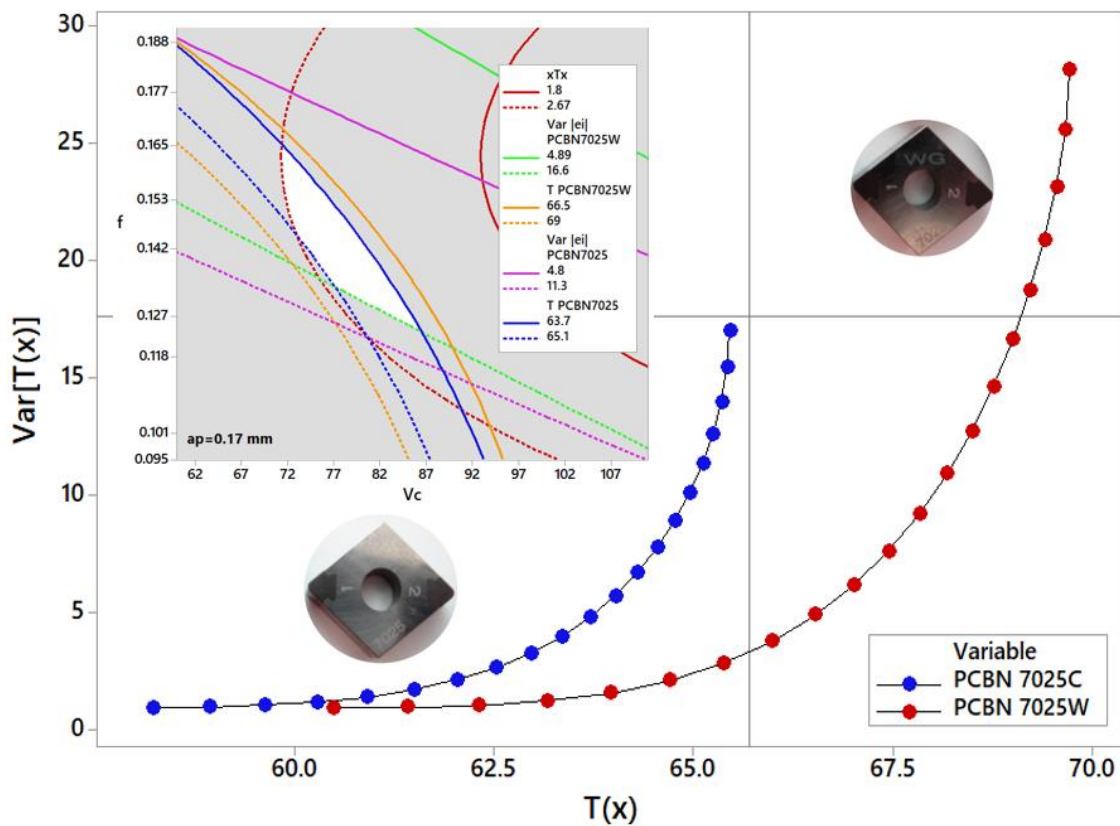
Esse resultado sugere que a geometria *Wiper* proporciona condições mais favoráveis de corte, possivelmente associadas a uma melhor distribuição das tensões na aresta de corte e a uma maior estabilidade do processo de usinagem. Consequentemente, para um mesmo nível de risco ou variabilidade do processo, o inserto *Wiper* permite operar com níveis superiores de desempenho em termos de vida da ferramenta.

Figura 29: Fronteira de Pareto para o dual média-variância do inserto PCBN 7025



Fonte: Autora (2026).

Figura 30: Fronteira de Pareto para a dualidade média-variância das inserções PCBN 7025 e PCBN 7025W

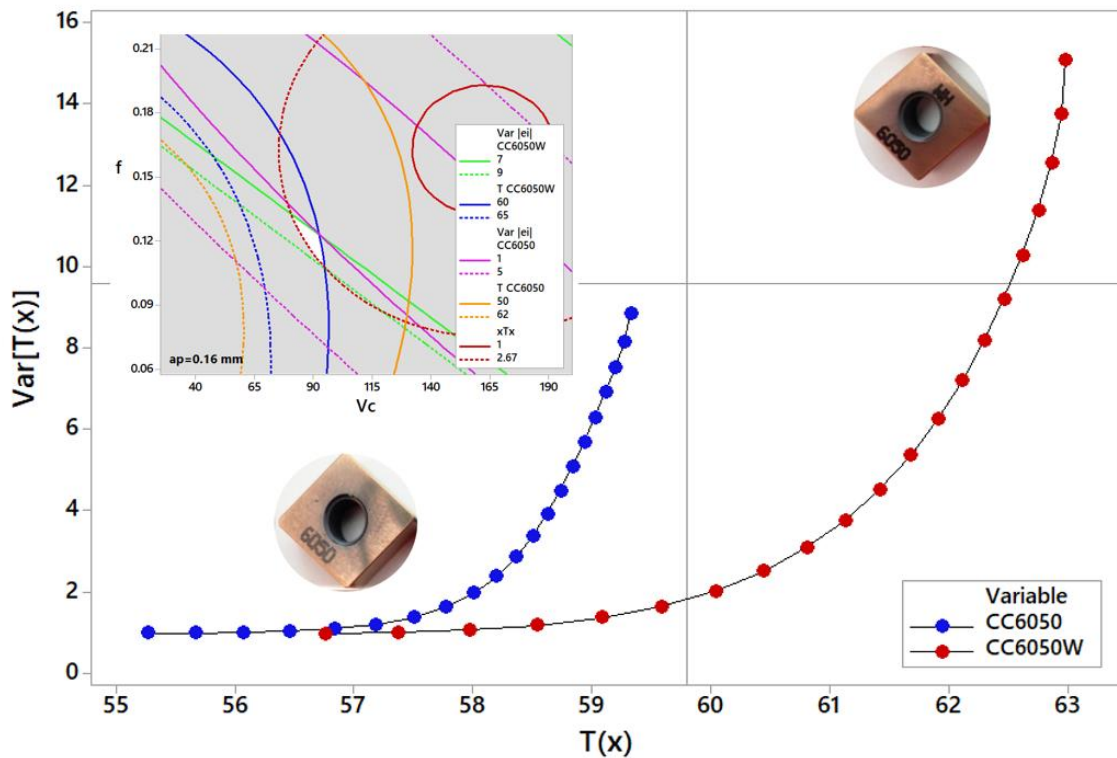


Fonte: Autora (2026).

A **Figura 31** apresenta as Fronteiras de Pareto para as pastilhas CC6050 e CC6050W (*Wiper*). Semelhante ao caso do PCBN 7025, as pastilhas com geometria *Wiper* superam o desempenho das convencionais para cada uma das vinte e uma alternativas. Este também é um exemplo de dominância estocástica da CC6050W em relação à CC6050 convencional.

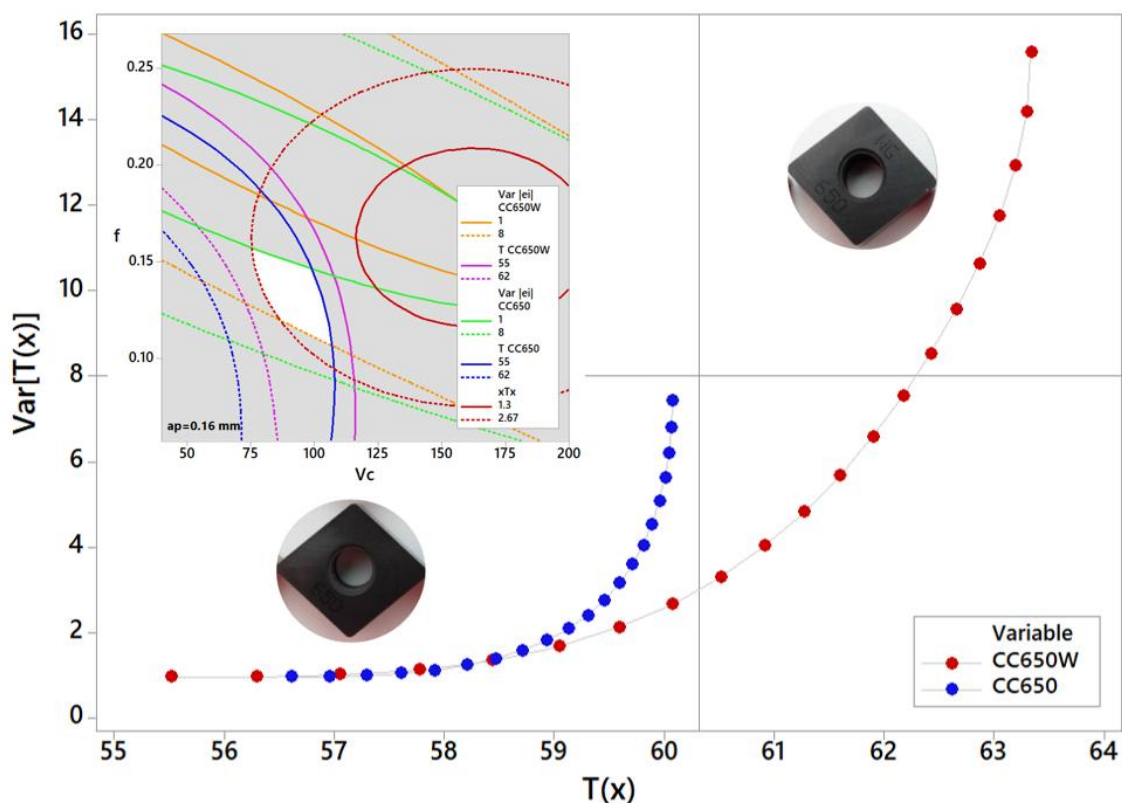
No caso do CC650 convencional e do CC650W (**Figura 32**), o comportamento é bem diferente, pois a dominância estocástica da pastilha *Wiper* só começa com uma vida da ferramenta superior a 59. Para valores inferiores, os desempenhos são muito semelhantes em termos de tempo e variância. No intervalo entre 59 e 62 min., a pastilha CC650W apresenta valores de vida da ferramenta maiores do que a CC650 convencional, apresentando os mesmos níveis de variância. Após 62 min., no entanto, a variância aumenta exponencialmente com pequenos incrementos discretos na vida da ferramenta.

**Figura 31: Fronteira de Pareto para média e variância das inserções CC6050 e CC6050W**



Fonte: Autora (2026).

**Figura 32: Fronteira de Pareto para média e variância das inserções CC650 e CC650W**



Fonte: Autora (2026).

A **Figura 33** ilustra a Fronteira de Pareto para a pastilha CC670. A fronteira tem a mesma forma das discutidas anteriormente e também pode ser organizada em diferentes grupos de desempenhos semelhantes. Em outras palavras, as soluções do mesmo grupo são estatisticamente semelhantes, não apresentando dominância significativa entre si.

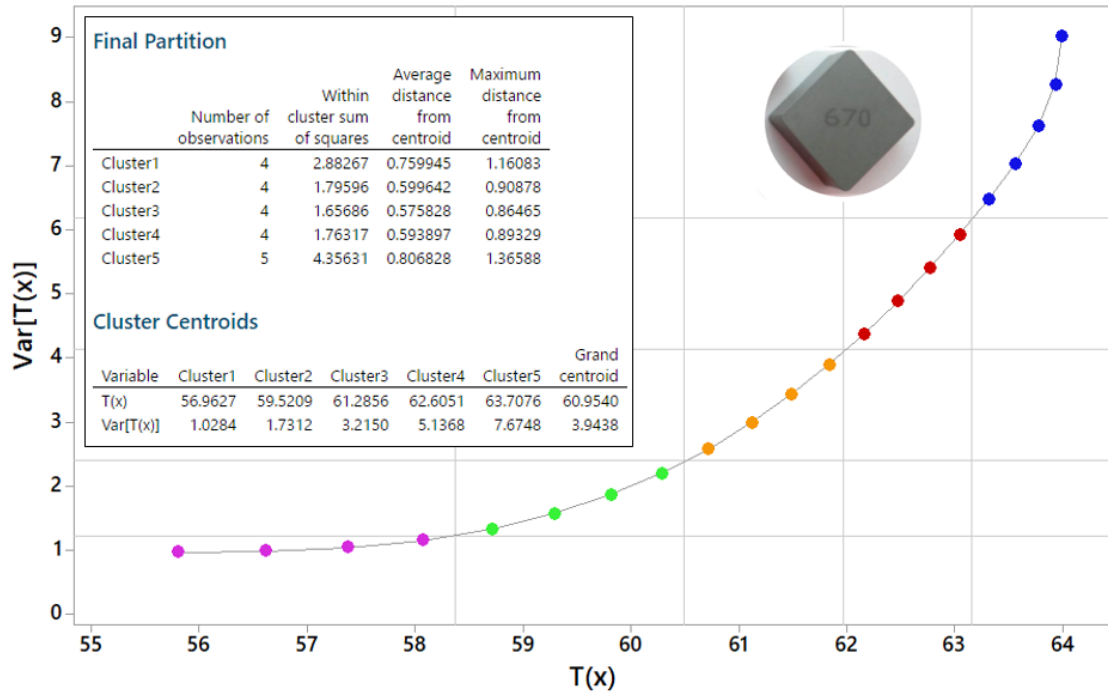
Após a comparação pareada entre as geometrias *Wiper* e convencionais em diferentes substratos, as Fronteiras de Pareto obtidas para todas as pastilhas estudadas neste trabalho foram combinadas no mesmo gráfico da **Figura 34**. Embora as curvas apresentem formatos semelhantes, observa-se uma clara superioridade do inserto PCBN 7025 em relação às demais alternativas avaliadas.

Com base no critério de média-variância, foi possível estabelecer uma hierarquia entre as pastilhas, sendo: (1) PCBN 7025W, (2) PCBN 7025, (3) CC670, (4) CC650, (5) CC6050W, (6) CC650W e (7) CC6050. É importante destacar que o CC670 apresentou desempenho superior aos outros dois tipos de insertos, CC6050W e CC650W.

Destaca-se que o inserto CC670 apresentou desempenho superior aos demais insertos cerâmicos avaliados. Entre os cinco insertos cerâmicos considerados, o CC670 apresentou simultaneamente maior vida da ferramenta e menor variância, sendo superado

apenas pelas opções de PCBN. Além disso, não foram observadas diferenças estatisticamente significativas entre os insertos CC6050W e CC650W.

**Figura 33: Fronteira de Pareto para média e variância da inserção CC670**

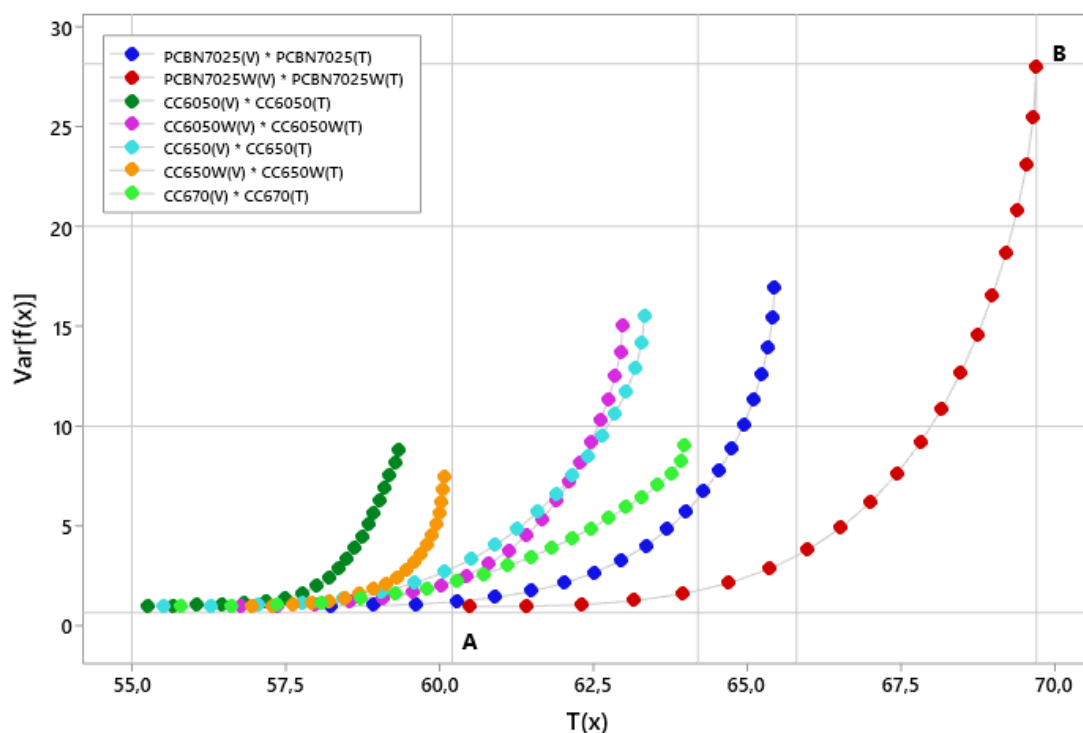


Fonte: Autora (2026).

Os respectivos vetores de solução associados a cada uma das Fronteiras de Pareto descritas na **Figura 34** pertencem às regiões viáveis mostradas no “gráfico de contorno sobreposto” da **Figura 35**. Este gráfico apresenta a projeção de todas as equações de média e variância no plano dos parâmetros de entrada  $Vc$ ,  $f$  e  $ap$  e mostra como é complexo encontrar uma solução comum capaz de proporcionar o melhor desempenho das sete ferramentas consideradas no estudo.

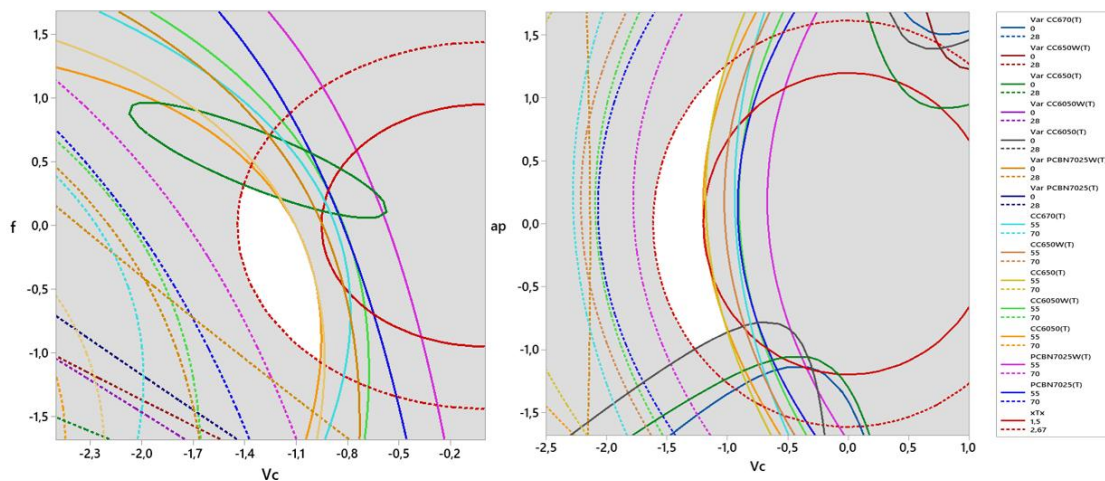
Como o gráfico considera a projeção de  $E[f(\mathbf{x})]$  e  $Var[f(\mathbf{x})]$  em uma combinação bidimensional de parâmetros de entrada, o terceiro parâmetro foi definido com base no melhor valor encontrado após NBI iterações. Esses melhores valores são mostrados **Tabela 14** e estão organizados por tipo de inserto.

**Figura 34: Desempenho comparativo de sete ferramentas com base em fronteiras de Pareto sobrepostas para média-variância**



Fonte: Autora (2026).

**Figura 35: Gráfico de contorno sobreposto para a média e a variância de todas as ferramentas dentro do espaço de solução  $x^T x \leq 2,67$**



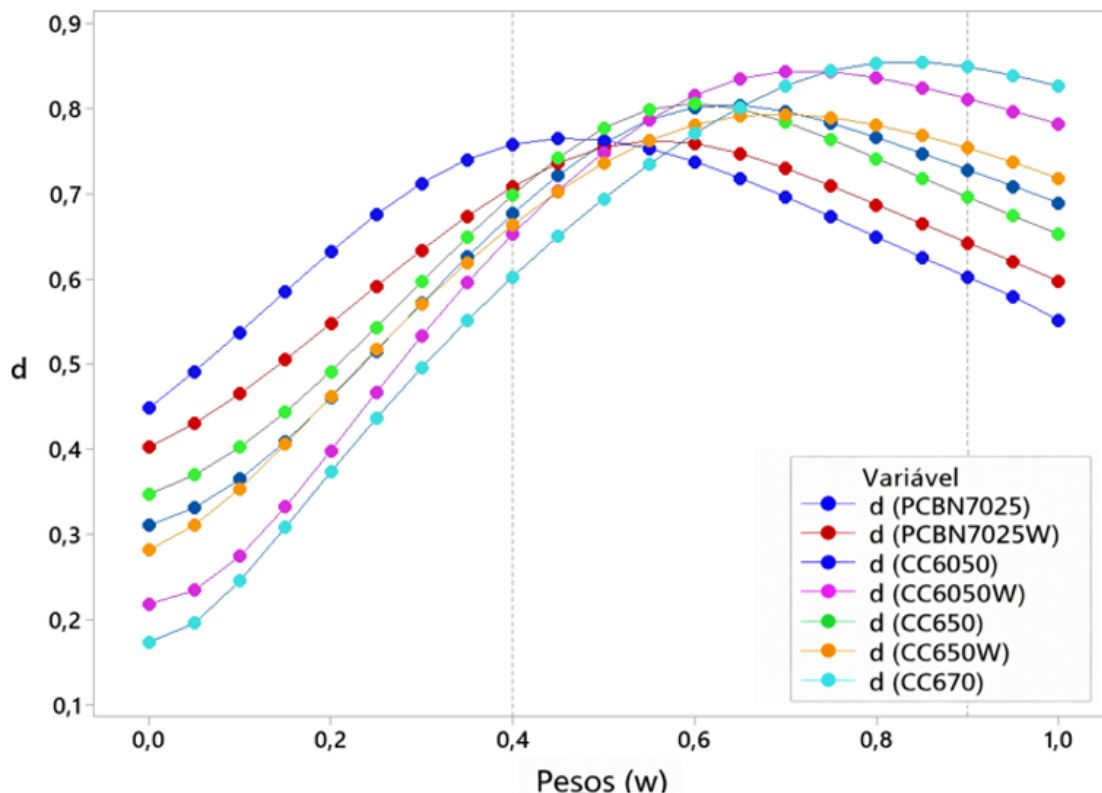
Fonte: Autora (2026).

Tabela 14: Soluções ótimas de Pareto para  $d_{\max}$  (por inserto)

Tipo de inserto	$w$	Setup Ótimo			Centroide	
		$Vc$	$f$	$ap$	$T_i(x)$	$Var_i[T(x)]$
PCBN7025	0,65	70,38	0,147	0,171	64,547	7,765
PCBN7025W	0,55	77,42	0,150	0,153	67,830	9,201
CC6050	0,45	76,32	0,137	0,162	58,196	2,371
CC6050W	0,70	65,19	0,144	0,190	62,299	8,169
CC650	0,60	75,03	0,140	0,163	59,591	3,153
CC650W	0,70	61,57	0,146	0,205	62,419	8,520
CC670	0,85	58,34	0,151	0,252	63,554	7,021

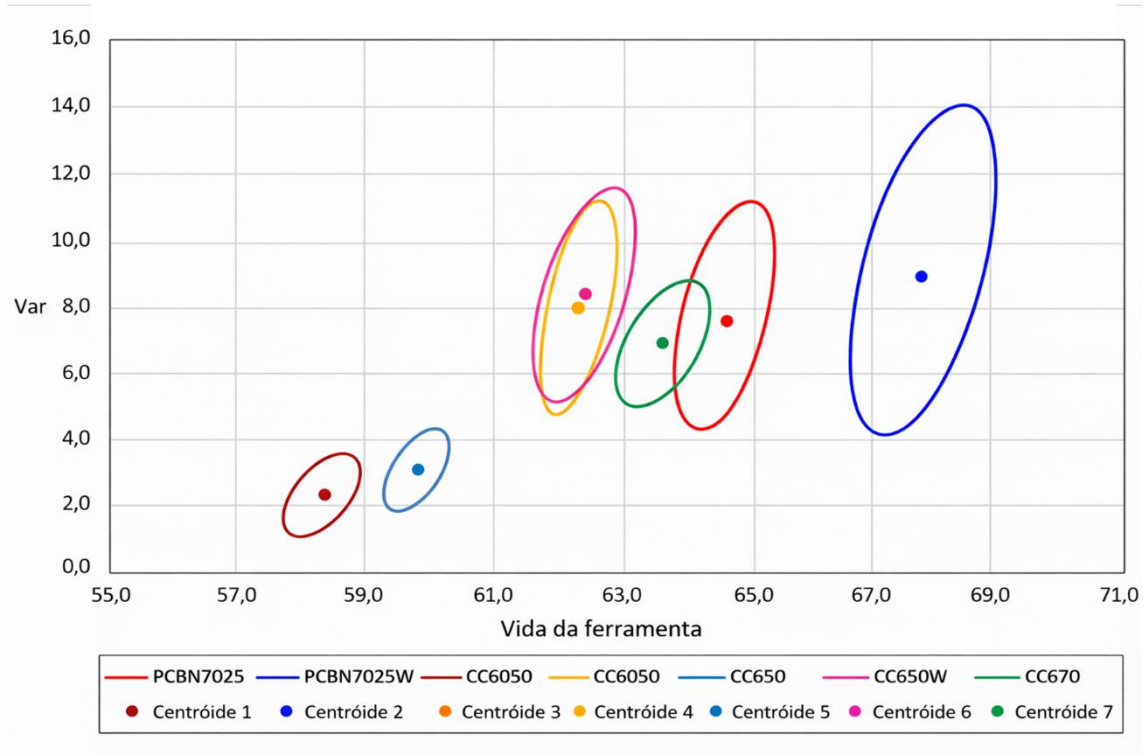
As configurações ideais descritas anteriormente foram obtidas por meio da aplicação do TOPSIS. Do ponto de vista da tomada de decisão multicritério, as vinte e uma alternativas para cada ferramenta foram classificadas com base na sua proximidade a uma solução ideal e na sua distância de uma solução não ideal. As melhores alternativas foram aquelas com a pontuação mais alta ( $d_{\max}$ ), calculada pelo coeficiente de proximidade. A Figura 36 mostra os d-scores para todas as inserções de acordo com os pesos atribuídos a cada solução.

Figura 36: TOPSIS multivariado (d) versus pesos (w)



Fonte: Autora (2026).

**Figura 37: Elipses de confiança de 95% para a média e a variância das sete ferramentas em  $d_{max}$**



Fonte: Autora (2026).

As pontuações mais altas ( $d_{max}$ ) apresentadas na **Figura 36** foram calculadas com base na MD (Johnson e Wichern, 2014; Rencher e William, 2012) pois os valores da média e da variância para a vida da ferramenta obtidos com o método NBI apresentaram uma correlação alta e significativa. Essa constatação, aliada ao fato de que os pontos de fronteira não são mutuamente exclusivos, sugere que um teste de hipótese multivariada do tipo MANOVA (*Multivariate Analysis of Variance*) (Johnson e Wichern, 2014; Rencher e William, 2012) seria adequado para avaliar as diferenças e/ou semelhanças entre os comportamentos das ferramentas de corte.

Durante o processo de otimização, observou-se que as soluções ótimas de Pareto apresentam diferenças entre si que não são estatisticamente significativas, o que, por sua vez, favorece a formação de agrupamentos ao longo do limite. Com base nesse fato, as soluções em torno de  $d_{max}$  foram escolhidas para formar uma amostra necessária para aplicar a MANOVA, cujos resultados estão descritos na **Tabela 15**.

**Tabela 15: MANOVA para testar diferenças entre os vários centroides**

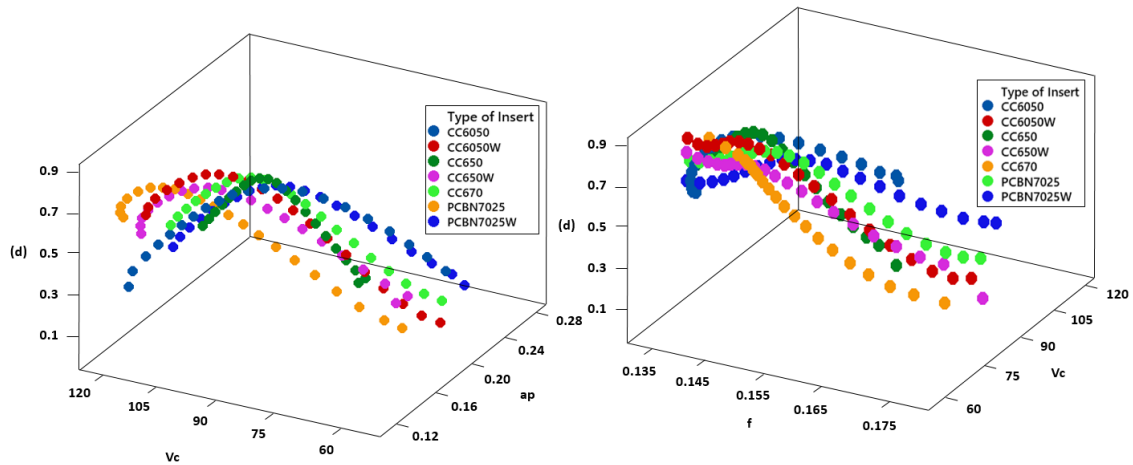
MANOVA	Teste Estatístico	F	DF		P-Valor
			Num.	Denom.	
Wilks'	2,8E-04	196.377	12	40	0,000
Lawley-Hotelling	1195,7	1893.15	12	38	0,000
Pillai's	1,7	17.48	12	42	0,000
Roy's	1193,7	-	-	-	-
$s = 2, m = 1,5, n = 9,0$		$\alpha=5\%$			

**Nota:** <sup>(1)</sup> *Centroide*: vetor formado por  $T(\mathbf{x})$  e  $\text{Var}[T(\mathbf{x})]$  para a melhor configuração Pareto-ótima em  $d_{\max}$ .

P-valores inferiores ao nível de significância de  $\alpha=5\%$  em todos os critérios da MANOVA multivariada indicam que existem diferenças significativas entre o desempenho das ferramentas de corte em suas respectivas condições ótimas, diferenças que podem ser identificadas e ilustradas pelas elipses de confiança de 95% mostradas na **Figura 37**. Para este caso, as elipses de confiança foram calculadas considerando os autovalores e autovetores da matriz de variância-covariância  $\Sigma$  da média e variância da vida da ferramenta com uma amostra de pontos ótimos de Pareto em torno de  $d_{\max}$ . Para mais detalhes, consulte o **Apêndice 4**.

As elipses de confiança consideram simultaneamente a incerteza da média e da variância da vida da ferramenta. Portanto, é possível observar na **Figura 37** que algumas elipses coincidem (mostrando algum grau de sobreposição). Essa sobreposição representa as ferramentas que apresentaram desempenho ótimo estatisticamente igual, enquanto as outras apresentaram desempenhos distintos. Assim, considerando tanto a média quanto a variância, o PCBN 7025W apresenta o melhor desempenho em termos de vida da ferramenta, mas com uma grande variância associada. Esta ferramenta é seguida no ranking pelo PCBN 7025 convencional e pelo CC670. Observe que não há diferença significativa entre o comportamento dessas ferramentas mencionadas, mas, por outro lado, o CC670 apresentou uma variância menor. Em seguida, tem-se duas ferramentas de corte com desempenho equivalente, a CC650W e a CC6050W e, finalmente, a CC650 e a CC6050.

Figura 38: TOPSIS (d) versus parâmetros decodificados do processo  $V_c$ ,  $f$  e  $ap$ .



Fonte: Autora (2026).

Concluindo a análise dos dados, a **Figura 38** mostra como os parâmetros de entrada mudam durante as iterações NBI e como eles influenciam as soluções ótimas representadas no gráfico por  $d_{\max}$ .

#### 5.4. Validação experimental

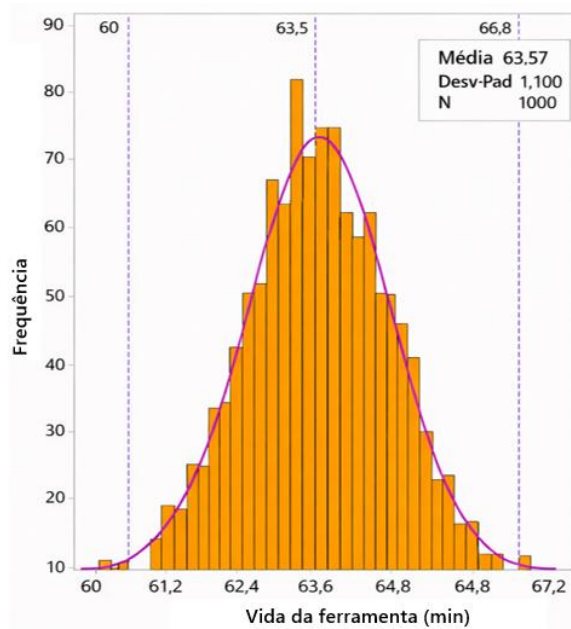
Os resultados da otimização indicaram que a pastilha CC670 proporcionou o compromisso mais favorável entre maior vida da ferramenta e menor variação do processo, representando uma solução equilibrada para aplicações industriais nas quais a confiabilidade e a previsibilidade são tão críticas quanto maximizar o desempenho absoluto. Dado esse equilíbrio, a CC670 foi selecionada para experimentos de confirmação com o objetivo de verificar a validade prática da solução recomendada pelo método *Normal Boundary Intersection* (NBI).

Os experimentos de confirmação foram conduzidos usando os parâmetros de corte obtidos na fase de otimização e replicados em condições controladas para avaliar a consistência dos resultados. As métricas observadas, tanto para a vida média da ferramenta quanto para a variação, exibiram um comportamento alinhado com as previsões do modelo, confirmando assim a robustez da solução proposta. Esta etapa demonstrou que o CC670 mantém um desempenho estável dentro da região ótima identificada, reforçando a aplicabilidade dos modelos de média-variância como ferramentas de apoio à decisão em operações de usinagem.

A fim de confirmar os resultados matemáticos encontrados na parte teórica deste artigo e tendo em vista seu bom desempenho, foi escolhida a ferramenta cerâmica CC670 como exemplo de como as rotinas de modelagem e otimização propostas levaram a

valores viáveis e ótimos para a vida da ferramenta. Assim, os testes de confirmação, realizados na NOMATI-UNIFEI (Brasil), basearam-se na configuração ótima  $V_c=58,3$  m/min,  $f=0,15$  mm/rev. e  $ap=0,25$  mm, com um valor esperado de vida da ferramenta de cerca de 63,5 min. De acordo com a análise estatística descrita na **Figura 39**, após a aplicação da modelagem POE-GLM, o modelo de resposta da superfície da vida da ferramenta alcançou um  $R^2=97,31\%$ ,  $R^2_{adj.}=95,6\%$ ,  $R^2_{Pred.}=84,9\%$  e um desvio padrão agrupado de  $S=1,122$ . Com base nesses resultados, foi construído um intervalo de previsão de 95% para uma nova observação.

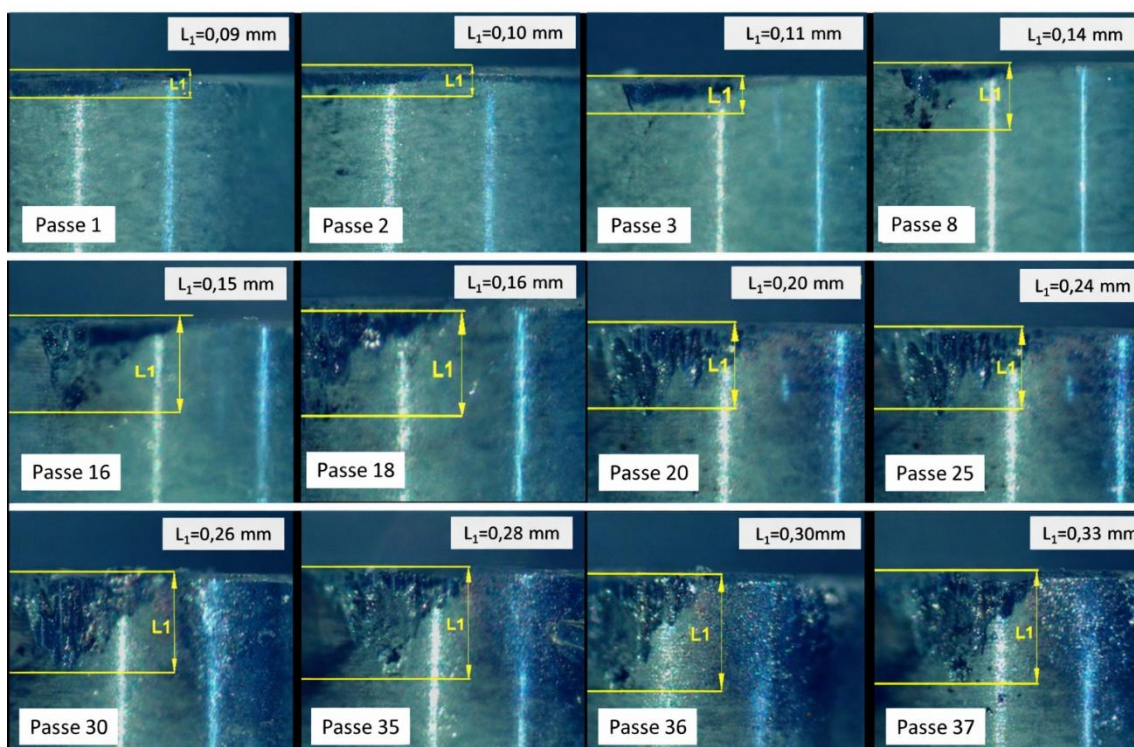
**Figura 39: Medidas sequenciais do desgaste lateral do CC670 com a configuração ideal de  $V_c = 58,3$  m/s,  $f = 0,15$  mm/rev e  $ap = 0,25$  mm**



Fonte: Autora (2026).

O limite inferior para o intervalo de previsão de 95% é igual a 60,3 min, e o limite superior é igual a 66,8 min. O histograma ilustra como o valor esperado dessa ferramenta sob a condição de comportamentos pré-determinados em várias amostras. Com uma configuração fixa, as imagens microscópicas do desgaste do flanco da ferramenta CC670 foram registradas em sequência de passagens, conforme mostrado na **Figura 40**, que apresentam desgaste de 0,09 mm a 0,33 mm, um desgaste do flanco um pouco maior do que o estabelecido como critério para o fim da vida da ferramenta.

**Figura 40: Medidas sequenciais do desgaste do flanco CC670 com a configuração ideal de  $V_c=58,3$  m/min,  $f=0,15$  mm/rev. e  $ap=0,25$  mm**

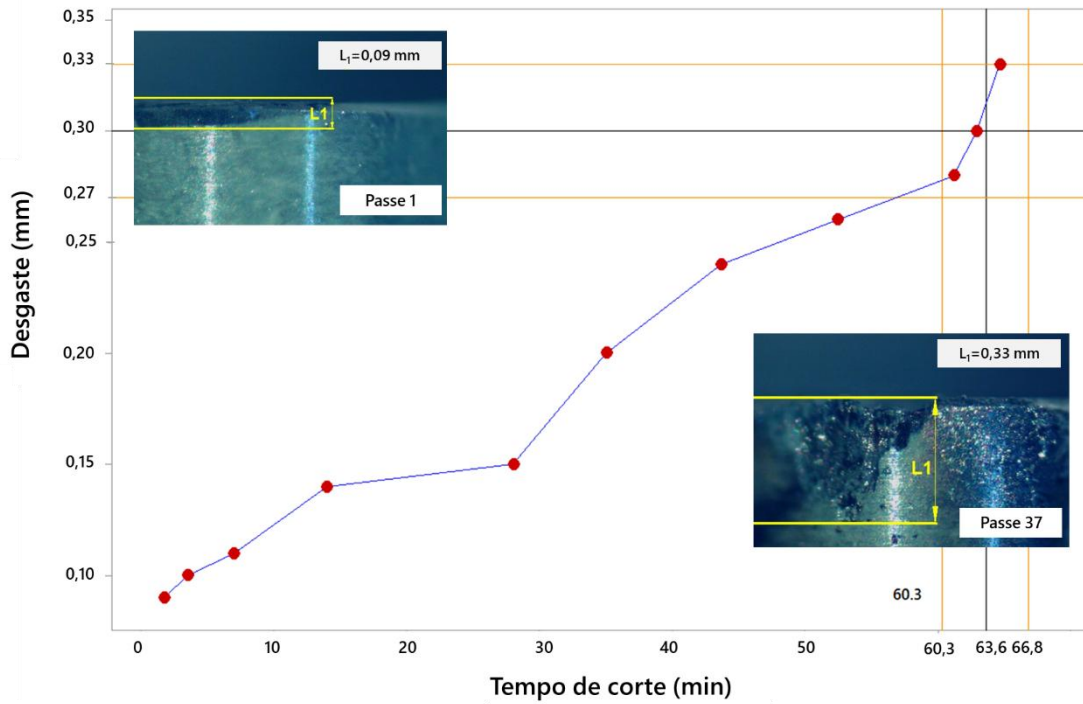


Fonte: Autora (2026).

Esses desgastes são representados na **Figura 41** como um gráfico de série temporal construído em termos de tempo de corte. Para determinar a vida final da ferramenta, observamos o tempo total decorrido desde a primeira passagem até a última, em intervalos com desgaste relativamente pequeno do flanco.

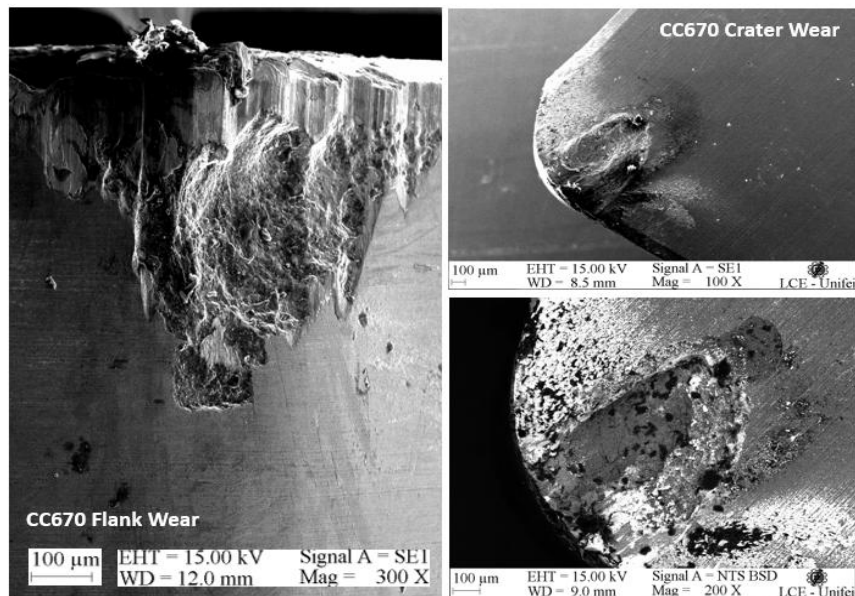
Usando um equipamento MEV (Microscopia Eletrônica de Varredura), aumentamos a ampliação do desgaste do flanco da ferramenta cerâmica CC670 na condição de desgaste máximo. A **Figura 42** destaca os mecanismos de desgaste do flanco e da cratera. Complementarmente, um equipamento EDS (Espectroscopia de Dispersão de Energia) foi utilizado para verificar aspectos particulares de ambos os desgastes, além da natureza do H13 após a usinagem e seus respectivos cavacos. Esses detalhes podem ser observados na **Figura 43**.

Figura 41: Curva de desgaste da ferramenta cerâmica CC670 na configuração ideal de  $V_c=58,3$  m/min,  $f=0,15$  mm/rev. e  $ap=0,25$  mm



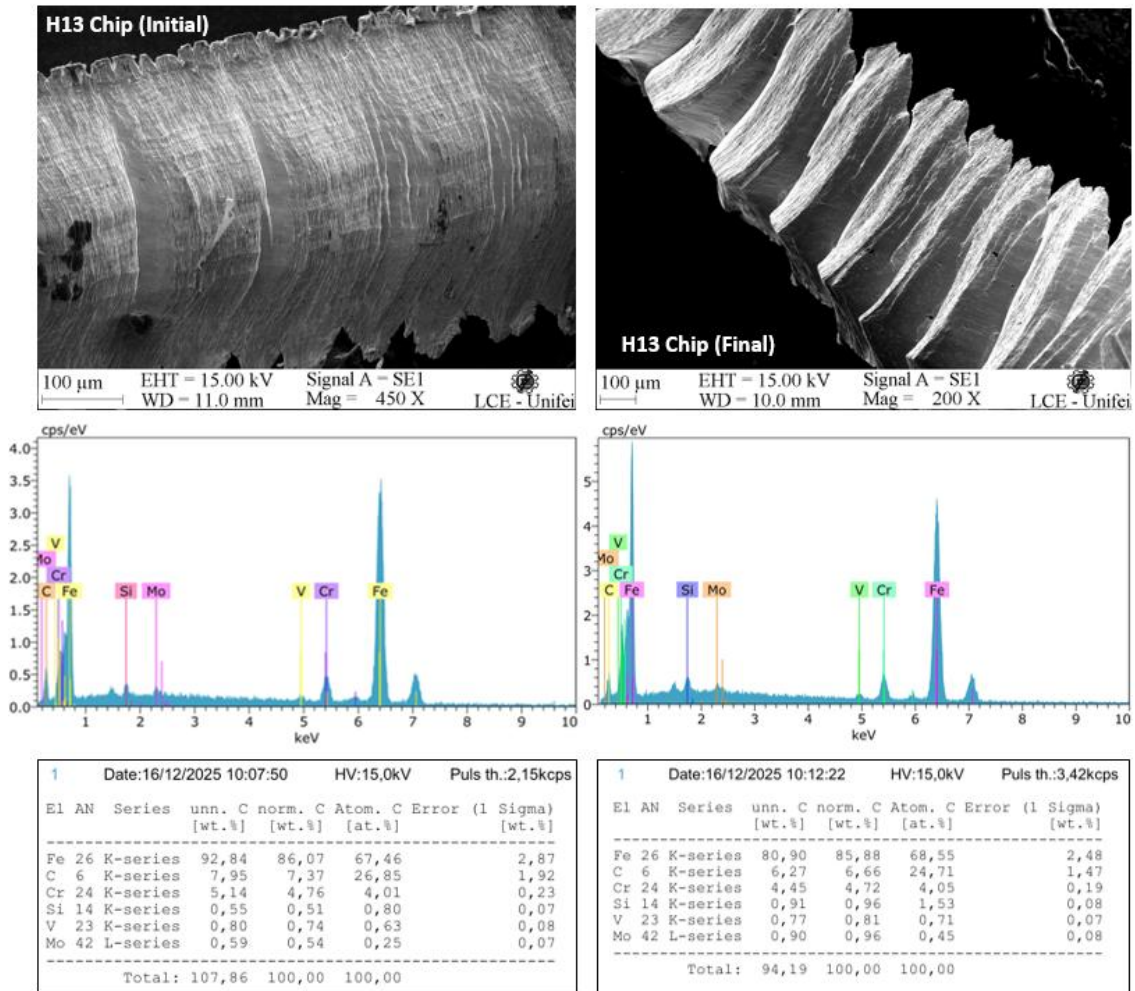
Fonte: Autora (2026).

Figura 42: MEV dos tipos de desgaste lateral e em cratera do CC670 observados durante os testes de confirmação



Fonte: Autora (2026).

**Figura 43: MEV e EDS do chip H13 observados durante os testes de confirmação executados com a ferramenta cerâmica CC670**



Fonte: Autora (2026).

Do ponto de vista dos resultados de vida da ferramenta obtidos nesta pesquisa, as evidências microestruturais observadas por MEV fornecem suporte físico para os comportamentos estatísticos identificados na modelagem. Em particular, a presença simultânea de mecanismos abrasivos e adesivos contribui para a evolução progressiva do desgaste de flanco, o qual foi utilizado como critério para determinação da vida da ferramenta. Esse comportamento progressivo está associado ao padrão relativamente consistente observado na média da vida da ferramenta ao longo das diferentes condições experimentais.

Por outro lado, a ocorrência de fenômenos de adesão, transferência de material e instabilidades na formação de cavaco pode gerar variações locais nas condições tribológicas da interface ferramenta-peça, contribuindo para flutuações na taxa de desgaste ao longo do tempo. Esse tipo de comportamento fornece uma explicação física

para a variabilidade observada nos resultados experimentais e para a presença de heterocedasticidade identificada na modelagem estatística da vida da ferramenta. Assim, as evidências microestruturais observadas corroboram a necessidade de considerar explicitamente a variância na modelagem do processo, conforme proposto nesta tese.

Dessa forma, as análises realizadas nos testes de confirmação não apenas validam os mecanismos de desgaste predominantes identificados experimentalmente, mas também reforçam a consistência entre os fenômenos físicos observados na zona de corte e os resultados estatísticos obtidos na modelagem da vida da ferramenta. Essa convergência entre evidências experimentais, análise microestrutural e modelagem estatística fortalece a confiabilidade dos resultados apresentados e confirma a adequação da abordagem metodológica adotada para representar o comportamento da vida da ferramenta em condições de usinagem de materiais endurecidos.

### **5.5. Análises e discussões**

A análise dos resultados obtidos neste estudo evidencia a relevância de considerar simultaneamente a média e a variância da vida da ferramenta na modelagem de processos de usinagem. Em todos os casos analisados, os modelos ajustados para os valores absolutos dos resíduos e para os quadrados dos resíduos dos modelos de vida média da ferramenta apresentaram elevados coeficientes de determinação ajustados, indicando forte capacidade de ajuste. Esses resultados revelam um comportamento heterocedástico recorrente da variável resposta, confirmando que a variabilidade da vida da ferramenta não permanece constante ao longo das diferentes condições de corte. Tal evidência reforça a limitação de abordagens baseadas exclusivamente em modelos tradicionais de regressão por mínimos quadrados ordinários, que assumem variância constante dos resíduos.

Os resultados experimentais também indicaram que todos os pontos do planejamento experimental do tipo CCD apresentaram comportamento semelhante para as sete ferramentas analisadas. Entretanto, observou-se que a variância associada à vida da ferramenta não apresenta um padrão tão consistente quanto o comportamento médio da resposta, sugerindo que algumas ferramentas são mais suscetíveis à variabilidade do processo do que outras. No contexto de variáveis com comportamento associado a processos do tipo Poisson e à presença de heterocedasticidade, verificou-se que a variância tende a aumentar à medida que a vida da ferramenta se torna maior. Ainda assim, foram identificadas regiões específicas de operação nas quais a variância atinge

valores mínimos, frequentemente associadas a condições que produzem vidas de ferramenta intermediárias.

No que se refere à modelagem simultânea da média e da variância, os métodos baseados na abordagem de propagação de erros apresentaram desempenho superior aos métodos baseados em REML. Em termos de qualidade de ajuste, os modelos POE apresentaram valores de  $R^2$  aproximadamente 2% superiores aos obtidos com REML, resultado que também se refletiu nos valores de  $R^2$  ajustado. Para o coeficiente de determinação predito, a abordagem POE continuou apresentando melhor desempenho, embora a utilização do procedimento de seleção de variáveis *Stepwise* tenha tornado os modelos REML estatisticamente equivalentes ao nível de significância de 5%. Além disso, quando considerado o S, os métodos baseados em POE demonstraram resultados mais favoráveis, uma vez que valores menores dessa métrica implicam intervalos de confiança mais estreitos e, conseqüentemente, maior precisão nas previsões.

A análise da distribuição dos resíduos quadráticos indicou que o melhor ajuste foi obtido utilizando a distribuição Gamma, que apresentou valores elevados de P-valor e menor estatística de Anderson–Darling. Esse resultado reforça a adequação de abordagens baseadas em modelos lineares generalizados para representar a variância derivada dos resíduos quadráticos, corroborando a hipótese de que a variância da vida da ferramenta pode ser modelada explicitamente por meio de distribuições assimétricas.

No contexto da otimização multiobjetivo, o método NBI mostrou-se eficaz para gerar a fronteira de Pareto associada à otimização simultânea da média e da variância da vida da ferramenta. Os resultados indicaram que a maior vida média foi obtida com o inserto PCBN 7025W, alcançando aproximadamente 67,83 minutos sob as condições de corte  $V_c = 77,4$  m/min,  $f = 0,15$  mm/rev e  $ap = 0,15$  mm. A variância associada a essa configuração foi de  $9,2$  min<sup>2</sup>. Por outro lado, a menor variância observada foi obtida com o inserto CC650, cuja variância foi de  $3,15$  min<sup>2</sup> para uma vida de ferramenta de aproximadamente 59,6 minutos.

Entre essas duas situações extremas, o inserto CC670 apresentou um compromisso particularmente interessante entre desempenho médio e variabilidade, alcançando vida de ferramenta de aproximadamente 63,5 minutos e variância de  $7,02$  min<sup>2</sup> sob as condições de corte  $V_c = 58,3$  m/min,  $f = 0,15$  mm/rev e  $ap = 0,25$  mm. Esse resultado sugere que o CC670 representa uma alternativa equilibrada entre maximização da vida da ferramenta e estabilidade do processo.

A análise das fronteiras de Pareto permitiu ainda estabelecer uma hierarquia de desempenho entre os insertos analisados. De acordo com o critério média-variância, a ordem observada foi: PCBN 7025W, PCBN 7025 convencional, CC670, CC650 convencional, CC6050W, CC650W e CC6050 convencional. Observou-se também que o inserto PCBN 7025 apresentou dominância estocástica em relação às demais ferramentas, indicando que, para um mesmo nível de variância, sua vida de ferramenta tende a ser superior.

A aplicação de métodos estatísticos multivariados contribuiu para aprofundar essa análise. A utilização da análise de agrupamento hierárquico revelou a formação de grupos de soluções Pareto-ótimas semelhantes, indicando que as alternativas obtidas não são necessariamente únicas e que soluções adjacentes na fronteira podem apresentar desempenhos estatisticamente equivalentes. A incorporação da distância de Mahalanobis no método TOPSIS mostrou-se adequada para a seleção da melhor alternativa, pois permitiu considerar explicitamente a estrutura de covariância entre média e variância.

Adicionalmente, a aplicação de testes MANOVA e a construção de elipses de confiança de 95% permitiram avaliar diferenças estatísticas entre os insertos considerando simultaneamente a média e a variância da vida da ferramenta. Essa análise confirmou que o inserto PCBN 7025W apresenta o melhor desempenho em termos de vida média da ferramenta, embora acompanhado de maior variabilidade. Por outro lado, verificou-se que o inserto PCBN 7025 não apresentou diferença estatística significativa em relação ao CC670 na região dos melhores pontos da fronteira de Pareto, sendo que o CC670 apresentou menor variância nessa região de interesse.

Por fim, os experimentos de confirmação realizados nas condições de corte associadas ao inserto CC670 demonstraram forte concordância entre os valores experimentais e as previsões obtidas pelos modelos, validando os resultados da otimização. Esses resultados confirmam a robustez da abordagem proposta para modelagem simultânea da média e da variância da vida da ferramenta, além de evidenciar sua aplicabilidade prática para apoio à tomada de decisão em processos de usinagem.

## **5.6. Análise comparativa da metodologia em diferentes contextos experimentais**

A metodologia proposta neste trabalho foi apresentada de forma detalhada na seção anterior por meio de um estudo de caso aplicado ao processo de torneamento. Embora sua aplicação tenha sido demonstrada em sete casos distintos, correspondentes a diferentes ferramentas de corte, torna-se necessário avaliar sua consistência quando

aplicada a diferentes cenários experimentais reportados na literatura. Essa etapa é importante para verificar se o desempenho observado no estudo principal não está restrito a um conjunto específico de dados, mas reflete características inerentes à abordagem metodológica proposta.

Nesse contexto, esta seção tem como objetivo reaplicar os principais elementos da metodologia desenvolvida a casos selecionados da literatura, com a finalidade de investigar sua aderência e desempenho sob diferentes condições de processo, materiais e estratégias experimentais. Diferentemente do estudo de caso anterior, no qual todas as etapas foram apresentadas de forma detalhada para um único estudo de caso, a abordagem adotada neste capítulo concentra-se principalmente na análise dos resultados da modelagem, que constitui o foco central desta pesquisa. Assim, etapas posteriores da metodologia, como otimização e tomada de decisão, poderão ser exploradas em trabalhos futuros para os demais casos analisados.

Para essa finalidade, foram selecionados estudos da literatura que utilizam a Metodologia de Superfície de Resposta em diferentes contextos de usinagem, envolvendo distintos materiais, processos e estruturas de planejamento experimental. Esses estudos foram adotados como casos de referência para demonstrar a aplicação da metodologia proposta e permitir a análise comparativa dos resultados obtidos. Dessa forma, busca-se evidenciar a aderência e a aplicabilidade da abordagem metodológica em diferentes condições experimentais. Informações adicionais sobre cada caso analisado são apresentadas no **Quadro 2** e **Quadro 3**.

A **Tabela 16** apresenta a comparação do desempenho estatístico entre diferentes estratégias de modelagem aplicadas aos estudos selecionados, considerando os coeficientes de determinação ( $R^2$ ,  $R^2$  ajust. e  $R^2$  pred.) e o desvio padrão dos resíduos (S).

**Tabela 16: Resultados da modelagem para os estudos de referência**

Fonte	Métrica	OLS	WLS-POE	GLM-POE	GLM-REML
Halim <i>et al.</i> (2019)	R <sup>2</sup>	97,82%	98,49%	98,49%	98,59%
	R <sup>2</sup> <sub>adj.</sub>	95,63%	96,98%	96,97%	97,17%
	R <sup>2</sup> <sub>pred.</sub>	88,05%	93,80%	93,76%	95,29%
	S	1,11	0,96	0,96	0,85
Bhushan (2020)	R <sup>2</sup>	92,55%	93,68%	93,71%	99,99%
	R <sup>2</sup> <sub>adj.</sub>	85,59%	87,78%	87,85%	99,99%
	R <sup>2</sup> <sub>pred.</sub>	59,92%	74,62%	74,83%	99,97%
	S	0,58	0,93	0,93	1,03
Roslim <i>et al.</i> (2022)	R <sup>2</sup>	89,17%	96,31%	96,31%	90,22%
	R <sup>2</sup> <sub>adj.</sub>	75,24%	91,56%	91,56%	77,65%
	R <sup>2</sup> <sub>pred.</sub>	0,00%	79,27%	79,27%	0,00%
	S	3,30	1,27	1,27	0,82
Valic <i>et al.</i> (2023)	R <sup>2</sup>	95,85%	99,84%	99,84%	97,24%
	R <sup>2</sup> <sub>adj.</sub>	88,38%	99,56%	99,56%	92,27%
	R <sup>2</sup> <sub>pred.</sub>	33,63%	98,90%	98,90%	67,02%
	S	1,20	1,35	1,35	0,81
Palaniappan e Subramaniam (2024)	R <sup>2</sup>	99,33%	99,60%	99,60%	99,56%
	R <sup>2</sup> <sub>adj.</sub>	98,55%	99,14%	99,13%	99,04%
	R <sup>2</sup> <sub>pred.</sub>	96,19%	98,55%	98,54%	98,30%
	S	11,60	0,97	0,97	0,81
Souza <i>et al.</i> (2025)	R <sup>2</sup>	97,79%	99,23%	99,25%	98,33%
	R <sup>2</sup> <sub>adj.</sub>	96,21%	98,68%	98,71%	97,14%
	R <sup>2</sup> <sub>pred.</sub>	85,08%	97,96%	98,00%	94,01%
	S	0,83	1,06	1,06	0,78

Nos casos de Halim *et al.* (2019) embora o OLS apresente valores elevados de R<sup>2</sup> global, nota-se redução significativa no R<sup>2</sup> predito, o que evidencia potencial *overfitting* e limitação na representação da variabilidade do processo. A introdução da ponderação via POE e o uso de estimadores baseados em máxima verossimilhança contribuíram para a melhoria consistente dos indicadores preditivos.

No estudo de Bhushan (2020), embora apresente valores praticamente unitários de R<sup>2</sup>, R<sup>2</sup> ajustado e R<sup>2</sup> predito para o modelo GLM-REML, esse comportamento deve ser interpretado com cautela. Métricas excessivamente próximas de 1 podem indicar *overfitting* do modelo aos dados experimentais, especialmente em contextos com número limitado de observações, elevada complexidade do modelo ou forte colinearidade entre os termos explicativos. Embora os indicadores numéricos sejam elevados, tais resultados não necessariamente refletem maior robustez ou capacidade de generalização, devendo ser analisados em conjunto com critérios adicionais de diagnóstico e validação estatística. Os demais modelos apresentam melhoria nos coeficientes de determinação, mas um

aumento considerável em  $S$ . No entanto, ao considerar a melhoria do  $R^2_{\text{pred}}$ , o impacto desse incremento em  $S$  torna-se irrelevante.

Para Roslim *et al.*(2022) e Valic *et al.* (2023), verifica-se uma limitação clara do OLS, com valores de  $R^2_{\text{pred}}$  próximos de zero ou significativamente reduzidos, apesar de  $R^2$  elevados. Esse comportamento é típico de cenários com heterocedasticidade e instabilidade da variância, nos quais o OLS tende a produzir estimativas não robustas. Em contrapartida, os modelos WLS-POE e GLM-POE apresentam expressiva melhora da capacidade preditiva, com  $R^2$  predito superiores a 79% e, em alguns casos, acima de 98%.

No caso de Palaniappan e Subramaniam (2024) todos os modelos apresentam elevado desempenho global, contudo observa-se novamente vantagem dos métodos propostos, principalmente em termos de redução de  $S$  e melhoria do  $R^2$  predito. Ressalta-se que o OLS, embora apresente  $R^2$  elevado, exibe maior variabilidade residual, o que pode comprometer a confiabilidade das inferências estatísticas.

No caso de Souza *et al.* (2025), observa-se que todos os modelos apresentam elevados coeficientes de determinação, indicando bom ajuste global aos dados experimentais. Entretanto, ao analisar a capacidade preditiva, verifica-se vantagem dos métodos que incorporam explicitamente a estrutura de variância. Os modelos WLS-POE e GLM-POE apresentam os maiores valores de  $R^2$  predito, atingindo aproximadamente 98%, enquanto o OLS apresenta valor significativamente inferior (85,08%), sugerindo menor capacidade de generalização. Esse comportamento indica que, apesar do elevado  $R^2$  global obtido pelo OLS, a ausência de modelagem explícita da variância pode limitar o desempenho preditivo do modelo. Os resultados reforçam a eficácia das abordagens baseadas em Propagação de Erro e Modelos Lineares Generalizados na representação da variabilidade do processo. Observa-se ainda que o modelo GLM-REML apresenta desempenho intermediário, com melhoria em relação ao OLS em termos de  $R^2$  predito, embora com ajuste ligeiramente inferior aos modelos baseados em POE.

Os resultados obtidos indicam que a incorporação da estrutura de variância promove ganhos consistentes de precisão, estabilidade e capacidade preditiva. Esses ganhos tornam-se particularmente relevantes em aplicações industriais, nas quais a presença de heterocedasticidade é recorrente e pode comprometer a validade dos modelos obtidos por OLS. Assim, a análise dos estudos de referência reforça a adequação da metodologia adotada neste trabalho e sua superioridade em relação às abordagens clássicas de regressão.

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta tese investigou de forma sistemática o problema da modelagem simultânea da média e da variância da vida de ferramentas de corte empregadas na usinagem do aço endurecido AISI H13, propondo uma estrutura metodológica integrada que combina modelagem estatística sob heterocedasticidade, otimização multiobjetivo e métodos multicritério de apoio à decisão. A principal motivação desta pesquisa foi superar limitações frequentemente observadas em abordagens tradicionais de modelagem da vida da ferramenta, que se concentram exclusivamente na resposta média e negligenciam a variabilidade inerente aos processos de usinagem.

A medição e/ou cálculo da variância podem ser negligenciados devido à falta de compreensão dos profissionais sobre a importância dessa métrica. Ao considerar essa variável nos processos de otimização, é possível melhorar métricas relacionadas à confiabilidade dos processos, uma vez que essa variável influencia diretamente nisso.

Os resultados obtidos evidenciaram, de maneira consistente, a presença de comportamento heterocedástico da variável de resposta, confirmado pelos elevados coeficientes de determinação ajustados observados nos modelos aplicados aos resíduos absolutos e aos resíduos quadráticos da vida média da ferramenta. Esse comportamento indica que a variabilidade do processo não permanece constante ao longo do domínio experimental, reforçando as limitações de modelos homocedásticos convencionais para representar adequadamente fenômenos de desgaste em usinagem. Nesse contexto, a modelagem simultânea da média e da variância mostrou-se não apenas estatisticamente pertinente, mas essencial para capturar de forma mais realista a dinâmica do processo de degradação da ferramenta.

Do ponto de vista físico e operacional, verificou-se que, embora o comportamento da média da vida apresente tendência relativamente consistente entre as diferentes ferramentas analisadas, a variância é significativamente mais sensível às condições de corte e às características do inserto. A velocidade de corte destacou-se como o fator de maior influência na determinação da vida, seguida pelos efeitos quadráticos do avanço e pelas interações entre esses parâmetros. Os mecanismos predominantes de desgaste observados foram desgaste de flanco e desgaste de cratera, indicando coerência entre os modelos estatísticos ajustados e os fenômenos tribológicos característicos da usinagem de materiais endurecidos.

No que se refere às estratégias de modelagem, os métodos baseados em Propagação de Erro apresentaram desempenho superior às abordagens fundamentadas em

Máxima Verossimilhança Restrita, alcançando maiores coeficientes de determinação e menores erros padrão de previsão. Embora modelos REML com seleção *stepwise* tenham atingido desempenho estatisticamente equivalente sob determinados critérios, os métodos baseados em POE demonstraram maior robustez preditiva global, refletida em intervalos de confiança mais estreitos e maior estabilidade das estimativas. A identificação da distribuição Gamma como a mais adequada para modelar os resíduos quadráticos reforça a pertinência do uso de Modelos Lineares Generalizados na representação da variância derivada da vida.

Um aspecto relevante desta pesquisa foi a avaliação da consistência da metodologia proposta em diferentes cenários experimentais reportados na literatura. A reaplicação da abordagem desenvolvida a diversos estudos independentes permitiu verificar que os ganhos observados no estudo principal não estão restritos a um único conjunto de dados. De forma recorrente, modelos baseados em Modelos Lineares Generalizados apresentaram maior capacidade de generalização quando comparados ao modelo clássico de OLS. Em vários casos analisados, observou-se que, embora o OLS apresente valores elevados de  $R^2$  global, ocorre redução significativa do  $R^2$  predito, evidenciando limitações na capacidade de generalização e possível *overfitting* aos dados experimentais. Em contrapartida, a incorporação explícita da estrutura de variância por meio da Propagação de Erro e de estimadores baseados em máxima verossimilhança proporcionou melhorias consistentes na capacidade preditiva e na estabilidade residual dos modelos.

A etapa de otimização, conduzida por meio do método NBI, possibilitou a construção consistente das Fronteiras de Pareto considerando simultaneamente média e variância da vida da ferramenta. Entre as alternativas analisadas, o inserto PCBN 7025W apresentou a maior vida absoluta, ainda que associada a maior variabilidade, enquanto o CC650 destacou-se por apresentar a menor variância observada. O inserto CC670 revelou desempenho equilibrado entre vida e variabilidade, configurando alternativa competitiva sob o critério média-variância. A análise das Fronteiras de Pareto indicou dominância do PCBN 7025 no conjunto das soluções eficientes, permitindo estabelecer uma hierarquia técnica entre os insertos avaliados. Testes MANOVA e elipses de confiança de 95% confirmaram diferenças estatisticamente significativas entre determinados grupos de ferramentas, ao passo que a integração da distância de Mahalanobis ao método TOPSIS mostrou-se eficaz na discriminação da melhor alternativa entre múltiplas soluções Pareto-ótimas, fornecendo suporte estruturado à tomada de decisão sob incerteza.

De maneira abrangente, os resultados demonstram que a consideração explícita da variabilidade na modelagem da vida da ferramenta amplia substancialmente a robustez analítica, melhora a qualidade preditiva e fornece base quantitativa mais consistente para decisões de otimização em ambientes industriais caracterizados por incerteza e variabilidade operacional. A integração entre modelagem estatística média-variância, análise de distribuição, otimização multiobjetivo e métodos multicritério configura uma contribuição relevante para o avanço científico na área de engenharia de manufatura, além de apresentar implicações práticas para a melhoria da confiabilidade e eficiência dos processos produtivos.

Do ponto de vista industrial, a metodologia proposta oferece suporte quantitativo para decisões relacionadas à seleção de ferramentas, definição de parâmetros de corte e planejamento de substituição de ferramentas em operações de usinagem. A consideração explícita da variabilidade permite reduzir riscos associados a falhas prematuras de ferramentas, aumentar a previsibilidade do processo e melhorar a estabilidade operacional das linhas de produção. Em ambientes industriais caracterizados por elevada competitividade e necessidade de eficiência operacional, tais avanços podem contribuir para a redução de custos de produção, diminuição de paradas não planejadas e melhoria da utilização dos recursos produtivos. Além disso, processos de usinagem mais previsíveis e estáveis tendem a reduzir desperdícios de material, retrabalhos e consumo energético, contribuindo também para práticas de manufatura mais sustentáveis.

A partir dos resultados obtidos, podem ser destacadas algumas contribuições centrais desta tese. Em primeiro lugar, foi proposta uma abordagem metodológica para modelagem simultânea da média e da variância da vida da ferramenta, incorporando explicitamente a heterocedasticidade presente em processos de usinagem. Em segundo lugar, demonstrou-se a superioridade de estratégias baseadas em POE e GLM em relação aos métodos clássicos de regressão em cenários com variância não constante. Em terceiro lugar, foi estabelecida uma integração entre modelagem estatística média-variância e técnicas de otimização multiobjetivo, permitindo a análise conjunta de desempenho e variabilidade da vida da ferramenta. Por fim, a aplicação de métodos multicritério de apoio à decisão possibilitou identificar soluções ótimas em cenários com múltiplos compromissos entre desempenho e risco operacional, ampliando o potencial de aplicação da metodologia em ambientes industriais.

No que se refere aos trabalhos futuros, diversas direções de aprofundamento podem ser consideradas. A ampliação da abordagem proposta por meio da incorporação

de estruturas probabilísticas mais abrangentes pode aumentar a capacidade de generalização e adaptação do modelo a diferentes cenários produtivos. A inclusão de objetivos adicionais no processo de otimização, como custo de usinagem, consumo energético, produtividade e indicadores de sustentabilidade, permitirá análises multicritério mais alinhadas às demandas contemporâneas da manufatura avançada. Além disso, a validação experimental em diferentes materiais, geometrias de ferramenta e condições operacionais fortalecerá a aplicabilidade industrial do método.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR ISO 3685:1995. Ferramentas de corte com aresta única para torneamento – ensaio de vida da ferramenta. Rio de Janeiro: ABNT, 1995.
- ADIL, S.; KRISHNAIAH, A.; RAO, D. S. Mathematical modelling and optimization of cutting conditions in turning operation on MDN 350 steel with carbide inserts. **Journal of Alloys and Metallurgical Systems**, v. 9, n. November 2024, 2025.
- AGGARWAL, A. *et al.* Optimization of multiple quality characteristics for CNC turning under cryogenic cutting environment using desirability function. **Journal of Materials Processing Technology**, v. 205, n. 1–3, p. 42–50, 2008.
- AHMADI, A. *et al.* Evaluating the effectiveness of normal boundary intersection method for short-term environmental/economic hydrothermal self-scheduling. **Electric Power Systems Research**, v. 123, p. 192–204, 2015.
- AKAL, C.; EMINOĞLU, G.; ÖZER, B. Optimisation of stabiliser usage conditions in oat milk production using response surface methodology. **Acta Alimentaria**, v. 52, n. 1, p. 143–154, 2023.
- ALMEIDA, F. A. *et al.* A weighted mean square error approach to the robust optimization of the surface roughness in an AISI 12L14 free-machining steel-turning process. **Journal of Mechanical Engineering**, v. 64, n. 3, p. 147–156, 2018.
- AMAN, A. *et al.* Selection of cutting tool for desired surface finish in milling Machine using Taguchi optimization methodology. **Materials Today: Proceedings**, v. 78, p. 444–448, 2023.
- AMORIM, L. F.; PAIVA, A. P.; *et al.* Multi-objective optimization algorithm for analysis of hardened steel turning manufacturing process. **Applied Mathematical Modelling**, v. 106, p. 822–843, jun. 2022.
- AQUILA, G. *et al.* Economic planning of wind farms from a NBI-RSM-DEA multiobjective programming. **Renewable Energy**, v. 158, p. 628–641, 2020.
- ARORA, J. S. Design of experiments: an introduction. [s.l: s.n.].
- ARRUDA, É. M. *et al.* Robust optimisation of surface roughness of AISI H13 hardened steel in the finishing milling using ball nose end mills. **Precision Engineering**, v. 60, p. 194–214, 2019.
- AXINTE, D. A.; BELLUCO, W.; CHIFFRE, L. Reliable tool life measurements in turning - An application to cutting fluid efficiency evaluation. **International Journal of Machine Tools and Manufacture**, v. 41, n. 7, p. 1003–1014, 2001.

- BABU, M. S.; RAO, T. B. Real-time cutting tool condition assessment and stochastic tool life predictive models for tool reliability estimation by in-process cutting tool vibration monitoring. **International Journal on Interactive Design and Manufacturing**, v. 17, n. 3, p. 1237–1253, 2023.
- BACCI, L. A. *et al.* Optimization of combined time series methods to forecast the demand for coffee in Brazil: A new approach using Normal Boundary Intersection coupled with mixture designs of experiments and rotated factor scores. **International Journal of Production Economics**, v. 212, p. 186–211, 2019.
- BAGGA, P. J. *et al.* Tool life prognostics in CNC turning of AISI 4140 steel using neural network based on computer vision. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 123, n. 9–10, p. 3553–3570, 2022.
- BERNINI, L. *et al.* Hybrid prognostics to estimate cutting inserts remaining useful life based on direct wear observation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 210, n. January 2023, p. 111163, 2024.
- BHUSHAN, R. K. Impact of nose radius and machining parameters on surface roughness, tool wear and tool life during turning of AA7075 / SiC composites for green manufacturing. **Mechanics of Advanced Materials and Modern Processes**, 2020.
- BOX, G. E. P.; DRAPER, N. R. **Response surfaces, mixtures, and ridge analyses**. 2. ed. [s.l.] Wiley, 2007.
- BOX, G. E. P.; WILSON, K. B. On the experimental attainment of optimum conditions. **Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)**, London, v. 13, n. 1, p. 1–45, 1951.
- BRITO, T. G. *et al.* A normal boundary intersection approach to multiresponse robust optimization of the surface roughness in end milling process with combined arrays. **Precision Engineering**, v. 38, n. 3, p. 628–638, jul. 2014.
- CAMPOS, P. H. S.; DAVIM, J. P.; FERREIRA, J. R.; PAIVA, A. P.; BALESTRASSI, P. P. The machinability of hard materials: a review. In: DAVIM, J. P. (ed.). **Machinability of advanced materials**. Hoboken: John Wiley & Sons, 2014. p. 145–173.
- CAMPOS, P. H. S. Uma contribuição para a seleção ótima de ferramentas no torneamento do aço ABNT H13 endurecido. 2015. **Tese (Doutorado em Engenharia de Produção)** – Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2015.
- CAMPOS, P. H. S. *et al.* Multivariate mean square error for the multiobjective optimization of AISI 52100 hardened steel turning with wiper ceramic inserts tool:

- a comparative study. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 39, n. 10, p. 4021–4036, 2017.
- CHINCHANIKAR, S.; CHOUDHURY, S. K. Machining of hardened steel - Experimental investigations, performance modeling and cooling techniques: A review. **International Journal of Machine Tools and Manufacture**, v. 89, p. 95–109, 2015.
- CHOUDHURY, I. A.; EL-BARADIE, M. A. Tool-life prediction model by design of experiments for turning high strength steel (290 BHN). **Journal of Materials Processing Technology**, v. 300, n. 3–4, p. 319–326, 1998.
- CHOUDHURY, I. A.; EL-BARADIE, M. A.. Machinability assessment of inconel 718 by factorial design of experiment coupled with response surface methodology. **Journal of Materials Processing Technology**, v. 95, n. 1–3, p. 30–39, 1999.
- COSTA, D. M. D. *et al.* A normal boundary intersection with multivariate mean square error approach for dry end milling process optimization of the AISI 1045 steel. **Journal of Cleaner Production**, v. 135, p. 1658–1672, nov. 2016.
- CUI, X. *et al.* Performance and reliability of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/TiC ceramic tool with multi-bionic surface microstructure in intermittent dry turning of AISI 52100 hardened steel. **Journal of Materials Research and Technology**, v. 25, p. 7219–7240, 2023.
- DAS, I.; DENNIS, J. E. Normal-Boundary Intersection: A New Method for Generating the Pareto Surface in Nonlinear Multicriteria Optimization Problems. **SIAM Journal on Optimization**, v. 8, n. 3, p. 631–657, ago. 1998.
- DAS, M.; NAIKAN, V. N. A.; PANJA, S. C. A review of cutting tool life prediction through flank wear monitoring. **International Journal of Quality and Reliability Management**, v. 42, n. 2, p. 425–473, 2025.
- DAS, M.; NAIKAN, V. N. A.; PANJA, S. C. Reliability analysis of cutting tools using transformed inverse Gaussian process-based wear modelling considering parameter dependence. **Probabilistic Engineering Mechanics**, v. 78, 2024.
- DAS, MONOJIT; NAIKAN, V. N. A.; PANJA, S. C. Reliability analysis of cutting tools using transformed inverse Gaussian process-based wear modelling considering parameter dependence. **Probabilistic Engineering Mechanics**, v. 78, n. April, p. 103698, 2024.
- DAVIM, J. Paulo (ed.). **Machining: fundamentals and recent advances**. London: Springer, 2008.

- DAVOODI, B.; ESKANDARI, B. Tool wear mechanisms and multi-response optimization of tool life and volume of material removed in turning of N-155 iron-nickel-base superalloy using RSM. **Measurement**, v. 68, p. 286–294, 2015.
- DERANI, M. N.; RATNAM, M. M. The use of tool flank wear and average roughness in assessing effectiveness of vegetable oils as cutting fluids during turning—a critical review. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 112, n. 7–8, p. 1841–1871, 2021.
- DING, W. *et al.* Diamond wheel dressing: A comprehensive review. **Journal of Manufacturing Science and Engineering, Transactions of the ASME**, v. 139, n. 12, 2017.
- EL-SANABARY, S. *et al.* A comparative study of machine learning and response surface methodologies for optimizing wear parameters of ECAP-processed ZX30 alloy. **Heliyon**, v. 10, n. 13, 2024.
- GARCÍA-MARTÍNEZ, E. *et al.* A new model to predict the tool life in turning of titanium aluminides. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 125, n. 11–12, p. 5757–5770, 2023.
- GAUDÊNCIO, J. H. D.; ALMEIDA, F. A.; SABIONI, R. C.; *et al.* Fuzzy multivariate mean square error in equispaced pareto frontiers considering manufacturing process optimization problems. **Engineering with Computers**, v. 35, n. 4, p. 1213–1236, 2019.
- GAUDÊNCIO, J. H. D.; ALMEIDA, F. A.; TURRIONI, J. B.; *et al.* A multiobjective optimization model for machining quality in the AISI 12L14 steel turning process using fuzzy multivariate mean square error. **Precision Engineering**, v. 56, p. 303–320, mar. 2019.
- GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de pesquisa**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.
- GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2021.
- GOINDI, G. S.; SARKAR, P. Dry machining: A step towards sustainable machining – Challenges and future directions. **Journal of Cleaner Production**, v. 165, p. 1557–1571, 2017.
- GOMES, J. H. . F. *et al.* Global Criterion Method Based on Principal Components to the Optimization of Manufacturing Processes with Multiple Responses. **Journal of Mechanical Engineering**, v. 58, n. 5, p. 345–353, 15 maio 2012.

- GOMES, J. H. F. *et al.* Mathematical modeling of weld bead geometry, quality, and productivity for stainless steel claddings deposited by FCAW. **Journal of Materials Engineering and Performance**, v. 21, n. 9, p. 1862–1872, 2012.
- GORJI, F.; AMINGHAFARI, M. Robust Nonparametric Regression for Heavy-Tailed Data. **Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics**, v. 25, n. 3, p. 277–291, 2020.
- GÜNEY, Y. *et al.* Robust estimation and variable selection in heteroscedastic regression model using least favorable distribution. **Computational Statistics**, v. 36, n. 2, p. 805–827, 2021.
- HALIM, N. H. A. *et al.* Response Surface Methodology (RSM) based analysis for tool life optimization in cryogenic CO<sub>2</sub> milling of Inconel 718. **IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering**, v. 606, 2019.
- HAMEED, S. *et al.* An Intelligent Deep Learning Technique for Predicting Hobbing Tool Wear Based on Gear Hobbing Using Real-Time Monitoring Data. **Energies**, v. 16, n. 17, 2023.
- HAYAT, M. J.; HIGGINS, M. Understanding Poisson regression. **Journal of Nursing Education**, v. 53, n. 4, p. 207–215, 2014.
- HEGDE, A. *et al.* Machinability Study And Optimization Of Tool Life And Surface Roughness Of Ferrite–Bainite Dual Phase Steel. **Journal of Applied Engineering Science**, v. 20, p. 358–364, 2022.
- HERNÁNDEZ, L. W. *et al.* Multi-Response Optimization of Milling Parameters of AISI D2 Steel Using Response Surface Methodology and Desirability Function. **Journal of Manufacturing and Materials Processing**, v. 9, n. 9, p. 1–26, 2025.
- HERRADOR, M. Á.; ASUERO, A. G.; GONZÁLEZ, A. G. Estimation of the uncertainty of indirect measurements from the propagation of distributions by using the Monte-Carlo method: An overview. **Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems**, v. 79, n. 1–2, p. 115–122, 2005.
- HUANG, Y. *et al.* Remaining useful life prediction of cutting tools using an inverse gaussian process model. **Applied Sciences** (Switzerland), v. 11, n. 11, 2021.
- IQBAL, A.; AL-GHAMDI, K. A.; HUSSAIN, G. Effects of tool life criterion on sustainability of milling. **Journal of Cleaner Production**, v. 139, p. 1105–1117, 2016.
- JOHNSON, R. A.; WICHERN, D. W. **Applied multivariate statistical analysis**. 6. ed. Upper Saddle River: Pearson Prentice Hall, 2007.

- JOUNI, N. *et al.* Optimized machining parameters for high-speed turning process: a comparative study of dry and cryo+MQL techniques. **Processes**, v. 13, n. 3, art. 739, 2025.
- KADU, R. S. *et al.* Formulation of Mathematical Model for the Investigation of Tool Wears in Boring Machining Operation on Cast Iron Using Carbide and CBN Tools. **Procedia Materials Science**, v. 6, p. 1710–1724, 2014.
- KAZEMIAN, A. *et al.* Performance prediction and optimization of a photovoltaic thermal system integrated with phase change material using response surface method. **Journal of Cleaner Production**, v. 290, 2021.
- KHADKA, S. *et al.* Predicting cutting tool life: models, modelling, and monitoring. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 136, n. 7, p. 3037–3076, 2025.
- KHAIRUSSHIMA, M. K. N.; SHARIFAH, I. S. S. Study on Tool Wear during Milling CFRP under Dry and Chilled Air Machining. **Procedia Engineering**, v. 184, 2017.
- KHAN, S. A. *et al.* Experimental investigations on wiper inserts' edge preparation, workpiece hardness and operating parameters in hard turning of AISI D2 steel. **Journal of Manufacturing Processes**, v. 34, p. 187–196, 2018.
- KHORASANI, A. M. *et al.* Tool Life Prediction in Face Milling Machining of 7075 Al by Using Artificial Neural Networks (ANN) and Taguchi Design of Experiment (DOE). **IACSIT International Journal of Engineering and Technology**, v. 3, 2011.
- KHORASANI, A. M.; KOOTSOOKOS, A. Modeling and Optimization of the Cutting Fluid Flow and Parameters for Increasing Tool Life in Slot Milling on St52. **International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing**, v. 4, 2013.
- KHURI, A. I.; CONLON, M. Simultaneous Optimization of Multiple Responses Represented by Polynomial Regression Functions. **Technometrics**, v. 23, n. 4, p. 363, nov. 1981.
- KHURI, A. I.; CORNELL, J. A. **Response Surfaces: Designs and Analyses**. Response Surfaces: Designs and Analyses, 2018.
- KHURI, A. I.; MUKHOPADHYAY, S. Response surface methodology. **Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics**, v. 2, n. 2, p. 128–149, 2010.

- KIM, J.; LI, J. C. H. Which Robust Regression Technique Is Appropriate Under Violated Assumptions? A Simulation Study. **Methodology**, v. 19, n. 4, p. 323–347, 2023.
- KÖKSALAN, M.; PLANTE, R. D. Interactive Multicriteria Optimization for Multiple-Response Product and Process Design. **Manufacturing and Service Operations Management**, v. 5, n. 4, p. 334–347, 2003.
- KRAMAR, D.; CICA, D. Experimental Investigation and Optimization of Tool Life in High-Pressure Jet-Assisted Turning of Inconel 718. **Metals**, 2025.
- KUMAR, R. *et al.* Comparative study on machinability improvement in hard turning using coated and uncoated carbide inserts: Part II modeling, multi-response optimization, tool life, and economic aspects. **Advances in Manufacturing**, v. 6, n. 2, p. 155–175, 2018.
- LAGHARI, R. A. *et al.* Modeling and Optimization of Tool Wear and Surface Roughness in Turning of Al / SiCp Using Response Surface Methodology. **3D Research**, v. 2, 2018.
- LARA DE LEON, M. A. *et al.* Tool Condition Monitoring Methods Applicable in the Metalworking Process. **Archives of Computational Methods in Engineering**, v. 31, n. 1, p. 221–242, 2024.
- LI, Y.; DENG, X. An efficient algorithm for Elastic I-optimal design of generalized linear models. **Canadian Journal of Statistics**, v. 49, n. 2, p. 438–470, 2021.
- LIANG, Y. *et al.* Cutting tool life prediction and extension through generative model-augmented deep learning and laser remanufacturing techniques. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, v. 158, 2025.
- LOPES, L. G. D. *et al.* Robust parameter optimization based on multivariate normal boundary intersection. **Computers and Industrial Engineering**, v. 93, p. 55–66, 2016.
- MALLICK, R. *et al.* Current Status of Hard Turning in Manufacturing: Aspects of Cooling Strategy and Sustainability. **Lubricants**, v. 11, n. 3, 2023.
- MASOOD, I.; JAHANZAIB, M.; HAIDER, A. Tool wear and cost evaluation of face milling grade 5 titanium alloy for sustainable machining. **Advances in Production Engineering and Management**, v. 11, n. 3, p. 239–250, 2016.
- MITROFF, I. I. *et al.* On Managing Science in the Systems Age: Two Schemas for the Study of Science as a Whole Systems Phenomenon. **Interfaces**, v. 4, p. 46–58, 1974.

- MOHAMED, A. *et al.* Tool Condition Monitoring for High-Performance Machining - A Review. **Sensors**, 2022.
- MONTGOMERY, D. C. **Design and Analysis of Experiments**. 9. ed. [s.l.] John Wiley & Sons, 2017.
- MYERS, R. H. *et al.* Generalized Linear Models: With Applications in Engineering and the Sciences: Second Edition. **Generalized Linear Models: With Applications in Engineering and the Sciences**: Second Edition, p. 1–505, 2010.
- MYERS, R. H.; CARTER, W. H. Response surface techniques for dual response systems. **Technometrics**, v. 15, n. 2, p. 301–317, 1973.
- MYERS, R. H.; KHURI, A. I.; CARTER JR, W. H. **Response Surface Methodology: 1966-1988**. *Technometrics*, v. 31, p. 137–157, 1989.
- MYERS, R. H.; MONTGOMERY, D. C.; ANDERSON-COOK, C. M. **Response Surface Methodology: Process and Product Optimization Using Designed Experiments**. 4. ed. [s.l.] Wiley, 2016.
- NAVARRO, M. D. *et al.* Tool wear study in edge trimming on basalt fibre reinforced plastics. **Procedia Manufacturing**, v. 13, p. 259–266, 2017.
- OKAFOR, C. E. *et al.* Development of carbonized wood/silicon dioxide composite tailored for single-density shoe sole manufacturing. **Materials Today Communications**, v. 32, 2022.
- OLIVEIRA, L. G. *et al.* Prediction capability of Pareto optimal solutions: A multi-criteria optimization strategy based on model capability ratios. **Precision Engineering**, v. 59, p. 185–210, 2019.
- OLIVEIRA, L. G. *et al.* Response surface methodology for advanced manufacturing technology optimization: theoretical fundamentals, practical guidelines, and survey literature review. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 104, n. 5–8, p. 1785–1837, 2019.
- OLIVEIRA, N. B. *et al.* Modeling and optimization of steel end milling process: a review on empirical studies. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 45, n. 11, 2023.
- PAIVA, A. P. *et al.* A multivariate robust parameter optimization approach based on Principal Component Analysis with combined arrays. **Computers & Industrial Engineering**, v. 74, p. 186–198, ago. 2014.

- PAIVA, A. P. *et al.* Multi-objective optimization of pulsed gas metal arc welding process based on weighted principal component scores. **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 50, n. 1–4, p. 113–125, 2 set. 2010.
- PAIVA, A. P.; FERREIRA, J. R.; BALESTRASSI, P. P. A multivariate hybrid approach applied to AISI 52100 hardened steel turning optimization. **Journal of Materials Processing Technology**, v. 189, n. 1–3, p. 26–35, 2007.
- PALANIAPPAN, T.; SUBRAMANIAM, P. Performance optimization of BS970 mild steel turning parameters under SIC-MOS2 hybrid nanofluid using hybrid deep belief network based coot optimization. **Surface Review and Letters**, v. 31, n. 12, 2024.
- PARIDA, S. P. *et al.* Transverse vibration of laminated-composite-plates with fillers under moving mass rested on elastic foundation using higher order shear deformation theory. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science**, v. 238, n. 20, p. 9878–9888, 2024.
- PEREIRA, M. C. *et al.* A hybrid multivariate normal boundary intersection approach with post-optimization assisted by mixture design of experiments. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, v. 162, p. 112510, dez. 2025.
- PEREIRA, M. C.; PAIVA, A. P. Nonlinear multiobjective optimization of efficiency conditions using a CFD-DOE hybrid approach: A practical application in centrifugal fans for industrial ovens. **Thermal Science and Engineering Progress**, v. 65, p. 103899, set. 2025.
- PERUMAL, S. *et al.* Titanium carbonitride-coated CBN insert featured turning process parameter optimization during AA359 alloy machining. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, 2024.
- PERVAIZ, S.; KANNAN, S.; KISHAWY, H. A. An extensive review of the water consumption and cutting fluid based sustainability concerns in the metal cutting sector. **Journal of Cleaner Production**, v. 197, p. 134–153, 2018.
- PHOKOBYE, S. N. *et al.* Comparative investigation and optimization of cutting tools performance during milling machining of titanium alloy (Ti6Al4V) using response surface methodology. **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, p. 3565–3577, 2024.

- PINHEIRO, M. F. *et al.* Multivariate modeling and optimization of the reverse cationic flotation process of iron ore using depressant-modified starch. **Minerals Engineering**, v. 205, 2024.
- PIRES, A. L. G. *et al.* Environmental and financial multi-objective optimization: Hybrid wind-photovoltaic generation with battery energy storage systems. **Journal of Energy Storage**, v. 66, 2023.
- PLANTE, R. D. Process capability: A criterion for optimizing multiple response product and process design. **IIE Transactions** (Institute of Industrial Engineers), v. 33, n. 6, p. 497–509, 2001.
- RATHOD, N. J. *et al.* Optimization of Tool Life , Surface Roughness and Production Time in CNC Turning Process Using Taguchi Method and ANOVA. **Annals of Data Science**, 2022.
- RENCHER, A. C.; WILLIAM, F. C. Methods of multivariate analysis: Third edition. **Methods of Multivariate Analysis: Third Edition**, v. 45, n. 4, p. 1–758, 2012.
- ROCHA, M. S. *et al.* Multiobjective optimization of the flaxseed mucilage extraction process using normal-boundary intersection approach. **British Food Journal**, v. 123, n. 12, p. 3805–3823, 2021.
- ROHITH, T. V. N.; MANIKANTA, C. V. S. P. Experimental investigation to predict tool life in face milling of aluminum alloy using design of experiments. **Journal of Emerging Technologies and Innovative Research**, v. 5, n. 3, 2018.
- ROSLIM, M. I. *et al.* Experimental Analysis on Machining Properties in Turning of Nimonic C-263. **International Journal of Engineering Trends and Technology**, v. 70, n. 11, p. 144–153, 2022.
- SAEDON, J. B. *et al.* Prediction and optimization of tool life in micromilling AISI D2 (~62 HRC) hardened steel. **Procedia Engineering**, v. 41, p. 1674–1683, 2012.
- SALONITIS, K.; KOLIOS, A. Force-based reliability estimation of remaining cutting tool life in titanium milling. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 106, n. 7–8, p. 3321–3333, 2020.
- SEPAHI-BOROJENI, S.; MAYER, J. R. R.; KHAMENEIFAR, F. Efficient uncertainty estimation of indirectly measured geometric errors of five-axis machine tools via Monte-Carlo validated GUM framework. **Precision Engineering**, v. 67, p. 160–171, 2021.
- SEVERINO, G. *et al.* Development of a special geometry carbide tool for the optimization of vertical turning of martensitic gray cast iron piston rings.

- International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 63, n. 5–8, p. 523–534, 2012.
- SHUI, X. *et al.* GTFT-PDP: A Gated Temporal Fusion Transformer-Integrated Personalized Differential Privacy Framework for tool life prediction. **Measurement**, v. 258, 2026.
- SIBIYA, N. P. *et al.* Model prediction of coagulation by magnetised rice starch for wastewater treatment using response surface methodology (RSM) with artificial neural network (ANN). **Scientific African**, v. 17, 2022.
- SIVALINGAM, V. *et al.* Optimization of atomized spray cutting fluid eco - friendly turning of Inconel 718 alloy using ARAS and CODAS methods. **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, p. 4551–4564, 2022.
- SOORI, M.; AREZOO, B. Effect of cutting parameters on tool life and cutting temperature in milling of AISI 1038 carbon steel. **Journal of New Technology and Materials**, 2023.
- SOUZA, A. F. *et al.* Predicting tool life and sound pressure levels in dry turning using machine learning models. **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, p. 3777–3793, 2024.
- SOUZA, A. F.; VERRI, F. A. N.; CAMPOS, P. H. S.; BALESTRASSI, P. P. Predicting surface roughness in dry machining of AISI H13 steel: a comparison of machine learning and GPT-based models with ceramic cutting tool. **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 138, n. 5–6, p. 2121–2138, 2025.
- SOUZA, L. G. P. *et al.* A simulation-based method for cutting tool reliability estimation without experimental replications. **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, p. 1749–1764, 2025.
- SOUZA, L. G. P. *et al.* A multi-objective optimization framework for sustainable and precision-oriented high-speed hard turning. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 141, p. 4095–4126, 2025.
- SUN, H. *et al.* Enhancing cutting tool sustainability based on remaining useful life prediction. **Journal of Cleaner Production**, v. 244, n. January 2022, 2020.
- SURYA, M. S. Optimization of machining parameters while turning AISI316 stainless steel using response surface methodology. **Scientific Reports**, v.14, p. 1–12, 2024.
- TERRAB, I. *et al.* Numerical investigation and modelling of controllable parameters on the photovoltaic thermal collector efficiency in semi-humid climatic conditions.

- Energy Sources, Part A: Recovery, Utilization and Environmental Effects**, v. 44, n. 4, p. 8760–8776, 2022.
- UZOH, C. F. *et al.* Optimal route for effective conversion of rubber seed oil to biodiesel with desired key fuel properties. **Journal of Cleaner Production**, v. 280, 2021.
- VALIC, G. S. *et al.* Sustainable Machining : MQL Technique Combined with the Vortex Tube Cooling When Turning Martensitic Stainless X20Cr13. **Machines**, 2023.
- VASCONCELOS, G. A. V. B. *et al.* Prediction of surface roughness in duplex stainless steel face milling using artificial neural network. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 133, n. 5–6, p. 2031–2048, 2024.
- VAVRUSKA, P. *et al.* Increasing tool life and machining performance by dynamic spindle speed control along toolpaths for milling complex shape parts. **Journal of Manufacturing Processes**, v. 99, p. 283–297, 2023.
- VENKATESH, R. *et al.* Aluminium alloy nanocomposite made with SiC via ultrasonic stir casting: Behaviour study. **Journal of Mechanical Science and Technology**, 2024.
- WH, C. *et al.* Confidence intervals and an improved ridge analysis of response surfaces. **Technometrics**, v. 28, p. 339–346, 1986.
- WICKRAMASINGHE, K. C. *et al.* Green Metalworking Fluids for sustainable machining applications: A review. **Journal of Cleaner Production**, v. 257, 2020.
- ZARETALAB, A.; SHARIFI, M.; TAGHIPOUR, S. Machining condition-based stochastic modeling of cutting tool's life. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 111, n. 11–12, p. 3159–3173, 2020.
- ZUBAIR, S. W. H. *et al.* Dry finishing turning of AA7075 with binary and ternary nitrides and carbides ceramic-coated tools. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 129, n. 1–2, p. 65–87, 2023.

## APÊNDICE

### Apêndice 1: Propagação de erro

Considere a expansão unidimensional da série de Taylor realizada em torno de  $a=\mu_x$ . Substituindo essa identidade no termo geral da série, segue-se que:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{f^{(n)}(\mu_x)(x-\mu_x)^n}{n!} \right] \quad (\text{A1})$$

Tomando o valor esperado de  $f(x)$ , é possível escrever, após truncamento no termo quadrático, que:

$$E[f(x)] = E \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{f^{(n)}(\mu_x)(x-\mu_x)^n}{n!} \right) \right] = E \left[ f(\mu_x) + f'(\mu_x)(x-\mu_x) + \frac{1}{2} f''(\mu_x)(x-\mu_x)^2 \right] \quad (\text{A2})$$

Distribuindo o operador de valor esperado ( $E$ ) por todos os termos da Eq. (A3), obtém-se que:

$$E[f(x)] = E[f(\mu_x)] + [f'(\mu_x)]E[(x-\mu_x)] + \left[ \frac{f''(\mu_x)}{2} \right] E[(x-\mu_x)^2] \quad (\text{A3})$$

Considerando que  $E(x-\mu_x) = 0$  e que as derivadas segundas desaparecem, o valor esperado de uma função de uma variável aleatória única  $x$  pode ser escrito como:

$$E[f(x)] = E[f(\mu_x)] + \left[ \frac{f''(\mu_x)}{2} \right] \sigma_x^2 \approx E[f(\mu_x)] \quad (\text{A4})$$

Para o caso multidimensional, a média de uma função de várias variáveis aleatórias  $\mathbf{x}^T = [x_1, x_2, \dots, x_k]$  pode ser escrita como:

$$f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \approx f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k) \quad (\text{A5})$$

Para um caso bidimensional, a série de Taylor truncada no termo linear leva a:

$$f(x_1, x_2) = f(\mu_1, \mu_2) + \left[ \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \Big|_{\mu_{x_1}} (x_1 - \mu_{x_1}) + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \Big|_{\mu_{x_2}} (x_2 - \mu_{x_2}) \right] \quad (\text{A6})$$

Agrupando os termos  $f(x_1, x_2)$  e  $f(\mu_1, \mu_2)$  e tomando o valor esperado da diferença ao quadrado entre eles, é possível escrever:

$$E[f(x_1, x_2) - f(\mu_1, \mu_2)]^2 = E \left[ \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \Big|_{\mu_{x_1}} (x_1 - \mu_{x_1}) + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \Big|_{\mu_{x_2}} (x_2 - \mu_{x_2}) \right]^2 \quad (\text{A7})$$

O lado esquerdo da Eq. (A8) representa, na verdade, a variância de  $f(\mathbf{x})$ . Portanto, é evidente que  $Var[f(x_1, x_2)]$  é igual a:

$$\begin{aligned}
Var[f(x_1, x_2)] = E \left\{ \left[ \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \right|_{\mu_{x_1}} (x_1 - \mu_{x_1}) \right]^2 + \left[ \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \right|_{\mu_{x_2}} (x_2 - \mu_{x_2}) \right]^2 \right\} \\
+ E \left\{ 2 \left[ \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \right|_{\mu_{x_1}} \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \right|_{\mu_{x_2}} (x_1 - \mu_{x_1})(x_2 - \mu_{x_2}) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{A8}$$

Substituindo os termos entre parênteses pelos seus respectivos momentos, é possível escrever:

$$Var[f(x_1, x_2)] = \left[ \left. \frac{\partial f(\mu_{x_1})}{\partial x_1} \right]^2 \sigma_{x_1}^2 + \left[ \left. \frac{\partial f(\mu_{x_2})}{\partial x_2} \right]^2 \sigma_{x_2}^2 + 2 \left[ \left. \frac{\partial f(\mu_{x_1})}{\partial x_1} \right] \left[ \left. \frac{\partial f(\mu_{x_2})}{\partial x_2} \right] \sigma_{x_1 x_2} \right. \tag{A9}$$

Generalizando o resultado descrito na **Eq. (A10)** pelo caso de uma função de várias variáveis aleatórias (correlacionadas ou não), obtém-se que:

$$Var[f(\mathbf{x})] = \sum_{i=1}^k \left[ \left. \frac{\partial f(\mu_x)}{\partial x_i} \right]^2 \sigma_{x_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \left[ \left. \frac{\partial f(\mu_x)}{\partial x_i} \right] \left[ \left. \frac{\partial f(\mu_x)}{\partial x_j} \right] \sigma_{x_i x_j} \right. \tag{A10}$$

A covariância entre duas variáveis aleatórias ( $\sigma_{x_i, x_j}$ ) pode ser substituída por seus respectivos coeficientes de correlação de Pearson ( $\rho_{x_i, x_j}$ ), levando à seguinte expressão final:

$$Var[f(\mathbf{x})] = \sum_{i=1}^k \left[ \left. \frac{\partial f(\mu_x)}{\partial x_i} \right]^2 \sigma_{x_i}^2 + 2 \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \left[ \left. \frac{\partial f(\mu_x)}{\partial x_i} \right] \left[ \left. \frac{\partial f(\mu_x)}{\partial x_j} \right] \times \rho_{x_i x_j} \times \sqrt{\sigma_{x_i}^2 \sigma_{x_j}^2} \right\} \tag{A11}$$

Expressando a **Eq. (A12)** em forma matricial, temos:

$$Var[f(\mathbf{x})] \Big|_{\mu_x} = \mathbf{J}[f(\mathbf{x})] \boldsymbol{\Sigma}_x \mathbf{J}^T[f(\mathbf{x})] \Big|_{\mu_x} \tag{A12}$$

Onde:  $\mathbf{J}[f(\mathbf{x})]$  representa o Jacobiano de  $[f(\mathbf{x})]$  que é dada por:

$$\mathbf{J}[f(\mathbf{x})] \Big|_{\mu_x} = \left[ \left. \frac{\partial [f(\mathbf{x})]}{\partial x_1} \right|_{x=\mu_x} \quad \left. \frac{\partial [f(\mathbf{x})]}{\partial x_2} \right|_{x=\mu_x} \quad \dots \quad \left. \frac{\partial [f(\mathbf{x})]}{\partial x_k} \right|_{x=\mu_x} \right] \tag{A13}$$

E a matriz de variância-covariância da variável aleatória  $\boldsymbol{\Sigma}_x$ , equivale a:

$$\boldsymbol{\Sigma}_x = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1 x_2} & \dots & \sigma_{x_1 x_k} \\ \sigma_{x_1 x_2} & \sigma_{x_2}^2 & \dots & \sigma_{x_2 x_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{x_1 x_k} & \sigma_{x_2 x_k} & \dots & \sigma_{x_k}^2 \end{bmatrix} \tag{A14}$$

## Apêndice 2: Propagação do erro na definição do intervalo de confiança (1- $\alpha$ ) %

Para explicar a Eq. (A15), assume-se o modelo quadrático completo genérico para  $k=2$  fatores e que as colunas da matriz de projeto  $\mathbf{X}$  são independentes e, consequentemente, os coeficientes que elas representam não são correlacionados. Em outras palavras, suponha que  $\sigma_{\beta_i, \beta_j} = 0$ . Para este caso, os coeficientes  $\beta_j$  são as variáveis aleatórias:

$$Var[f(\mathbf{x})] = \sum_{i=1}^k \left\{ \frac{\partial[f(\mathbf{x})]}{\partial\beta_i} \right\}^2 \sigma_{\beta_i}^2 \quad (\text{A15})$$

$$Var[f(\mathbf{x})] = \sigma_{\beta_0}^2 + x_1^2 \sigma_{\beta_1}^2 + x_2^2 \sigma_{\beta_2}^2 + x_1^4 \sigma_{\beta_{11}}^2 + x_2^4 \sigma_{\beta_{22}}^2 + x_1^2 x_2^2 \sigma_{\beta_{12}}^2 + 2x_1^2 \sigma_{\beta_0, \beta_{11}} + 2x_2^2 \sigma_{\beta_0, \beta_{22}} + 2x_1^2 x_2^2 \sigma_{\beta_{11}, \beta_{22}}$$

Considerando que a expressão pode ser desenvolvida como:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k \left\{ \frac{\partial[\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_{11} x_1^2 + \hat{\beta}_{22} x_2^2 + \hat{\beta}_{12} x_1 x_2]}{\partial\beta_i} \right\}_{\hat{\beta}_i}^2 = \\ & = \left\{ \frac{\partial[f(\mathbf{x})]}{\partial\beta_0} \right\}_{\hat{\beta}_0}^2 \sigma_{\beta_0}^2 + \left\{ \frac{\partial[f(\mathbf{x})]}{\partial\beta_1} \right\}_{\hat{\beta}_1}^2 \sigma_{\beta_1}^2 + \left\{ \frac{\partial[f(\mathbf{x})]}{\partial\beta_2} \right\}_{\hat{\beta}_2}^2 \sigma_{\beta_2}^2 + \left\{ \frac{\partial[f(\mathbf{x})]}{\partial\beta_{12}} \right\}_{\hat{\beta}_{12}}^2 \sigma_{\beta_{12}}^2 \\ & + \left\{ \frac{\partial[f(\mathbf{x})]}{\partial\beta_{11}} \right\}_{\hat{\beta}_{11}}^2 \sigma_{\beta_{11}}^2 + \left\{ \frac{\partial[f(\mathbf{x})]}{\partial\beta_{22}} \right\}_{\hat{\beta}_{22}}^2 \sigma_{\beta_{22}}^2 + 2 \left\{ \frac{\partial[f(\mathbf{x})]}{\partial\beta_0} \right\} \left\{ \frac{\partial[f(\mathbf{x})]}{\partial\beta_{11}} \right\} \sigma_{\beta_0, \beta_{11}} \\ & + 2 \left\{ \frac{\partial[f(\mathbf{x})]}{\partial\beta_0} \right\} \left\{ \frac{\partial[f(\mathbf{x})]}{\partial\beta_{22}} \right\} \sigma_{\beta_0, \beta_{22}} + 2 \left\{ \frac{\partial[f(\mathbf{x})]}{\partial\beta_{11}} \right\} \left\{ \frac{\partial[f(\mathbf{x})]}{\partial\beta_{22}} \right\} \sigma_{\beta_{11}, \beta_{22}} \end{aligned} \quad (\text{A16})$$

Onde:  $k$  representa o número de fatores (variáveis controláveis),  $\sigma_{\beta_i}^2 = f(\sigma_\varepsilon^2)$  ou, em outras palavras,  $\Sigma_\beta = \sigma_\varepsilon^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$  e  $\sigma_\varepsilon^2$  é o erro experimental (MSE-ANOVA). Os termos de covariância não incluídos no modelo são zero, seguindo a estrutura de  $(\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{-1}$ .

Para um CCD com  $k=3$ ,  $Var[f(\mathbf{x})]$  pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} Var[f(\mathbf{x})] = & \sigma_{\beta_0}^2 + \sigma_{\beta_1}^2 x_1^2 + \sigma_{\beta_2}^2 x_2^2 + \sigma_{\beta_3}^2 x_3^2 + \sigma_{\beta_{11}}^2 x_1^4 + \sigma_{\beta_{22}}^2 x_2^4 + \sigma_{\beta_{33}}^2 x_3^4 + 2x_1^2 \sigma_{\beta_0, \beta_{11}} \\ & + 2x_2^2 \sigma_{\beta_0, \beta_{22}} + 2x_3^2 \sigma_{\beta_0, \beta_{33}} + 2x_1^2 x_2^2 \sigma_{\beta_{11}, \beta_{22}} + 2x_1^2 x_3^2 \sigma_{\beta_{11}, \beta_{33}} + 2x_2^2 x_3^2 \sigma_{\beta_{22}, \beta_{33}} \end{aligned} \quad (\text{A17})$$

Ou, em notação matricial:  $Var[f(\mathbf{x})] = \Gamma(\mathbf{x}) \Sigma_\beta$ . Com:

$$\Gamma(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & * & * & * & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & * & * & * \\ * & x_1^2 & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & x_2^2 & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & x_3^2 & * & * & * & * & * & * \\ x_1^2 & * & * & * & x_1^4 & x_1^2 x_2^2 & x_1^2 x_3^2 & * & * & * \\ x_2^2 & * & * & * & x_1^2 x_2^2 & x_2^4 & x_2^2 x_3^2 & * & * & * \\ x_3^2 & * & * & * & x_1^2 x_3^2 & x_2^2 x_3^2 & x_3^4 & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & x_1^2 x_2^2 & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & x_1^2 x_3^2 & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & x_2^2 x_3^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A18})$$

$$\Sigma_\beta = \begin{bmatrix} \sigma_{\beta_0}^2 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\beta_0, \beta_{11}} & \sigma_{\beta_0, \beta_{22}} & \sigma_{\beta_0, \beta_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\beta_1}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\beta_2}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\beta_3}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{\beta_0, \beta_{11}} & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\beta_{11}}^2 & \sigma_{\beta_{11}, \beta_{22}} & \sigma_{\beta_{11}, \beta_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{\beta_0, \beta_{22}} & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\beta_{11}, \beta_{22}} & \sigma_{\beta_{22}}^2 & \sigma_{\beta_{22}, \beta_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{\beta_0, \beta_{33}} & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\beta_{11}, \beta_{33}} & \sigma_{\beta_{22}, \beta_{33}} & \sigma_{\beta_{33}}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\beta_{12}}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\beta_{13}}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\beta_{23}}^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A19})$$

Generalizando esses resultados observados nos casos com  $k=2$  e  $k=3$  fatores para qualquer número de variáveis de entrada ( $x$ ), é possível escrever que:

$$Var[f(\mathbf{x})] = \mathbf{z}^T(\mathbf{x}) (\Sigma_\beta) \mathbf{z}(\mathbf{x}) = \mathbf{z}(\mathbf{x}) \mathbf{z}^T(\mathbf{x}) (\Sigma_\beta) = \Gamma(\mathbf{x}) \Sigma_\beta \quad (\text{A20})$$

Repetindo esse raciocínio considerando as derivadas parciais tomadas em termos dos fatores controláveis independentes ( $x_i$ ) e assumindo que  $\sigma_{x_i, x_j} = 0$ , obtém-se que  $[f(\mathbf{x})]$

é igual a:

$$\begin{aligned} Var[f(\mathbf{x})] &= \sum_{i=1}^k \left\{ \frac{\partial[f(\mathbf{x})]}{\partial x_i} \right\}^2 \sigma_{\beta_i}^2 = \sum_{i=1}^k \left\{ \frac{\partial[\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_1 x_1 + \beta_{11} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2 + \beta_{12} x_1 x_2]}{\partial x_i} \right\}_{x_i}^2 \sigma_{x_i}^2 \\ &= \left\{ \frac{\partial[f(\mathbf{x})]}{\partial x_1} \right\}^2 \sigma_{x_1}^2 + \left\{ \frac{\partial[f(\mathbf{x})]}{\partial x_2} \right\}^2 \sigma_{x_2}^2 \\ &= (\beta_1 + 2\beta_{11} x_1 + \beta_{12} x_2)^2 \sigma_{x_1}^2 + (\beta_2 + 2\beta_{22} x_2 + \beta_{12} x_1)^2 \sigma_{x_2}^2 \end{aligned} \quad (\text{A21})$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}[f(\mathbf{x})] \Big|_{\mu_x} &= (\beta_1 + 2\beta_{11}\mu_{x_1} + \beta_{12}\mu_{x_2})^2 \sigma_{x_1}^2 + (\beta_2 + 2\beta_{22}\mu_{x_2} + \beta_{12}\mu_{x_1})^2 \sigma_{x_2}^2 \\
&= [\beta_1^2 + 4\beta_1\beta_{11}\mu_{x_1} + 2\beta_1\beta_{12}\mu_{x_2} + 4\beta_{11}^2\mu_{x_1}^2 + 4\beta_{11}\beta_{12}(\mu_{x_1}\mu_{x_2}) + \beta_{12}^2\mu_{x_2}^2] \sigma_{x_1}^2 \\
&\quad + [\beta_2^2 + 4\beta_2\beta_{22}\mu_{x_2} + 2\beta_2\beta_{12}\mu_{x_1} + 4\beta_{22}^2\mu_{x_2}^2 + 4\beta_{22}\beta_{12}(\mu_{x_1}\mu_{x_2}) + \beta_{12}^2\mu_{x_1}^2] \sigma_{x_2}^2
\end{aligned}$$

$$\text{Var}[f(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} \beta_1 + 2\beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_2 \\ \beta_2 + 2\beta_{22}x_2 + \beta_{12}x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{x_2}^2 \end{bmatrix} [(\beta_1 + 2\beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_2) \quad (\beta_2 + 2\beta_{22}x_2 + \beta_{12}x_1)]$$

$$\text{Var}[f(\mathbf{x}|\mu_x)] = [(\beta_1 + 2\beta_{11}\bar{x}_1 + \beta_{12}\bar{x}_2) \quad (\beta_2 + 2\beta_{22}\bar{x}_2 + \beta_{12}\bar{x}_1)] \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{x_2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 + 2\beta_{11}\bar{x}_1 + \beta_{12}\bar{x}_2 \\ \beta_2 + 2\beta_{22}\bar{x}_2 + \beta_{12}\bar{x}_1 \end{bmatrix}$$

### Apêndice 3: Variância da previsão e intervalos de confiança (1- $\alpha$ ) % com base em modelos OLS

Em OLS, os coeficientes desconhecidos  $\beta_j$  são estimados como:

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \mathbf{y}) \\ \mathbf{y} = \mathbf{X}^T \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \end{cases} \quad (\text{A22})$$

Substituindo  $\mathbf{y}$  em  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ , obtemos:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} [\mathbf{X}^T (\mathbf{X}^T \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon})] = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} [(\mathbf{X}^T \mathbf{X}) \boldsymbol{\beta} + \mathbf{X}^T \boldsymbol{\varepsilon}] \quad (\text{A23})$$

Após ajustes, (A23) torna-se:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}} &= (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \mathbf{X}) \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \boldsymbol{\varepsilon}) \\ \hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta} &= (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \boldsymbol{\varepsilon}) \end{aligned} \quad (\text{A24})$$

Portanto:

$$\text{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = E \left\{ [\hat{\boldsymbol{\beta}} - E(\hat{\boldsymbol{\beta}})]^T [\hat{\boldsymbol{\beta}} - E(\hat{\boldsymbol{\beta}})] \right\} = E \left[ (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})^T (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) \right] \quad (\text{A25})$$

O que leva às seguintes identidades:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= E \left\{ [(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \boldsymbol{\varepsilon})]^T [(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \boldsymbol{\varepsilon})] \right\} \\ \text{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= E \left\{ [(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \boldsymbol{\varepsilon})]^T [(\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}) (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}] \right\} = E(\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}) (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \\ \text{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= \sigma_{\varepsilon}^2 [(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}] \end{aligned} \quad (\text{A26})$$

Como a variância da superfície de resposta é dada por:

$$\begin{aligned} \text{Var}[f(\mathbf{x})] &= \text{Var} [\mathbf{z}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\beta}] \\ &= \mathbf{z}(\mathbf{x})^T [\text{Var}(\boldsymbol{\beta})] \mathbf{z}(\mathbf{x}) = \mathbf{z}(\mathbf{x})^T \left[ \sigma_{\varepsilon}^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \right] \mathbf{z}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (\text{A27})$$

O intervalo de confiança (1- $\alpha$ ) % será escrito como:

$$E[f(\mathbf{x})] = \hat{\mathbf{y}} \pm t_{\alpha/2, n-p} \sqrt{s^2 \mathbf{z}^T(\mathbf{x}) (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{z}(\mathbf{x})} \quad (\text{A28})$$

É possível verificar que o intervalo de confiança (1- $\alpha$ ) % é uma consequência direta da teoria da propagação do erro.

A Eq. (A29) pode ser usada para calcular a variância da previsão e o intervalo de confiança para a média (ver Apêndice A2), substituindo apenas o Jacobiano de  $f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{J}[f(\mathbf{x})]$ , pelas derivadas parciais  $f(\mathbf{x})$  m termos de cada coeficiente estimado  $\beta_i$  e substituindo  $\Sigma_{\mathbf{x}}$  pela matriz de variância-covariância dos coeficientes ( $\tilde{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}}$ ), tal como:

$$\mathbf{J}[f(\mathbf{x})] = \left[ \frac{\partial[f(\mathbf{x})]}{\partial\beta_0} \quad \frac{\partial[f(\mathbf{x})]}{\partial\beta_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial[f(\mathbf{x})]}{\partial\beta_{ij}} \right], \quad \tilde{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \sigma_{\beta_0}^2 & \sigma_{\beta_0\beta_1} & \cdots & \sigma_{\beta_0\beta_{jk}} \\ \sigma_{\beta_0\beta_1} & \sigma_{\beta_1}^2 & \cdots & \sigma_{\beta_1\beta_{jk}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{\beta_0\beta_{jk}} & \sigma_{x_2x_k} & \cdots & \sigma_{\beta_k}^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A29})$$

#### Apêndice 4: Elipses de confiança

Uma elipse de confiança  $(1-\alpha)$  % é definida como Johnson e Wichern (2014) e Rencher e William (2012):

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} + \sqrt{\chi^2_{(p,1-\alpha)}} \times \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} \quad (\text{A30})$$

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} + \sqrt{\chi^2_{(p,1-\alpha)}} \times \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} \cos\theta \cos\alpha - \sqrt{\lambda_2} \sin\theta \sin\alpha \\ \sqrt{\lambda_1} \sin\theta \cos\alpha + \sqrt{\lambda_2} \cos\theta \sin\alpha \end{bmatrix}, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi \quad (\text{A31})$$

Onde:  $\lambda_j$  são os autovalores da matriz de variância-covariância  $\Sigma$ , e  $\theta$  equivale a:

$$\theta = \frac{1}{2} \text{arc tg} \left[ \frac{2\sigma_{12}}{(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)} \right] \therefore \theta = \frac{1}{2} \text{arc tg} \left[ \frac{2\rho_{12}\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2}}{(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)} \right] \quad (\text{A32})$$

Sendo  $\sigma_{12}$ ,  $\rho_{12}$ ,  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$ , respectivamente, a covariância entre  $x_1$  e  $x_2$ , o coeficiente de correlação, a variância de  $x_1$  e variância de  $x_2$ .