

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Uma perspectiva numérica para a evolução do contraste
de densidade em modelos cosmológicos intrinsecamente
homogêneos e isotrópicos

Brian John Gutierrez Vilca

Orientador: Prof. Dr. Leandro Gustavo Gomes

Co-orientador: Prof. Dr. Alan Bendasoli Pavan

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da
FAPEMIG

ITAJUBÁ, 18 DE MARÇO DE 2026

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**Uma perspectiva numérica para a evolução do contraste
de densidade em modelos cosmológicos intrinsecamente
homogêneos e isotrópicos**

Brian John Gutierrez Vilca

Orientador: Prof. Dr. Leandro Gustavo Gomes

Co-orientador: Prof. Dr. Alan Bendasoli Pavan

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em
Física como parte dos requisitos para obtenção do Título
de Mestre em Ciências em Física

Área de Concentração: Cosmología e gravitação

ITAJUBÁ – MG

18 DE MARÇO DE 2026

Ao meu pai

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço profundamente ao meu orientador Leandro Gustavo Gomes, pela orientação, dedicação e paciência ao longo do desenvolvimento deste trabalho. Suas sugestões, comentários e conhecimentos foram fundamentais para a construção e conclusão desta pesquisa. Ao meu co-orientador, Alan Bendasoli Pavan, por suas sugestões sobre o desenvolvimento numérico deste trabalho.

Agradeço à Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI), em especial ao Programa de Pós-Graduação em Física, pelo suporte acadêmico, infraestrutura e ambiente de pesquisa oferecidos durante o curso de mestrado.

Agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) pelo apoio financeiro concedido, o qual foi essencial para a realização desta pesquisa no mestrado.

Agradeço à minha família, a minha Mãe a Luz e Iann pelo apoio incondicional, compreensão e incentivo constantes ao longo desta etapa, bem como aos meus amigos e colegas do mestrado, a Patricia, Paloma, Raiane, David, Joao, Guilherme e Ygor que de alguma forma contribuíram para tornar este percurso mais leve e enriquecedor.

Agradeço também aos professores do curso de mestrado, pelos conhecimentos compartilhados, pela formação acadêmica sólida e pelas discussões enriquecedoras que contribuíram significativamente para o meu desenvolvimento científico.

Às vezes os sonhos podem se tornar realidade.

-Anônimo.

Resumo

O modelo padrão da Cosmologia, frequentemente chamado de Λ CDM, não é capaz de explicar alguns dos resultados observacionais recentes. Neste contexto, torna-se necessário buscar novas abordagens que sejam capazes de explicar a dinâmica do Universo. Assim, estudaremos numericamente um modelo cosmológico com expansão homogênea e isotrópica através de suas equações de Einstein, que neste caso se expressa em uma equação diferencial parcial (EDP) do tipo difusão não linear. Em particular, examinaremos a evolução temporal do contraste de densidade, que nos fornece uma importante informação sobre a evolução de inhomogeneidades do fluido cosmológico.

Palavras-chave: Modelo cosmológico, Métodos Numéricos, Contraste de densidade.

Abstract

The standard model of Cosmology, often called Λ CDM, is not able to explain some of the recent observational results. In this context, it becomes necessary to seek new approaches that are able to explain the dynamics of the Universe. Thus, we will numerically study a cosmological model with homogeneous and isotropic expansion through its Einstein equations, which in this case is expressed in a partial differential equation (PDE) of the nonlinear diffusion type. In particular, we will examine the temporal evolution of the density contrast, which provides us with important information about the evolution of inhomogeneities of the cosmological fluid.

Keywords: Cosmological model, Numerical methods, Density contrast..

Sumário

Introdução	X
1 Modelos com expansão homogênea e isotrópica	1
1.1 O modelo padrão da cosmologia: Um panorama geral	2
1.1.1 Espaços-tempos FLRW e o modelo cosmológico de fundo	2
1.1.2 O contraste de densidade no modelo padrão	5
1.2 Espaços-tempos com expansão homogênea e isotrópica	7
1.3 O princípio cosmológico e as condições de fronteira periódicas	9
1.4 Uma classe de modelos cosmológicos com expansão homogênea e isotrópica	10
1.5 O redshift do modelo padrão como parâmetro temporal	16
1.6 Reescalamento e condições iniciais	18
2 Abordagem numérica para o modelo com expansão intrinsecamente ho-	
mogênea e isotrópica	21
2.1 Discretização em 1+1 dimensões	22
2.2 Discretização em 2+1 dimensões	24
2.3 Condição de estabilidade	27
2.4 O método numérico em 3+1 dimensões	33
2.5 Análise do algoritmo	34
2.6 Aplicação do método numérico: um exemplo no caso 1+1	38
2.7 Aplicação do método numérico: um exemplo no caso 2+1	43
2.8 Fluxograma	45

3	Análise numérica da evolução do contraste de densidade: uma nova perspectiva sobre os efeitos não-lineares	46
3.1	Uma nova perspectiva para a descrição do contraste de densidade	46
3.2	Considerações sobre os parâmetros físicos utilizados	48
3.3	A influência da razão de superdensidade e amplitude de densidade na de- terminação do redshift de homogeneidade: Paredes cósmicas	51
3.3.1	A distribuição de energia em $z = 0$ de uma Parede cósmica	51
3.3.2	A implementação numérica dos cálculos	52
3.3.3	O comportamento do redshift de homogeneidade para valores cons- tantes da razão de superdensidade	53
3.3.4	O comportamento do redshift de homogeneidade: consideração finais	57
	Conclusões	59
	Referencias Bibliográficas	61
	Anexo I	64

Lista de Figuras

1.1	Célula cosmológica	9
1.2	Fator de escala a , em função de s para diferentes valores de w	16
2.1	Esquema de resolução considerando uma dimensão espacial e uma dimensão temporal onde o índice n está relacionado ao tempo e o índice j ao espaço	23
2.2	Esquema de cálculo nas fronteiras considerando condições periódicas em $1 + 1$	23
2.3	Evolução da condição inicial no espaço-tempo $1+1$	24
2.4	Esquema de resolução em duas dimensões de espaço e uma de tempo onde o índice n representa o tempo e j, l representam o espaço	26
2.5	Esquema de evolução em $2+1$ dimensões	27
2.6	Tamanho do passo máximo no tempo(azul) e tamanho do passo utilizado (vermelho).	36
2.7	Resultados em $1+1$ dimensões com $\beta = 0$ obtidos de nosso código numérico implementado em FORTRAN	37
2.8	Resultados em $1+1$ dimensões com $\beta = 0$ obtidos de MATHEMATICA	37
2.9	Contraste de densidade para diferentes valores de w considerando $n = 1$	39
2.10	Contraste de densidade em função de n para diferentes valores de w considerando $n = 3$	40
2.11	Contraste de densidade para diferentes valores de w considerando $n = 5$	41
2.12	Contraste de densidade para diferentes valores de w considerando $n = 7$	42
2.13	Evolução da densidade de energia	44

2.14 Fluxograma	45
3.1 Gráfica de ρ_0	51
3.2 z_h em função de A_0 com $\chi = 5 \times 10^{-5}$ e $w = 0$	54
3.3 z em função de A_0 com $\chi = 8 \times 10^{-5}$ e $w = 0$	54
3.4 z em função de A_0 com $\chi = 10^{-4}$ e $w = 0$	55
3.5 z em função de A_0 com $\chi = 2 \times 10^{-4}$ e $w = 0$	56
3.6 z em função de A_0 com $\chi = 3 \times 10^{-4}$ e $w = 0$	56
3.7 z_h em função de A_0 para diferentes valores de χ	57

Introdução

O modelo cosmológico padrão é baseado no princípio de que o universo é homogêneo e isotrópico em grandes escalas. No entanto, nos últimos anos, tem havido muito debate sobre sua validade surgindo várias questões não explicadas por ele [1]. Nesse contexto, as inhomogeneidades inerentes à formação de estruturas surgem como perturbações lineares e definem o contraste de densidade através de

$$\delta(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t) - \bar{\rho}(t)}{\bar{\rho}(t)}, \quad (1)$$

onde $\rho(\vec{r}, t)$ é a densidade de energia, $\bar{\rho}(t)$ é a densidade média de energia, $\vec{r} = (x, y, z)$ é a posição no espaço e t o tempo. Note que, em geral, o contraste de densidade $\delta(\vec{r}, t)$ é uma grandeza que depende de sua localização no espaço e no tempo [2]. Ele nos dá informação sobre a homogeneidade da distribuição de matéria ao longo do espaço. Neste trabalho consideraremos $|\delta| < 10^{-4}$ como a condição para dizer que o espaço é homogêneo.

Há diferentes classes de modelos cosmológicos que consideram a não homogeneidade do espaço sob diferentes hipóteses [3]. Nesses casos, o contraste de densidade não aparece como resultado de perturbações do modelo, mas sim é inerente ao próprio. Nesse contexto, consideraremos tal variável em um modelo fisicamente motivado com evolução homogênea e isotrópica e as seções espaciais tendo geometria de curvatura constante, conforme descrito no **Capítulo 1** [4, 5]. Esta classe satisfaz uma versão do princípio cosmológico em grandes escalas, que do ponto de vista matemático é obtido ao formular condições de contorno espacialmente periódicas para a EDP não-linear oriunda das equações de Einstein.

O cerne deste trabalho se encontra no **Capítulo 2**, onde a referida EDP parabólica é estudada numericamente através do método de diferenças finitas centradas no espaço e do método de Runge-Kutta de quarta ordem no tempo, ambos adaptados às condições de contorno periódicas. Além disto, também analisamos ali sua estabilidade numérica através do método de Von Neumann. Como resultado principal, estabelecemos uma poderosa ferramenta para as futuras aplicações à cosmologia. Para mostrarmos que de fato isto ocorre, no **Capítulo 3** fazemos uma primeira análise de aspectos não-lineares em longo período de tempo e reportamos suas conclusões não triviais.

Desta maneira estudaremos nos capítulos seguintes a evolução do contraste de densidade estruturado da seguinte forma: No **Capítulo 1**, apresentaremos o modelo cosmológico intrinsecamente homogêneo e isotrópico e, portanto, a equação diferencial parcial do tipo difusão não linear, que resolveremos numericamente. Em seguida, no **Capítulo 2**, estudaremos o esquema de solução numérica para esta EDP, bem como suas condições de contorno e de estabilidade. O **Capítulo 3** será dedicado a uma aplicação não-trivial dos resultados obtidos nas simulações numéricas à cosmologia. Por fim, no último capítulo, apresentamos as principais conclusões do nosso trabalho.

Capítulo 1

Modelos com expansão homogênea e isotrópica

Dentre os diversos modelos propostos para tentar explicar o universo em que vivemos, o chamado modelo Λ CDM se destacou nas últimas décadas, a ponto de ser referido como o modelo padrão da cosmologia. No entanto, recentemente, algumas "tensões" tem surgido e sua eficácia tem sido questionada [1]. Com isto, novas propostas surgem com o intuito de suplantarem o primeiro. Neste sentido, vamos nos concentrar nos espaços-tempos propostos na Ref. [6], que considera o caso mais geral de expansão homogênea e isotrópica.

Neste capítulo, vamos primeiramente revisar de forma sucinta as principais ideias que cercam o modelo padrão. Em seguida, exporemos os espaços-tempos mais gerais com expansão homogênea e isotrópica, e por fim, um modelo específico de um fluido viscoso que, com base nas equações de Friedmann e Raychaudhuri, define uma única EDP que governa a evolução da densidade de energia no universo.

1.1 O modelo padrão da cosmologia: Um panorama geral

1.1.1 Espaços-tempos FLRW e o modelo cosmológico de fundo

A forma mais usual de se descrever um universo com expansão homogênea e isotrópica é dada através dos espaços-tempos de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Nestes, podemos descrever um intervalo infinitesimal ds^2 entre dois eventos utilizando coordenadas especiais tais que [2]

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\left(1 + \frac{K}{4}(x^2 + y^2 + z^2)\right)^2}, \quad (1.1)$$

onde $a(t)$ é uma função temporal, chamada de fator de escala, e K é a curvatura seccional constante das seções espaciais dadas por $t = t_1$, t_1 constante. No caso $K = 0$, elas são cópias do espaço Euclidiano, e portanto dizemos aí que o universo é plano (aberto). Para $K > 0$, o espaço é representado pela esfera tridimensional de raio $R = 1/\sqrt{K}$, e portanto dizemos que o universo esférico (fechado). Por último, se $K < 0$, as seções espaciais são representações do espaço hiperbólico tri-dimensional, e assim dizemos que o universo é hiperbólico (aberto). Sem perda de generalidade, através de uma mudança simples de escala, colocaremos $K = 1$, no caso esférico, e $K = -1$, no caso hiperbólico.

Em cosmologia, ao lidarmos com distâncias extraordinariamente grandes, usualmente assumimos que o fluido cósmico se comporta, em primeira aproximação, como uma distribuição homogênea e isotrópica de matéria e radiação. Desta forma, o tensor de energia-momento é expresso na forma de um fluido perfeito homogêneo, dado por [7]

$$T_{\mu\nu} = \rho(t)u_\mu u_\nu + p(t)(g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu), \quad (1.2)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico, $p(t)$ e a pressão relativística, $\rho(t)$ a densidade de energia e $u_\nu = \partial_t$ o campo de velocidades do fluido.

O tensor de energia-momento descreve o conteúdo de matéria e radiação no universo, enquanto a dinâmica envolvendo suas componentes com o fator de escala da métrica (1.1) é dada pelas equações de Einstein da Relatividade Geral, que neste contexto se reduzem

à equação de Friedmann,

$$H^2 = \frac{\kappa}{3}\rho - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (1.3)$$

sendo Λ a constante cosmológica e H o parâmetro de Hubble

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (1.4)$$

é a equação de Raychaudhuri,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.5)$$

Consideramos aqui a nomenclatura $\kappa = 8\pi G$. Uma terceira equação é obtida a partir dessas duas, que representa a conservação de energia, dada por

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p). \quad (1.6)$$

Ela também pode ser identificada com a primeira lei da termodinâmica, que nos diz que o trabalho é igual à variação da energia interna do sistema, $dE = -pdV$ com $V \propto a^3$.

Note que as equações de Einstein são dadas com 3 incógnitas ρ, p, a e apenas 2 equações. A terceira tomaremos na forma de uma equação de estado. Por exemplo, as variáveis ρ e p podem ser correlacionadas por uma equação linear que depende do tipo de fluido, como $p = w\rho$. Desta forma, podemos obter o seguinte:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow \rho = \rho_0 a^{-3(1+w)}, \quad (1.7)$$

onde t_0 representa a idade do universo hoje, $a(t_0) = a_0 = 1$, o fator de escala atual, e $\rho(t_0) = \rho_0$ o valor corrente da densidade de energia. As componentes de energia do modelo padrão são divididas em:

- Radiação, com $w = 1/3$ e $\rho_r \propto a^{-4}$;
- Poeira, com $w = 0$, e $\rho_m \propto a^{-3}$;
- Energia escura com $w = -1$, neste caso ρ_Λ constante.

Existe uma densidade de energia crítica definindo o valor exato para que nosso universo seja espacialmente plano,

$$\rho_c = \frac{3H_0}{\kappa}, \quad (1.8)$$

onde $H_0 = H(t_0)$ e chamada de constante de Hubble. Com ela introduzimos os parâmetros de densidade na forma

$$\Omega_r = \frac{\rho_r}{\rho_c}, \quad \Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_c}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c}, \text{ e } \Omega_K = -\frac{K}{2\rho_c}, \quad (1.9)$$

sendo o último a curvatura vista como densidade de energia. Assim, temos

$$\frac{\rho}{\rho_c} = \Omega_\Lambda + \frac{\Omega_m}{a^3} + \frac{\Omega_r}{a^4}, \quad (1.10)$$

e a equação de Friedmann (1.3) pode ser escrita como

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \Omega_\Lambda + \frac{\Omega_K}{a^2} + \frac{\Omega_m}{a^3} + \frac{\Omega_r}{a^4}, \quad (1.11)$$

onde cada parâmetro Ω é uma constante satisfazendo

$$\Omega_\Lambda + \Omega_K + \Omega_m + \Omega_r = 1. \quad (1.12)$$

De acordo com os dados do satélite Planck [8], temos a seguinte composição para o conteúdo do universo:

- $\Omega_\Lambda \approx 0,6889$, o que implica que aproximadamente 69% da energia do universo hoje é composta pela energia escura;
- $\Omega_K \approx 0$, o que implica que o universo é plano e sua densidade de energia $\rho_0 = \rho_c$.
- $\Omega_m \approx 0,3111$, com aproximadamente 5% de matéria bariônica e 26% de matéria escura;
- $\Omega_r \approx 9 \times 10^{-5}$, isto é, a participação da radiação na composição da energia do universo atual é muito pequena.

Os dados acima nos indicam que não conhecemos a maior parte da composição do nosso universo. Há muitas tentativas de explicar o que são a energia e a matéria escuras, porém até o momento não obtivemos nenhuma resposta contundente.

1.1.2 O contraste de densidade no modelo padrão

No modelo cosmológico de fundo FLRW não há espaço para a introdução de inhomogeneidades senão como perturbações. Por exemplo, para descrevermos a formação de estruturas, como galáxias e seus aglomerados, recorreremos às perturbações daquele espaço homogêneo e isotrópico, assim como àquelas relacionadas ao fluido cosmológico. Neste caso, a densidade de energia se torna inhomogênea na ordem linear, com

$$\rho(\vec{r}, t) = (1 + \delta(\vec{r}, t)) \rho_0(t), \quad (1.13)$$

onde $\delta(\vec{r}, t)$ é chamado de contraste de densidade. Aqui $\rho(\vec{r}, t)$ representa a densidade de energia local, ou seja, a densidade de energia em um ponto do espaço-tempo, enquanto que $\rho_0(t)$ a densidade média de energia do universo em um dado instante de tempo.

O contraste de densidade é uma ferramenta muito útil no estudo de inhomogeneidades no modelo padrão da cosmologia. Ele nos fornece informação da variação da densidade de energia em um universo perturbado em relação a um universo completamente homogêneo dado pelo modelo FLRW de fundo. Podemos inferir de (1.13) que, se $\delta = 0$, o universo é completamente homogêneo e tem uma densidade de energia $\rho = \rho_0(t)$. Isto significa que, à medida que $\delta \rightarrow 0$, o modelo em questão se torna cada vez mais homogêneo. Em outras palavras, δ é uma medida intuitiva da inhomogeneidade do modelo. No entanto, não há um consenso claro sobre o regime de homogeneidade e inhomogeneidade em relação a δ . De acordo com [9], na escala de superaglomerados de galáxias temos $\delta \lesssim 1$, denominado regime linear. Em escalas correspondentes às escalas de aglomerados e galáxias, $\delta \gg 1$, denominado regime não-linear.

Em grande escala, num universo homogêneo em expansão, ainda num contexto Newtoniano, a matéria pode ser modelada como um fluido perfeito com pressão $p_0(t)$, densidade de energia $\rho_0(t)$, e velocidade $V_0(\vec{r}, t)$. Aqui vale a lei de Hubble, $V_0(t, \vec{r}) = H(t)\vec{r}$, onde \vec{r} representa coordenadas cartesianas do espaço euclidiano. Tomando $\phi_0(\vec{r}, t)$ como o potencial gravitacional [2], e seguindo o que foi visto no modelo FLRW da cosmologia, as

inomialidades surgem como perturbações no universo, onde podemos considerar

$$\begin{aligned}\rho(\vec{r}, t) &= \rho_0(t) + \delta\rho(\vec{r}, t) \\ V(\vec{r}, t) &= H(t)\vec{r} + \delta\mathbf{v}(\vec{r}, t) \\ \phi(\vec{r}, t) &= \phi_0(t) + \delta\phi(\vec{r}, t) \\ p(\vec{r}, t) &= p_0(t) + \delta p(\vec{r}, t) = p_0(t) + c_s^2 \delta\rho(\vec{r}, t),\end{aligned}$$

onde c_s é a velocidade do som no fluido. Com isso temos as equações de continuidade para a densidade de energia,

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \delta\mathbf{v} + \nabla \cdot (\delta\rho \mathbf{V}_0) = 0,$$

de Euler para a dinâmica do fluido perfeito,

$$\frac{\partial \delta\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla) \delta\mathbf{v} + (\delta\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{V}_0 + \frac{c_s^2}{\rho_0} \nabla \delta\rho + \nabla \delta\phi = 0,$$

e Poisson para o campo gravitacional,

$$\Delta \delta\phi = 4\pi G \delta\rho,$$

descrevendo assim a dinâmica das perturbações, onde Δ é o operador definido por,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1.14)$$

É apropriado neste ponto usar novas coordenadas \vec{q} , que estão relacionadas às anteriores pelo fator de escala $\vec{r} = a(t)\vec{q}$. Isto nos permite finalmente encontrar a equação para o contraste de densidade de energia,

$$\delta(\vec{r}, t) = \frac{\delta\rho(\vec{r}, t)}{\rho_0(t)}, \quad (1.15)$$

que é dada por

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - \frac{c_s^2}{a^2} \Delta \delta - 4\pi G \rho_0 \delta = 0. \quad (1.16)$$

Ela é uma EDP linear de segunda ordem em δ , e portanto pode ser resolvida utilizando as ferramentas de análise de Fourier, assim tornando-se uma EDO temporal no espaço dos modos normais de Fourier.

1.2 Espaços-tempos com expansão homogênea e isotrópica

Recentemente, foi mostrado que um espaço-tempo tem expansão homogênea e isotrópica se, e somente se, sua métrica puder ser posta na forma [6]

$$ds^2 = -e^{2\phi(t,x)} dt^2 + a(t)^2 \gamma(\vec{r}), \quad (1.17)$$

onde $\gamma(\vec{r})$ é uma métrica Riemanniana fixa na variedade que representa o espaço e de curvatura constante k . Como no caso FLRW, ela pode ser expressa por

$$\gamma(\vec{r}) = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\left(1 + \frac{K}{4}(x^2 + y^2 + z^2)\right)^2}, \quad (1.18)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala e $\phi(\vec{r}, t)$ uma função representando o potencial gravitacional quando no regime Newtoniano. Neste contexto, a quadri-velocidade do observador comóvel com u é $u^\mu = (e^{-\phi}, 0, 0, 0)$ e seu parâmetro de Hubble pode ser expresso da seguinte forma:

$$H = \frac{1}{a} \frac{da}{d\tau} = \frac{e^{-\phi}}{a} \frac{da}{dt}, \quad (1.19)$$

com $d\tau = e^{-\phi} dt$ o tempo próprio desses observadores. No que segue, assumiremos $H \neq 0$, de forma que o fator de escala pode ser colocado como coordenada temporal, tal que

$$e^{-\phi} \frac{d}{dt} = a H \frac{d}{da} \quad \text{e} \quad e^{-\phi} \frac{\partial}{\partial t} = a H \frac{\partial}{\partial a}. \quad (1.20)$$

Assim, seguindo a ref. [7], a equação de Friedmann generalizada fica na forma

$$\rho = \left(3H^2 + \frac{3K}{a^2}\right), \quad (1.21)$$

enquanto a equação de Raychaudhuri é

$$\frac{H}{3a^2} D^2 \left(\frac{1}{H}\right) - H a \frac{\partial H}{\partial a} = \frac{3}{2} H^2 + \frac{K}{2a^2} + \frac{P}{2}, \quad (1.22)$$

sendo D é a conexão Levi-Civita da métrica espacial (1.18). As duas implicam a conservação da energia $\nabla_\kappa T^{\kappa 0} = 0$. Isto pode ser visto considerando a derivada em função de a da equação de Friedmann,

$$\frac{\partial \rho}{\partial a} = 6H \frac{\partial H}{\partial a} - \frac{6K}{a^3},$$

e substituindo a expressão $H \frac{\partial H}{\partial a}$ em (1.22), para obtermos

$$\frac{\partial \rho}{\partial a} + \frac{3}{a}(\rho + p) = \frac{2H}{a^3} D^2 \left(\frac{1}{H} \right) .$$

Em termos de ϕ , da formula (1.19), obtemos a equação da conservação da energia:

$$\frac{\partial \rho}{\partial a} + \frac{3}{a}(\rho + p) = \frac{2}{a^3} (D^2 \phi + |D\phi|^2) . \quad (1.23)$$

O tensor de tensões anisotrópicas [7], $\widehat{\Pi}$, deve satisfazer a condição denominada equilíbrio de tensão-curvatura-maré (veja ref. [5]), o que é necessário para que a expansão seja isotrópica e as equações de Einstein descrevam a dinâmica do nosso universo. Assim,

$$\widehat{\Pi}_{ij} + \widehat{\Phi}_{ij} = \widehat{R}_{ij} = 0 , \quad (1.24)$$

com, $\widehat{\Phi}_{ij}$ é o tensor de maré newtoniano, dado pela parte sem traço de $e^{-\phi} D_i D_k e^\phi$, e \widehat{R}_{ij} a parte sem traço do tensor de Ricci da métrica $a(t)^2 \gamma(x)$. Como esta tem curvatura constante, então $\widehat{R}_{ij} = 0$. No limite Newtoniano, com potencial fraco ($|\phi| \ll 1$), essa condição representa o equilíbrio entre as forças de maré newtonianas e as tensões na matéria, que pode ser expressa como

$$\Pi_{ik} + \widehat{D_i D_k \phi} = 0 ,$$

onde $\widehat{}$ é a parte sem traço de um tensor de ordem 2 ¹.

Por fim, para que o modelo seja fisicamente consistente, é necessário que o fluxo total de energia esteja orientada na direção da expansão do universo, na forma

$$q^i = \frac{2}{a^2} D^i H . \quad (1.25)$$

As equações (1.21), (1.22), (1.24) e (1.25) são as equações de Einstein da Relatividade Geral para a métrica na forma (1.17).

¹A parte sem traço de um tensor A_i^k é definida como sendo o tensor $\widehat{A}_i^k = A \delta_i^k - A_i^k$, com $A = A_k^k/3$. Assim, $\widehat{A}_k^k = 0$.

1.3 O princípio cosmológico e as condições de fronteira periódicas

O modelo padrão utiliza uma forma "forte" do princípio cosmológico, já que consideramos que o espaço-tempo de fundo FLRW é homogêneo e isotrópico em todas as escalas. Já o modelo com expansão homogênea e isotrópica deste trabalho satisfará uma forma "fraca" deste princípio, isto é, exigiremos que todas as propriedades físicas e geométricas se tornem homogêneas e isotrópicas apenas em larga escala, mas não necessariamente na escala de galáxias e pequenos aglomerados de galáxias [4]. Para tanto, precisaremos introduzir condições de contorno adequadas.

As condições de contorno que temos que usar para desenvolver nosso modelo devem ser tais que satisfaçam o princípio cosmológico "fraco", quer dizer, que o universo é homogêneo e isotrópico em larga escala. Vamos então supor que o espaço é dividido igualmente em regiões chamadas de células cosmológicas, dentro das quais a distribuição de matéria é essencialmente inhomogênea. O princípio cosmológico é evocado quando assumimos que em cada uma delas deve se comportar exatamente da mesma maneira que em qualquer outra, já que não há direção nem regiões privilegiadas no universo quando visto em larga escala.

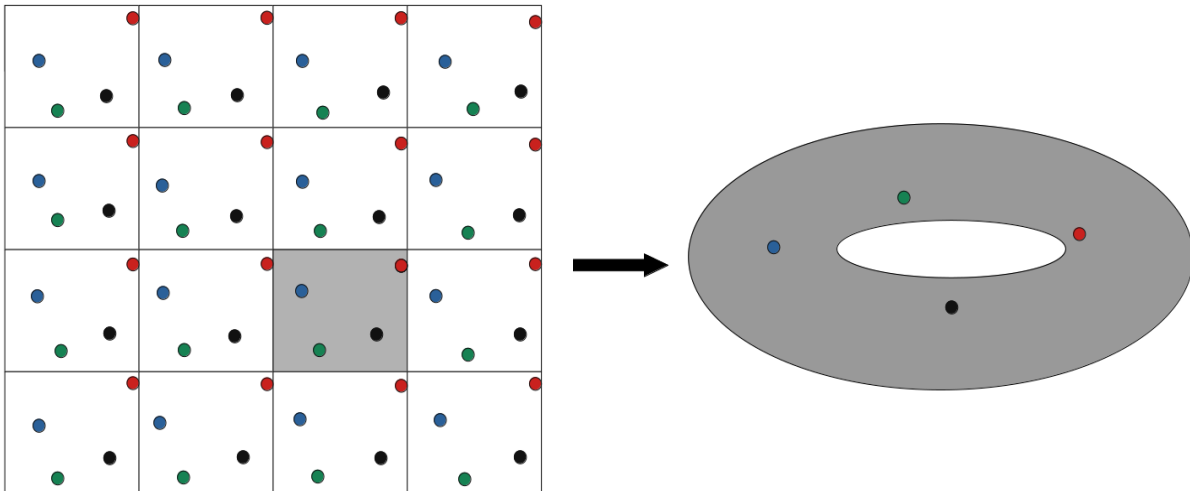


Figura 1.1: Célula cosmológica

A figura Fig.1.1 representa a condição de fronteira adotada neste trabalho no caso do espaço ser o plano Euclidiano. Podemos interpretá-la da seguinte forma: se considerarmos um ponto dentro de uma célula cosmológica, de acordo com o princípio cosmológico "fraco", esperamos que as propriedades geométricas e físicas sejam as mesmas nos correspondentes pontos que, a partir do primeiro, se repetem com uma periodicidade espacial entre uma célula e outra. Isto nos dá uma condição de contorno periódica, que é equivalente a tratar as seções espaciais como se fossem cópias do toro, ao invés do plano euclidiano. O caráter homogêneo e isotrópico do modelo aparece quando o analisamos em escalas muito maiores do que a escala típica da célula cosmológica.

Resumindo, o princípio cosmológico "fraco" é colocado em nosso modelo exigindo que o espaço seja representado por uma variedade compacta S de curvatura constante K (veja Ref. [4] para mais detalhes). Neste contexto, S é uma representação da célula cosmológica, e qualquer escalar f no espaço-tempo define uma função temporal $\langle f \rangle(a)$ dada por sua media espacial, isto é,

$$\langle f \rangle(a) := \frac{1}{L_0^3} \int_S f(a, x) \sqrt{\det \gamma} d^3x, \quad (1.26)$$

onde L_0^3 é o volume da célula cosmológica segundo a métrica (1.18). Isto nos permitirá construir modelos cosmológicos efetivos, que representam, em larga escala, o análogo a um espaço-tempo do tipo FLRW. Tais considerações serão devidamente abordadas ao longo deste trabalho.

1.4 Uma classe de modelos cosmológicos com expansão homogênea e isotrópica

Assume-se, a partir daqui, que o conteúdo de energia-momento do universo é dado por duas partes: uma composta por um fluido perfeito contendo matéria e radiação co-móveis com os observadores do referencial de expansão homogênea e isotrópica, análogos ao modelo padrão da cosmologia, e a outra parte composta por um fluido viscoso não homogêneo igualmente co-móvel aos primeiros. Podemos expressar o tensor de energia-momento como

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(h)} + T_{\mu\nu}^{(vc)},$$

onde "h" representa o fluido homogêneo e "vc" o fluido viscoso. Desta forma, podemos expressar a parte homogênea do tensor de energia-momento correspondente a um fluido perfeito na seguinte forma

$$T_{\mu\nu}^{(h)} = \rho^{(h)}(a) u_\mu u_\nu + p^{(h)}(a) (g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu) .$$

A parte viscosa do tensor energia-momento é

$$T_{\mu\nu}^{(vc)} = \rho^{(vc)} u_\mu u_\nu + q_\mu u_\nu + u_\mu q_\nu + p^{(vc)} (g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu) + \pi_{\mu\nu} ,$$

onde

- $\rho^{(vc)} = \rho^{(vc)}(a, x)$ representa sua densidade de energia.
- $p^{(vc)} = p^{(vc)}(a, x)$ representa a pressão relativística.
- q_μ é o fluxo de energia relativo a u^μ com $q_\mu u^\mu = 0$
- $\pi_{\mu\nu}$ e o tensor de anisotropias com $\pi_{\mu\nu} u^\mu = 0$.

A densidade de energia do fluido viscoso pode ser escrita em duas partes, uma relacionada ao fluido em repouso e a outra com a composição interna do fluido viscoso, que são respectivamente representadas na decomposição

$$\rho^{(vc)} = (1 + \epsilon) m_0 n , \tag{1.27}$$

onde m_0 é a massa em repouso de uma partícula, n é a densidade de partículas por unidade de volume e ϵ é a energia interna específica do fluido.

Em geral, a pressão é função da temperatura T e da energia interna específica ϵ , $p^{(vc)} = p^{(vc)}(\epsilon, T)$. No entanto, neste trabalho, consideraremos apenas o caso barotrópico:

Hipótese 1.4.1. *A pressão viscosa é função apenas da energia interna do fluido, i.e.,*

$$p^{(vc)} = p^{(vc)}(\mathcal{E}) \quad , \quad \mathcal{E} = \epsilon m_0 n .$$

Considerando a aproximação em séries de Taylor em torno de \mathcal{E}_0 , obtemos

$$p^{(vc)}(\mathcal{E}) \approx p_0^{(vc)} + w(\mathcal{E} - \mathcal{E}_0) , \tag{1.28}$$

a qual representa a equação de estado para o fluido viscoso com,

$$p_0^{(\text{vc})} = p^{(\text{vc})}(\mathcal{E}_0), \quad w = \frac{dp^{(\text{vc})}}{d\mathcal{E}}(\mathcal{E}_0). \quad (1.29)$$

onde $\mathcal{E}_0 = \epsilon_0 m_0 n$, e w é o coeficiente barotrópico. Embora o fluxo de energia possa ser representado de diversas maneiras distintas, neste trabalho consideraremos apenas o caso de difusão térmica:

Hipótese 1.4.2. *O fluxo de energia q^i corresponde ao fluxo de partículas e energia térmica.*

Esta hipótese é importante para a consistência física do modelo, porém não influencia os resultados aqui apresentados. Para mais detalhes, consulte as discussões nas Refs. [6, 10]. Faremos aqui apenas algumas considerações sobre o caso no qual não há fluxo de partículas, apenas de calor. Sendo assim, o 4-vetor fluxo de partículas satisfaz $n^i = 0$, isto é,

$$n^\mu = nu^\mu.$$

A conservação do número de partículas nos leva a

$$\nabla_\mu n^\mu = 0 \quad \implies \quad n = \frac{n_0}{a^3},$$

com n_0 constante, que é um resultado esperado, pois a matéria decai com a^3 neste caso. Desta forma podemos escrever,

$$\frac{\rho^{(\text{vc})}}{\rho_c} = \frac{\Omega_b}{a^3} (1 + \epsilon(a, x)) = \frac{\Omega_b}{a^3} + \frac{\mathcal{E}}{\rho_c}, \quad (1.30)$$

onde

$$\Omega_b = \frac{m_0 n_0}{\rho_c}.$$

Dentre as possibilidades para descrever o fluxo de energia térmica, a opção mais simples é a do caso não-relativístico, que pode ser descrita na forma (Seção 5.2 da Ref. [7])

$$q_i = -\chi (\partial_i T + T \partial_i \phi), \quad (1.31)$$

onde T é a distribuição de temperatura absoluta do fluido e χ é o coeficiente de condutividade térmica.

Nossa última suposição sobre o fluido viscoso é a garantia de que a expansão será isotrópica, quer dizer:

Hipótese 1.4.3. *A tensão anisotrópica satisfaz a condição de equilíbrio de tensão-curvatura-maré dada na equação (1.24).*

Com relação à parte homogênea do fluido cósmico, assumiremos que ele é composto por energia escura e radiação, no formato usual do modelo padrão da cosmologia. Assim, assumimos:

Hipótese 1.4.4. *Para a parte homogênea do fluido, assumiremos que ela é composta por energia escura e radiação, em outras palavras,*

$$\frac{\rho^{(h)}}{\rho_c} = \Omega_\Lambda + \frac{\Omega_r}{a^4},$$

onde Ω_Λ e Ω_r são constantes. Assim, sua pressão correspondente é

$$\frac{p^{(h)}}{\rho_c} = -\Omega_\Lambda + \frac{1}{3} \frac{\Omega_r}{a^4}.$$

Com estas hipóteses, considerando a parte homogênea e a parte viscosa, a densidade de energia total é

$$\rho = \rho^{(h)} + \rho^{(vc)} = \left(\Omega_\Lambda + \frac{\Omega_b}{a^3} + \frac{\Omega_r}{a^4} \right) \rho_c + \mathcal{E}, \quad (1.32)$$

onde podemos tomar uma parte sendo a "densidade de energia homogênea efetiva" $\tilde{\rho}^{(h)}$, e a outra parte sendo a "densidade de energia viscosa efetiva" $\tilde{\rho}^{(vc)}$, dadas por,

$$\tilde{\rho}^{(h)} = \left(\Omega_\Lambda + \frac{\Omega_b}{a^3} + \frac{\Omega_r}{a^4} \right) \rho_c, \quad \tilde{\rho}^{(vc)} = \mathcal{E}. \quad (1.33)$$

Isto nos permite escrever,

$$\rho = \tilde{\rho}^{(h)} + \tilde{\rho}^{(vc)}.$$

Da mesma forma, utilizando a aproximação em series de Taylor para a equação de estado do fluido viscoso (1.28), obtemos,

$$p^{(vc)} = \Omega_0 \rho_c + w \mathcal{E}, \quad (1.34)$$

onde,

$$\Omega_0 = \frac{p_0^{(\text{vc})} - w\mathcal{E}_0}{\rho_c}.$$

Isto é conveniente pois agora a pressão total é escrita da seguinte forma,

$$p = p^{(h)} + p^{(\text{vc})} = \left(\Omega_0 - \Omega_\Lambda + \frac{1}{3} \frac{\Omega_r}{a^4} \right) \rho_c + w\mathcal{E}, \quad (1.35)$$

onde novamente podemos considerar uma parte sendo a "pressão homogênea efetiva" $\tilde{p}^{(h)}$ e a outra sendo uma "pressão viscosa efetiva" $\tilde{p}^{(\text{vc})}$,

$$\tilde{p}^{(h)} = \left(\Omega_0 - \Omega_\Lambda + \frac{1}{3} \frac{\Omega_r}{a^4} \right) \rho_c, \quad \tilde{p}^{(\text{vc})} = w\mathcal{E}. \quad (1.36)$$

Podemos notar que para o fluido viscoso temos uma "equação de estado efetiva" dada por $\tilde{p}^{(\text{vc})} = w\mathcal{E}$, que comparado com a Ref. [6], corresponde a uma equação de estado com viscosidade de bulk nula ($\zeta = 0$). Com isto finalmente obtemos,

$$p = \tilde{p}^{(h)} + \tilde{p}^{(\text{vc})},$$

onde

$$\tilde{p}^{(\text{vc})} = w\tilde{\rho}^{(\text{vc})}.$$

Agora, podemos aplicar as relações (1.21) e (1.22) com $a_0 = 1$ diretamente nos moldes do modelo desenvolvido na Ref. [6]. Assim, as equações de Einstein se reduzem a uma EDP

$$\frac{\partial}{\partial s} U = U^2 D^2 U + \beta(s) U^3, \quad (1.37)$$

onde D é o operador de Laplace-Beltrami da geometria de curvatura constante K . A função U é dada em termos de uma nova variável $\xi(a)$,

$$\xi(a) = \frac{3}{2} \int_1^a (1+w) \frac{db}{b} \quad \Rightarrow \quad \xi(a) = \frac{3}{2} (1+w) \ln(a).$$

Com isto,

$$U = \frac{1}{e^{\xi(a)} H} \quad \Rightarrow \quad U = \frac{1}{a^{\frac{3}{2}(1+w)} H}. \quad (1.38)$$

Também, na equação (1.37), aparecem novas variáveis $\beta(a)$ e $s(a)$. A primeira delas pode ser encontrada da seguinte forma:

$$\beta(a) = -\frac{3}{2} \rho_c \left[-\Omega_\Lambda + \frac{1}{3} \frac{\Omega_r}{a^4} + \Omega_0 - w \left(\Omega_\Lambda + \frac{\Omega_b}{a^3} + \frac{\Omega_r}{a^4} \right) \right] a^2 - \frac{3+9w}{2} K,$$

que podemos expressar como,

$$\beta(a) = a^2 \left(\beta_0 + \frac{\beta_2}{a^2} + \frac{\beta_3}{a^3} + \frac{\beta_4}{a^4} \right) \quad (1.39)$$

sendo,

$$\beta_0 = \frac{3}{2} \rho_c [\Omega_\Lambda (1 + w) - \Omega_0], \quad (1.40)$$

$$\beta_2 = -\frac{3 + 9w}{2} K, \quad (1.41)$$

$$\beta_3 = \frac{3}{2} \rho_c w \Omega_b, \quad (1.42)$$

$$\beta_4 = \frac{(3w - 1)}{2} \rho_c \Omega_r. \quad (1.43)$$

A coordenada temporal nesta equação é s , visto que está relacionada ao fator de escala a , que por sua vez está relacionado ao tempo t em nosso modelo. A função $s(a)$ pode ser calculada através de

$$s(a) = -\frac{1}{3} \int_1^a e^{2\xi(b)} \frac{db}{b^3}. \quad (1.44)$$

Assim,

$$s(a) = \begin{cases} \frac{1}{9w+3} [1 - a^{3w+1}], & w \neq -1/3 \\ -\frac{1}{3} \ln(a), & w = -1/3. \end{cases} \quad (1.45)$$

Dada a relação injetiva entre o fator de escala a é a coordenada temporal s , podemos encontrar a função inversa, isto é

$$a(s) = \begin{cases} [1 - (9w + 3)s]^{\frac{1}{3w+1}} & \text{se } w \neq -1/3, \\ e^{-3s} & \text{se } w = -1/3, \end{cases} \quad (1.46)$$

A relação entre essas coordenadas é interessante, para visualizá-la graficamente consideramos diferentes valores para w e obtemos o seguinte:

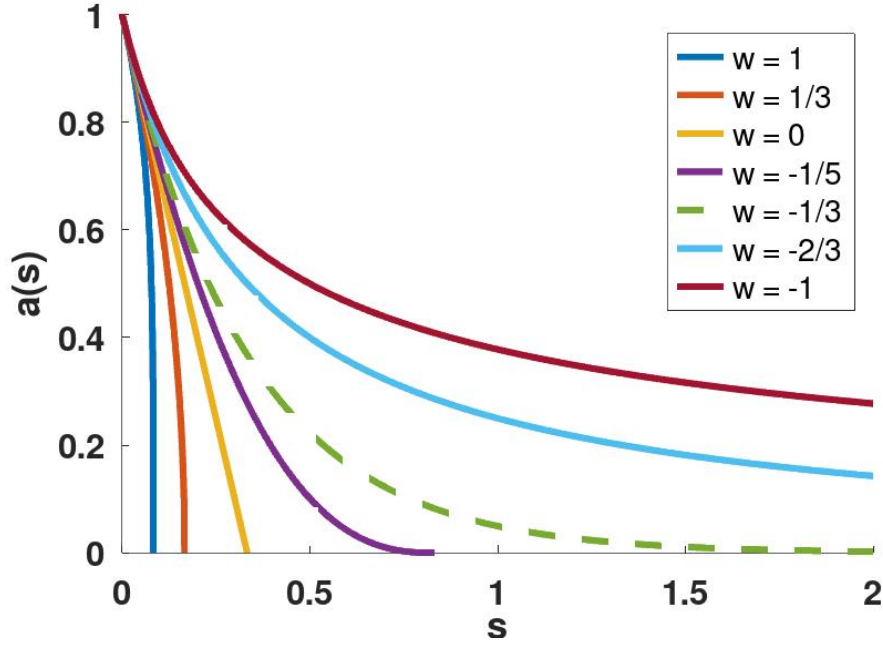


Figura 1.2: Fator de escala a , em função de s para diferentes valores de w .

Podemos notar na Fig.(1.2) que se $a = 1$ (valor correspondente ao universo hoje), a coordenada temporal $s(a) = 0$, isto é, o tempo inicial em nossa EDP. Assim, conforme evoluímos nosso sistema físico em s , de fato estamos indo para o passado do universo. Em outras palavras, $U(s = 0)$ corresponde a uma condição inicial em nosso universo hoje. Outra coisa interessante a notar é que para $w > -1/3$ a singularidade em nosso sistema de coordenadas ocorre em tempo finito. Isto é compatível com a condição de energia $\rho + 3P > 0$.

1.5 O redshift do modelo padrão como parâmetro temporal

O tempo coordenado s não representa o tempo físico de um observador, mas pode ser expresso em termos de a . No modelo padrão da cosmologia, o fator de escala é convenientemente expresso em termos do redshift z por

$$z = \frac{1}{a(s)} - 1. \quad (1.47)$$

Embora o redshift cosmológico do nosso modelo inhomogêneo tenha uma fórmula mais elaborada, que depende do potencial $\phi(t, x)$, z definido acima deve representar o verdadeiro redshift cosmológico quando consideramos largas escalas em nosso modelo, pelo menos até correções em primeira ordem. Logo, utilizaremos este parâmetro como variável temporal nas aplicações à cosmologia.

O redshift, como esperado, depende do coeficiente barotrópico w da equação de estado, parâmetro que caracteriza o fluido cósmico, que tipicamente tem valores no intervalo $[-1; 1]$. Isto significa que, para cada valor de w , teremos uma interpretação diferente da composição da matéria. Os seguintes valores para w são de maior relevância para a cosmologia:

- Energia escura: $w = -1$. Neste caso, algo análogo à energia escura representada pela constante cosmológica. Assim, por (1.46), o fator de escala pode ser expresso como

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 + 6s}}. \quad (1.48)$$

O redshift é dado, segundo (1.47), por

$$z = \sqrt{1 + 6s} - 1, \quad (1.49)$$

e por (1.69), a densidade de energia é obtida através da forma

$$\rho = \frac{3}{U^2}. \quad (1.50)$$

- Poeira: $w = 0$. Neste caso o fator de escala de acordo com (1.46), pode ser expresso da seguinte forma,

$$a = 1 - 3s, \quad (1.51)$$

o redshift seguindo (1.47), é,

$$z = \frac{1}{1 - 3s} - 1, \quad (1.52)$$

e a densidade de energia pode ser obtida de (1.69) da seguinte forma,

$$\rho = \frac{3}{a^3 U^2}. \quad (1.53)$$

- Radiação: $w = 1/3$.

Se consideramos $w = \frac{1}{3}$ o qual corresponde a radiação, podemos expressar o fator de escala de (1.46) da seguinte forma,

$$a = \sqrt{1 - 6s}, \quad (1.54)$$

onde o redshift de (1.47) é,

$$z = \frac{1}{\sqrt{1 - 6s}} - 1, \quad (1.55)$$

e de (1.69) a densidade de energia é,

$$\rho = \frac{3}{a^4 U^2}, \quad (1.56)$$

1.6 Reescalamento e condições iniciais

Vamos considerar nesta secção uma forma adimensional para nossa EDP. Isto é feito para não carregar com o problema de dimensionalidade das variáveis na simulação. Assim, podemos definir a variável adimensional \bar{U} de domínio fixo $I \times I \times I$, com I o intervalo fechado $[-1; 1]$, e a nova função adimensional $\bar{\beta}$ relacionadas com as variáveis U e β por

$$U = \frac{L_0}{2} \bar{U}, \quad \beta = \bar{\beta} \frac{4}{L_0^2}, \quad (1.57)$$

onde o domínio fixo de U é dado por $I_{L_0} \times I_{L_0} \times I_{L_0}$, com I_{L_0} o intervalo fechado $[-\frac{L_0}{2}; \frac{L_0}{2}]$, e as novas coordenadas espaciais por

$$x = \frac{L_0}{2} \bar{x}, \quad y = \frac{L_0}{2} \bar{y}, \quad z = \frac{L_0}{2} \bar{z}.$$

Em termos destas novas variáveis dimensionais, nossa EDP é escrita na forma,

$$\frac{\partial}{\partial s} \bar{U} = \bar{U}^2 \left[\bar{\nabla}^2 \bar{U} + \bar{\beta}(s) \bar{U} \right],$$

onde o novo laplaciano é

$$\bar{\nabla}^2 \bar{U} = \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{z}^2}. \quad (1.58)$$

Se definirmos um novo comprimento L_c relacionado à densidade crítica do universo por $\rho_c = L_c^{-2}$, temos que

$$\bar{\beta}(a) = a^2 \left(\bar{\beta}_0 + \frac{\bar{\beta}_2}{a^2} + \frac{\bar{\beta}_3}{a^3} + \frac{\bar{\beta}_4}{a^4} \right) \quad (1.59)$$

onde cada $\bar{\beta}_i$ é obtido de β_i nas equações (1.40), (1.41), (1.42) e (1.43) por

$$\bar{\beta}_i = \frac{1}{4} \left(\frac{L_0}{L_c} \right)^2 \frac{\beta_i}{\rho_c}. \quad (1.60)$$

As estimativas de L_0 podem variar bastante, algo entre $30Mpc$ e mais de $500Mpc$ [11]. No entanto, muitos autores indicam algo em torno de $50Mpc$ [12]. Já para a densidade crítica existe um consenso bem estabelecido [2, 7], sendo

$$L_c = \frac{1}{\sqrt{\rho_c}} = \frac{1}{\sqrt{3}\langle H_0 \rangle} \approx 5,6 \times 10^3 Mpc. \quad (1.61)$$

Sendo assim, adotaremos a escala a partir da qual o universo é considerado homogêneo, L_0 , como tomando um valor coerente com a referência [12]:

$$L_0 = 56Mpc \quad \text{e} \quad \frac{L_0}{L_c} = 10^{-2}. \quad (1.62)$$

Neste caso, obtemos um valor pequeno para o parâmetro β depois do reescalonamento das variáveis,

$$\beta \approx 0. \quad (1.63)$$

Por exemplo, para o caso poeira, $w = 0$, das fórmulas (1.39) e (1.46), β se torna

$$\bar{\beta}(a) = (1 - 3s)^2 \left(\bar{\beta}_0 + \frac{\bar{\beta}_4}{(1 - 3s)^4} \right), \quad (1.64)$$

onde, seguindo a equação (1.59),

$$\bar{\beta}_0 = \frac{3 \times 10^{-4}}{8} [\Omega_\Lambda - \Omega_0], \quad (1.65)$$

$$\bar{\beta}_4 = -\frac{10^{-4}}{8} \Omega_r, \quad (1.66)$$

o que justifica a aproximação (1.63).

Uma vez que temos resolvida a convergência para nosso modelo, devemos analisar a condição inicial em U , se bem e certo ela não representa uma variável física, poderíamos

utilizar a equação (1.38) para determinar a condição inicial. Assim considerando $K = 0$, a equação de Friedmann (1.21) fica da seguinte forma,

$$H = \sqrt{\frac{\rho}{3}}, \quad (1.67)$$

que com $a = 1$, o qual representa nosso universo hoje, nos ajuda a encontrar a condição inicial

$$U_0 = \sqrt{\frac{3}{\rho}}, \quad (1.68)$$

que nos permite resolver nosso sistema físico numericamente. Obviamente nosso sistema não pode ter energia infinita, isto é, $U_0 \neq 0$. Uma vez que obtemos a solução numérica para U , podemos encontrar ρ em cada passo do tempo a qual é obtida da seguinte forma,

$$\rho = \frac{3}{a^{3(1+w)}U^2} \quad (1.69)$$

que nos permitirá obter o contraste de densidade de energia dado pela equação (1.13).

Capítulo 2

Abordagem numérica para o modelo com expansão intrinsecamente homogênea e isotrópica

Neste capítulo, dedicaremos nossa análise ao estudo detalhado dos métodos numéricos em equações diferenciais parciais, que utilizaremos para estudar a EDP apresentada no capítulo anterior. É necessário também discutir como implementaremos as condições de contorno periódicas no método numérico, que é crucial, pois a evolução no tempo depende delas. Finalmente, estudaremos a condição de estabilidade numérica "aproximada" e apresentaremos um diagrama de fluxo do processo que seguimos para obter a solução de nosso modelo cosmológico. Nossa abordagem será progressiva nas dimensões espaciais: discutiremos primeiramente a discretização em 1+1 dimensões com a finalidade de compreender o comportamento de seu esquema de evolução ao longo do tempo, depois em 2+1 dimensões, por motivos de simplicidade, e finalmente o caso 3+1, que é uma extensão imediata do anterior.

2.1 Discretização em 1+1 dimensões

Nesta seção desenvolveremos um esquema de solução numérica para a EDP tratando o caso mais simples possível, ou seja, 1 + 1 dimensões, o que significa uma dimensão no espaço e uma dimensão no tempo. Desta forma, a função $U(t, x)$ depende apenas de duas variáveis. Isto será útil, pois nos fornecerá um melhor entendimento do problema e nos permitirá abordar o problema em 2 + 1 dimensões. Considerando esta simplificação, a EDP pode ser escrita como

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial s} U(x, s) = U(x, s)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, s) + \beta(s) U(x, s)^3, & x \in [-L; L], s \geq 0, \\ U(-L, s) = U(L, s), & s \geq 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Utilizando o método das diferenças finitas centradas, para aproximar a segunda derivada no espaço [13], podemos obter

$$\frac{\partial U_j^n}{\partial s} = (U_j^n)^2 \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \beta^n (U_j^n)^3, \quad (2.2)$$

onde n representa a n -ésima posição no tempo e j representa a j -ésima posição no espaço. O lado direito da equação pode ser expresso como uma função F , e podemos escrever:

$$F(s, U) = (U_j^n)^2 \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \beta^n (U_j^n)^3. \quad (2.3)$$

Uma vez que temos discretizado o espaço, precisamos de um método para discretizar o tempo. Neste trabalho vamos utilizar o método de Runge-Kutta de quarta ordem. Assim, com os coeficientes k_1, k_2, k_3, k_4 dados na forma do capítulo 5 da referência [14], temos,

$$\begin{aligned} k_1 &= F(s^n, U_j^n), \\ k_2 &= F\left(s^n + \frac{\Delta s}{2}, U_j^n + \frac{\Delta s}{2} k_1\right), \\ k_3 &= F\left(s^n + \frac{\Delta s}{2}, U_j^n + \frac{\Delta s}{2} k_2\right), \\ k_4 &= F(s^n + \Delta s, U_j^n + \Delta s k_3). \end{aligned}$$

Podemos obter a equação de recorrência para U ,

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \frac{\Delta s}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (2.4)$$

a qual é uma equação determinista, pois nos permite encontrar U^{n+1} em função de U^n (a solução num tempo anterior). Assim, a partir de uma dada condição inicial U^0 , podemos encontrar a evolução de U ao longo do tempo. Podemos notar da equação (2.4), dados 3 pontos num tempo anterior U_{j-1}^n, U_j^n e U_{j+1}^n , encontramos U_j^{n+1} , isto é visto graficamente na Fig. (2.1).

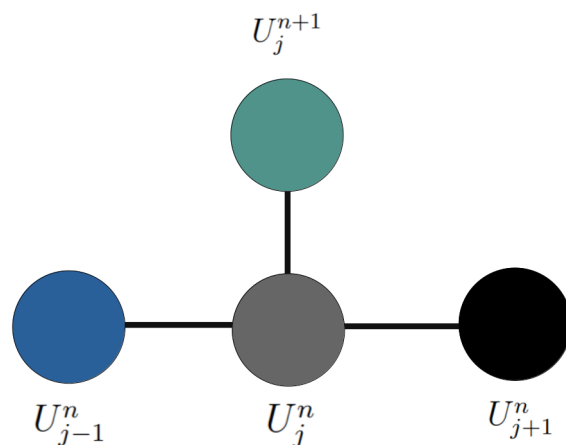


Figura 2.1: Esquema de resolução considerando uma dimensão espacial e uma dimensão temporal onde o índice n está relacionado ao tempo e o índice j ao espaço

De acordo com a Fig. (2.1), se quisermos calcular uma primeira evolução temporal nas fronteiras espaciais, precisaremos de um ponto fora do domínio espacial. Isto, de acordo com o capítulo anterior, pode ser resolvido considerando as condições de contorno periódicas. Isto pode ser visto graficamente na Fig. (2.2).

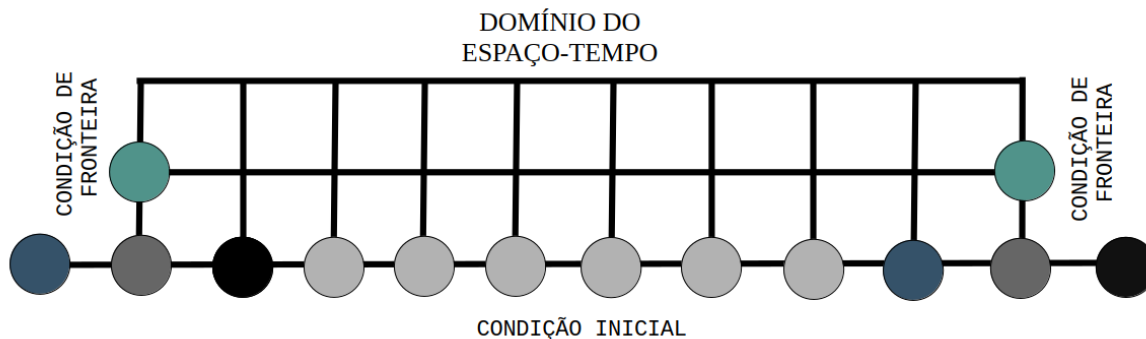


Figura 2.2: Esquema de cálculo nas fronteiras considerando condições periódicas em 1 + 1.

Na Fig. (2.2), podemos ver que para calcular os valores nas bordas (pontos verdes no gráfico) a partir de uma condição inicial, precisamos de um ponto fora do domínio em ambas as bordas. Isto é resolvido considerando condições de contorno periódicas. Desta forma, os pontos azuis e pretos têm o mesmo valor e, portanto, na evolução ao longo do tempo os valores nas bordas evoluem no tempo, mas são iguais em cada borda para um tempo fixo. Este mesmo raciocínio será usado para calcular a evolução ao longo do tempo em 2+1 dimensões.

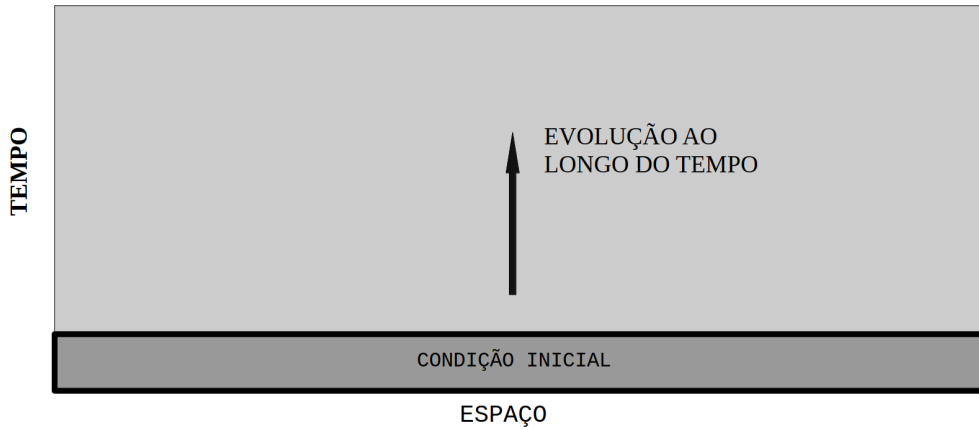


Figura 2.3: Evolução da condição inicial no espaço-tempo 1+1.

Finalmente, a forma de evolução no espaço-tempo 1+1 pode ser vista na Fig. (2.3), onde precisamos apenas da condição inicial para obter a evolução de U ao longo do tempo e, para cada s constante, temos uma curva para U .

2.2 Discretização em 2+1 dimensões

Uma vez entendido como utilizar os métodos numéricos em 1+1 dimensões, vamos focar nosso estudo no caso 2+1. Neste caso, podemos expressar U como $U(s, x, y)$, uma função

que depende de 3 variáveis. Desta forma, a EDP a ser resolvida é

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial s} = U^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + \beta(s)U^3, & x \in [-L; L], \quad y \in [-L; L]. \quad s \geq 0, \\ U(-L, y, s) = U(L, y, s), \\ U(x, -L, s) = U(x, L, s). \end{cases} \quad (2.5)$$

Novamente, usando o método das diferenças finitas centradas, podemos obter

$$\frac{\partial U_{j,l}^n}{\partial s} = (U_{j,l}^n)^2 \left(\frac{U_{j+1,l}^n - 2U_{j,l}^n + U_{j-1,l}^n}{\Delta x^2} + \frac{U_{j,l+1}^n - 2U_{j,l}^n + U_{j,l-1}^n}{\Delta y^2} \right) + \beta^n (U_{j,l}^n)^3, \quad (2.6)$$

onde o índice n representa a n -ésima posição no tempo, j a j -ésima posição na coordenada espacial x e l a l -ésima posição na coordenada espacial y . Então, podemos usar o método Runge Kutta,

$$F(s, U) = (U_{j,l}^n)^2 \left(\frac{U_{j+1,l}^n - 2U_{j,l}^n + U_{j-1,l}^n}{\Delta x^2} + \frac{U_{j,l+1}^n - 2U_{j,l}^n + U_{j,l-1}^n}{\Delta y^2} \right) + \beta^n (U_{j,l}^n)^3. \quad (2.7)$$

Assim,

$$U_{j,l}^{n+1} = U_{j,l}^n + \frac{\Delta s}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (2.8)$$

que é uma equação de recorrência para o problema, onde os coeficientes k_1 , k_2 , k_3 e k_4 são calculados de forma semelhante ao caso 1+1, isto é,

$$\begin{aligned} k_1 &= F(s^n, U_{j,l}^n), \\ k_2 &= F\left(s^n + \frac{\Delta s}{2}, U_{j,l}^n + \frac{\Delta s}{2}k_1\right), \\ k_3 &= F\left(s^n + \frac{\Delta s}{2}, U_{j,l}^n + \frac{\Delta s}{2}k_2\right), \\ k_4 &= F(s^n + \Delta s, U_{j,l}^n + \Delta sk_3). \end{aligned}$$

A forma de solução é feita considerando o seguinte: para cada $s = cte$ temos uma superfície bidimensional tal que, aquela correspondente à condição inicial em $s = 0$ é utilizada para obtermos a solução numérica em tempos posteriores. Isto pode ser visto na equação de recorrência (2.8), onde precisamos de 5 pontos em um tempo anterior para obter a solução em um ponto no tempo seguinte.

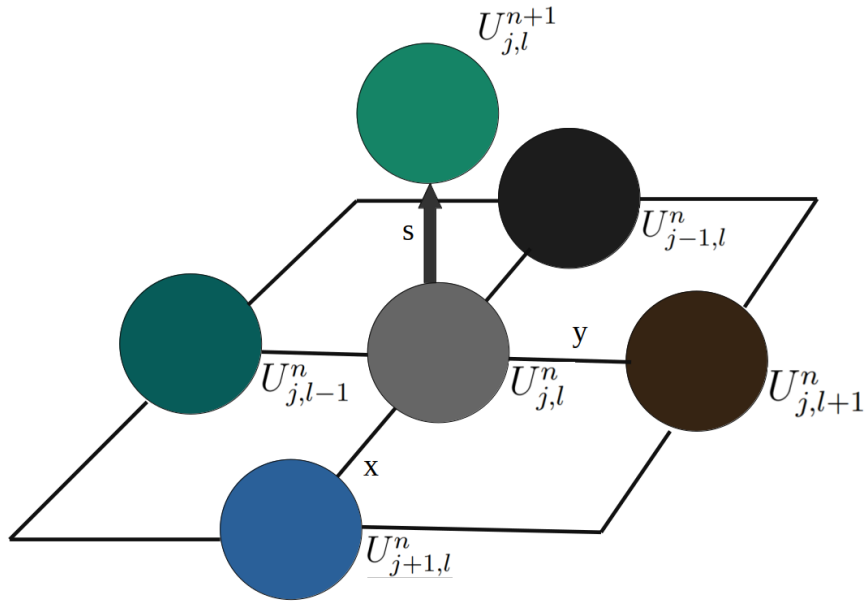


Figura 2.4: Esquema de resolução em duas dimensões de espaço e uma de tempo onde o índice n representa o tempo e j, l representam o espaço

Na Fig. (2.4), temos 5 pontos que pertencem a uma superfície $s = n\Delta s$. A partir deles obtemos a solução $U_{j,l}^{n+1}$, que se encontra em outra superfície $s = (n + 1)\Delta s$, e, sendo que utilizaremos as condições periódicas em nosso modelo, as implementaremos da mesma forma que fizemos no esquema de evolução 1+1. Apresentamos isto na Fig. (2.5).

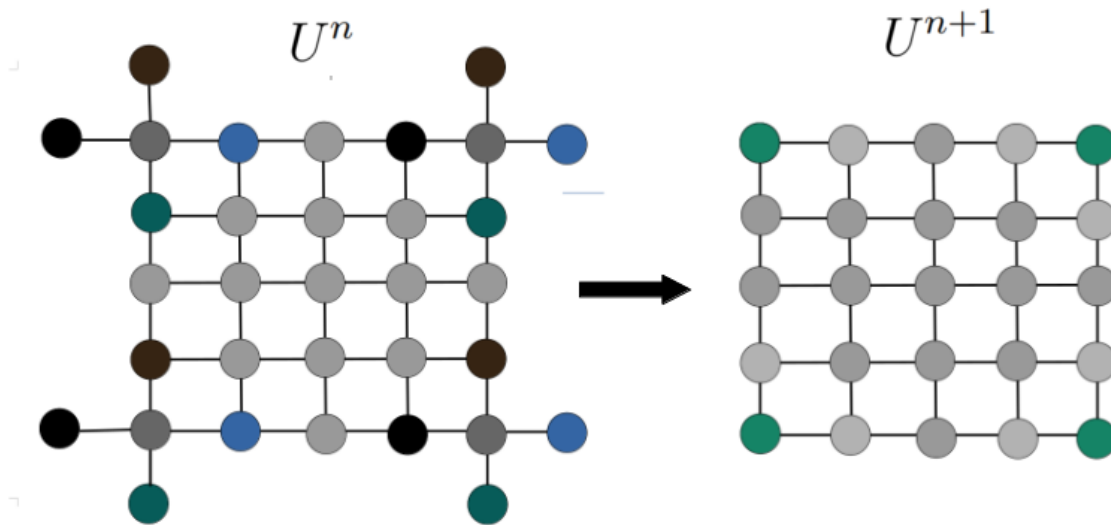


Figura 2.5: Esquema de evolução em 2+1 dimensões

Nesta figura temos 2 superfícies que correspondem a U nos tempos $n\Delta s$ (direita) e $(n+1)\Delta s$ (esquerda). Se queremos obter a solução para U em algum tempo $(n+1)\Delta s$ nas fronteiras, precisamos de 5 valores de U num tempo $n\Delta s$. Porém, num tempo anterior, alguns pontos podem estar fora de nosso domínio espacial. Isto é resolvido usando as condições de contorno periódicas onde, por exemplo, se vemos o ponto de cor preto na parte superior esquerda, ele está fora de nosso domínio, mas ele é substituído pelo ponto de cor preta na parte superior direita que está dentro de nosso domínio. Assim, se precisamos de pontos fora de nosso domínio espacial, dadas as condições de contorno periódicas, podemos utilizar pontos dentro do domínio ao invés deles. Com isto, o esquema de evolução para U pode ser desenvolvido e, à medida que avançamos no tempo, temos uma superfície para cada valor constante de s .

2.3 Condição de estabilidade

Um problema comum no estudo numérico de equações diferenciais parciais é a estabilidade. Este problema está relacionado às relações entre os tamanhos dos passos em nosso

modelo, onde inicialmente discretizamos as derivadas espaciais usando uma aproximação de diferenças finitas centradas. Nesse caso, definimos um tamanho do passo no espaço Δx , também, ao usar o método de Runge-Kutta, definimos um tamanho do passo temporal Δs , e deve existir uma relação entre eles à medida que o modelo evolui no tempo, de tal forma que nosso modelo seja estável na evolução numérica.

Em geral, na abordagem numérica de EDP's não lineares, o estudo da estabilidade é muito complexo e, muitas vezes, o comportamento das soluções é analisado passo-a-passo, ou seja, os tamanhos dos passos são modificados manualmente muitas vezes e o comportamento das soluções é acompanhado até que uma relação adequada seja encontrada. No entanto, esse método empírico é muito ineficiente. No nosso caso, vamos estudar a estabilidade conforme proposto por autores como Randall Leveque [14] e Morton e Mayers [15], que consiste em linearizar a EDP utilizando uma solução numérica U , que é obtida em função de uma solução analítica u , e um erro v . Desta forma, obtemos uma EDP linearizada para v , onde utilizamos o método dos coeficientes congelados para fixar u e β em algum ponto (s_o, x_o, y_o) e usar algum método já conhecido para EDP's lineares para estudar a propagação do erro numa vizinhança local deste ponto, conforme proposto nas Refs. [14] e [16]. Isto nos fornece uma condição de estabilidade aproximada. Dessa forma, consideramos a EDP:

$$\frac{\partial U}{\partial s} = U^2 [\nabla^2 U + \beta U] ,$$

e uma solução na forma

$$U = u + v ,$$

onde U representaria a solução numérica e u uma solução exata. Esperamos que a diferença entre elas seja muito pequena, de tal forma que os termos quadráticos em v são desconsiderados, isto é,

$$v \ll u .$$

Em termos de nossas novas variáveis,

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial s} = (u + v)^2 [\nabla^2(u + v) + \beta(u + v)] .$$

Como u satisfaz a EDP, a linearização da equação acima nos leva à

$$\frac{\partial v}{\partial s} \approx u^2 (\nabla^2 v + \beta v) + 2u (\nabla^2 u + \beta u) v,$$

que podemos expressar como

$$\frac{\partial v}{\partial s} \approx u^2 (\nabla^2 v + \beta v) + 2 \frac{\partial}{\partial s} (\ln u) v.$$

Numericamente, podemos fazer Δs muito pequeno e assumir que $\ln u$ é uma função que varia lentamente no tempo. Utilizamos o método de coeficientes congelados, que consiste em fixar u e β em algum ponto, encontramos EDP

$$\frac{\partial v}{\partial s} \approx u^2 (\nabla^2 v + \beta v) + \alpha v.$$

onde, α e β podem ser considerados constantes, sendo

$$\alpha = 2 \frac{\partial}{\partial s} (\ln u).$$

Ela será estudada com a finalidade de obter uma condição de estabilidade para o modelo numérico, a qual é expressa como

$$\frac{\partial v}{\partial s} = L \cdot v,$$

onde L é o operador linear definido por

$$L = u^2 (\nabla^2 + \beta) + \alpha.$$

Note que ele pode ser definido em uma dimensão arbitrária do espaço. O esquema de recorrência para a solução pelo método Runge-kutta de quarta ordem é

$$v^{n+1} = v^n + \frac{\Delta s}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

onde, em termos de L , os coeficientes k_1 , k_2 , k_3 e k_4 são

$$k_1 = L \cdot v^n,$$

$$k_2 = L \cdot \left(v^n + \frac{\Delta s}{2} k_1 \right) = L \cdot v^n + \frac{\Delta s}{2} L^2 \cdot v^n,$$

$$k_3 = L \cdot \left(v^n + \frac{\Delta s}{2} k_2 \right) = L \cdot v^n + \frac{\Delta s}{2} L^2 \cdot v^n + \frac{(\Delta s)^2}{4} L^3 \cdot v^n,$$

$$k_4 = L \cdot \left(v^n + \Delta s k_3 \right) = L \cdot v^n + \Delta s L^2 \cdot v^n + \frac{(\Delta s)^2}{2} L^3 \cdot v^n + \frac{(\Delta s)^3}{4} L^4 \cdot v^n.$$

Desta forma, na equação de recorrência, obtemos

$$\begin{aligned} v^{n+1} = v^n + \frac{\Delta s}{6} & \left(L \cdot v^n + 2 \left[L \cdot v^n + \frac{\Delta s}{2} L^2 \cdot v^n \right] \right. \\ & + 2 \left[L \cdot v^n + \frac{\Delta s}{2} L^2 \cdot v^n + \frac{(\Delta s)^2}{4} L^3 \cdot v^n \right] \\ & \left. + \left[L \cdot v^n + \Delta s L^2 \cdot v^n + \frac{(\Delta s)^2}{2} L^3 \cdot v^n + \frac{(\Delta s)^3}{4} L^4 \cdot v^n \right] \right). \end{aligned}$$

Reacomodando termos,

$$\begin{aligned} v^{n+1} &= v^n + \frac{\Delta s}{6} \left(6 L \cdot v^n + 3 \Delta s L^2 \cdot v^n + (\Delta s)^2 L^3 \cdot v^n + \frac{(\Delta s)^3}{4} L^4 \cdot v^n \right), \\ v^{n+1} &= v^n + \Delta s L \cdot v^n + \frac{(\Delta s)^2}{2} L^2 \cdot v^n + \frac{(\Delta s)^3}{6} L^3 \cdot v^n + \frac{(\Delta s)^4}{24} L^4 \cdot v^n, \\ v^{n+1} &= \left(I + \Delta s L + \frac{(\Delta s)^2}{2!} L^2 + \frac{(\Delta s)^3}{3!} L^3 + \frac{(\Delta s)^4}{4!} L^4 \right) \cdot v^n. \end{aligned}$$

Esta última representa a série de Taylor de $e^{\Delta s L}$ truncada até a quarta ordem, quer dizer,

$$v^{(n+1)} = e^{\Delta s L} \cdot v^{(n)}. \quad (2.9)$$

Utilizando o método de Von Neuman, obtemos a equação de autovalores

$$L \cdot v = \lambda v, \quad (2.10)$$

que nos permite escrever

$$v^{n+1} = e^{\Delta s \lambda} v^n. \quad (2.11)$$

Sabemos que a condição de estabilidade para um método de passo de tempo único pode ser escrita como

$$v^{n+1} = R(\Delta s \lambda) v^n, \quad (2.12)$$

que pode ser pensada da seguinte forma: supondo v^0 como um primeiro erro inicial, utilizamos a equação (2.12) n -vezes e obtemos $v^n = R(\Delta s \lambda)^n v^0$. Como precisamos que o erro não aumente no tempo, devemos esperar que

$$|R(\Delta s \lambda)| \leq 1.$$

Isto para o método de Runge- Kutta de quarta ordem nos leva a

$$-2.785 \leq \Delta s \lambda \leq 0. \quad (2.13)$$

Esta desigualdade é muito importante, pois ela nos levará a obter a condição de estabilidade em diferentes contextos, sendo L o operador definido em 1,2 ou 3 dimensões espaciais. Assim, para fazer a análise de Von Neumann com o operador L , primeiramente vamos considera-lo em apenas uma dimensão espacial,

$$L \cdot v = u^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta \right) v + \alpha v,$$

que em diferenças finitas escrevemos da seguinte forma:

$$L \cdot v_j^n = u^2 \left(\frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \beta v_j^n \right) + \alpha v_j^n.$$

Utilizando o ansatz de Von Neumann para o k -ésimo coeficiente de Fourier, isto é,

$$v_j^n = \xi^n e^{ikj\Delta x},$$

obtemos,

$$L \cdot v_j^n = \left[u^2 \left(\frac{e^{-ik\Delta x} + e^{ik\Delta x} - 2}{(\Delta x)^2} + \beta \right) + \alpha \right] \xi^n e^{ikj\Delta x}.$$

ou seja,

$$L \cdot v_j^n = \left[u^2 \left(\frac{2 \cos(k\Delta x) - 2}{(\Delta x)^2} + \beta \right) + \alpha \right] v_j^n.$$

Com ajuda da propriedade trigonométrica

$$\cos(k\Delta x) - 1 = -2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right),$$

obtemos

$$L \cdot v_j^n = \left[\alpha + u^2 \left(\beta - \frac{4 \operatorname{sen}^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)}{(\Delta x)^2} \right) \right] v_j^n, \quad (2.14)$$

a partir da qual identificamos a equação de autovalores na forma (2.10), sendo λ dado por

$$\lambda = \left[\alpha + u^2 \left(\beta - \frac{4 \operatorname{sen}^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)}{(\Delta x)^2} \right) \right]. \quad (2.15)$$

Com isto a equação (2.13) fica na forma

$$\left[u^2 \left(\frac{4 \operatorname{sen}^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)}{(\Delta x)^2} - \beta \right) - \alpha \right] \Delta s \leq 2.785,$$

que nos dá a relação entre Δs e Δx como

$$\Delta s \leq \frac{2.785}{u^2 \left(\frac{4 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{k \Delta x}{2} \right)}{(\Delta x)^2} - \beta \right) - \alpha}. \quad (2.16)$$

Tomando o valor máximo da função seno, obtemos

$$\Delta s \leq \frac{2.785}{u^2 \left(\frac{4}{(\Delta x)^2} - \beta \right) - \alpha}. \quad (2.17)$$

Esta desigualdade corresponde à condição de estabilidade no caso 1+1, onde u será o valor máximo da condição inicial, já que estamos lidando com um modelo do tipo difusão e, como sabido, tende a decair ao longo de sua evolução temporal.

Podemos utilizar o mesmo desenvolvimento para calcular a condição de estabilidade em 2 dimensões espaciais. Neste caso, a forma do ansatz é

$$v_{j,m}^n = \xi^n e^{\mathbf{i} k_x j \Delta x} e^{\mathbf{i} k_y l \Delta y}, \quad (2.18)$$

e a forma do operador é

$$L \cdot v = u^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta \right) v + \alpha v. \quad (2.19)$$

Utilizando o método de Von Neumann, temos

$$L \cdot v_{j,l}^n = \left[u^2 \left(\frac{e^{\mathbf{i} k_x \Delta x} + e^{-\mathbf{i} k_x \Delta x} - 2}{\Delta x^2} + \frac{e^{\mathbf{i} k_y \Delta y} + e^{-\mathbf{i} k_y \Delta y} - 2}{\Delta y^2} + \beta \right) + \alpha \right] \xi^n e^{\mathbf{i} k_x j \Delta x} e^{\mathbf{i} k_y l \Delta y},$$

que expressamos como

$$L \cdot v_{j,l}^n = \left[u^2 \left(\frac{e^{\mathbf{i} k_x \Delta x} + e^{-\mathbf{i} k_x \Delta x} - 2}{\Delta x^2} + \frac{e^{\mathbf{i} k_y \Delta y} + e^{-\mathbf{i} k_y \Delta y} - 2}{\Delta y^2} + \beta \right) + \alpha \right] v_{j,l}^n,$$

onde as exponenciais podem ser escritas em termos de funções trigonométricas, isto é,

$$L \cdot v_{j,l}^n = \left[u^2 \left(\frac{2 \cos(k_x \Delta x) - 2}{\Delta x^2} + \frac{2 \cos(k_y \Delta y) - 2}{\Delta y^2} + \beta \right) + \alpha \right] v_{j,l}^n.$$

Assim, obtemos

$$L \cdot v_{j,l}^n = \left[u^2 \left(\beta - \frac{4 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{k_x \Delta x}{2} \right)}{\Delta x^2} - \frac{4 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{k_y \Delta y}{2} \right)}{\Delta y^2} \right) + \alpha \right] v_{j,l}^n,$$

que corresponde a uma equação de autovalores da forma (2.10), com

$$\lambda = \left[u^2 \left(\beta - \frac{4 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{k_x \Delta x}{2} \right)}{\Delta x^2} - \frac{4 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{k_y \Delta y}{2} \right)}{\Delta y^2} \right) + \alpha \right].$$

Em termos de λ , a equação (2.13) se torna

$$\left[u^2 \left(\frac{4 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{k_x \Delta x}{2} \right)}{\Delta x^2} + \frac{4 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{k_y \Delta y}{2} \right)}{\Delta y^2} - \beta \right) - \alpha \right] \Delta s \leq 2.785 \quad (2.20)$$

que finalmente nos permite obter a condição de estabilidade para o nosso modelo em diferenças finitas, que é

$$\Delta s \leq \frac{2.785}{\left[u^2 \left(\frac{4 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{k_x \Delta x}{2} \right)}{\Delta x^2} + \frac{4 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{k_y \Delta y}{2} \right)}{\Delta y^2} - \beta \right) - \alpha \right]}.$$

Neste ponto, podemos considerar os valores extremos de u . Por simplicidade, tomamos $\Delta x = \Delta y$, que significa uma rede igualmente espaçada no espaço bi-dimensional, e assim obtemos

$$\Delta s \leq \frac{2.785}{u^2 \left[\frac{8}{\Delta x^2} - \beta \right] - \alpha}. \quad (2.21)$$

Tomaremos u como sendo o valor máximo da condição inicial, dado que estamos tratando um problema de tipo difusão e, como mencionado anteriormente, devemos esperá-la decair na evolução temporal.

2.4 O método numérico em 3+1 dimensões

Considerando 3+1 dimensões, a EDP tem a seguinte forma,

$$\frac{\partial U}{\partial s} = U^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) + \beta(s)U^3, \quad (2.22)$$

onde $U = U(s, x, y, z)$, usando o método das diferenças finitas centradas temos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{j,l,m}^n}{\partial s} = & (U_{j,l,m}^n)^2 \left[\frac{U_{j+1,l,m}^n - 2U_{j,l,m}^n + U_{j-1,l,m}^n}{\Delta x^2} + \frac{U_{j,l+1,m}^n - 2U_{j,l,m}^n + U_{j,l-1,m}^n}{\Delta y^2} \right. \\ & \left. + \frac{U_{j,l,m+1}^n - 2U_{j,l,m}^n + U_{j,l,m-1}^n}{\Delta z^2} \right] + \beta^n (U_{j,l,m}^n)^3 \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde a equação de recorrência fica na seguinte forma,

$$U_{j,l,m}^{n+1} = U_{j,l,m}^n + \frac{\Delta s}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) , \quad (2.24)$$

e a condição de estabilidade considerando o mesmo tamanho de passo Δx para as coordenadas x, y, z é dada por

$$\Delta s \leq \frac{2.785}{u^2 \left[\frac{12}{\Delta x^2} - \beta \right] - \alpha} . \quad (2.25)$$

isto nos permite encontrar a solução para o caso 3+1 dimensional.

2.5 Análise do algoritmo

Inicialmente estamos interessados em mostrar que nosso método numérico nos permite obter a solução desejada para o modelo cosmológico, para isso nesta seção vamos focar nosso estudo ao análise da convergência numérica do algoritmo, isto é, vamos deixar de lado nossas variáveis físicas e vamos estudar a evolução de U ao longo do tempo, para isso implementamos um código numérico em FORTRAN.

Para analisar nosso código de evolução, primeiramente validamos o caso mais simples. Assim, consideramos o caso 1+1 e fazemos $\beta = 0$, tudo isto com a finalidade de poder comparar com os resultados obtidos com o software Mathematica. A princípio, este seria uma boa ferramenta para resolver nosso modelo, no entanto, ele resulta ser ineficiente dada a quantidade de dados que vamos estudar e o fato de nossa EDP ser não linear.

Dada a condição de estabilidade (2.17), em geral, o fator α é complicado de estudar, pois, dependendo do sinal dele, a condição de estabilidade pode melhorar ou piorar, isto é, dado que U é positivo, se α fosse negativo, o denominador ficaria maior, e o tamanho de passo Δs teria que ser menor, o que requer um tamanho de passo menor. Por outro lado, se α fosse positivo, Δs ficaria maior. Neste caso, poderíamos desprezar o valor de α de nossa condição inicial pois fazendo ele igual a zero garantimos a estabilidade. Assim, devemos estudar o mínimo valor de α na evolução e considerá-lo na condição de estabilidade. nesse sentido, vamos estudar primeiramente o caso 1+1 com a condição de estabilidade dada em (2.17), onde, em geral, teremos que α pode ser escrito na forma

seguinte.

$$\alpha = \frac{2}{u} \frac{\partial u}{\partial s} \quad (2.26)$$

que no caso mais geral podemos expressar da seguinte forma, utilizando diferenças finitas,

$$\alpha_{j,l,m}^n = \frac{2}{U_{j,l,m}^n} F(s, U_{j,l,m}^n) \quad (2.27)$$

E desta forma, encontrar o valor mínimo de α em cada passo de tempo de tal forma que possamos validar se o valor exato para Δs de acordo com nossa condição de estabilidade se satisfaz em cada passo do tempo. Para o final do cálculo, consideramos um domínio fixo em x de $[-1, 1]$ e utilizamos um tamanho de passo $\Delta x = 0.01$. Nesse caso, consideramos uma condição inicial dada por

$$U(s = 0, x) = 4 + \text{sen}(2\pi x)$$

Uma vez que definimos o tamanho de passo e definirmos a condição inicial em U , podemos encontrar os valores de α para cada ponto do espaço. Neste caso, para validar a estabilidade, consideramos o mínimo valor de α , o qual nos fornecerá um tamanho de passo máximo em s . Calculamos e obtemos que o valor máximo possível de Δs é 2.78×10^{-6} . Desta forma, fixamos o tamanho de passo em $\Delta s = 2.5 \times 10^{-6}$ para nossa evolução, e em cada passo do tempo avaliamos o tamanho de passo máximo para conferir que estamos dentro dos limites de nossa condição de estabilidade. A continuação mostra o valor máximo possível do tamanho de passo em s em função do tempo.

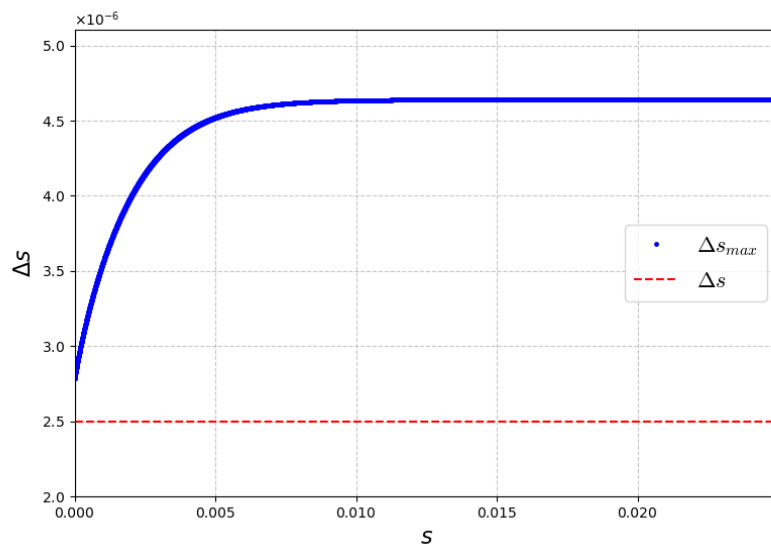


Figura 2.6: Tamanho do passo máximo no tempo(azul) e tamanho do passo utilizado (vermelho).

Definir um tamanho de passo menor que o máximo possível é muito importante, pois nos diz que o tamanho de passo que estamos usando está dentro do valor máximo permitido para o valor máximo na evolução de U . Além disto, podemos ver que é possível fazer com que Δs aumente ao longo do tempo até chegar assintoticamente em um ponto máximo. Isto pode ser muito útil, pois poderíamos variar o tamanho de passo em δs de forma a obter uma evolução mais rápida e que ainda seja estável. Por quanto, vamos deixar Δs sendo constante para todos os nossos cálculos, desde que esteja no limite de estabilidade.

EVOLUÇÃO DE U

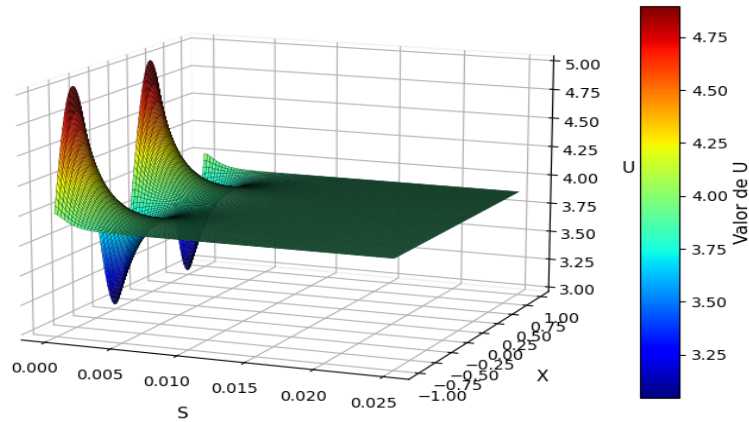


Figura 2.7: Resultados em 1+1 dimensões com $\beta = 0$ obtidos de nosso código numérico implementado em FORTRAN

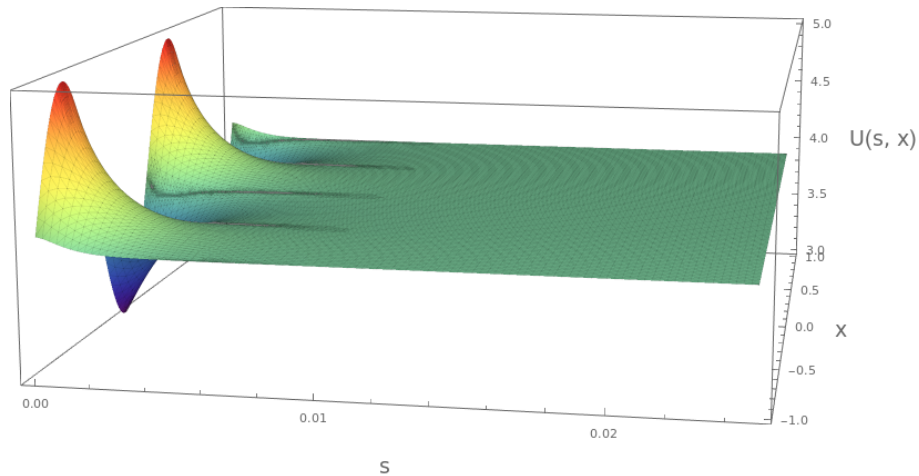


Figura 2.8: Resultados em 1+1 dimensões com $\beta = 0$ obtidos de MATHEMATICA

Como pode ser visto nas Fig. (2.7) e (2.8), utilizando a condição de estabilidade em nosso modelo, podemos obter o mesmo resultado que com Mathematica. Mas, se considerarmos uma condição inicial mais complicada e estudarmos nosso modelo em uma dimensão mais alta, precisamos fazer a análise numérica numa linguagem de programação

mais sofisticada. Neste caso, utilizamos FORTRAN, dado que precisamos de rapidez no cálculo numérico e dado o volume de cálculos que precisamos obter. Com tudo isto, nosso código de evolução é consistente, pois a discretização do método numérico se baseia em aproximações de diferenças finitas centradas de segunda ordem, cujo erro de truncamento local é de ordem $O(\Delta x^2)$. Também, nosso código de evolução é estável, pois satisfaz a condição de estabilidade que derivamos para ele. Tudo isto garante que nosso problema numérico é convergente.

2.6 Aplicação do método numérico: um exemplo no caso 1+1

Com o intuito de verificar o método numérico, colocamos $K = 0$ e, dado a complexidade numérica, vamos considerar o caso em que duas das dimensões espaciais são desprezíveis, i.e., a dependência funcional nas variáveis y e z é negligenciada, de tal forma que nosso esquema de evolução numérica para a EDP corresponderá ao caso 1+1. Portanto, utilizaremos os métodos numéricos descritos anteriormente, que serão implementados utilizando FORTRAN para a evolução de nossas variáveis físicas. Neste sentido, a análise em 1+1 dimensões nos traz mais confiança numérica e intuição que nos preparará para a elaboração da análise física futura. Tão pouco estaremos interessados nos valores mais pertinentes ao universo observado, o que igualmente deixaremos para os próximos capítulos.

Escolhemos analisar primeiramente o quanto o contraste de densidade varia em função da quantidade de picos no gráfico de sua configuração inicial, o que pode ser interpretado como a distribuição inicial de regiões superdensas ("overdensities") e vazias ("underdensities") em uma célula cosmológica. Para isto vamos utilizar uma condição inicial para a densidade de energia na forma

$$\frac{\rho_0}{\rho_c} = 1 + A \cos(n\pi x). \quad (2.28)$$

Aqui n representa o número de picos, isto é, o número de regiões superdensas em uma célula cosmológica. Neste caso, a média da densidade de energia atual e seu contraste de

densidade são dados por

$$\langle \rho_0 \rangle = \rho_c \quad \text{e} \quad \delta_0(x) = A \cos(n\pi x). \quad (2.29)$$

Tomando a amplitude $A = 0.95$ e testando os casos $n = 1, 3, 5$ e 7 , os resultados para $w = -1, 0, 1/3$ e $2/3$ podem ser vistos nos gráficos seguintes,

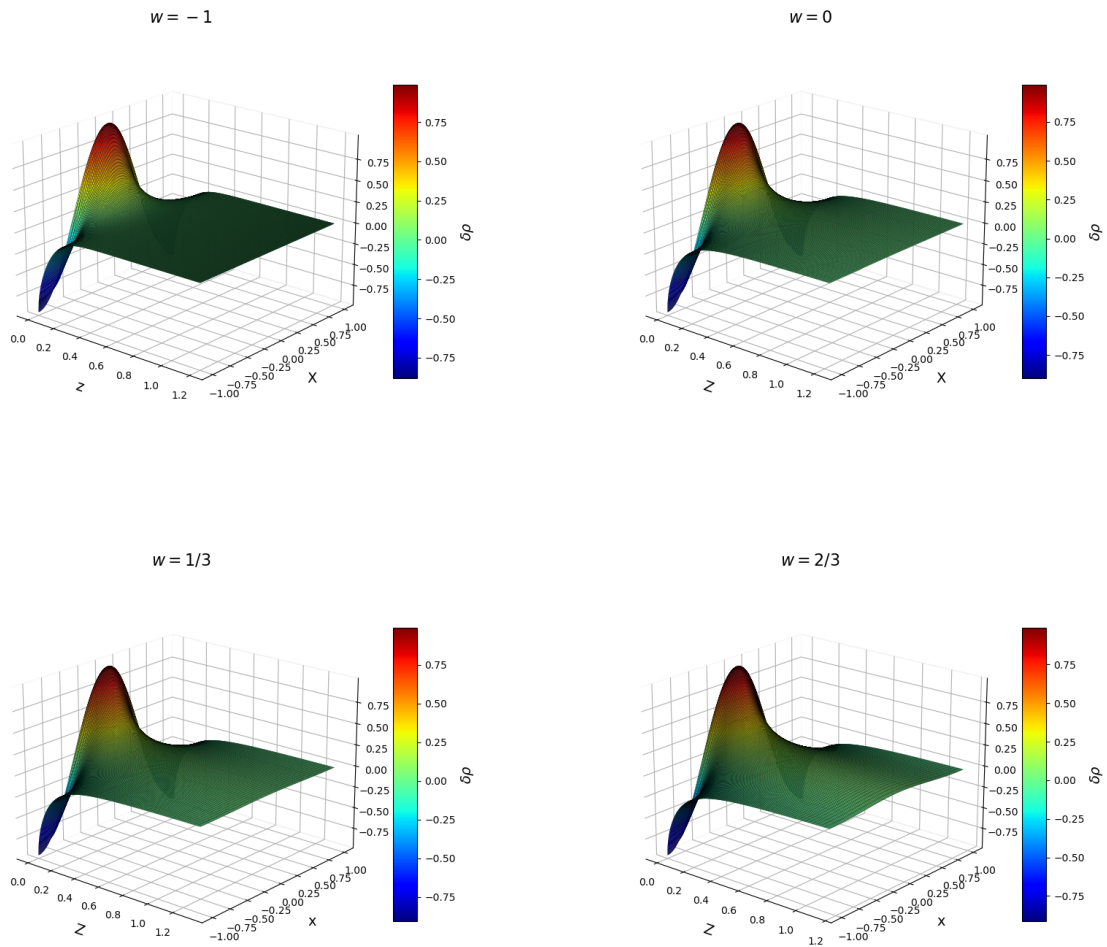


Figura 2.9: Contraste de densidade para diferentes valores de w considerando $n = 1$.

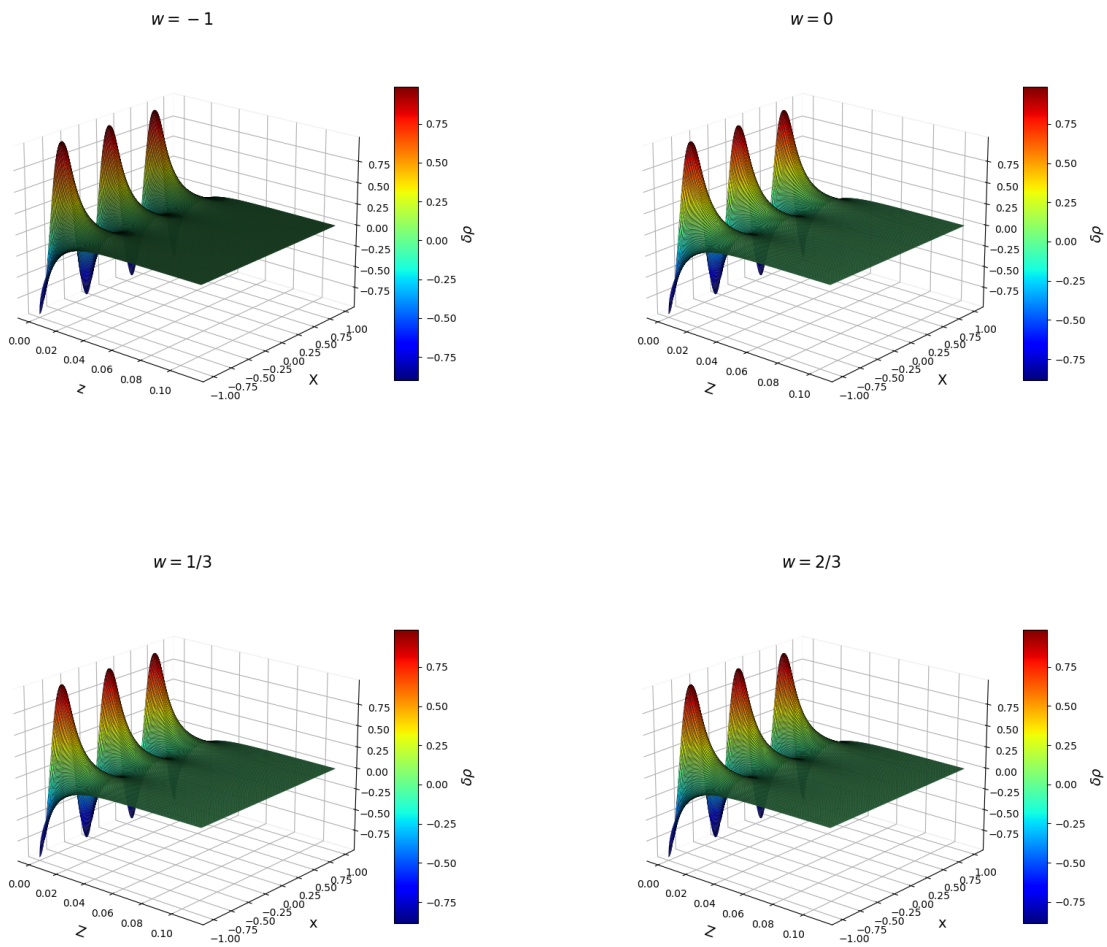


Figura 2.10: Contraste de densidade em função de n para diferentes valores de w considerando $n = 3$.

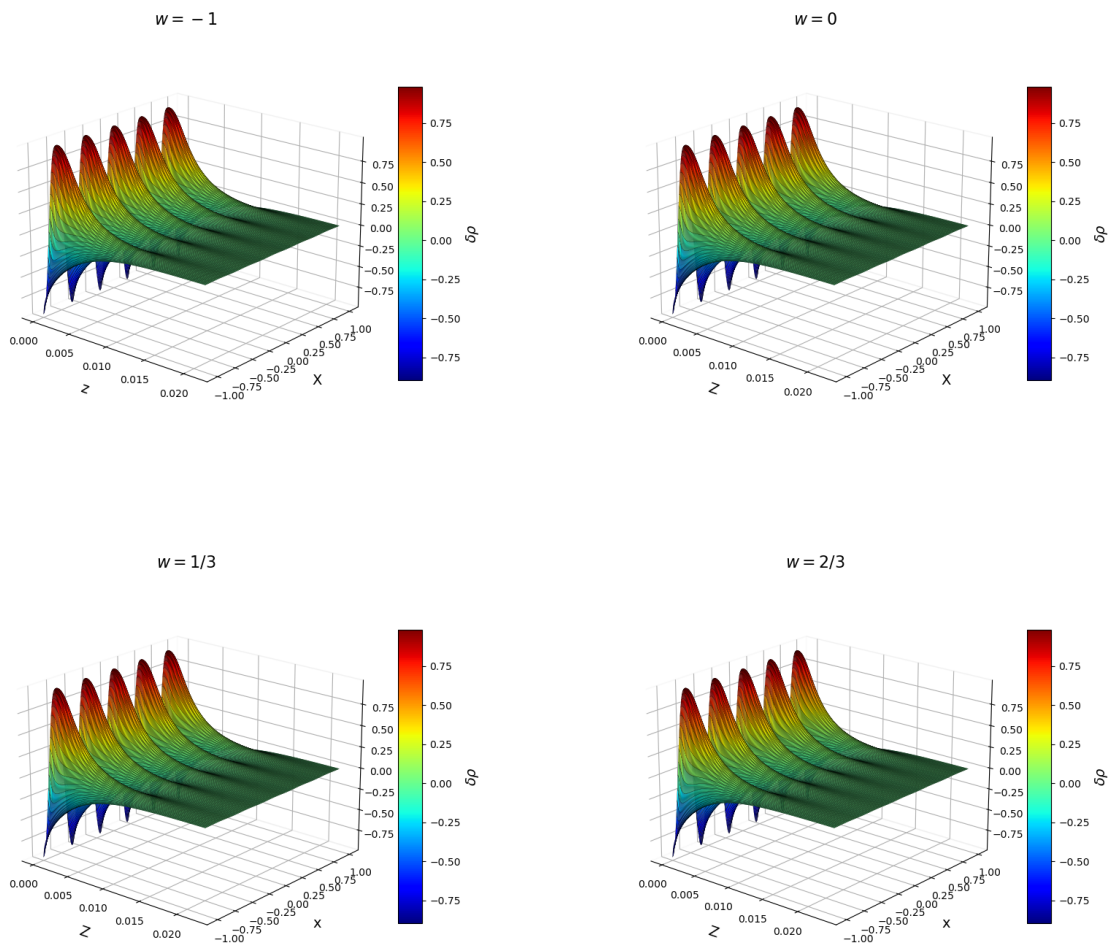


Figura 2.11: Contraste de densidade para diferentes valores de w considerando $n = 5$.

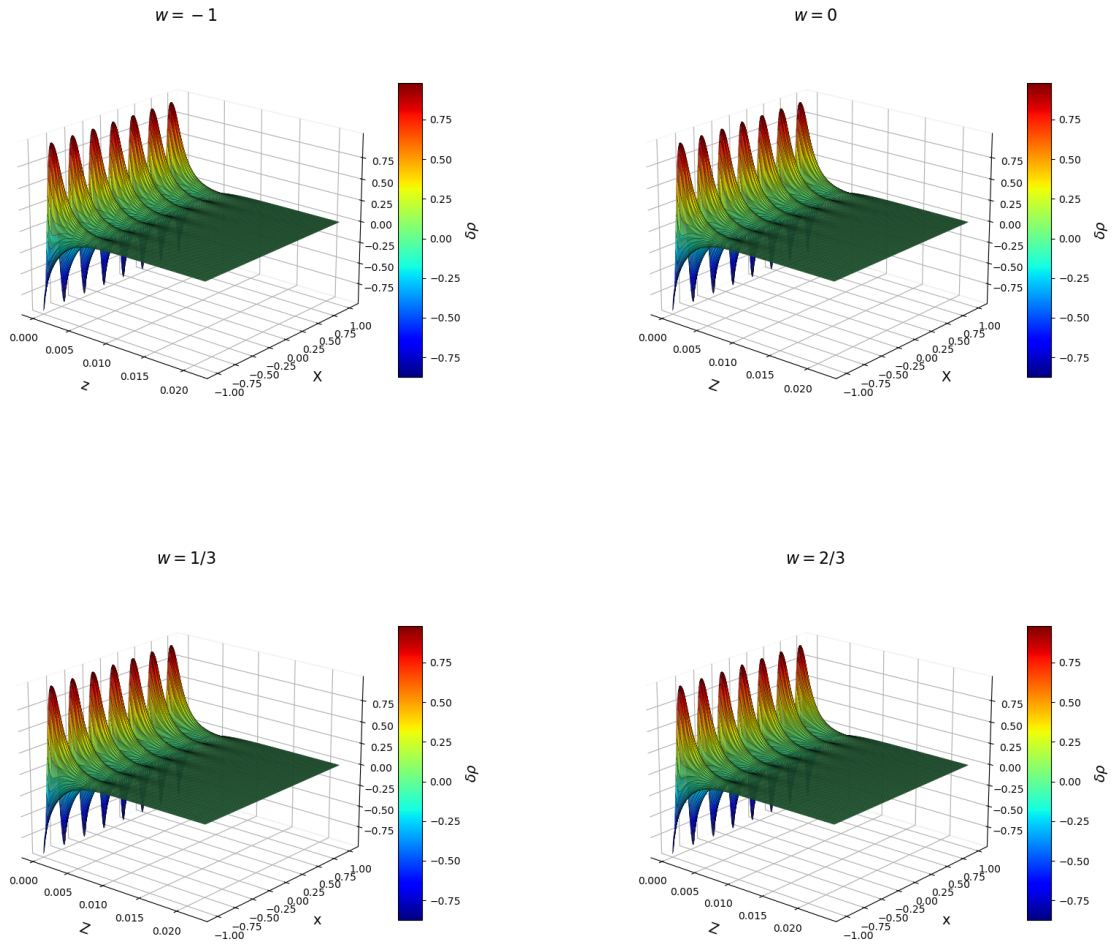


Figura 2.12: Contraste de densidade para diferentes valores de w considerando $n = 7$.

Embora nosso objetivo aqui seja apenas um “aquecimento” para nosso algoritmo numérico, algumas relações inusitadas já começam a aparecer nesse tipo de análise. Por exemplo, nas Fig. (2.9), (2.10), (2.11) e (2.12), a homogeneização parece ocorrer mais rápida quanto maior o número de picos na distribuição de matéria no modelo, independentemente do valor de w . Isto parece bem intuitivo, já que se espera um comportamento do tipo difusão para as soluções de nossa equação parabólica, o que corrobora o método numérico.

Resumindo, neste capítulo descrevemos e testamos o método numérico. No que se segue, passaremos para uma análise física mais adequada de aplicações cosmológicas envolvendo nosso modelo inhomogêneo.

2.7 Aplicação do método numérico: um exemplo no caso 2+1

Nesta seção, mostraremos um resultado para o caso 2+1. Para isso, consideraremos uma condição inicial da seguinte forma:

$$\frac{\rho_0}{\rho_c} = 1 + e^{-5(x^2+y^2)} \cos(4\pi x) \cos(4\pi y), \quad (2.30)$$

Se considerarmos uma célula cósmica em duas dimensões espaciais, isso representaria uma região do espaço onde a densidade está concentrada no centro, o que fisicamente poderia ser entendido como um aglomerado de galáxias. Assim, consideramos a poeira como o fluido de estudo com $K = 0$, $\beta = 0$ e os resultados são os seguintes:

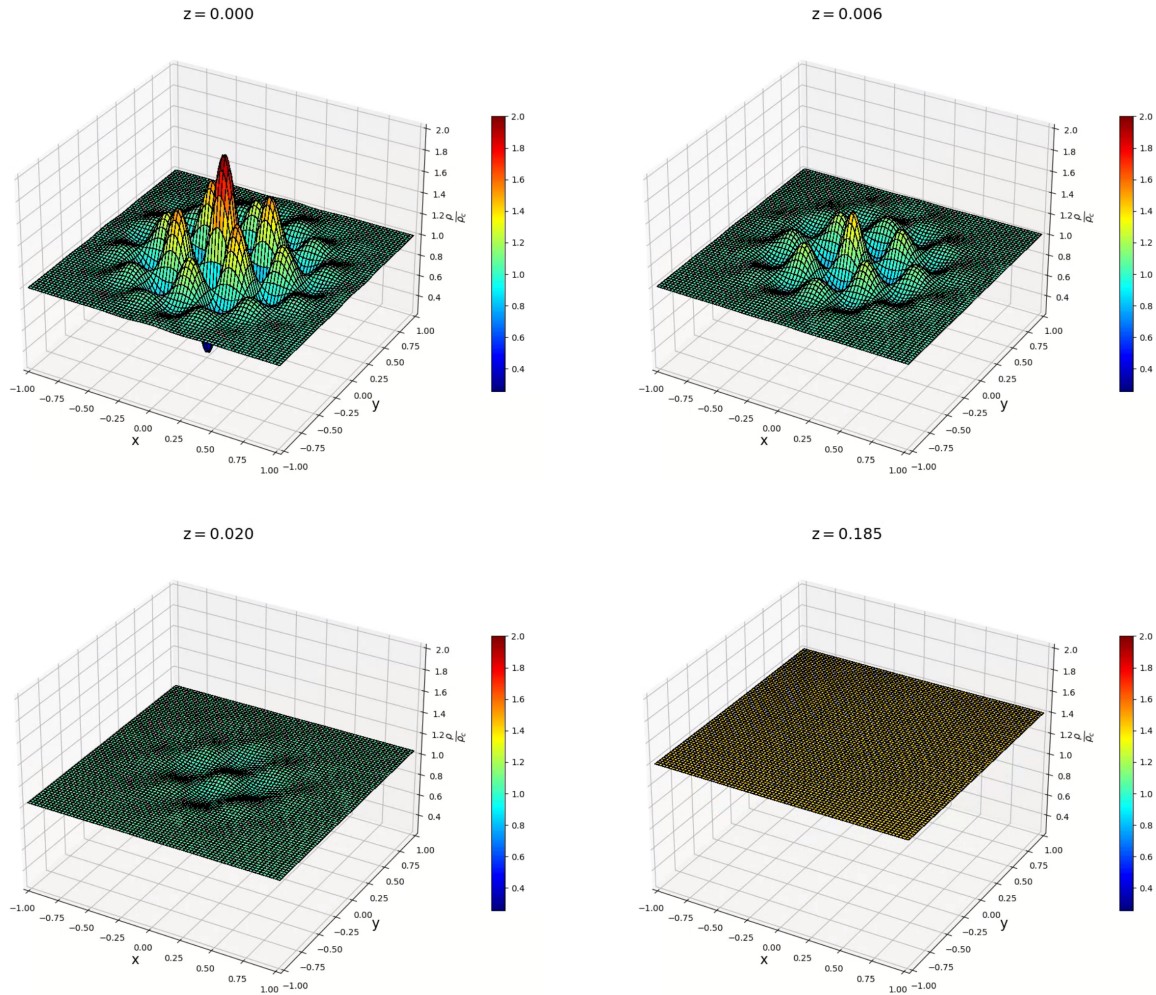


Figura 2.13: Evolução da densidade de energia

Podemos ver claramente na Fig. (2.13) que, à medida que retrocedemos no tempo, o universo tende a se tornar cada vez mais homogêneo. Além disso, a densidade de energia aumenta. Este é um resultado esperado, pois esperamos que o universo tenha sido inicialmente muito homogêneo e possuísse uma densidade de energia muito alta. Conforme o universo se expande, a densidade de energia diminui e, em algum ponto dessa expansão, as estruturas que observamos atualmente começam a se formar. Isto mostra que o algoritmo também se mostra confiável quando acrescentamos mais uma dimensão espacial.

2.8 Fluxograma

Nesta seção apresentamos um diagrama gráfico do procedimento que seguiremos para resolver numericamente nossa EDP, onde definir uma condição inicial no modelo significa definir uma densidade de energia atual para o nosso universo.

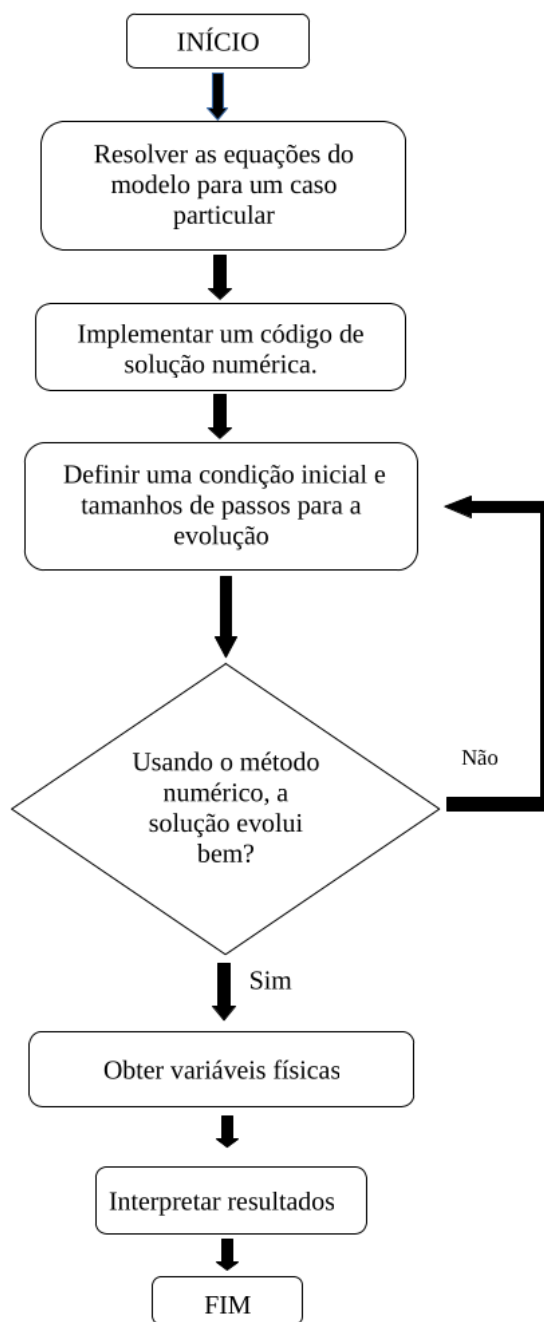


Figura 2.14: Fluxograma

Capítulo 3

Análise numérica da evolução do contraste de densidade: uma nova perspectiva sobre os efeitos não-lineares

Neste capítulo, vamos analisar os efeitos não-lineares do contraste de densidade sob uma perspectiva diferente, que é possível a partir do modelo elaborado no capítulo 1. Para tanto, utilizaremos as ferramentas numéricas descritas no capítulo 2. Para facilitar a análise sem perder o foco nas aplicações à cosmologia, no resto do texto vamos adotar o modelo com expansão homogênea e isotrópica no caso de curvatura nula, isto é,

$$K = 0. \tag{3.1}$$

3.1 Uma nova perspectiva para a descrição do contraste de densidade

Os principais parâmetros para a descrição de inhomogeneidades no modelo padrão da cosmologia são as funções de correlação de N -pontos da distribuição de galáxias, ξ_N [17].

Juntas, elas definem o quanto a distribuição estatística de matéria no universo difere de um regime completamente aleatório (distribuição de Poisson), sem atração gravitacional, caracterizado por $\xi_2 = \xi_3 = \dots = 0$. Em particular, a função de correlação de 2 pontos tem um papel preponderante nessa análise, sendo esta relacionada com o contraste de densidade δ por

$$\xi_2(\mathbf{z}, x, y, z) = \frac{1}{L_0^3} \int_{-L_0/2}^{L_0/2} \int_{-L_0/2}^{L_0/2} \int_{-L_0/2}^{L_0/2} \delta(\mathbf{z}, x', y', z') \delta(\mathbf{z}, x' + x, y' + y, z' + z) dx' dy' dz' . \quad (3.2)$$

Em particular, o valor de ξ_2 no centro da célula cósmica, $x = y = z = 0$, nos dá o desvio padrão do contraste de densidade,

$$\sigma_\delta(\mathbf{z}) = \sqrt{\xi_2(\mathbf{z}, 0, 0, 0)} , \quad (3.3)$$

isto é,

$$\sigma_\delta(\mathbf{z})^2 = \frac{1}{L_0^3} \int_{-L_0/2}^{L_0/2} \int_{-L_0/2}^{L_0/2} \int_{-L_0/2}^{L_0/2} \delta(\mathbf{z}, x, y, z)^2 dx dy dz . \quad (3.4)$$

Todos estes parâmetros podem ser colocados em termos da função $U(x, y, z, s)$, que satisfaz a equação (1.37), através da relação (1.53). Assim, temos uma nova perspectiva para sondar o comportamento da função de correlação de dois pontos, e conseqüentemente o espectro de potência relacionado com a mesma [17]. Sendo assim, é importante distinguirmos a abordagem acima daquela da cosmologia padrão. Eis alguns pontos importantes a serem destacados:

- (a) Enquanto no modelo padrão δ é obtido aproximadamente através de perturbações do modelo de background FLRW. Em nossa abordagem, o contraste de densidade estudado se refere ao próprio background. Ainda, ele contém todo seu contexto não-linear direto das equações de Einstein, isto é, não é obtido por uma análise perturbativa, contendo assim todas as ordens de aproximação possíveis.
- (b) Enquanto no modelo padrão δ é influenciado pelas diferentes componentes perturbativas da métrica (escalar, vetorial, tensorial, ...) [7], no nosso contexto não há tal distinção, mas apenas a hipótese de que a expansão é homogênea e isotrópica [5].

Isto faz com que a abordagem apresentada aqui seja mais generalista, pois trata do regime não-linear completo (todas as ordens de aproximação), ao mesmo tempo que ela também é mais restritiva, pois ignora inhomogeneidades além daquelas oriundas do potencial gravitacional ϕ , presente na métrica (1.17) na componente g_{00} . Neste sentido, ela não deve ser posta lado a lado com a abordagem padrão e depois comparada, mas ao invés disto, deve ser entendida como uma ferramenta auxiliar ao modelo padrão, com a perspectiva de possibilitar uma sondagem simples e complementar dos aspectos não-lineares ligados às estruturas de larga escala.

3.2 Considerações sobre os parâmetros físicos utilizados

A partir de agora analisaremos o contraste de densidade no modelo com expansão homogênea e isotrópica no caso de curvatura nula ($K = 0$). Seguindo a análise dimensional feita na seção 1.6, obtemos um valor pequeno para o parâmetro β depois do reescalonamento das variáveis. Portanto, tomaremos ao longo do resto do texto o valor

$$\beta = 0. \tag{3.5}$$

Nosso interesse é seu comportamento após o desacoplamento matéria-radiação ($z < 1.100$), que é predominantemente uma era de poeira. Embora o modelo padrão considere que ela acabou por volta de $z \approx 10$, dando origem à época de energia escura ($w = -1$), ainda assim, a primeira tem um papel fundamental desde o último espalhamento. Portanto, para fins de simplificação necessários para uma primeira análise, tomaremos ao longo do capítulo

$$w = 0. \tag{3.6}$$

A escolha desses parâmetros foi feita de maneira que a análise subsequente tivesse relevância para a cosmologia em um contexto bastante específico. No entanto, o leitor facilmente notará que o mesmo método se aplica diretamente para valores arbitrários de K , β e w .

Podemos agora analisar como se comporta o crescimento de inhomogeneidades quando alteramos a amplitude da diferença de densidades entre as regiões superdensas e os vazios cósmicos. Para fins desta análise, consideramos que o universo é homogêneo quando seu contraste de densidade for

$$|\delta(\mathbf{z}, x, y, z)| \leq \delta_h \quad (3.7)$$

em todos os pontos do espaço. Aqui δ_h é o valor que escolhemos para caracterizar homogeneidade. Por exemplo, se queremos caracterizar a situação do fluido formado por matéria e radiação logo após o desacoplamento e o último espalhamento, devemos considerar que naquela época tínhamos algo em torno de (veja Ref. [18])

$$\delta_h \approx 10^{-4}. \quad (3.8)$$

Uma vez fixado o valor de δ_h , podemos definir o *redshift de homogeneidade* como sendo o redshift \mathbf{z}_h mínimo no qual esta condição é satisfeita, i.e., é o menor valor para o qual vale a propriedade

$$\mathbf{z} \geq \mathbf{z}_h \quad \Rightarrow \quad \max_{|x_i| \leq L_0/2} \{ |\delta(\mathbf{z}, x_1, x_2, x_3)| \} \leq \delta_h. \quad (3.9)$$

Também definimos a *amplitude de densidade* A_0 como sendo a razão entre os valores máximos e mínimos da densidade de energia no redshift $\mathbf{z} = 0$, quer dizer,

$$A_0 = \frac{\rho_0^M}{\rho_0^m}, \quad (3.10)$$

onde

$$\rho_0^M = \max_{|x_i| \leq L_0/2} \{ |\rho(\mathbf{z} = 0, x_1, x_2, x_3)| \} \quad \text{e} \quad \rho_0^m = \min_{|x_i| \leq L_0/2} \{ |\rho(\mathbf{z} = 0, x_1, x_2, x_3)| \}. \quad (3.11)$$

Outro parâmetro que utilizaremos é a *razão de superdensidade*, que corresponde à razão entre as escalas de superdensidade, L_{SD} , e de homogeneidade, L_0 , em $\mathbf{z} = 0$. Elas são determinadas pelos seus respectivos volumes, $V_{\text{SD}} = L_{\text{SD}}^3$ e $V_0 = L_0^3$. Assim,

$$\chi = \frac{L_{\text{SD}}}{L_0} = \left(\frac{V_{\text{SD}}}{V_0} \right)^{1/3}. \quad (3.12)$$

Resumindo, analisaremos as inhomogeneidades do modelo através de três parâmetros. O primeiro, \mathbf{z}_h , marca o tempo idealizado onde elas começam a se tornar significativas

na dinâmica. Em geral, não há consenso sobre qual é o redshift onde o universo se torna homogêneo, pois observacionalmente ele depende do volume observado, do método estatístico utilizado e do modelo estudado. No entanto, é amplamente aceito que o universo era muito homogêneo no momento da recombinação, onde

$$z_h \approx 1100. \quad (3.13)$$

O segundo, A_0 , caracteriza a razão da amplitude entre o máximo e o mínimo da densidade de energia do universo atual, e pode ser dividido em : nodos, filamentos, paredes e vazios cósmicos, sendo que os nodos correspondem a regiões de maior densidade ("overdensity"), enquanto o vácuo aquelas com menor densidade ("underdensity"), onde a razão entre eles estima-se ser da orden de algumas centenas até alguns milhares, isto é, possivelmente [19]

$$10^2 \lesssim A_0 \lesssim 10^4. \quad (3.14)$$

A última, χ , define a fração do espaço ocupada atualmente pelas regiões superdensas do universo. Espera-se para seu valor de acordo com [19], algo em torno de

$$\chi \approx 2 \times 10^{-4} \quad (3.15)$$

Vamos agora aplicar a teoria até aqui desenvolvida para sondar como diferentes configurações da distribuição da matéria atualmente influenciam o redshift do momento de desacoplamento matéria-radiação. Sendo assim, vamos utilizar $\delta_h \approx 10^{-4}$, como mencionado na discussão envolvendo a eq. (3.8). Como a determinação de z_h envolve toda a evolução não-linear do contraste de densidade, neste aspecto da cosmologia, o modelo padrão é ineficaz, pois ali δ é obtido apenas de forma perturbativa em baixas ordens.

3.3 A influência da razão de superdensidade e amplitude de densidade na determinação do redshift de homogeneidade: Paredes cósmicas

3.3.1 A distribuição de energia em $z = 0$ de uma Parede cósmica

Começaremos nossa análise com a distribuição de matéria em $z = 0$ na forma inhomogênea mais simples possível, tal que a dinâmica seja homogênea nas variáveis y e z . Embora fisicamente não seja a situação mais desejada, ele é a porta de entrada para utilizarmos posteriormente as ferramentas aqui desenvolvidas em contextos mais relevantes. A interpretação cosmológica é simples: a distribuição de matéria hoje seria na forma de paredes infinitas de espessura χL_0 e uma distância $(1 - \chi) L_0$ entre elas. Na região da parede, o universo é superdenso com densidade de energia ρ_0^M , enquanto na região entre as paredes sua densidade de energia é igual a ρ_0^m , com $0 < \rho_0^m < \rho_0^M$. Assim, em $z = 0$, temos

$$\rho_0 = \begin{cases} \rho_0^M, & |x| \leq \chi \frac{L_0}{2}, \\ \rho_0^m, & \chi \frac{L_0}{2} < |x| \leq \frac{L_0}{2}, \end{cases} \quad (3.16)$$

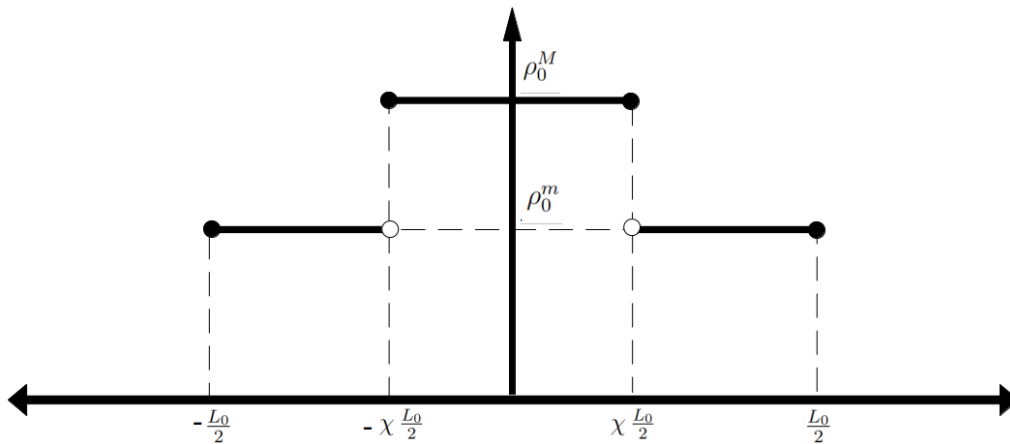


Figura 3.1: Gráfica de ρ_0 .

onde χ é a razão de superdensidade, $0 < \chi < 1$, e L_0 a escala de homogeneidade

(escala da célula cósmica). O valor médio da distribuição de energia da matéria em $z = 0$ é

$$\langle \rho_0 \rangle = ((A_0 - 1)\chi + 1) \rho_0^m, \quad (3.17)$$

onde $A_0 > 1$ é a amplitude de densidade definida em (3.10). Assim, o contraste inicial de densidade toma a forma

$$\delta_0 = \begin{cases} \frac{(A_0-1)(1-\chi)}{(A_0-1)\chi+1}, & |x| \leq \chi L_0/2, \\ -\frac{(A_0-1)\chi}{(A_0-1)\chi+1}, & \chi L_0/2 < |x| \leq L_0/2, \end{cases} \quad (3.18)$$

Isto implica que o desvio padrão do contraste de densidade (3.3) em $z = 0$ se relaciona com A_0 e χ segundo

$$\sigma_\delta(0) = \frac{(A_0 - 1) \sqrt{\chi(1 - \chi)}}{(A_0 - 1)\chi + 1}. \quad (3.19)$$

3.3.2 A implementação numérica dos cálculos

Para os propósitos deste trabalho, ao efetuarmos os cálculos numéricos, operamos com as variáveis reescaladas como descritas na seção 1.6. Assim, as variáveis espaciais para o cálculo numérico são dadas por

$$x = \frac{L_0}{2} \bar{x}, \quad y = \frac{L_0}{2} \bar{y}, \quad z = \frac{L_0}{2} \bar{z},$$

e portanto variam no intervalo

$$-\frac{L_0}{2} \leq x_i \leq \frac{L_0}{2} \quad \text{e} \quad -1 \leq \bar{x}_i \leq 1.$$

A função U é obtida do valor calculado via

$$U(x, y, z) = \frac{L_0}{2} \bar{U}(2x/L_0, 2y/L_0, 2z/L_0) \quad (3.20)$$

e a condição inicial implementada é

$$\bar{\rho}_0 = \frac{\rho_0}{\langle \rho_0 \rangle} = \begin{cases} \frac{A_0}{((A_0-1)\chi+1)}, & |x| \leq \chi, \\ \frac{1}{((A_0-1)\chi+1)}, & \chi < |x| \leq 1. \end{cases} \quad (3.21)$$

3.3.3 O comportamento do redshift de homogeneidade para valores constantes da razão de superdensidade

A seguir, analisaremos alguns resultados numéricos tomando o valor da razão de superdensidade constante e observando o comportamento do redshift de homogeneidade, z_h , em função da amplitude de densidade A_0 . Os valores são escolhidos de tal forma que sejam compatíveis com os comentários no final da seção 3.2 e adequados para mostrar uma mudança brusca de comportamento qualitativo. Para isso, utilizamos nosso código implementado em FORTRAN considerando poeira para diferentes valores de A_0 e χ , com $\delta \approx 10^{-4}$ como nosso parâmetro de homogeneidade. Em seguida, utilizamos uma interpolação cúbica, o que nos permite obter um gráfico contínuo, como pode ser visto nas seções seguintes.

Razão de superdensidade $\chi = 5 \times 10^{-5}$

Aqui o redshift apresenta um comportamento monotonicamente crescente, como visto na Fig. (3.2). Isso está de acordo com o esperado, visto que quanto maior a diferença entre as densidades de energia máxima e mínima, maior será o desvio padrão da distribuição inicial de matéria, pois segundo (3.19) temos

$$\sigma_\delta(0) \approx (A_0 - 1) \sqrt{\chi}, \quad (3.22)$$

e portanto, mais tempo devemos esperar para uma homogeneização, quer dizer, maior deverá ser o redshift z_h .

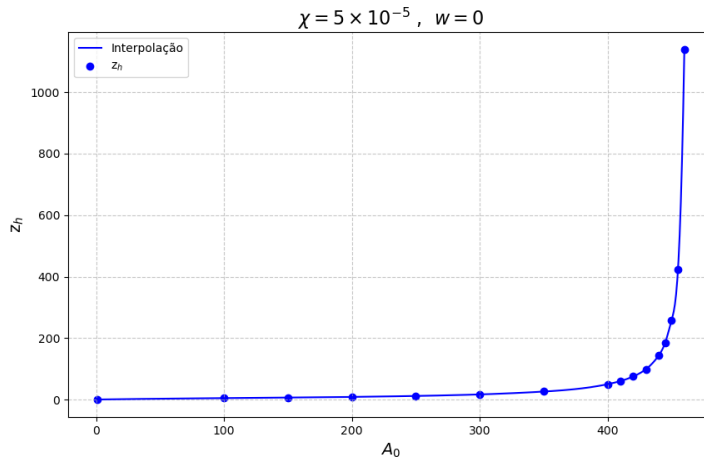


Figura 3.2: z_h em função de A_0 com $\chi = 5 \times 10^{-5}$ e $w = 0$.

Razão de superdensidade $\chi = 8 \times 10^{-5}$

Se considerarmos $\chi = 8 \times 10^{-5}$, o comportamento do redshift em função de A_0 também é monotonicamente crescente; isso está de acordo com o que esperaríamos observar. No entanto, podemos notar que, em comparação com o caso $\chi = 5 \times 10^{-5}$, z_h é menor para os mesmos valores de A_0 , como se observa na Fig. (3.3).

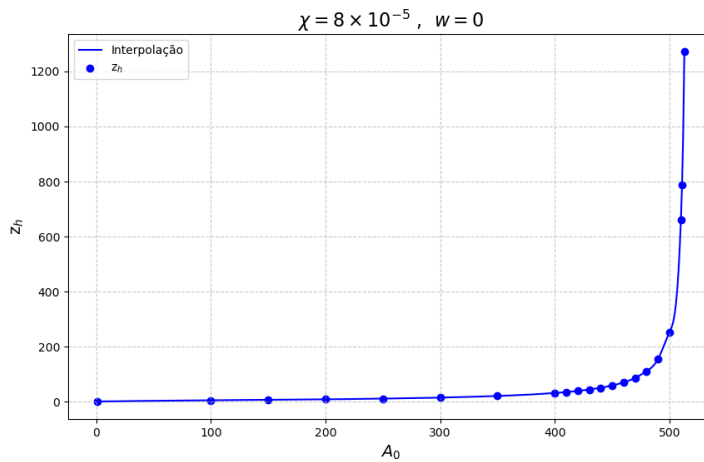


Figura 3.3: z em função de A_0 com $\chi = 8 \times 10^{-5}$ e $w = 0$.

Razão de superdensidade $\chi = 10^{-4}$

Para $\chi = 10^{-4}$, z_h , na Fig. (3.4) ainda vemos um comportamento monotonicamente crescente. Note que considerando os mesmos valores de A_0 , z_h é maior quanto menor χ . Isto indica que o redshift diminui à medida que χ aumenta, indicando uma relação inversa entre o redshift e o parâmetro χ . A princípio, isto parece contra-intuitivo, pois igualmente temos um menor desvio padrão (3.19) da distribuição inicial de matéria e portanto esperaríamos o contrário.

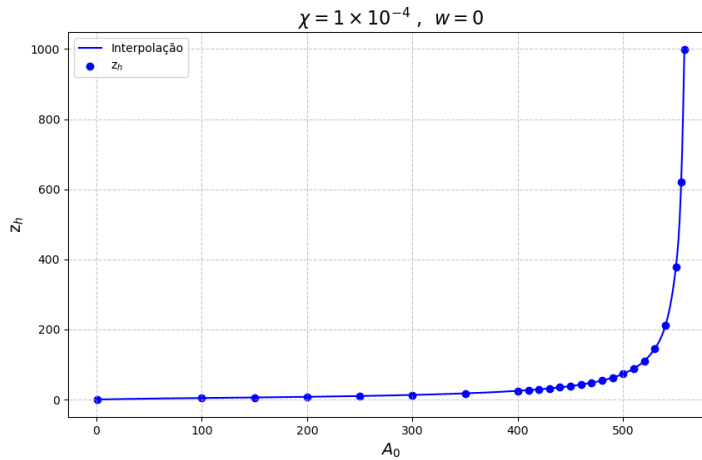


Figura 3.4: z em função de A_0 com $\chi = 10^{-4}$ e $w = 0$.

Razão de superdensidade $\chi = 2 \times 10^{-4}$

A partir daqui, algo curioso começa a acontecer. Seguindo a mesma metodologia de trabalho, se considerarmos valores de sigma mais altos, um valor máximo de redshift começa a aparecer. Assim, para $\chi = 2 \times 10^{-4}$, o maior valor do redshift é em torno de $z_h = 50$. Isso significa que, para essa configuração, que de fato representa o caso mais realista de acordo com [19].

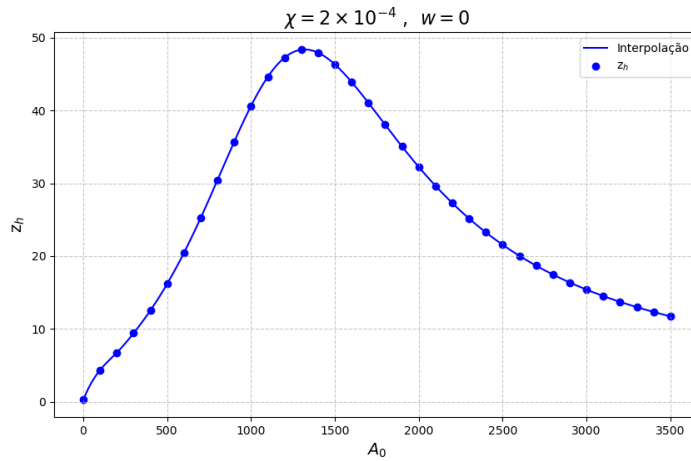


Figura 3.5: z em função de A_0 com $\chi = 2 \times 10^{-4}$ e $w = 0$.

Razão de superdensidade $\chi = 3 \times 10^{-4}$

Para $\chi = 3 \times 10^{-4}$ podemos ver que o valor máximo para o redshift é $z_h = 10$, o que indica que, à medida que continuamos a aumentar o valor de χ , o valor máximo de z_h diminui.

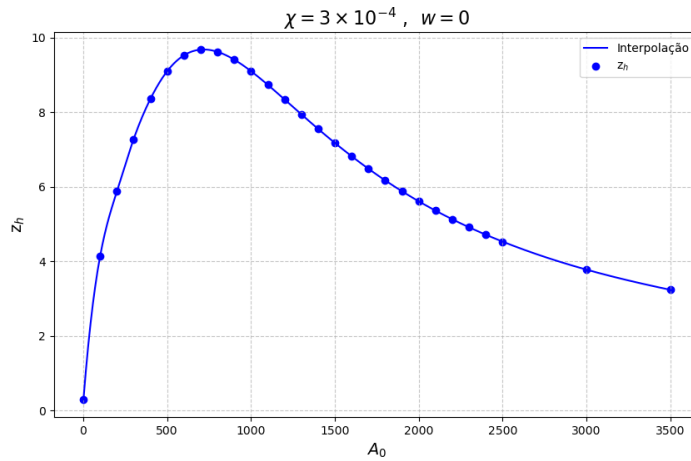


Figura 3.6: z em função de A_0 com $\chi = 3 \times 10^{-4}$ e $w = 0$.

3.3.4 O comportamento do redshift de homogeneidade: considerações finais

Considerando poeira como nosso fluido, calculamos o valor do redshift para o qual nosso universo é homogêneo com $\delta\rho = 10^{-4}$, considerando diferentes valores de σ e variando o fator A_0 , os resultados podem ser vistos na Fig. (3.7),

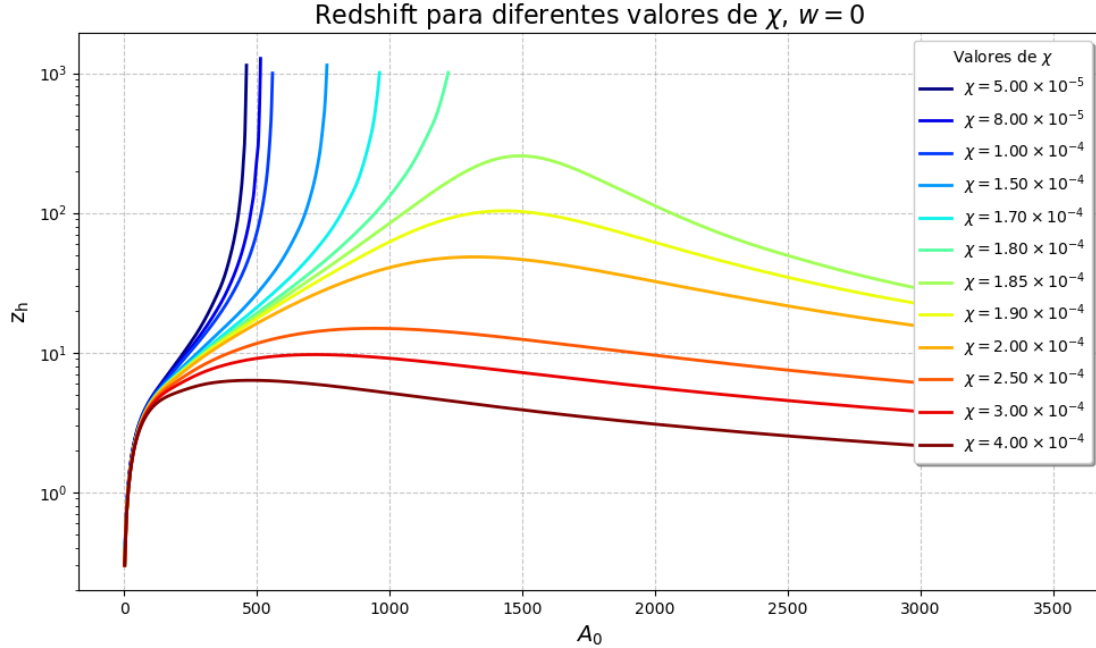


Figura 3.7: z_h em função de A_0 para diferentes valores de χ .

Nessas simulações, como pudemos ver nos gráficos anteriores, conforme o valor de A_0 aumenta, o redshift de homogeneidade z_h também aumenta para $\chi < 1.85 \times 10^{-4}$. Isto é algo esperado, pois o valor inicial do desvio padrão da distribuição de matéria, conforme a equação (3.19), é maior quanto maior A_0 para pequenos valores de χ . Assim, esperamos que o universo demore mais tempo para homogeneizar quanto mais inhomogênea for sua distribuição inicial.

Para valores $\chi > 1.85 \times 10^{-4}$, algo inesperado ocorre: o redshift aumenta monotonicamente em relação a A_0 até um certo ponto, quando começa a cair, assumindo assim um valor máximo. Se pensarmos em uma distribuição probabilística em função de A_0 e χ ,

este corresponderia ao valor mais provável. Trata-se de uma descoberta não trivial que será melhor analisada no futuro.

Conclusões

Este trabalho teve como principal objetivo desenvolver os métodos numéricos (Cap. 2) para a classe de modelos colmológicos não-homogêneos apresentados no capítulo 1 e mostrar que constituem uma ferramenta interessante para sondar aspectos não-triviais da evolução cósmica (Cap. 3).

O modelo cosmológico que estudamos neste trabalho é descrito por uma EDP não linear do tipo difusão, que resolvemos usando o método de diferenças finitas centradas no espaço e o método de Runge-Kutta de quarta ordem no tempo. As condições de contorno definem o princípio cosmológico em larga escala, não podendo assumir valores fixos em seus extremos, mas sim condições periódicas. Embora seja verdade que, com todas as considerações mencionadas, possamos obter soluções numéricas, precisávamos garantir que eram de fato as soluções corretas. É por isso que estudamos também a estabilidade numérica do nosso modelo através do método de Von Neumann e, assim, obtivemos uma condição de estabilidade que nada mais é do que a relação do tamanho do passo que o nosso modelo numérico deve ter no espaço e no tempo. Esse desenvolvimento se deu de maneira independente e constitui o cerne da dissertação.

Para mostrarmos que as ferramentas desenvolvidas são aplicáveis à cosmologia, fizemos uma primeira análise de aspectos não-lineares em longo período de tempo. Nessas simulações, pudemos observar dois tipos diferentes de comportamento para o redshift no momento em que o universo fica homogêneo, o redshift de homogeneidade. No modelo do capítulo 3, obtivemos um valor de $\chi = 1,85 \times 10^{-4}$ onde há uma mudança qualitativa muito significativa da dinâmica de homogeneização. Esta foi uma primeira amostra de como fatos não triviais podem ser obtidos ao utilizarmos as ferramentas numéricas aqui

desenvolvidas. Nota-se que a profundidade na interpretação cosmológica desses resultados ainda está em um nível bastante superficial, uma vez que não é o objetivo principal desta dissertação. Uma vez alcançado este nível, a continuação natural deste trabalho é focar nessas aplicações.

Referências Bibliográficas

- [1] Elcio Abdalla, Guillermo Franco Abellán, Amin Aboubrahim, Adriano Agnello, Özgür Akarsu, Yashar Akrami, George Alestas, Daniel Aloni, Luca Amendola, Luis A Anchordoqui, et al. Cosmology intertwined: A review of the particle physics, astrophysics, and cosmology associated with the cosmological tensions and anomalies. *Journal of High Energy Astrophysics*, 34:49–211, 2022.
- [2] Viatcheslav F Mukhanov. *Physical foundations of cosmology*. Cambridge university press, 2005.
- [3] Krzysztof Bolejko, Marie-Noëlle Célérier, and Andrzej Krasinski. Inhomogeneous cosmological models: exact solutions and their applications. *Classical and Quantum Gravity*, 28(16):164002, 2011.
- [4] L G Gomes. Breaking the cosmological principle into pieces: a prelude to the intrinsically homogeneous and isotropic spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 41(9):095004, apr 2024.
- [5] L G Gomes. Spacetimes with homogeneous and isotropic expansion. *Classical and Quantum Gravity*, 41(21):217003, sep 2024.
- [6] Leandro G Gomes, Marcelo A C Nogueira, and Lucas Ruiz dos Santos. Cosmological models constrained by homogeneous and isotropic expansion and a phenomenological equation of state. *Physica Scripta*, 100(9):095003, sep 2025.
- [7] George FR Ellis, Roy Maartens, and Malcolm AH MacCallum. *Relativistic cosmology*. Cambridge University Press, 2012.

- [8] MA Miville-Deschênes, V Pettorino, M Bucher, J Delabrouille, K Ganga, M Le Jeune, G Patanchon, C Rosset, G Roudier, Y Fantaye, et al. Planck 2018 results: Vi. cosmological parameters. *Astronomy and Astrophysics*, 641:A6–A6, 2020.
- [9] Mário Novello, Nelson Pinto Neto, and Santiago Esteban Perez Bergliaffa. *Programa mínimo de cosmologia*. Jauá Editora, 2010.
- [10] Leandro G. Gomes. Highly homogeneous and isotropic universes: quasi-dust models and the apparent dark-energy evolution arising from the local gravitational potential. 3 2026.
- [11] Pavan Kumar Aluri et al. Is the observable Universe consistent with the cosmological principle? *Class. Quant. Grav.*, 40(9):094001, 2023.
- [12] R S Gonçalves, G C Carvalho, C A P Bengaly Jr, J C Carvalho, A Bernui, J S Alcaniz, and R Maartens. Cosmic homogeneity: a spectroscopic and model-independent measurement. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 475(1):L20–L24, 12 2017.
- [13] WH1132 Press, SA Teukolsky, WT Vetterling, and BP1132 Flannery. 65001. numerical recipes 3rd edition: the art of scientific computing, 2007.
- [14] Randall J LeVeque. *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems*. SIAM, 2007.
- [15] KW Morton and DF Mayers. Numerical solution of partial differential equations. *Cambridge University*, 512, 1994.
- [16] Bertil Gustafsson, Heinz-Otto Kreiss, and Joseph Olinger. *Time dependent problems and difference methods*, volume 24. John Wiley & Sons, 1995.
- [17] P James E Peebles. *Principles of physical cosmology*. Princeton university press, 2020.

- [18] Pierros Ntelis, Anne Ealet, Stephanie Escoffier, Jean-Christophe Hamilton, Adam James Hawken, Jean-Marc Le Goff, James Rich, and Andre Tilquin. The scale of cosmic homogeneity as a standard ruler. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2018(12):014, 2018.
- [19] Punyakoti Ganeshaiah Veena, Marius Cautun, Elmo Tempel, Rien van de Weygaert, and Carlos S Frenk. The cosmic ballet ii: Spin alignment of galaxies and haloes with large-scale filaments in the eagle simulation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 487(2):1607–1625, 2019.

Anexo 1: Tabelas para diferentes valores de σ

Tabela A.1: Redshift para diferentes valores de A_0 com $\sigma = 0.00005$ e $w = 0$.

A_0	$\frac{\rho_0^m}{\rho_c}$	$\frac{\rho_0^M}{\rho_c}$	z
100	1.00	99.51	4.71
150	0.99	148.89	6.44
200	0.99	198.03	8.67
250	0.99	246.93	11.83
300	0.99	295.58	16.82
350	0.98	344.00	26.12
400	0.98	392.18	50.04
450	0.98	440.12	257.81
460	0.98	449.68	1138.47

Tabela A.2: Redshift para diferentes valores de A_0 com $\sigma = 0.00008$ e $w = 0$.

A_0	$\frac{\rho_0^m}{\rho_c}$	$\frac{\rho_0^M}{\rho_c}$	z
100	0.99	99.21	4.63
150	0.98	148.23	6.23
200	0.98	196.86	8.19
250	0.98	245.11	10.80
300	0.97	292.99	14.52
350	0.97	340.49	20.42
400	0.96	387.62	31.29
450	0.96	434.39	58.46
500	0.96	480.80	252.24
510	0.96	490.04	661.64

Tabela A.3: Redshift para diferentes valores de A_0 com $\sigma = 0.0001$ e $w = 0$.

A_0	$\frac{\rho_0^m}{\rho_c}$	$\frac{\rho_0^M}{\rho_c}$	z
100	0.99	99.02	4.59
150	0.99	147.80	6.10
200	0.98	196.10	7.91
250	0.98	243.93	10.21
300	0.97	291.29	13.32
350	0.97	338.20	17.83
400	0.96	384.65	25.04
450	0.96	430.66	38.58
500	0.95	476.24	73.53
510	0.95	485.30	88.43
520	0.95	494.34	110.27
530	0.95	503.37	145.36
540	0.95	512.38	211.04
550	0.95	521.38	378.20

Tabela A.4: Redshift para diferentes valores de A_0 com $\sigma = 0.0002$ e $w = 0$.

A_0	$\frac{\rho_0^m}{\rho_c}$	$\frac{\rho_0^M}{\rho_c}$	z
100	0.98	98.06	4.35
200	0.96	192.34	6.74
300	0.94	283.07	9.41
400	0.93	370.44	12.53
500	0.91	454.63	16.19
600	0.89	535.81	20.44
700	0.88	614.14	25.25
800	0.86	689.77	30.45
900	0.85	762.84	35.73
1000	0.83	833.47	40.63
1100	0.82	901.79	44.63
1200	0.81	967.90	47.27
1300	0.79	1031.91	48.36
1400	0.78	1093.92	47.95
1500	0.77	1154.02	46.34
1600	0.76	1212.30	43.92
1700	0.75	1268.85	41.05
1800	0.74	1323.72	38.04
1900	0.72	1377.01	35.06
2000	0.71	1428.78	32.25
2100	0.70	1479.08	29.65
2200	0.69	1527.99	27.29
2300	0.69	1575.56	25.16
2400	0.68	1621.84	23.26
2500	0.67	1666.89	21.56
2600	0.66	1710.75	20.04
2700	0.65	1753.47	18.68
2800	0.64	1795.10	17.47
2900	0.63	1835.68	16.38
3000	0.63	1875.23	15.40
3100	0.62	1913.82	14.51
3200	0.61	1951.46	13.71
3300	0.60	1988.19	12.99
3400	0.60	2024.05	12.33

Tabela A.5: Redshift para diferentes valores de A_0 com $\sigma = 0.0003$ e $w = 0$.

A_0	$\frac{\rho_0^m}{\rho_c}$	$\frac{\rho_0^M}{\rho_c}$	z
100	0.97	97.12	4.13
200	0.94	188.73	5.87
300	0.92	275.31	7.27
400	0.89	357.24	8.35
500	0.87	434.90	9.10
600	0.85	508.60	9.52
700	0.83	578.66	9.67
800	0.81	645.32	9.62
900	0.79	708.83	9.41
1000	0.77	769.41	9.10
1100	0.75	827.25	8.73
1200	0.74	882.55	8.34
1300	0.72	935.45	7.94
1400	0.70	986.12	7.55
1500	0.69	1034.70	7.17
1600	0.68	1081.30	6.82
1700	0.66	1126.05	6.48
1800	0.65	1169.06	6.17
1900	0.64	1210.42	5.88
2000	0.63	1250.23	5.61
2100	0.61	1288.58	5.36
2200	0.60	1325.54	5.13
2300	0.59	1361.19	4.91
2400	0.58	1395.59	4.72
2500	0.57	1428.82	4.53