



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências
Mestrado Profissional

ELISÂNGELA MIRANDA PEREIRA

**A História da Matemática nos livros didáticos
de Matemática do Ensino Médio: conteúdos e
abordagens**

ITAJUBÁ-MG
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências
Mestrado Profissional

ELISÂNGELA MIRANDA PEREIRA

**A História da Matemática nos livros
didáticos de Matemática do Ensino Médio:
conteúdos e abordagens**

Orientadora: Prof^ª. Dra. Mariana Feiteiro Cavalari

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências, área de concentração Ensino de Ciências, da Universidade Federal de Itajubá, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências.

ITAJUBÁ-MG
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências
Mestrado Profissional

ELISÂNGELA MIRANDA PEREIRA

**A História da Matemática nos livros
didáticos de Matemática do Ensino Médio:
conteúdos e abordagens**

Dissertação aprovada por banca examinadora em 21 de março de 2016, conferindo à autora o título de Mestre em Ensino de Ciências.

Banca Examinadora:
Prof^ª. Dra. Mariana Feiteiro Cavalari (Orientadora)
Prof^ª. Dra. Marger da Conceição Ventura Viana
Prof. Dr. Marco Aurélio Alvarenga Monteiro

ITAJUBÁ-MG
2016

AGRADECIMENTOS

Agradeço...

À Deus, pelas bênçãos concedidas em toda a minha vida.

Aos meus pais, que sempre lutaram para proporcionar aos filhos o que acreditavam ser o melhor para eles.

Ao meu noivo, por todo amor, carinho, apoio e uma enorme paciência e compreensão nos momentos de ausência devido minha dedicação a este trabalho.

A todos os colegas e professores do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências, pela convivência, pelo aprendizado, e pelos momentos agradáveis que passamos juntos.

Em especial, aos colegas mais próximos do mestrado: Ana Paula, Diego, Luciana, Márcio e Paulo, pela amizade, carinho e atenção. Ao Paulo, agradeço imensamente pelo empréstimo de grande parte dos livros didáticos que utilizei neste trabalho.

À minha orientadora, prof^ª. Mariana Feiteiro Cavalari, que acreditou em mim e a quem devo um crescimento acadêmico considerável; pelo seu trabalho de orientação, que foi realizado com muita dedicação, responsabilidade e respeito a mim e ao meu trabalho.

À prof^ª. Marger da Conceição Ventura Viana, pelas valiosas contribuições ao longo da minha trajetória acadêmica, como docente e orientadora na graduação, na especialização e neste momento como membro da banca examinadora.

Ao professor Marco Aurélio Alvarenga Monteiro, também membro da banca examinadora, pelas importantes contribuições neste trabalho.

À prof^ª. Maria Beatriz Guimarães Barbosa (CEFET-MG), pelo empréstimo de parte dos livros didáticos que utilizei neste trabalho, bem como à Fundação de Ensino de Contagem-MG (FUNEC), também pelo empréstimo de parte deste material.

À Cristiane Oliveira Pisani Martini, pela ajuda com a tradução de língua estrangeira, especialmente pelo resumo traduzido.

Ao IFSULDEMINAS e ao CEFET-MG, pela colaboração e incentivo à qualificação de seus servidores, da qual fui beneficiada, em ambas as instituições.

À todos aqueles que de alguma forma contribuíram para a conclusão deste mestrado.

RESUMO: A utilização da História da Matemática (HM) no processo de ensino e aprendizagem da Matemática tem sido apontada por diversos autores e também pelos documentos oficiais do Ministério da Educação (MEC). Nesse sentido, nos propomos a analisar a presença da HM nas seis coleções de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, aprovados pelo PNLD 2015. Para atingirmos este objetivo, buscamos identificar os conteúdos matemáticos que são trabalhados utilizando a HM; identificar as menções à HM e mapeá-las com relação ao seu formato (exposição didática, estilo e posicionamento no texto); e analisar as funções didáticas desempenhadas pela HM nestes livros didáticos. Para a análise das funções didáticas, elaboramos quatro agrupamentos, a saber: “HM e estratégia didática”; “HM e a elucidação dos *porquês*”; “HM e a elucidação do *para que?*” e “HM e formação cultural geral”. No agrupamento denominado “HM e estratégia didática” a HM desempenha o papel de possibilitar ao aluno desenvolver algum raciocínio matemático. No agrupamento denominado “HM e a elucidação dos *porquês*” a HM desempenha o papel de apresentar como foram desenvolvidos, em que circunstâncias e por que foram elaborados certos conhecimentos matemáticos. No agrupamento denominado “HM e a elucidação do *para que?*” a HM desempenha o papel de apresentar ao aluno uma aplicação, ao longo do tempo, ou em um período específico, de conhecimentos matemáticos. Já no agrupamento denominado “HM e formação cultural geral” a HM desempenha o papel de propiciar uma formação de cunho mais geral. Neste agrupamento estão reunidas as menções que tratam, em sua maioria, de informações sobre personagens ligados à Matemática. A partir da nossa análise, identificamos que pouco mais da metade das menções à HM identificadas nos livros didáticos analisados estão desempenhando a função “HM e formação cultural geral”, que a nosso ver, é a função menos interessante do ponto de vista da compreensão de conteúdos ou conceitos matemáticos. Já a função “HM e estratégia didática” foi identificada em uma pequena parcela de menções. Esta função deveria ser mais explorada, visto que desempenha o papel de proporcionar ao aluno o desenvolvimento de algum raciocínio matemático, levando-o à compreensão do conteúdo ou conceito matemático. As outras duas funções, “HM e a elucidação dos *porquês*”; “HM e a elucidação do *para que?*”, juntas, representam um terço do total de menções. Estas duas menções também deveriam ser mais exploradas, visto que, de acordo com nossas análises, contribuem para uma mudança de percepção em relação à Matemática. Estas possibilitam a desmistificação da Matemática como uma ciência isolada e acabada, à medida que mostram a Matemática como ciência em desenvolvimento e, também, as motivações e aplicações, ao longo do tempo, de conceitos matemáticos.

Palavras-chave: História da Matemática, livros didáticos, PNLD, Ensino Médio.

ABSTRACT: Using the History of Mathematics (HM) use in the processes of teaching and learning of Mathematics has been recommended by several authors and official documents from Ministry of Education. According to this fact, we propose to analyse the presence of HM in the six Mathematic textbook collections for high school, approved by PNLD 2015. To achieve this goal, we tried to: identify which mathematics subjects were developed in the HM; recognize references to HM and map them in relation to their format (didactic exhibition, style and positioning in the text); as well we analyzed the educational functions of the HM in those textbooks. For the analysis of didactic functions, we formulated four groups and named them as: “HM and teaching strategy”, “HM and the understandings of *whys*”, “HM and explanations about *for what*”, and “HM and cultural training in general”. In the group named “HM and teaching strategy”, the HM plays the role of enabling the student to develop some mathematical reasoning. In the group called “HM and the understandings of *whys*”, HM plays the role of presenting how certain mathematical knowledge were developed, under what circumstances and why they were developed. In the third group named “HM and explanations about *for what*”, HM plays the role of presenting an application for the student, over time or during a specific period of time, of mathematical knowledge. Finally, in the group named “HM and cultural training in general”, HM plays the role of providing a more general training related to the culture. In this group we found the issues that deal, mostly, with information about Mathematics’ characters. From our analysis, we found that slightly more than half of the entries to HM identified in the textbooks analyzed are in the group of “HM and general cultural training” which is, from the understanding point of view of subjects comprehension or mathematics concepts, the least interesting. Although, the “HM and teaching strategy” was identified in small proportion of mentions. As this group plays the role of providing students with the development of some mathematical reasoning, leading him to understand the content or mathematical concept, we think that it should be further explored. The other two functions together, “HM and the understandings of *whys*” and “HM and explanations about *for what*”, represent a third part of total mentions. These two statements should also be further explored because, according to our analysis, they contribute to a change of perception towards Mathematics. These statements understandings help us in the processes of demystification of mathematics, changing our thought about it as an isolated and finished science. That is due to their view of Math and Science that are showed as being in permanent development, and it also show the mathematical concepts motivations and applications, over time.

Keywords: History of Mathematics; textbooks; PNLD; high school.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	7
1. A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO PROPOSTA DIDÁTICA	15
1.1. Por que utilizar a HM no ensino de Matemática?	16
1.2. Fatores que dificultam a utilização da HM no ensino de Matemática	25
1.3. Formas de abordagem da HM no ensino de Matemática	27
2. O LIVRO DIDÁTICO E O PNLD	34
2.1. Considerações sobre o livro didático	34
2.2. O Programa Nacional do Livro Didático	40
3. ASPECTOS METODOLÓGICOS	46
4. ANÁLISE DA INSERÇÃO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA IDENTIFICADA NOS LIVROS DIDÁTICOS	51
4.1. Conteúdos matemáticos que são trabalhados utilizando a HM	52
4.2. Mapeamento dos aspectos relacionados às menções à HM quanto ao seu formato	57
4.2.1. Exposição didática	57
4.2.2. Estilo	59
4.2.3. Posicionamento das menções no texto	59
4.3. Análise das funções didáticas	61
CONSIDERAÇÕES FINAIS	90
REFERÊNCIAS	92
APÊNDICE A	97
APÊNDICE B	98
APÊNDICE C	99

INTRODUÇÃO

O ensino e a aprendizagem da Matemática têm sido bastante discutidos, nas últimas décadas, no âmbito da área de pesquisa Educação Matemática, que tem por objeto de estudo “[...] a compreensão, interpretação e descrição de fenômenos referentes ao ensino e à aprendizagem da matemática, nos diversos níveis da escolaridade, quer seja em sua dimensão teórica ou prática” (PAIS, 2011, p.10).

O processo de ensino e aprendizagem da Matemática enfrenta vários obstáculos. Dentre estes, Mendes (2006) destaca a falta de interesse do aluno devido a forma como os conteúdos matemáticos são apresentados nas aulas e a ausência da apresentação dos porquês relacionados a determinados conteúdos da Matemática. Assim, o aluno tem dificuldade para identificar qualquer utilidade para o assunto abordado.

Segundo Nobre (1996), o que se percebe, muitas vezes, no contexto pedagógico, é que os conteúdos matemáticos estão sendo simplesmente transmitidos aos alunos da mesma forma que foi transmitido ao professor, ou seja, são apresentados apenas os resultados, o conhecimento matemático como produto pronto e acabado. Esse autor enfatiza que a forma como é abordado um determinado assunto “[...] é de extrema importância para sua verdadeira compreensão” (p. 31).

Assim, visando melhorias para o ensino e a aprendizagem da Matemática, emergem, do campo de pesquisa da Educação Matemática, várias tendências, ou seja, teorias que se dedicam a determinadas temáticas no ensino da Matemática, de forma a contribuir para a superação das dificuldades no ensino e na aprendizagem desta disciplina (PAIS, 2011).

Dentre estas tendências que emergem da pesquisa em Educação Matemática, destaca-se a utilização da História da Matemática (HM) como proposta didática. Entende-se que a HM pode contribuir de forma significativa no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, já que esta pode possibilitar uma mudança da visão desta ciência.

A Matemática, segundo Caraça (1951),

[...] pode ser encarada sob dois aspectos diferentes. Ou se olha para ela tal como vem exposta nos livros de ensino, como coisa criada, e o aspecto é o de um todo harmonioso, onde os capítulos se encadeiam em ordem, sem contradições. Ou se procura acompanhá-la no seu desenvolvimento progressivo, assistir à maneira como foi sendo elaborada, e o aspecto é totalmente diferente - descobrem-se hesitações, dúvidas, contradições [...] (prefácio, XIII).

Se encararmos a Ciência de acordo com o segundo aspecto, perceberemos que esta é influenciada pelo contexto social, subordinada às necessidades do homem, e, por consequência, uma criação humana, em constante construção (CARAÇA, 1951).

Porém, Silva (2001) afirma que, se a Matemática for encarada “[...] como uma ciência quase auto-suficiente, pronta e acabada [...], dificilmente haveria espaço para a História da Matemática no processo de ensino-aprendizagem” (p. 129).

Por outro lado, ainda segundo Silva (2001), se a Matemática for encarada como

[...] uma das muitas formas de conhecimento, ou, ainda, como um tipo de manifestação cultural ou atividade humana mais geral, então, a história desse conhecimento reveste-se de significado e estudar a História da Matemática é uma forma de entender melhor as relações do homem com o conhecimento matemático dentro de um certo contexto cultural (p. 129-130).

Nesta perspectiva de utilização da HM no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, o Ministério da Educação (MEC), através de alguns de seus documentos oficiais, tais como os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNEM+) e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, aponta que a HM deve ser trabalhada no Ensino Médio.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias), dispõem sobre a dimensão histórica da Matemática, que possibilita a visão de que seu desenvolvimento possui “[...] estreita relação com o todo social e cultural”, visto que esta ciência possui “caráter instrumental mais amplo, além de sua dimensão própria, de investigação e invenção” (BRASIL, 2000, p. 42).

Da mesma forma, os PCNEM+ também abordam a dimensão histórica da Matemática, de forma a contribuir para a ampliação e aprofundamento “[...] de conhecimentos não só nesta disciplina, mas nas suas inter-relações com outras áreas do saber”, visto que a Matemática, enquanto ciência, possui uma “estreita relação com a sociedade e a cultura em diferentes épocas” (BRASIL, 2002, p. 111).

Neste sentido, os PCNEM+ expressam que uma das competências que deve ser desenvolvida no ensino da Matemática é “compreender a construção do conhecimento matemático como um processo histórico, [...] de modo a permitir a aquisição de uma visão crítica da ciência em constante construção, sem dogmatismos ou certezas definitivas” (BRASIL, 2002, p. 117).

Além disto, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, em seu Volume 2 – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, enfatizam o uso da HM em sala de aula como um elemento importante no aprendizado da Matemática, pois, “[...] a recuperação do processo histórico de construção do conhecimento matemático pode se tornar um importante elemento de contextualização” desse conhecimento (BRASIL, 2006, p. 86).

De certa forma, percebemos o empenho contido nos documentos oficiais de mostrar a importância do aspecto histórico estar presente no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Assim como os documentos oficiais citados, diversos pesquisadores também apresentam argumentos favoráveis à utilização da História da Matemática.

Tzanakis e Arcavi (2000) entendem que o ensino da Matemática é um processo bem mais complexo que apenas a exposição organizada dos conteúdos matemáticos. Para eles, na aprendizagem da Matemática não é suficiente operar com os símbolos e com a sintaxe lógica, e tão somente basta acumular conhecimentos de novos resultados, que geralmente são apresentados como produtos acabados. Para os autores, o ensino da Matemática deverá incluir a motivação para certos problemas e questões, visando uma construção do conhecimento que possibilite o estabelecimento de relações entre o conhecimento antigo e o novo. Nesse sentido, os autores entendem que a HM se apresenta como um meio apropriado para expor o desenvolvimento da Matemática, desempenhando um importante papel na Educação Matemática.

D’Ambrósio (2009) expõe que “a maior parte dos programas consiste de coisas acabadas, mortas e absolutamente fora do contexto moderno. Torna-se cada vez mais difícil motivar alunos para uma ciência cristalizada” (p. 29). Complementando esta ideia, o autor enfatiza que não é fácil motivar os alunos utilizando fatos e situações do mundo atual para a aprendizagem da Matemática, pois os conhecimentos a serem apresentados aos alunos foram desenvolvidos em diferentes épocas e determinados contextos, em uma realidade que nos é alheia.

Dessa forma, D’Ambrósio (2009) afirma que “não é sem razão que a história vem aparecendo como um elemento motivador de grande importância” (p. 29). Através da HM, podemos perceber como se deu o desenvolvimento e utilização de teorias e práticas em determinados contextos específicos e de diferentes épocas (D’AMBROSIO, 2009).

Além disso, Segundo Struik (1995), a História da Matemática “[...] nos ajuda a entender nossa herança cultural” (p. 213), devido às aplicações da Matemática em várias outras ciências ou áreas.

Com relação à aprendizagem dos conteúdos matemáticos, Vianna (1995) defende que a HM pode colaborar para uma melhor compreensão destes. O autor afirma que “[...] o estudo da História e dos problemas teóricos e metodológicos a ela associados pode lançar alguma luz sobre o conhecimento deste conteúdo matemático” (p. 4).

Nesse mesmo sentido, Mendes, Fossa e Valdés (2006) defendem o uso da HM em sala de aula, através de uma abordagem “[...] centrada no uso de informações históricas como reorganizador cognitivo dos conteúdos previstos para o ensino fundamental e médio”, sendo esta utilização “[...] de suma importância para a formação matemática dos estudantes, bem como para a ampliação do desenvolvimento conceitual dos professores” (p. 13).

Assim, segundo D`Ambrósio (2009), conhecer o desenvolvimento histórico da Matemática “poderá, na melhor das hipóteses, e de fato faz isso, orientar no aprendizado e no desenvolvimento da matemática de hoje” (p. 30).

Portanto, diversos autores defendem que o processo de ensino e aprendizagem da Matemática pode ser enriquecido e melhorado através da integração da HM neste processo porque, dentre outros fatores:

- contribui para a compreensão dos conteúdos matemáticos (TZANAKIS e ARCAVI, 2000; VIANNA, 1995; MENDES, FOSSA e VALDÉS, 2006; MIGUEL e MIORIM, 2011; dentre outros);
- contribui para a motivação dos estudantes para a aprendizagem da Matemática (FAUVEL, 1991; VIANNA, 1995, FOSSA, 2006; D`AMBRÓSIO, 2009; dentre outros);
- contribui para a percepção da Matemática como criação humana (FAUVEL, 1991; TZANAKIS e ARCAVI, 2000; MIGUEL e MIORIM, 2011; dentre outros);
- contribui para a percepção da natureza da atividade matemática (FAUVEL, 1991; TZANAKIS e ARCAVI, 2000; MIGUEL e MIORIM, 2011; dentre outros);
- contribui para a percepção das conexões da Matemática com outras áreas do saber (TZANAKIS e ARCAVI, 2000; MIGUEL e MIORIM, 2011; dentre outros);
- contribui para a percepção de como as ideias matemáticas se desenvolveram, em cada contexto e em diferentes épocas, levando-se em consideração as necessidades humanas (FAUVEL, 1991; MIGUEL e MIORIM, 2011; dentre outros);
- possibilita a utilização de investigação histórica no ensino de Matemática (TZANAKIS E ARCAVI, 2000; MENDES, 2003; dentre outros);

- possibilita a organização da apresentação dos tópicos do currículo (FAUVEL, 1991; dentre outros);
- pode ajudar aos professores entenderem as dificuldades dos alunos (FAUVEL, 1991; VALDÉS, 2006);
- oferece oportunidades para o trabalho interdisciplinar (FAUVEL, 1991);
- aumenta o repertório didático dos professores (TZANAKIS e ARCAVI, 2000).

Com base nas informações apresentadas, podemos afirmar que a HM pode contribuir para o ensino de Matemática. Diante desse contexto, destacamos a relevância da realização de investigações que objetivem analisar a forma como a HM tem sido utilizada no ensino de Matemática.

Para Tzanakis e Arcavi (2000), uma das formas de se utilizar HM em sala de aula seria por meio da incorporação de informações históricas nos livros didáticos, dos mais variados níveis.

Miguel e Miorim (2011) afirmam que os textos destinados a expor informações históricas nos atuais livros didáticos brasileiros podem apresentar “[...] diferenciações na forma como tais informações são introduzidas bem como nos objetivos da introdução” (p. 58).

Destaca-se o fato de que, de acordo com Choppin (2004), os livros didáticos podem ser uma interessante fonte de pesquisa e o estudo deste material tem sido alvo de interesses dos pesquisadores.

Tendo em vista estas variadas formas de abordagem e os objetivos diferenciados de utilização da HM nos livros didáticos brasileiros, entendemos ser relevante uma análise da apresentação da HM nesse material didático.

Alguns estudos já foram realizados com o objetivo de analisar a HM presente nos livros didáticos de Matemática, dentre os quais destacamos Vianna (1995), Bianchi (2006) e Gomes (2008).

Carlos Roberto Vianna, em sua dissertação de mestrado intitulada “Matemática e História: Algumas relações e implicações pedagógicas”, defendida em 1995, se propôs a investigar como a HM era abordada em livros didáticos de variados níveis de ensino. Para tal proposta, o autor analisou uma coleção de livros didáticos de 5^a a 8^a séries do Ensino Fundamental, dois livros utilizados no Ensino Superior, duas coleções de livros paradidáticos, sendo cada uma com cinco volumes, e um livro sobre HM, fruto de uma tese de doutorado. Os materiais utilizados para análise compreendiam edições dos anos de 1990 a 1993. O autor utilizou quatro categorias para analisar a utilização da HM nos livros didáticos, a saber: motivação, informação, estratégia didática e parte integrante do desenvolvimento do conteúdo

(uso imbricado). Vianna concluiu que a história presente na maioria dos livros didáticos de matemática analisados não tem relação direta com o conteúdo que os alunos devem apreender, e que os usos didáticos da História da Matemática estavam limitados às questões de motivação ou informações adicionais, raramente incorporando-se o conhecimento histórico na elaboração de novas sequências ou estratégias didáticas. Além disto, apontou que havia uma forte tendência em incluir páginas ou pequenos trechos com elementos de HM nos livros didáticos. Estas situações, para ele, pouco ou nada contribui para a aprendizagem da Matemática.

Maria Isabel Zanutto Bianchi, em sua dissertação de mestrado intitulada “Uma reflexão sobre a presença da História da Matemática nos livros didáticos”, defendida em 2006, se propôs a investigar como a HM foi abordada em Livros Didáticos de 5^a a 8^a séries ao longo dos anos em que aconteceram as três avaliações do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) (1999, 2002 e 2005). A autora fez uma pré-avaliação dos livros, e, levando em consideração o volume de material que deveria analisar, escolheu duas coleções, recorrentes nos três ciclos de avaliação. Foram analisados os livros das coleções de Imenes e Lellis – Matemática e as coleções de Iracema e Dulce, Matemática, Idéias e Desafios. Para a autora, os prováveis estímulos à presença da HM em Livros Didáticos são: a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, as avaliações de Livros Didáticos pelo Ministério de Educação e Cultura – MEC por meio do Programa Nacional do Livro Didático – PNLD, e o fortalecimento da HM no Brasil como campo de pesquisa. Bianchi definiu categorias de análise para a parte teórica e para as atividades. Para a parte teórica, as categorias foram: Informação Geral, Informação Adicional, Estratégia Didática e Flash, e para as atividades: Informação, Estratégia Didática e Atividade sobre a História da Matemática. Bianchi concluiu que as duas coleções analisadas possuem um bom apelo à HM e que os Livros Didáticos procuram atender a demanda que os PCN indicam, embora tenha observado que as formas mais utilizadas pelos autores se enquadram nas categorias Informação Geral e Informação Adicional. Já a categoria denominada Estratégia Didática, considerada pelos especialistas como a mais interessante do ponto de vista do ensino aprendizagem, pouco aparece nos Livros Didáticos. Comparando livros analisados nos PNLD de 1999 e 2002, com os avaliados no PNLD 2005, Bianchi percebeu algumas mudanças de posições de fatos históricos ou complementação de outros, mostrando a preocupação de manter a História da Matemática definitivamente nos Livros Didáticos. Além disto, a autora ressalta que houve uma adaptação aos PCN tanto no que se refere ao uso da HM como no uso de jogos, da internet, calculadoras, etc.

Marcos Luis Gomes, em sua dissertação de mestrado, defendida em 2008, se propôs a pesquisar as práticas culturais de mobilização de histórias da Matemática em livros didáticos

destinados ao Ensino Médio. Para tal proposta, analisou 5 (cinco) das 11 (onze) coleções de livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio aprovadas pelo PNLEM 2005 e realizou entrevistas com os autores dessas coleções, com o objetivo de obter suas razões e argumentos que o levariam à mobilizarem a história em suas coleções de livros. Gomes chegou à conclusão que os autores entrevistados parecem se preocupar com a contextualização da matemática escolar, e que a HM pode auxiliar neste processo. O autor destacou, também, que alguns dos autores reconheceram a dificuldade em trabalhar com a HM e que o fizeram por ser uma exigência constante da ficha de avaliação do PNLD. Assim, segundo o autor, “[...] as práticas mobilizadoras de histórias da Matemática nos livros didáticos ainda estão longe de fazê-las participar de forma orgânica, esclarecedora, significativa e problematizadora da educação matemática escolar” (GOMES, 2008, p. 160).

Ressaltamos o fato de que estes estudos foram realizados há algum tempo. Com base nesta afirmação, nas informações apresentadas e considerando os resultados das pesquisas realizadas acerca da presença da HM nos livros didáticos, elaboramos a seguinte questão de investigação: *Qual a forma que a HM foi apresentada nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, aprovados pelo PNLD 2015?*

Neste sentido, a presente investigação foi realizada com o objetivo de analisar a História da Matemática nos livros de Matemática do Ensino Médio aprovados pelo PNLD 2015.

Com vistas a atingir este objetivo, elaboramos os seguintes objetivos específicos:

- Identificar os conteúdos matemáticos que são trabalhados utilizando a História da Matemática;
- Identificar as menções¹ à História da Matemática e mapeá-las com relação ao seu formato², na perspectiva de Tzanakis e Arcavi (2000);
- Analisar as funções didáticas desempenhadas pela História da Matemática presente nestes materiais.

Conforme já apontado, selecionamos para este estudo, os livros didáticos de Matemática do Ensino Médio aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático 2015 (PNLD 2015). Nesta edição do referido programa, foram aprovadas seis coleções de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, a saber: *Conexões com a Matemática*, de Fábio Martins de

¹ As menções à HM correspondem aos trechos retirados dos livros didáticos que entendemos que fazem referência à HM, tais como origem de algum conceito matemático, fatos da vida de algum estudioso da Matemática, desenvolvimento de conhecimentos matemáticos em outras áreas, etc.

² Ao analisar o formato de uma menção histórica, de acordo com Tzanakis e Arcavi (2000), devemos observar a exposição didática (texto expositivo ou uma atividade), o seu estilo (se aparece em destaque em relação ao texto principal) e o seu posicionamento no texto.

Leonardo; *Matemática: Contexto e aplicações*, de Luiz Roberto Dante; *Matemática: Paiva*, de Manoel Rodrigues Paiva; *Matemática: Ciência e aplicações*, de Gelson Iezzi e outros; *Matemática: Ensino Médio*, de Kátia Cristina Stocco Smole e Maria Ignez de Souza Vieira Diniz e *Novo Olhar: Matemática*, de Joamir Souza.

Destacamos o fato de que, neste estudo, realizamos a análise das coleções impressas, referentes à versão do aluno. Neste caso, não consideramos o Manual do Professor, nem o conteúdo multimídia.

Para a apresentação dos resultados desta investigação, estruturamos o presente texto em quatro capítulos. No primeiro capítulo expomos o campo de pesquisa História da Matemática e a utilização da HM no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, apontando alguns argumentos favoráveis e contrários a essa utilização e as possíveis formas de abordagem desta temática no ensino dos conteúdos matemáticos.

O segundo capítulo trata do Livro Didático e do PNLD. Apresentamos neste capítulo algumas considerações sobre o livro didático, tais como sua relevância e importância no contexto educacional, suas funções e sua utilização pelos professores. Apresentamos também algumas considerações acerca do PNLD.

O terceiro capítulo apresenta os aspectos metodológicos desta pesquisa. Neste, indicamos o *corpus* de análise, os procedimentos e caminhos percorridos para a realização da análise. Por fim, o quarto capítulo apresenta a análise das menções à HM identificadas nos livros didáticos.

A realização desta investigação possibilitou a elaboração de um minicurso³ acerca da História da Matemática em livros didáticos de Matemática do Ensino Médio aprovados pelo PNLD 2015. Este minicurso foi desenvolvido com licenciandos em Matemática e também mestrandos do curso de Educação em Ciências, ambos da UNIFEI. Este minicurso foi estruturado de modo a expor, inicialmente, uma revisão teórica sobre a utilização da HM em sala de aula. Posteriormente, foram apresentadas algumas menções a História da Matemática retiradas dos livros didáticos analisado e foram realizados questionamentos que possibilitavam aos participantes uma reflexão e discussão a respeito da abordagem da HM nestas atividades. Estes questionamentos foram elaborados com base na revisão teórica e nas categorias desenvolvidas nesta pesquisa. Desta forma, entendemos que os participantes do minicurso puderam ter um contato maior com a temática da utilização da história da Matemática no ensino de Matemática e com materiais disponíveis para a sua utilização.

³ Este minicurso se configura como o “produto final” desta investigação, e encontra-se no Apêndice C.

1. A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO PROPOSTA DIDÁTICA

Apresentamos neste capítulo algumas considerações acerca do campo de pesquisa História da Matemática e sobre a utilização da HM para o ensino de Matemática. Apontaremos argumentos favoráveis e contrários a essa utilização e as possíveis formas de abordagem desta temática no ensino dos conteúdos matemáticos.

Segundo Miguel e Miorim (2011) o movimento em torno da HM iniciou-se em meados dos anos de 1980, quando se percebeu um crescente interesse na inserção da história em textos voltados ao ensino de Matemática. Esse movimento, segundo os autores, surgiu em um momento de intensas críticas às propostas do Movimento da Matemática Moderna.

Embora as ações, individuais ou de grupos de pesquisa relacionados a temática HM tenham sido identificados, pelo menos, desde meados de 1980, segundo Miguel e Miorim (2011), pode-se afirmar que no Brasil esse movimento se intensificou“ [...] sobretudo, a partir da criação da Sociedade Brasileira de História da Matemática, (SBHMat) no III Seminário Nacional de História da Matemática, ocorrido em março de 1999, na cidade de Vitória (ES)” (p. 10).

O campo de pesquisa em torno da HM atualmente é bem amplo e diversificado. Segundo Miguel e Miorim (2011), pode-se identificar, em seu interior, a presença de variados campos de pesquisa autônomos, mas que têm, em comum, o interesse de natureza histórica, que estabelece múltiplas relações entre a História, a Matemática e a Educação. Dentre esses vários campos de pesquisa, destacam-se: “o da História da Matemática propriamente dita, o da História da Educação e o da História na Educação Matemática” (p. 11).

No âmbito do campo de pesquisa da História na Educação Matemática, inclui-se todos os estudos que tomam como objeto de investigação:

[...] os problemas relativos às inserções efetivas da história na formação inicial ou continuada de professores de Matemática; na formação matemática de estudantes de quaisquer níveis; em livros de Matemática destinados a ensino em qualquer nível e época; em programas ou propostas curriculares oficiais de ensino da Matemática; na investigação em Educação Matemática, etc. (MIGUEL e MIORIM, 2011, p. 11).

Tendo em vista os estudos de interesse do campo da História na Educação Matemática, pode-se afirmar, segundo Valdés (2006, p. 15), que “[...] existe um consenso quase unânime, entre os pesquisadores em educação matemática acerca da importância da perspectiva histórica e da sua fundamentação epistemológica na formação científica” dos estudantes.

Neste sentido, apresentamos a seguir os argumentos favoráveis à utilização da HM, bem como alguns entraves e fatores que dificultam a sua utilização.

1.1. Por que utilizar a HM no ensino de Matemática?

O processo de ensino e aprendizagem da Matemática enfrenta vários obstáculos. Dentre eles, podemos citar a falta de interesse dos alunos devido à forma como os conteúdos matemáticos são apresentados. Esta falta de interesse se deve, entre outros fatores, aos porquês relacionados a determinados conteúdos da Matemática, quando o aluno não consegue perceber qualquer utilidade para o assunto, e também à falta de esclarecimento acerca da origem e do porquê do formalismo matemático (MENDES, 2006).

Nesse sentido, Tzanakis e Arcavi (2000) expõem que a Matemática, muitas vezes, é vista como um conjunto de axiomas, teoremas, provas, enfim, como uma estrutura organizada de forma lógica. A apresentação da Matemática como essa organização lógica pode, por vezes, ser entendida como suficiente para a compreensão dos conteúdos matemáticos. Porém, atualmente na área de Educação Matemática entendemos que isto não é suficiente. Para Miguel e Miorim (2011), os defensores da utilização da História no processo de ensino-aprendizagem da Matemática entendem que a forma lógica através da qual a Matemática é apresentada ao aluno não reflete o modo como esse conhecimento foi produzido historicamente, e por isso, consideram que a História possibilitaria a desmistificação da Matemática, no sentido de combater a falsa ideia de que a Matemática é uma ciência pronta e acabada.

Nesse mesmo contexto, Brolezzi (1991) expõe que o distanciamento entre o modo como os conteúdos matemáticos são apresentados ao aluno e o seu desenvolvimento ao longo da História, acaba por reforçar a ideia de um falso imobilismo desta ciência.

Neste sentido, Nobre (1996) destaca “[...] a necessidade de que, ao transmitir um conteúdo, o professor deve estar ciente de que a forma acabada, na qual ele se encontra, passou por inúmeras modificações ao longo de sua história” (p. 30).

Assim, através do desenvolvimento histórico da Matemática, pode-se perceber que essa estrutura formal e lógica foi desenvolvida somente após esse conhecimento ter atingido a “maturidade” (TZANAKIS e ARCAVI, 2000).

Nesse sentido, de acordo com Mendes (2006), através da HM, podemos buscar a explicação de vários porquês, a partir do momento em que os aspectos históricos forem incorporados às atividades voltadas à investigação no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Ainda segundo o autor, a HM pode ser uma grande aliada, desde que as

informações históricas passem por adaptações pedagógicas, visando atender aos objetivos almejados. Apresentaremos mais informações sobre estas adaptações pedagógicas no item subsequente.

Assim, de acordo com Ferreira (1996),

[...] há um consenso geral entre os educadores de que a matemática tem que ser vista como uma ciência dinâmica, em construção pelos homens, seres sociais e históricos. Portanto esta ciência tem que ser apropriada pelos alunos, na sua formação como cidadãos, vivendo em momento histórico, mas reflexo cultural de toda história da humanidade construída durante séculos, de maneira participativa, conscientes de que eles também são construtores deste saber. Acredito que a história da matemática mostra a eles esta visão e esta responsabilidade (p. 6).

Nesta mesma perspectiva, Brolezzi (1991) afirma que, sendo a Matemática uma ciência, como qualquer outra, que se desenvolve ao longo do tempo, sendo, pois, não estática, e que possui uma história, faz-se necessário que seu ensino percorra outros caminhos que não o de definições, teoremas, demonstrações, enfim, caminhos que mostrem um desenvolvimento das ideias matemáticas.

Assim, é preciso “[...] resgatar o processo histórico da construção da base conceitual da matemática, para que o aluno possa compreender o significado desses conceitos e sua importância para o desenvolvimento de toda a matemática e suas conexões” (MENDES, 2006, p. 111).

Nesse mesmo contexto, Valdés (2006) expõe que o conhecimento histórico também nos proporciona compreender que a Matemática apresenta um desenvolvimento contínuo, sua conexão com as outras áreas do conhecimento, e seu surgimento pela necessidade de resolver problemas práticos, além de nos aproximar da história dos matemáticos, homens [e mulheres] que impulsionaram a Matemática ao longo de sua construção, cada qual com sua motivação.

Portanto, a perspectiva histórica nos proporciona a visão clara de que o conhecimento matemático “[...] trata de objetos culturais produzidos e utilizados em cada fase do desenvolvimento das sociedades espalhadas pelo planeta, ao longo dos anos” (MENDES, FOSSA E VALDÉS, 2006, p. 11).

Além disso,

[...] pelo estudo da matemática do passado, podemos perceber como a matemática de hoje insere-se na produção cultural humana e alcançar uma compreensão mais significativa de seu papel, de seus conceitos e de suas teorias, uma vez que a matemática do passado e a atual engendram-se e fundamentam-se mutuamente (MIGUEL e BRITO, 1996, p. 56).

Destacamos ainda, que “a perspectiva histórica nos aproxima da Matemática como ciência humana, não-endeuzada, às vezes penosamente rastejante e, em ocasiões falíveis, porém, capaz também de corrigir seus erros” (VALDÉS, 2006, p. 16).

Corroborando esta ideia, Tzanakis e Arcavi (2000) defendem que a HM poderá contribuir para uma visão acerca da natureza e da atividade matemática, visto que esta possibilita o entendimento de que os erros, as dúvidas, incertezas, controvérsias, são partes integrantes da atividade matemática, bem como a natureza evolutiva da Matemática, ou seja, a Matemática em constante desenvolvimento.

Assim, Mendes (2006) defende que a principal finalidade da utilização da HM como proposta didática seria a de permitir “[...] uma ressignificação do conhecimento matemático produzido pela sociedade ao longo dos tempos” (p. 84).

Da mesma forma, Miguel e Brito (1996) afirmam que, compreendendo a Matemática do passado, podemos perceber o papel da Matemática hoje na sociedade, “uma vez que a matemática do passado e a atual engendram-se e fundamentam-se mutuamente” (p. 56).

Nesse sentido, a HM contribui para a percepção da Matemática como um empreendimento cultural, e não simplesmente uma estrutura formal e rígida de resultados, “[...] mas um processo intelectual humano em constante evolução, fortemente ligado a outras ciências, à cultura e sociedade” (TZANAKIS e ARCAVI, 2000, p. 207, tradução nossa).

Além disto, a HM contribui para mostrar as conexões entre a matemática e outras disciplinas, que em um primeiro momento, podem parecer alheias. Nesse sentido, Tzanakis e Arcavi (2000) expõem que, através da HM, os alunos poderão perceber que, muitas vezes, os conhecimentos matemáticos são motivados e desenvolvidos por questões e problemas de outras disciplinas, que aparentemente não estão relacionadas com a Matemática.

Por outro lado, através de exemplos históricos, os alunos poderão perceber que o desenvolvimento da Matemática não foi impulsionado apenas por questões utilitárias, mas também foram motivados “[...] por questões estéticas, pela curiosidade intelectual, por desafio e prazer, para fins recreativos, etc” (TZANAKIS e ARCAVI, 2000, p. 207, tradução nossa).

Segundo Tzanakis e Arcavi (2000), a HM também possibilita ampliar o conhecimento da Matemática como um produto de outras culturas, e o papel que estas desempenharam no desenvolvimento da Matemática, e não apenas a Matemática como um produto apenas da cultura ocidental.

Dessa forma, com base nas informações expostas, podemos afirmar que a utilização da HM poderá contribuir para uma mudança de percepções equivocadas relativas a Matemática, tais como:

- Visão linear e acumulativa do desenvolvimento da matemática, que ignora as crises e reformulações profundas das teorias e dos conceitos.
- Visão aproblemática e ahistórica, que transmite conhecimentos já elaborados como fatos assumidos sem mostrar os problemas que geraram sua construção.
- Visão individualista, na qual o conhecimento matemático aparece como obra de gênios alienados, ignorando o papel do trabalho coletivo de gerações e de grupos de matemáticos.
- Visão elitista, que esconde a significação dos conhecimentos atrás do aparato matemático e apresenta o trabalho científico como um domínio reservado a minorias, especialmente dotadas.
- Visão descontextualizada socialmente neutra, alijada dos problemas do mundo e ignorando suas complexas interações com as outras ciências, a técnica e a sociedade. Proporciona uma imagem dos matemáticos fechados em ambientes e alheios à necessária tomada de decisão. (VALDÉS, 2006, p. 19).

Porém, Valdés (2006) entende que, mais que contribuir com a formação cultural, mostrando a Matemática como uma criação humana, as informações históricas devem contribuir para a formação matemática do aluno. Assim, a HM, por exemplo, poderá ser utilizada para facilitar a compreensão de conteúdos matemáticos considerados difíceis e de uma forma mais adequada.

Corroborando esta ideia, Brolezzi (1991) também apresenta como um dos principais aspectos para a utilização da HM em sala de aula a compreensão dos conteúdos matemáticos. Ele resume suas percepções em três itens, que são denominados como componentes principais do valor didático da HM, a saber: História da Matemática e a Lógica da Matemática em Construção; História da Matemática e Significado e História da Matemática e Visão da Totalidade.

Para compreendermos o componente “História da Matemática e a Lógica da Matemática em Construção”, é necessário entendermos, inicialmente, o conceito de Lógica utilizado pelo autor.

Segundo Brolezzi (1991), a lógica encontra-se intrinsecamente ligada à Matemática, e seu papel, assim como o da linguagem, é de alta relevância no ensino dessa disciplina. Ele apresenta três significados principais em torno do termo lógica, propostos por Bochenski:

[...] a lógica enquanto conjunto de leis do raciocínio silogístico, muitas vezes chamada de *Lógica Formal*; a lógica enquanto questionadora da própria validade dessas leis, que se pode chamar de *filosofia da lógica*; e a lógica enquanto aplicação das leis do raciocínio aos diversos campos do saber, que pode ser chamada, segundo Bochenski, de *metodologia*. (BROLEZZI, 1991, p. 44, grifo do autor).

Assim, por exemplo, a ciência formalizada é a ciência que se encontra em um estágio avançado de sistematização, ou seja, que está organizada segundo a Lógica Formal. Já se

considerarmos a ciência ainda em fase de construção, verificaremos outros tipos de relações lógicas que não a Formal (BROLEZZI, 1991).

Portanto, a ciência, ainda enquanto fase de construção, apresenta uma certa metodologia, um caminho, que poderia ser entendida como uma lógica natural, diferente da lógica apresentada pela ciência já sistematizada (BROLEZZI, 1991).

Através do conhecimento histórico podemos perceber a distinção entre a forma lógica inicial da Matemática em construção e sua posterior sistematização, representada pela Lógica Formal. (BROLEZZI, 1991).

Nesse sentido, Brolezzi (1991) defende que uma metodologia adequada para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática elementar deve considerar o processo de pensamento do aluno, que se utiliza de uma lógica natural, e não da Lógica Formal, o que acaba se tornando empecilho à aprendizagem dos alunos, se não for adequadamente abordada.

Portanto, a Lógica está sendo entendida por Brolezzi (1991), como metodologia, que, do grego, quer dizer “percorrer um caminho” (p. 44). Assim, para o autor, é relevante a compreensão da Matemática como ciência em construção, e “[...] não da Matemática pronta e sistematizada de acordo com a Lógica Formal” (p. 48). Além disso,

a visão da Matemática em construção é precisamente a que obtemos pelo estudo da História da Matemática, a qual surge assim como a grande fonte para a apreensão da organização lógica mais adequada ao ensino da Matemática, principalmente no nível elementar, onde os padrões lógico-formais estão ainda mais distantes dos alunos (BROLEZZI, 1991, p. 48).

Para isso, Brolezzi (1991) entende que o professor poderá fazer uso de todas as informações históricas, relevantes, acerca de determinado assunto, com o objetivo de mostrar ao aluno quando e quais circunstâncias levaram ao desenvolvimento daquele assunto, e, da mesma forma, o caminho, a metodologia, a lógica do surgimento e desenvolvimento de tal assunto.

Dessa forma, a História poderá mostrar “[...] como o formalismo surge naturalmente em resposta ao refinamento e precisão das ideias e, portanto, capacita o aluno para a compreensão do formalismo por fazer ele pensar e repensar conceitos matemáticos” (FOSSA, 2008, p. 13).

O professor poderá ainda, possibilitar aos alunos que reproduzam os passos da sequência de desenvolvimento, não sendo necessário contar toda a história tal e qual temos conhecimento (BROLEZZI, 1991). Nesse sentido, a HM se mostra importante porque “[...] nela se podem apreender *caminhos lógicos* para a construção de demonstrações pedagógicas em sala de aula” (p. 62, grifo do autor).

Já o item “História da Matemática e significado” diz respeito ao “[...] papel da História da Matemática como instrumento para a superação da dicotomia entre técnica e significado no ensino elementar na Matemática” (BROLEZZI, 1991, p. 43). Esta situação está relacionada à representação da Matemática em linguagem simbólica.

A Matemática é expressa por uma determinada linguagem simbólica, característica dessa ciência, que, assim como a lógica, desempenha um papel relevante no ensino dessa disciplina. A questão é saber lidar com essa linguagem, de modo que o aluno possa compreendê-la, em vez de tornar um empecilho ao seu aprendizado, e até mesmo um fator de desestímulo (BROLEZZI, 1991). Para o autor, um ensino significativo supõe um ensino motivador, e a falta de motivação pode ser decorrente da falta de compreensão do significado do conteúdo.

Ainda segundo Brolezzi, (1991), o ensino de Matemática elementar, em geral, tem priorizado a técnica de fazer cálculos, e deixado de lado a preocupação com a apreensão do significado dos cálculos pelos alunos. Para ele,

Acaba-se, assim, operando com símbolos matemáticos com pouco ou nenhum conhecimento do significado das operações realizadas. E muitas vezes a Matemática torna-se objeto de aversão por parte dos alunos do nível elementar, justamente pela dificuldade de compreensão de sua linguagem (BROLEZZI, 1991, p. 51).

Assim, a História poderia auxiliar na superação desta problemática, na visão de Brolezzi (1991). Corroborando esta ideia, Fossa (2008) enfatiza que “ao focar elementos pré-formais e, frequentemente, aplicados da matemática, a história leva o aluno a pensar sobre conceitos matemáticos sem a linguagem técnica que poderá ser uma barreira inicial ao seu entendimento” (p.13).

O item “História da Matemática e visão da totalidade” se refere ao valor didático da HM como forma de promover

[...] uma visão de totalidade do conhecimento matemático que é fundamental para uma melhor compreensão de certos aspectos que isoladamente parecem carecer de sentido, em particular no que se refere à questão das aplicações práticas do conteúdo da Matemática elementar (BROLEZZI, 1991, p. 43).

Em relação a esse valor didático da HM, o autor defende que a dificuldade dos alunos em lidar com a relação do conhecimento matemático e sua aplicação prática pode ser decorrente da falta de visão da totalidade do mesmo pelo aluno. Um exemplo dessa situação, de acordo com o autor, é que os alunos frequentemente questionam: “Para que serve isso?” (BROLEZZI,

1991, p. 57). Nesse sentido, o uso da HM se torna uma estratégia útil, podendo se configurar como uma grande fonte de exemplos práticos e de aplicação em vários níveis.

Essa falta de visão da totalidade é reforçada pela forma como o currículo do ensino elementar de Matemática é apresentado, com a divisão do conteúdo, que, embora necessária, visando a adequação da matéria ao tempo disponível e a outros fatores determinantes, dificulta a visão do conjunto a ser estudado (BROLEZZI, 1991). Assim, “privados de elementos de ligação entre os assuntos estudados, os alunos podem ter dificuldades em resolver problemas e aprender coisas novas que envolvam o recurso a vários tópicos de uma vez” (p. 57).

Brolezzi (1991) apresenta um exemplo que ilustra o seu argumento de visão da totalidade:

suponhamos que, ao invés de se assistir normalmente a um desenho animado, alguém tenha a idéia de olhar um por um os quadros estáticos que o compõem. Se, além disso, o fizesse lentamente, digamos olhando cinco ou seis quadros por semana, certamente teria grandes dificuldades para manter o interesse e sobretudo a compreensão da ação que se desenrolaria rapidamente, caso os quadros fossem mostrados em sequência, na velocidade apropriada ao processo de animação. [...] Essa imagem serve para nos dar uma certa idéia do que ocorre habitualmente no ensino de Matemática elementar. Em cada aula se trabalha com algum tópico de modo independente, e fica muito difícil para o aluno obter uma visão da Matemática como um todo articulado (p. 58).

Assim, para Brolezzi (1991), o conhecimento histórico torna-se essencial para se ter uma visão abrangente da Matemática elementar, sendo a mesma dificilmente adquirida sem esse recurso. Para o autor, o conhecimento do desenvolvimento da Matemática como um todo contribui para a visão da utilidade de cada tópico do currículo que “[...] transcende a sua possível aplicação prática imediata” (p. 59).

Assim como a HM contribui para a visão da totalidade pelos variados exemplos de aplicações práticas, segundo Brolezzi (1991) ela também contribui para a compreensão de que nem todos os tópicos apresentam aplicações práticas imediatas, pois facilita a compreensão de que o fato de o conteúdo estudado “[...] ter *significado* não é o mesmo que ter *aplicações práticas*” (p. 63, grifo do autor). Além disto, o autor reforça que “[...] a função insubstituível da História surge quando é preciso mostrar a Matemática a partir de uma certa distância, de modo que se compreenda o fato de que ela não é um conjunto de regras para resolver problemas práticos” (p. 58).

Dentro desse contexto, Brolezzi (1991, p. 58) afirma que “a própria idéia de que a Matemática tem história já por si só oferece uma perspectiva nova para o ensino da Matemática”. Com a HM, há a possibilidade de podermos nos recuar a uma certa distância para

obter uma visão ampla de todo o conteúdo, o que contribuirá para a compreensão “[...] da razão de ser de tópicos específicos da Matemática elementar” (p. 58).

Além de tudo o que foi exposto, o estudo da HM ainda poderá trazer contribuições para a ação docente, segundo Tzanakis e Arcavi (2000). Para os autores, com o estudo da história, bem como a reconstrução dos aspectos do desenvolvimento histórico de tópicos matemáticos específicos, de uma forma didática adequada, os professores poderão: a) identificar as motivações para o desenvolvimento de determinado conhecimento matemático, e ao trabalhar essas motivações poderão ajudar os alunos a compreender o assunto; b) conscientizar-se de que os obstáculos e dificuldades que apareceram no desenvolvimento da Matemática poderão ser as dificuldades dos alunos; c) conscientizar-se dos prós e contras de apresentar determinado conteúdo em um determinado nível de educação, levando-se em consideração de que, por mais simples que um assunto possa parecer, ele foi resultado de uma evolução gradual, e, de repente, os alunos não terão a maturidade necessária para compreender as questões ou problemas que levaram ao desenvolvimento deste assunto; e d) enriquecer seu repertório didático com explicações, exemplos e abordagens à luz da HM.

Destacamos, também, que alguns estudiosos entendem que a história da Matemática deve ser utilizada no ensino de Matemática para motivar o estudante. De acordo com Fossa (2008), “[...] a história tem sido tradicionalmente encarada como um apoio à motivação do aluno” (p. 07).

Exemplo desse aspecto de motivação atribuído à HM pode ser percebido pela presença de textos históricos na obra⁴ de Cecil Thiré⁵ e Mello e Souza⁶ analisada por Miguel e Miorim (2011). Estes autores detectaram a abordagem de

[...] temáticas históricas inovadoras, tais como a participação das mulheres em produções matemáticas, elementos sobre a história da Matemática e da educação matemática brasileira, o que nos parece positivo, uma vez que tais textos apontam para uma ampliação do tipo de história que participa do processo de ensino-aprendizagem da Matemática (p. 23).

⁴ Refere-se à obra: *Cecil Thiré e Mello e Souza. Mathematica, 1º anno. 1931.*

⁵ Cecil Thiré foi professor do Colégio Pedro II. Na Proposta Político Pedagógica de 1999 do Colégio Pedro II ele é citado no resumo histórico como um dos grandes professores da história daquela instituição. Trabalhou juntamente com o professor Mello e Souza e Euclides Roxo, em co-autorias de livros e outros trabalhos (MORALES e outros, 2003).

⁶ Julio Cesar de Mello e Souza foi professor do Colégio Pedro II e da Faculdade de Arquitetura, da Universidade do Brasil, atual Universidade Federal do Rio de Janeiro. Criou para si o pseudônimo Malba Tahan, através do qual publicou inúmeras obras entre as quais se destaca “O Homem que Calculava”. Como Julio César de Mello e Souza, escreveu alguns livros didáticos de matemática e o Dicionário Curioso e Recreativo da Matemática. Durante muitos anos o público acreditou que Julio Cesar e Malba Tahan fossem duas pessoas diferentes (PEREIRA NETO e outros, s/d).

Segundo Miguel e Miorim (2011), os autores da obra analisada justificaram a utilização de textos dessa natureza com a intenção de “[...] *despertar no jovem estudante o interesse*” (p. 23, grifo dos autores). Assim, a posição dos autores da obra se alinha à daqueles que atribuem à História a função de exercer um papel motivador no processo de ensino-aprendizagem da Matemática (MIGUEL e MIORIM, 2011).

A HM, segundo Tzanakis e Arcavi (2000), apresenta um vasto repertório de questões, problemas e situações que poderão ser utilizadas para motivar, despertar o interesse e envolver o aluno.

Da mesma forma, a HM, segundo Valdés (2006), atua como motivação para o aluno, uma vez que, através dos aspectos históricos, ele poderá conhecer a origem dos conceitos e ideias matemáticas.

Assim, segundo Tzanakis e Arcavi (2000), a HM desempenha um papel importante na medida em que contribui para o conhecimento das motivações que impulsionaram o desenvolvimento de certos conceitos ou ideias matemáticas.

Além disso, Vianna (1995) afirma que a HM “[...] pode ser usada para atrair a atenção das pessoas para a Matemática” (p. 26), e uma possibilidade para tal é apresentar a origem de determinados assuntos, ou citar nomes de matemáticos, apresentando as suas contribuições para o desenvolvimento da matemática, etc.

Nesta perspectiva, Fossa (2006) menciona que muitos alunos acham interessantes os tópicos de HM, e desta forma, esta poderá ser utilizada com a função de motivar o aluno, na apresentação dos conteúdos matemáticos.

Corroborando esta ideia, Vianna (1995) defende a utilização da HM como motivação, desde que tenha relação com o conteúdo que está sendo apresentado. Este autor expõe que “[...] pode-se buscar na história uma dificuldade enfrentada por algum matemático para resolver um determinado problema[...] ” (p. 121-122), e, assim, desta situação “[...] pode resultar uma motivação para começar uma unidade ou apresentar um problema atual”.

Miguel (1997), ainda, expõe sobre a utilização da HM como motivação, na forma de história-anedotário (quando fatos históricos são apresentados com função lúdica ou de recreação), vista como um momento de relaxamento, em contraponto aos momentos de aprendizagem dos conteúdos matemáticos, que exigem grande concentração dos estudantes.

Diante do exposto, podemos afirmar que a HM pode contribuir para despertar o interesse do aluno para o conteúdo a ser aprendido. De acordo com Miguel (1997), de forma ingênua acaba-se “[...] atribuindo à história um poder quase mágico de modificar a atitude do aluno em relação à matemática” (p.75).

D'Ambrósio (1996) alerta que, ao apresentar curiosidades para tentar motivar os alunos, corre-se o risco de que nem todos se interessarão. Corroborando esta ideia, Miguel (1993) afirma que “a história, podendo motivar, não necessariamente motiva, e não motiva a todos igualmente e da mesma forma” (p. 70)

Além disto, Miguel (1997), alerta que ao utilizar a HM somente com o intuito de motivar os estudantes por meio da apresentação de biografias e/ou “curiosidades”, a HM acaba sendo inserida de forma esporádica em sala de aula e não privilegia a aprendizagem dos conteúdos matemáticos em si. Neste sentido, Giardinetto (2000, p. 137), aponta que “embora seja importante a utilização da história da matemática da forma ilustrativa ou informativa, essa utilização pouco contribui para o entendimento da própria lógica dos conceitos”.

Considerando que a abordagem da HM como motivação apresenta limitações, Fossa (2008) afirma que há outras duas formas de utilização da HM em sala de aula que se apresentam mais eficazes, quais sejam: “[...] o uso da História da Matemática como um agente de formação cultural, em que a história aborda a matemática como parte do patrimônio cultural da humanidade”, e “[...] o uso da História da Matemática como um agente de formação cognitiva na sala de aula” (p. 07), ou seja, a HM contribuindo para a formação matemática do aluno.

Após esta explanação podemos afirmar que a HM pode contribuir para o processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Entretanto, é preciso enfatizar que alguns estudiosos levantam alguns entraves e fatores que dificultam a utilização da HM no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, levantando problemas e objeções quanto a essa utilização, que serão apresentados a seguir.

1.2. Fatores que dificultam a utilização da HM no ensino de Matemática

De acordo com o que foi exposto anteriormente, a utilização da HM no processo de ensino e aprendizagem da Matemática tem sido defendido por vários estudiosos. Porém, segundo Tzanakis e Arcavi (2000), alguns entraves e dificuldades são levantadas, desafiando a conveniência ou viabilidade desta integração.

Alguns argumentos questionadores quanto à utilização da HM no ensino de Matemática encontrados na literatura são apresentados por Miguel e Miorim (2011), e se devem: “[...] à ausência de literatura adequada, à natureza imprópria da literatura disponível, à história como um fator complicador, a ausência do sentido de progresso histórico” (p. 63). Ressaltamos que estes autores defendem a utilização da HM, e, após os argumentos questionadores, apresentam sua contra argumentação.

Quanto aos dois primeiros argumentos, a ausência de literatura adequada e a natureza imprópria da literatura disponível, que dificultam a utilização da HM pelo professor, Mendes (2006) enfatiza que isso pode estar relacionado com a ausência de “[...] uma história da matemática exclusivamente centrada no aspecto escolar da matemática” pois a HM tem sido escrita é “uma história da matemática feita pelos historiadores, preocupados com o contexto científico da matemática” (p. 97).

Miguel e Miorim (2011), embora concordem que este fato possa ser um empecilho, contra argumentam afirmando que essa situação deveria ser entendida como um

[...] apelo à necessidade de constituição de núcleos de pesquisa em história da matemática dos quais façam parte historiadores, matemáticos e educadores matemáticos e outros profissionais que possam contribuir para a elaboração de reconstituições esclarecedoras de épocas, temas, situações e biografias (p. 63).

Assim, para esses autores, tal dificuldade não deveria ser encarada como uma barreira intransponível às iniciativas de utilização da HM, mas sim como um estímulo à continuidade das investigações para viabilização dessa utilização.

Embora seja favorável à utilização da HM, Brolezzi (1991) também concorda com este argumento ao expor que a sua utilização não é tarefa trivial, pois “faltam [...] informações históricas adequadas ao ensino da Matemática elementar” (p. 01). E, por isso, “[...] há o perigo de se ficar na superficialidade de uma utilização de fatos da História da Matemática como meras curiosidades sem nenhuma implicação no tratamento dos conteúdos matemáticos em si” (p. 01).

Ainda com relação à ausência de literatura adequada e à natureza imprópria da literatura disponível, Miguel e Miorim (2011) propõem a constituição de histórias da Matemática pedagogicamente vetorizadas, que consistem em histórias da cultura matemática a serem escritas sob o ponto de vista do educador matemático, que seriam pedagogicamente convenientes e interessantes. Apresentaremos mais informações sobre estas adaptações pedagógicas no item subsequente.

A História, também, pode ser vista como um fator complicador para o ensino da Matemática, ou seja, a História ao invés de facilitar a aprendizagem, acabaria por complicá-la. Isso se deve ao fato de que o aluno, “[...] quando confrontado com os problemas originais e com as soluções que historicamente lhes foram dadas, despenderia um tempo e um esforço sem precedentes, tentando reconstituir um contexto que não lhe é familiar” (MIGUEL e MIORIM, 2011, p. 64).

Por outro lado, Miguel e Miorim (2011) acreditam que o tempo e a energia gastos pelo aluno poderiam ser recompensados pelo possível ganho em significado e criatividade, além de sentido para a atividade.

Outro argumento questionador da utilização pedagógica da HM é que há ausência do sentido de progresso histórico para o aluno, este é justificado pelo fato de as crianças possuírem pouco ou nenhum sentido de progresso histórico. No entanto, embora concordem que existe uma polêmica quanto ao momento certo de iniciação à História no período escolar, Miguel e Miorim (2011) defendem que este argumento não deve se constituir um fator impeditivo de introdução da “[...] construção do pensamento histórico ainda nas séries iniciais do Ensino Fundamental” (p. 67).

Além disso, há outros fatores que dificultam a utilização da HM no ensino de Matemática na Educação Básica. Um deles é a ausência da HM nos cursos de formação de professores de Matemática. Segundo D’Ambrósio (1996, p. 12), “nem todo professor teve um curso de história da matemática ou tem acesso a livros especializados”. Nesta mesma perspectiva, Silva (2001) aponta que “[...] nem sempre há uma preparação adequada dos professores na área de História da Matemática” (p.135).

Corroborando a esta informação, Miguel e Brito (1996) afirmam que, em sua formação, os futuros professores de matemática “[...] recebem pouca ou nenhuma informação histórica sobre as origens e o desenvolvimento das teorias que estudam ou sobre as motivações externas e internas que guiaram a criação e o desenvolvimento dessas teorias” (p. 50).

Uma vez apresentados os argumentos questionadores para a utilização da HM, e os contra-argumentos, apresentamos a seguir considerações sobre as possíveis formas de abordagem desta temática no ensino de Matemática. Ressaltamos que os estudiosos defendem que não é qualquer abordagem da HM que possibilita que sejam atingidos os objetivos expostos ao longo deste texto.

1.3. Formas de abordagem da HM no ensino de Matemática

Quanto às formas de abordagem da HM no ensino de Matemática, podemos afirmar que não existe um consenso de como utilizar a história nas aulas de Matemática. Há educadores que trabalham com documentos de fonte primária em sala de aula, e outros que fazem adaptações de antigos problemas para a realidade do aluno.

Porém, de acordo com Fossa (2006), a HM vem sendo apresentada, com frequência, apenas como curiosidade. Quanto a esse tipo de utilização, Vianna (1995) defende que as

informações históricas poderão ser utilizadas como curiosidade, desde que sejam bem exploradas. O autor expõe que estas informações podem ser utilizadas em exercícios, desde que sejam aproveitadas para a inserção de questionamentos como, por exemplo: “E hoje ainda é assim?” [...] “Você seria capaz de achar outra forma de fazer?”, “Será que esse método vale nessa outra situação? (e apresenta um novo problema), etc” (p. 122). Segundo este mesmo autor, essas observações parecem triviais, mas são raramente utilizadas.

No contexto dos livros didáticos, Mendes (2006) afirma que não encontramos com frequência a presença da HM nos livros utilizados no ensino dessa disciplina, tanto no nível fundamental quanto no nível médio. Para este autor, os livros apresentam, muitas vezes, algumas informações históricas que dizem respeito, geralmente, a figuras históricas e acontecimentos que, “[...] se constituem em algo meramente desnecessário à aquisição (geração/construção) de conhecimento matemático pelo estudante” (p. 84).

Fossa (2008) corrobora a esta ideia quando afirma que a HM tem sido apresentada nos textos de Matemática na forma de uma caixa, separada ou não do texto, às vezes na margem da página, outras vezes no final ou na seção de um capítulo, que consiste em um retrato de algum matemático ou desenho, seguido de algum texto explicativo. Destacamos que no capítulo 4, apresentaremos considerações relativas a presença da HM nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio aprovadas pelo PNLD 2015.

Um exemplo de menção à HM presente em um livro, apresentado por Fossa (2008), consiste em um retrato de René Descartes, acompanhado do texto: “René Descartes (1596-1650), matemático francês, criador da geometria analítica. Foi o maior expoente do racionalismo, propondo o uso de dúvida sistemática. Chegou ao resultado “penso, portanto, existo”, proposição que, para ele, é indubitável” (p. 08).

Podemos afirmar que a referida caixa, caso esteja presente no assunto Geometria Analítica, em nada está contribuindo para a aprendizagem deste assunto, e nem mesmo para o conhecimento de sua história. Para Fossa (2008), o texto apresenta só um fato ao aluno, e não muito fiel à história, visto que Descartes não é considerado o único precursor da Geometria Analítica. Além disso, apresenta ideias como “racionalismo” e “dúvida sistemática”, que serão pouco compreensíveis pelo aluno.

Ainda que essa forma de utilização da HM não seja a mais desejável, Fossa (2008) expõe que a caixa desempenha duas funções interessantes: 1) proporciona um primeiro contato do aluno com a HM, servindo como motivação para alguns, e contribuindo para a formação cultural dos mesmos. Esta contribuição, por menor que seja, poderá ser melhorada através do trabalho do professor, que pode apresentar explicações adicionais relevantes; 2) oferece

pequenos períodos de recreação ao aluno, aliviando o cansaço, visto que a aprendizagem da matemática requer bastante concentração, o que pode causar fadiga ao aluno.

Porém, ainda assim, trata-se de uma abordagem de pouca eficácia. Entretanto, o autor reforça que “[...] em vez de condenar o uso, por assim dizer, “encaixado” da HM, preferimos vê-lo como uma tentativa incipiente de aproveitar da mesma para fins pedagógicos” (FOSSA, 2008, p. 09).

Nesse mesmo sentido, Valdés (2006) expõe que o conhecimento histórico não deve ser exposto em forma de historietas ou anedotas, como forma de curiosidade, apenas para entreter o aluno. Este autor ainda reforça que “relacionar um nome e uma data com uma ideia, conceitos ou procedimentos não é suficiente” (p. 25).

Segundo Fossa (2006), a melhor forma de utilização da HM enquanto proposta didática ocorre de fato “[...] quando conceitos e problemas históricos são integrados na rotina diária da sala de aula e se tornam parte da experiência matemática do aluno” (p. 140).

Com relação à forma de utilização da HM, Miguel e Miorim (2011) não compartilham da ideia de “existência de uma única História da Matemática da qual se pudesse fazer uso e abuso e que devesse ser recortada e inserida homeopaticamente no ensino” (p. 156).

Nesse sentido, Miguel e Miorim (2011) propõem a constituição de histórias da Matemática pedagogicamente vetorizadas, que consistem em histórias da cultura matemática a serem escritas sob o ponto de vista do educador matemático, que seriam pedagogicamente convenientes e interessantes pois, para os autores,

[...] nem a História da Matemática escrita sob o ponto de vista do matemático profissional, nem as breves e episódicas referências conseguem realçar aqueles elementos e aspectos que poderiam, eventualmente, trazer uma real contribuição aos professores que têm a intenção de planejar as suas aulas de modo que a história venha a participar delas de um modo efetivo e orgânico (MIGUEL e MIORIM, 2011, p. 157).

Assim, para Miguel e Miorim (2011), histórias da Matemática pedagogicamente vetorizadas seriam constituídas para fins exclusivamente pedagógicos e articuladas com outros aspectos que influenciam no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Essas histórias não consistiriam em uma história distorcida, ou uma história suavizada, mas sim uma “[...] *história institucional da cultura matemática*” (p. 157, grifo dos autores). Desse modo, essas histórias seriam mais do que “histórias das ideias matemáticas propriamente ditas” (p. 159), seriam também “[...] histórias das diferentes culturas matemáticas que se constituíram em diferentes práticas sociais – e dentre elas, sobretudo, a prática social escolar” (p. 159).

Mendes (2006), também entende que as informações históricas devam passar por adaptações pedagógicas, visando atender aos objetivos almejados.

Um exemplo apresentado por Mendes (2006) dessa adaptação pedagógica voltada aos objetivos de ensino refere-se a uma história-narrativa sobre Ptolomeu e seus estudos sobre as cordas da circunferência. Para o autor, a principal finalidade da história-narrativa não se resume a apresentar informações históricas apenas, mas “[...] fazer com que os estudantes percebam, nas informações apresentadas, o caráter investigatório presente nessa narrativa [...]”. Assim, através desta investigação, espera-se que os alunos possam “[...] (re) formular as relações matemáticas que justificam o surgimento das razões trigonométricas a partir da exploração de certas propriedades matemáticas [...]”. Estas propriedades matemáticas dizem respeito à “[...] semelhança de triângulos, paralelismo, proporcionalidade entre outros princípios geométricos que conduzem à noção de seno de um ângulo como a razão entre o cateto oposto a um ângulo agudo e a hipotenusa do triângulo retângulo” (MENDES, 2006, p. 104).

Nesse sentido, de acordo com Mendes (2006), a HM, desde que adaptada pedagogicamente para sua utilização em sala de aula, poderá contribuir para a busca da explicação de vários porquês, a partir do momento em que os aspectos históricos forem incorporados às atividades voltadas à investigação no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Para este autor, “o princípio que articula as atividades de ensino-aprendizagem via história da matemática é a investigação [...]” (MENDES, 2006, p. 100). Este autor entende que os alunos “[...] podem vivenciar experiências manipulativas resgatadas das informações históricas, com vistas a desenvolver o seu espírito investigativo, sua curiosidade científica e suas habilidades matemáticas, de modo a alcançar sua autonomia intelectual [...]” (MENDES, 2006, p. 87).

Nesse contexto, Fossa (2008) defende que, ao propor atividades estruturadas à luz da HM, o professor proporcionará uma experiência mais rica ao aluno. Desta forma, o aluno estará na posição de um pesquisador de Matemática, frente a problemas reais que os matemáticos enfrentavam. Assim, o aluno poderá se julgar participante no desenvolvimento da Matemática, o que poderá aumentar seu interesse pelo estudo.

Assim, Mendes (2003) acredita que

[...] os aspectos históricos, quando incorporados as atividades de ensino-aprendizagem, apresentam um caráter mais construtivo e útil à aprendizagem dos tópicos matemáticos e isso faz com que os estudantes percebam o caráter investigatório presente na geração, organização e disseminação desses tópicos ao longo do seu desenvolvimento histórico (p. 2).

Além do fato de que a utilização da HM poderá motivar e incentivar a criatividade cognitiva do aluno perante as atividades em sala de aula, Mendes (2006) acredita, ainda, que esta poderá ser um agente de ruptura com o modo tradicional de como a Matemática vem sendo ensinada.

Brolezzi (1991) sugere algumas abordagens de utilização da HM, de forma que o “[...] próprio conteúdo seja influenciado pelo uso da História da Matemática em sala de aula” (p. 01). Para o autor, a utilização da HM não pode se resumir à função de ilustração, como por exemplo, histórias que divirtam, e nem tampouco acrescentar referências históricas no currículo que não contribuam para a compreensão do conteúdo matemático.

Nesse sentido, Brolezzi (1991) apresenta um exemplo de utilização da HM para o ensino de Matemática, que seria a apresentação aos alunos de um episódio da infância de Gauss. Para tal, basta um pequeno fato narrado de forma simples, que apresente a lógica utilizada por Gauss, que culminou na fórmula da soma da Progressão Aritmética. O importante é o professor diferenciar a informação fundamental a ser buscada na HM, daquelas que são apenas complementares. Assim, essa anedota poderia tornar-se menos útil se no caso não fizesse referência ao modo de raciocínio utilizado por Gauss, observando que a soma do primeiro termo com o último era a mesma do segundo com o penúltimo, e assim por diante. Assim, o processo de obtenção da fórmula da soma da Progressão Aritmética fica mais razoável se o professor utilizar a mesma sequência lógica atribuída a Gauss (BROLEZZI, 1991).

Nessa perspectiva, a utilização a HM no ensino dessa disciplina não pode ficar reduzida a simplesmente contar histórias: “[...] é necessário captar a forma de pensar, a lógica da construção matemática” (BROLEZZI, 1991, p. 05).

Já a contribuição da HM para imprimir maior significado aos conteúdos matemáticos é apresentada por Brolezzi (1991) através de duas situações de menção à HM que ilustra este tipo de abordagem: a história da Noção de Número e o surgimento da Geometria no Egito.

Com relação à história da Noção de Número, Brolezzi (1991) cita a questão da crise da Escola Pitagórica perante aos incomensuráveis, devido à dificuldade da apreensão do significado destes. A incorporação dos incomensuráveis fez alterar o significado de Número. Assim, segundo o autor, da mesma forma que os matemáticos enfrentaram dificuldades na compreensão desse assunto, os alunos provavelmente também enfrentarão. Nesse caso, compreender o desenvolvimento “[...] dos significados ao longo da História é fundamental para a elaboração de um ensino com significado, pois permite que se construam novamente os significados junto com os alunos” (p. 52).

Quanto ao surgimento da Geometria no Egito, Brolezzi (1991) expõe que não há necessidade de contar a história do Egito, expondo a forma como “[...] o conhecimento das trincas pitagóricas esteve presente na construção das pirâmides e nas demarcações de terras inundadas pelas cheias do Nilo” (p. 56). O importante, para ele, é a compreensão de que a Geometria começou a se desenvolver pela observação de objetos reais, e não pela forma axiomática pela qual se apresenta hoje. Ou seja, é relevante enfatizar que a formalização foi posterior ao trabalho com objetos reais, formas visíveis, palpáveis.

Para o autor, é essa a verdadeira lógica que contribuirá para dar significado ao ensino de Geometria, evitando, assim, riscos de uma formalização prematura, que poderia dificultar a compreensão do aluno.

Há ainda um exemplo apresentado por Nobre (1996), que diz respeito à compreensão do conceito de “infinito”. Segundo este autor, os assuntos ligados a este conceito “são, com certeza, os mais importantes e instigantes em toda a história do desenvolvimento da matemática” (p.32). Assim, para Nobre (1996), os professores poderão lançar mão de vários problemas históricos referentes a este conceito para serem utilizados em sala de aula. Neste contexto, Nobre (1996) expõe que o Paradoxo de Zenão é um dos elementos históricos importantes nesta temática para ser abordado em sala de aula.

O importante, para Brolezzi (1991) é que o professor busque na História não somente o relato do acontecimento, mas informações relevantes que contribuam para uma abordagem do conteúdo que consiga transmitir o significado daquilo que se pretende ensinar.

Além disto, Brolezzi (1991), enfatiza que utilizar a HM não quer dizer necessariamente que o professor deve contar a história aos alunos. Para ele, uma possibilidade seria estruturar o conteúdo a ser ensinado de acordo com o seu desenvolvimento histórico. Dessa forma, o ensino da Matemática, ao ser planejado dessa maneira, seria mais significativo, pois estaria baseado em uma lógica mais natural, portanto, mais acessível aos alunos, o que acabaria por possibilitar-lhes uma visão da totalidade do conhecimento matemático que deve ser adquirido.

Corroborando esta ideia, Giardinetto (2000) expõe que não se trata apenas de reproduzir a história, mas de “[...] buscar na história, os elementos necessários para a elaboração de sequências lógicas de ensino, de forma que essas sequências reflitam a história quanto a lógica intrínseca que rege a evolução dos conceitos” (p. 137).

Desta forma, “é preciso promover profundas reflexões quanto à relação entre a história da matemática e seu ensino de maneira que os procedimentos de ensino reflitam a riqueza e dinamicidade encontrada na história” (GIARDINETTO, 2000, p. 137).

Diante do exposto, podemos afirmar que a HM, quando utilizada de forma adequada, poderá trazer contribuições significativas ao processo de aprendizagem da Matemática.

Acreditamos que o material didático adotado pela escola poderá ser um indicador de utilização da HM em sala de aula, não descartando, em hipótese alguma, o trabalho do professor, e os materiais por ele utilizados que não apenas o livro didático fornecido pela escola.

Com base nestas informações, nos dedicamos a analisar a forma que a HM está inserida nos livros didáticos de Matemática, do Ensino Médio, aprovados no PNLD 2015. Para tanto, inicialmente, no próximo capítulo, apresentaremos considerações acerca do livro didático e do PNLD.

2. O LIVRO DIDÁTICO E O PNLD

O presente capítulo tem o intuito de apresentar algumas considerações acerca do livro didático, tais como sua relevância e importância no contexto educacional, suas funções e sua utilização pelos professores. Apresentamos também algumas considerações acerca do PNLD, a partir de um breve histórico do Programa.

2.1. Considerações sobre o livro didático

Entendemos o livro didático na mesma perspectiva de Lajolo (1996), que define o livro didático como “[...] o livro que vai ser utilizado em aulas e cursos, que provavelmente foi escrito, editado, vendido e comprado, tendo em vista essa utilização escolar e sistemática” (p. 4).

O livro didático é um importante recurso pedagógico utilizado por professores e alunos, e muito presente no contexto escolar. Segundo Díaz (2011), o livro didático é um recurso pedagógico que vem sendo utilizado por um longo período de tempo e, ainda hoje, ocupa um lugar privilegiado nos processos de ensino e aprendizagem.

Na mesma perspectiva, Bittencourt (2004) defende que o livro didático, embora seja vítima de polêmicas e críticas de estudiosos, ainda pode ser considerado um instrumento fundamental no processo de ensino e aprendizagem.

O livro didático é “[...] uma forma de sistematização dos conteúdos a serem trabalhados em sala de aula” (BARRETO e MONTEIRO, 2008, p. 02). Corroborando esta ideia, Silva (2010, p. 76) afirma que “os livros didáticos definem-se como um modelo padrão de organização e sistematização dos currículos, das orientações didáticas e das principais concepções pedagógicas no dado momento”.

Além de se apresentar uma organização possível dos conteúdos a serem ensinados, o livro didático é importante na prática pedagógica por, também, se configurar como um suporte, seja teórico ou prático, para o aluno, e um recurso de apoio para o professor (BARRETO e MONTEIRO, 2008).

Os livros didáticos, em geral, apresentam textos informativos, seguidos de exercícios e atividades. Nesse sentido, é esperado que a aprendizagem do aluno seja possível, através da leitura e interpretação dos textos informativos, ilustrações, diagramas e tabelas, relativos ao conteúdo a ser estudado, seguido da realização dos exercícios e atividades propostas (LAJOLO, 1996).

Dessa forma, o livro didático é um instrumento específico para uso no processo de ensino e aprendizagem formal, de maneira sistemática, geralmente em disciplinas escolares, e para o aprendizado coletivo, com a orientação de um professor (LAJOLO, 1996). O livro didático, no caso da sala de aula brasileira, não pode ser substituído nas atividades escolares nem pela palavra do professor, nem pelos modernos recursos tecnológicos de comunicação, na visão de Romanatto (2004, p. 4), pois “[...] este acumula várias funções, como, por exemplo, a de ser instrumento de intercâmbio e inter-relação social, permitindo a comunicação no tempo e no espaço, assim como constitui vasta fonte de informações”.

Barreto e Monteiro (2008) afirmam que o livro didático, sem dúvidas, pode se tornar um aliado para professores que trabalham com variadas séries, e precisam ministrar muitas aulas, porque “[...] funciona como instrumento de organização da aprendizagem dos vários alunos, pode ser adaptado aos diferentes perfis das turmas e, ao mesmo tempo, ser uma forma de manter os ritmos individualizados de cada grupo” (p. 3).

Em uma pesquisa realizada com 180 professores de Ciências de escolas públicas do Ensino Fundamental de Campinas-SP pelo Grupo FORMAR-Ciências, da Faculdade de Educação da Unicamp, que abrangia a concepção de professores sobre o livro didático e seu papel no ensino de Ciências, foram detectados os diferentes tipos de usos do livro didático pelos professores. Os dados foram agrupados em três grupos. No primeiro grupo, os professores indicaram o uso simultâneo de vários livros didáticos para o planejamento de aulas anuais e para a preparação de cada aula. No segundo grupo, os professores afirmaram que utilizam o livro didático como apoio na sala de aula e também em atividades extraescolares, para a leitura de textos, realização de exercícios e outras atividades, e, ainda, como fonte de imagens, como fotos, desenhos, gráficos, mapas, etc., para os estudos escolares dos alunos. No terceiro grupo, o livro didático é utilizado como fonte bibliográfica, tanto para a aprendizagem dos alunos em atividades extraescolares, quanto para a complementação de conhecimentos do professor (MEGID NETO e FRACALANZA, 2003).

O livro didático pode ser decisivo para a qualidade da aprendizagem, embora não seja o único material utilizado por professores e alunos no processo de ensino e aprendizagem (LAJOLO, 1996). Porém, no Brasil, em muitas situações, devido à precariedade de recursos, a importância e utilização do livro didático tornam-se marcantes, e por vezes, é o livro didático que determina os conteúdos a serem ensinados, ou seja, o livro didático determina, “[...] de forma decisiva, o *que* se ensina e *como* se ensina o que se ensina” (LAJOLO, 1996, p. 4, grifo do autor). Nesta perspectiva, Díaz (2011) expõe que, em muitas situações, o livro didático

representa para os professores um organizador eficiente dos conhecimentos escolares, determinando o que deve ser ensinado.

Embora possa ser utilizado da forma exposta acima por Díaz (2011), entendemos que o livro didático não se reduz a um guia ou a uma organização sistemática do conteúdo para o professor, e, conforme salienta Silva (2010), ele representa um importante recurso para complementação de conhecimentos do professor, tanto de conhecimentos específicos referentes a disciplina escolar, como de propostas metodológicas para o ensino. Assim, o livro didático tem lugar de destaque na prática pedagógica, uma vez que exerce uma função significativa na atividade docente diária, ao ser utilizado pelo professor para o planejamento das ações didáticas e curriculares que serão desenvolvidas em suas aulas (DÍAZ, 2011).

Porém, caberá ao professor adotar uma postura crítica diante do livro didático, já que cabe a ele a competência de escolher e utilizar o livro, e, portanto, precisa estar apto a realizar essas tarefas (ROMANATTO, 2004). Nesse sentido, alguns aspectos importantes devem ser observados ao escolher/utilizar o livro didático, como

- a) servir de recurso de atualização; b) atender às necessidades e interesses do aluno; c) auxiliar o professor e o aluno a atingirem os objetivos educacionais na formação de conhecimentos, competências e atitudes; d) contribuir para a formação de hábitos de crítica reflexiva (espírito crítico do aluno) e e) estar adequado ao projeto educativo da escola, portanto, articulado ao trabalho do professor (ROMANATTO, 2004, p. 5).

Contudo, a função desempenhada pelo livro didático, assim como qualquer outro recurso pedagógico, dependerá da forma que o professor o utilizará. Dependendo da forma como é utilizado, “[...] ele poderá ser um auxiliar inestimável do professor ou se transformar num mestre intolerável” (DANTE, 1996, p. 83).

Especificamente com relação ao livro didático de Matemática, Dante (1996), afirma que, quando bem utilizado, o livro didático exerce um papel fundamental no processo de ensino e aprendizagem, pois,

- a) em geral, só a aula do professor não consegue fornecer todos os elementos necessários para a aprendizagem do aluno, uma parte deles como problemas, atividades e exercícios pode ser coberta recorrendo-se ao livro didático;
- b) o professor tem muitos alunos, afazeres e atividades extra-curriculares que o impedem de planejar e escrever textos, problemas interessantes e questões desafiadoras, sem ajuda do livro didático;
- c) a matemática é essencialmente sequencial, um assunto depende do outro, e o livro didático fornece uma ajuda útil para essa abordagem;
- d) para professores com formação insuficiente em matemática, um livro didático correto e com enfoque adequado pode ajudar a suprir essa deficiência;
- e) muitas escolas são limitadas em recursos como bibliotecas, materiais pedagógicos, equipamento de duplicação, vídeos, computadores, de modo que o livro didático constitui o básico, senão o único recurso didático do professor;

- f) a aprendizagem da matemática depende do domínio de conceitos e habilidades. O aluno pode melhorar esse domínio resolvendo os problemas, executando as atividades e os exercícios sugeridos pelo livro didático;
- g) o livro didático de matemática é tão necessário quanto um dicionário ou uma enciclopédia, pois ele contém definições, propriedades, tabelas e explicações, cujas referências são frequentemente feitas pelo professor (DANTE, 1996, p. 83-84).

Nesse sentido, de acordo com Dante (1996), o livro didático de Matemática tem e continuará tendo, devido “[...] a sua própria especificidade, [...] uma forte influência no trabalho diário de sala de aula” (p. 83). Para este autor, por esta razão, há a necessidade de melhorias na qualidade do livro didático e de orientação aos professores em como utilizá-los adequadamente.

Diante do que foi exposto, podemos afirmar que há um consenso que o livro didático, embora possa não ser o único recurso utilizado por professores e alunos, ainda ocupa um lugar de destaque no contexto educacional.

Assim, os livros didáticos podem ser uma interessante fonte de pesquisa aos educadores e, de acordo com Díaz (2011), têm sido objeto de pesquisa de interesse dos pesquisadores devido a sua relevância como recurso pedagógico no contexto educacional, e aos complexos aspectos que envolvem sua presença e utilização nesse contexto.

Além do fato de sua presença marcante em sala de aula, Choppin (2004) afirma, em um artigo a respeito da pesquisa sobre o livro didático, que outro motivo para esse interesse é a “[...] onipresença - real ou bastante desejável - de livros didáticos pelo mundo e, portanto, o peso considerável que o setor escolar assume na economia editorial nesses dois últimos séculos” (p. 551). Para ele, não há como desconsiderar este fato, pois, por exemplo, no Brasil, no ano de 1996, a atividade editorial referente aos livros didáticos correspondeu a 61% da produção editorial nacional.

Nessa perspectiva, as pesquisas sobre o livro didático, segundo Bittencourt (2004), envolvem ainda discussões a respeito produção editorial nacional, dada sua importância econômica neste setor, bem como ao papel do Estado como controlador e como consumidor dessa produção.

Com relação aos fatores que despertam interesse dos pesquisadores, Bittencourt (2004) expõe que o livro didático é pesquisado “[...] enquanto produto cultural; como mercadoria ligada ao mundo editorial e dentro da lógica de mercado capitalista; como suporte de conhecimentos e de métodos de ensino das diversas disciplinas e matérias escolares; e, ainda, como veículo de valores, ideológicos ou culturais” (p. 01).

Segundo Choppin (2004), o estudo histórico dos livros didáticos mostra que estes

assumem múltiplas funções, dentre as quais, quatro consideradas essenciais: função referencial, função instrumental, função ideológica e cultural e função documental. O autor destaca que essas funções “[...] podem variar consideravelmente segundo o ambiente sociocultural, a época, as disciplinas, os níveis de ensino, os métodos e as formas de utilização” (p. 553).

Concordando com esta afirmação, Bittencourt (2004, p. 1), afirma que o livro didático pode assumir funções diferentes, “[...] dependendo das condições, do lugar e do momento em que é produzido e utilizado nas diferentes situações escolares”.

A função referencial do livro didático se deve a este material representar o conjunto de conteúdos ou conhecimentos, técnicas ou habilidades que a sociedade, em determinado contexto e tempo, “[...] acredita que seja necessário transmitir às novas gerações” (CHOPPIN, 2004, p. 553).

A função instrumental diz respeito aos métodos de aprendizagem contidos no livro didático, traduzidos através dos tipos de atividades ou exercícios propostos para facilitação da memorização do conteúdo, do favorecimento para aquisição de competências e habilidades, das técnicas de resolução de problemas, etc (CHOPPIN, 2004).

Já a função ideológica e cultural, segundo Choppin (2004, p. 553),

[...] é a função mais antiga. A partir do século XIX, com a constituição dos estados nacionais e com o desenvolvimento, nesse contexto, dos principais sistemas educativos, o livro didático se afirmou como um dos vetores essenciais da língua, da cultura e dos valores das classes dirigentes.

Nesse sentido, o livro didático, segundo o autor, através da função ideológica e cultural, serve para aculturar, e às vezes doutrinar as futuras gerações, podendo essa influência ser exercida de forma explícita ou implícita.

A função documental, segundo Choppin (2004) é recente na literatura escolar, sendo mais facilmente encontrada no contexto pedagógico, na qual o foco está no desenvolvimento da autonomia pelo aluno, ou seja, de sua iniciativa pessoal. Nesse sentido, através dessa função,

[...] acredita-se que o livro didático pode fornecer, sem que sua leitura seja dirigida, um conjunto de documentos, textuais ou icônicos, cuja observação ou confrontação podem vir a desenvolver o espírito crítico do aluno (p. 553).

Choppin (2004) apresenta duas tendências das análises realizadas em livros didáticos. Segundo o autor,

a análise científica dos conteúdos⁷ é marcada por duas grandes tendências: a primeira, por muito tempo privilegiada pelos pesquisadores e que continua ainda na atualidade, refere-se à crítica ideológica e cultural dos livros

⁷ O termo análise científica dos conteúdos está sendo entendida como a análise dos conteúdos presentes nos livros didáticos, e não como a metodologia de análise conhecida como Análise de Conteúdo.

didáticos; a segunda, mais recente, mas que tem sido cada vez mais considerada desde o final dos anos 1970, analisa o conteúdo dos livros didáticos segundo uma perspectiva epistemológica ou propriamente didática (p. 555).

Bittencourt (2004) corrobora a esta informação, quando expõe que na década de 1960 iniciaram-se a realização de trabalhos com o intuito de analisar os conteúdos dos livros didáticos dando ênfase ao caráter ideológico do conteúdo, e que essa abordagem ainda tem um lugar de destaque nas pesquisas.

De acordo com Choppin (2004), a partir de 1970, se iniciou a análise dos conteúdos segundo a perspectiva epistemológica ou propriamente didática. Os pesquisadores, em virtude das dificuldades sofridas pelos sistemas educativos ocidentais, começam a se questionar sobre

[...] as finalidades do ensino, sobre seus conteúdos e métodos e, entre outras coisas, a colocarem aos antigos manuais escolares questões de natureza epistemológica e didática propriamente dita: qual (s) discurso os manuais sustentam sobre determinada disciplina e sobre seu ensino? Qual (s) concepção (s) de história, qual (s) teoria (s) científica (s) ou qual (s) doutrina (s) lingüística (s) representam ou privilegiam? Qual o papel que atribuem à disciplina? Que escolhas são efetuadas entre os conhecimentos? Quais são os conhecimentos fundamentais? Como eles são expostos, organizados? Quais métodos de aprendizagem (indutivo, expositivo, dedutivo, etc.) são apresentados nos manuais?” (p. 558).

Complementando a ideia acima, Bittencourt (2004) também expõe que, paralelamente à temática de análise dos conteúdos, surgiram outras temáticas, como as relações entre as políticas públicas e a produção editorial, evidenciando o papel do Estado de controle da produção.

Levando-se em consideração as duas tendências de pesquisa apresentadas por Choppin (2004), pode-se afirmar que a análise do conteúdo ideológico e cultural é realizada, de modo geral, sobre livros didáticos de conteúdos mais gerais, que não os de disciplinas específicas, ao passo que a análise epistemológica e didática é realizada em materiais de disciplinas específicas, que possuem “[...] suas próprias finalidades, seus conteúdos de ensino e seus métodos de aprendizagem específicos” (p.558). O autor ainda enfatiza que “[...] as disciplinas de maior destaque no ensino secundário [...] têm sido objeto de trabalhos cada vez mais numerosos” (p. 558).

Nesse sentido, parece-nos que a concepção relativa à análise epistemológica e didática, apresentada pelo autor, aproxima-se bastante do trabalho que estamos realizando, uma vez que será investigada a presença da História da Matemática nos livros didáticos de Matemática aprovados pelo PNL 2015.

Além disso, segundo Choppin (2004), nos últimos vinte anos, tem aumentado o número de trabalhos dedicados à pesquisa sobre a história da política nacional para o livro didático. Segundo Barreto e Monteiro (2008), esse fato tem estimulado o interesse de pesquisadores também pela qualidade do livro didático. Ainda nessa perspectiva, Megid Neto e Fracalanza (2003) afirmam que há pelo menos duas décadas que pesquisadores acadêmicos vêm se dedicando a investigar a qualidade dos livros didáticos, “[...] denunciando suas deficiências e apontando soluções para melhoria de sua qualidade” (p. 147).

No Brasil, o Ministério da Educação (MEC) tem promovido programas de melhoria da qualidade do livro didático e de distribuição ampla para os estudantes de escolas públicas desde a década de 1930 (MEGID NETO e FRACALANZA, 2003). Esta avaliação do material didático a ser ofertado aos estudantes tem por objetivo “[...] amenizar, de alguma forma, lacunas no sistema educacional brasileiro” (BARRETO e MONTEIRO, 2008, p. 4). Um destes programas é o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) do qual, a seguir, teceremos considerações.

2.2. O Programa Nacional do Livro Didático

A política nacional para o livro didático no Brasil denomina-se Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). O PNLD é um programa governamental, desenvolvido pela Secretaria de Educação Básica (SEB) e executado pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), ambos vinculados ao Ministério da Educação (MEC).

O programa tem por finalidade avaliar e distribuir livros didáticos, obras literárias, obras complementares e dicionários aos alunos e professores dos ensinos fundamental e médio das escolas públicas federais e as que integram as redes de ensino estaduais, municipais e do Distrito Federal, participantes do PNLD. Este programa, de acordo com Bittencourt (2004), devido aos investimentos aplicados pelas políticas públicas nos últimos anos, se transformou no “[...] maior programa de livro didático do mundo” (p. 01).

Segundo Romanatto (2004), pode-se inferir que a partir das avaliações dos livros didáticos pelo MEC, têm-se percebido melhorias na qualidade desses livros.

O PNLD é realizado em ciclos trienais alternados. Dessa forma, a cada ano, o PNLD é executado para um determinado nível de ensino, quais sejam: anos iniciais do Ensino Fundamental, anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

A execução do programa é iniciada pela abertura de Edital pelo MEC, que tem por objetivo a convocação de editores para o processo de inscrição, contendo condições e especificações para a avaliação das obras.

Após as inscrições, as coleções são avaliadas por especialistas, conforme itens constantes do Edital do MEC, e a partir desta avaliação, é construído o Guia de Livros Didáticos, que trata de uma resenha dos avaliadores, para cada componente curricular, servindo de referência para que os professores possam escolher a coleção mais apropriada às propostas pedagógicas de suas escolas. Desta forma, os livros aprovados pelo PNLD são aqueles que serão utilizados nas escolas públicas brasileiras.

Segundo o Guia de Livros Didáticos PNLD 2015 - Matemática,

O PNLD tem como um de seus princípios básicos conferir ao docente a tarefa de escolher o livro que, em sintonia com o projeto pedagógico de sua escola, será usado por seus alunos. Portanto, essa é mais uma das importantes funções que o docente é periodicamente chamado a realizar (BRASIL, 2014, p. 10).

O PNLD já realizou quatro edições de avaliação das obras do Ensino Médio para o componente curricular Matemática, sendo o PNLD 2015 a quarta edição. As edições anteriores foram o PNLEM 2006, PNLEM 2009 e PNLD 2012. O Programa se denominava Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLEM) nas edições de 2005 e 2009. A partir da edição de 2012 passou a ser denominado Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), não tendo mais nomenclatura diferenciada das edições de avaliações dos livros didáticos para os outros níveis de ensino.

No PNLEM 2006 foram aprovadas 11 coleções; no PNLEM 2009 foram aprovadas oito coleções; no PNLD 2012 foram aprovadas sete coleções, e no PNLD 2015 foram aprovadas seis coleções de livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio, conforme apresentamos no quadro a seguir:

Quadro 2.1 – Coleções aprovadas nos PNLD 2006, 2009, 2012 e 2015.

Edição PNLD	Coleção	Autor (es)
PNLEM 2006	1. Matemática	Adilson Longen
	2. Matemática	Edwaldo Roque Bianchini/ Herval Paccola
	3. Matemática	Luiz Roberto Dante
	4. Matemática	Manoel Rodrigues Paiva
	5. Matemática	Maria José C. de Vasconcelos Zampirolo/ Maria Terezinha Scordamaglio/ Suzana Laino Cândido
	6. Matemática	Oscar Augusto Guelli Neto
	7. Matemática	Kátia Cristina Stocco Smole/ Maria Ignez de Sousa Vieira/Rokusaburo Kiyukawa
	8. Matemática – Aula por aula	Cláudio Xavier da Silva/ Benigno Barreto Filho
	9. Matemática Ciência e Aplicações	Gelson Iezzi e outros
	10. Matemática no Ensino Médio	Márcio Cintra Goulart

	11. Matemática: Uma Atividade Humana	Adilson Longen
PNLEM 2009	1. Matemática Ensino Médio	Kátia C. Stocco Smole/ Maria Iñez de Souza V. Diniz
	2. Matemática Aula por Aula	Benigno Barreto Filho/ Cláudio Xavier da Silva
	3. Matemática Completa	José Roberto Bonjorno/ José Ruy Giovanni
	4. Matemática e suas tecnologias	Angel Pandés Rubió/ Luciana M. Ternuta de Freitas
	5. Matemática no Ensino Médio	Marcio Cintra Goulart
	6. Matemática	Luiz Roberto Dante
	7. Matemática	Antônio Nicolau Yossef/ Elizabeth Soares/ Vicente Paz Fernandez
	8. Matemática	Manoel Paiva
PNLD 2012	1. Conexões com a Matemática	Juliane Matsubara Barroso
	2. Matemática – Contexto & Aplicações	Luiz Roberto Dante
	3. Matemática - Paiva	Manoel Paiva
	4. Matemática Ciência e Aplicações	Gelson Iezzi e outros
	5. Matemática Ciência, Linguagem e Tecnologia	Jackson Ribeiro
	6. Matemática Ensino Médio	Kátia C. Stocco Smole/ Maria Iñez de Souza V. Diniz
	7. Novo Olhar – Matemática	Joamir Souza
PNLD 2015	1. Conexões com a Matemática	Fábio Martins de Leonardo
	2. Matemática: Contexto e aplicações	Luiz Roberto Dante
	3. Matemática: Paiva	Manoel Rodrigues Paiva
	4. Matemática – Ciência e aplicações	Gelson Iezzi e outros
	5. Matemática – Ensino Médio	Kátia C. Stocco Smole/ Maria Iñez de Souza V. Diniz
	6. Novo Olhar: Matemática	Joamir Souza

Fonte – Elaborado pela autora, baseado nos dados do PNLEM 2006, PNLEM 2009, PNLD 2012 e PNLD 2015.

De acordo com os dados apresentados neste quadro, podemos afirmar que, de todas as coleções, apenas três permaneceram aprovadas em todas as edições do PNLD (com alguma alteração no nome da coleção), a saber: *Matemática: Contexto e aplicações*, *Matemática: Paiva* e *Matemática – Ensino Médio*.

Das seis coleções aprovadas pelo PNLD 2015, além das três já citadas acima como aprovadas em todas as edições, a coleção *Conexões com a Matemática* aparece pela primeira vez como coleção aprovada pelo PNLD.

O PNLD 2015 trouxe um diferencial com relação às edições anteriores; foram analisados, também, conteúdos multimídia, no formato de livros digitais e de Objetos Digitais Educacionais (OEDs) a eles integrados. Neste caso, o conteúdo multimídia é uma opção, e não uma exigência para a inscrição das obras no programa. Destacamos que em nosso trabalho,

foram analisadas as coleções impressas, referentes à versão do aluno. Neste caso, não são considerados o Manual do Professor, nem o conteúdo multimídia.

Após as análises dos livros didáticos no PNLD, conforme já apontado, foram elaboradas resenhas, construídas para cada obra que apresentam os seguintes itens:

Visão geral: trata-se de uma avaliação bastante sucinta da coleção, apresentando, em termos gerais, aspectos positivos e negativos da coleção (BRASIL, 2014).

Descrição da coleção: trata-se da informação, também bem sucinta, da organização da divisão e subdivisão dos conteúdos, bem como existência de seções especiais, de sugestões de leituras complementares, de respostas às atividades propostas, dentre outros (BRASIL, 2014).

Abordagem dos conteúdos matemáticos: é apresentado um gráfico que permite ao professor visualizar, em porcentagem, a forma como os conteúdos da matemática escolar estão distribuídos em cada coleção. Além disso, são avaliadas características com relação à seleção e organização de conteúdos, como: articulações entre eles, as escolhas didáticas, as opções de validação do conhecimento matemático empregadas, etc. São, ainda, apresentadas imprecisões detectadas nas coleções (BRASIL, 2014).

Metodologia de ensino e aprendizagem: apresenta uma breve análise da metodologia predominante em cada coleção. Também é avaliado, neste item, o incentivo à utilização de novas tecnologias no livro impresso (BRASIL, 2014).

Linguagem e aspectos gráfico-editoriais: refere-se à avaliação dos textos, ilustrações e o projeto gráfico da coleção, dando ênfase às possíveis contribuições que trazem à aprendizagem (BRASIL, 2014).

Manual do Professor: avalia-se, principalmente, o apoio que a obra traz para o professor em seu trabalho em sala de aula, bem como para sua formação continuada (BRASIL, 2014).

Os livros digitais: são analisados quando a obra dispõe dessa versão. Neste item são avaliados os principais benefícios e potencialidades, bem como limitações dos recursos oferecidos na interface dos livros digitais (BRASIL, 2014).

Em sala de aula: neste item são apresentadas sugestões para que o professor selecione os conteúdos de forma mais proveitosa, tendo em vista a adequação ao projeto pedagógico de sua escola, e, caso necessário, é aconselhado que ele amplie os recursos didáticos para tal adequação (BRASIL, 2014).

Contextualização: neste item é avaliada a contextualização dos conteúdos utilizando a História da Matemática, além de avaliar se os conteúdos matemáticos estão relacionados às práticas sociais, e também a outras áreas de conhecimento. Além disso, é focada “[...] em que medida na obra, são propostos temas e atividades que incentivam o desenvolvimento de posturas e de

valores importantes para o exercício da cidadania” (BRASIL, 2014, p. 18-19).

Dos itens avaliados pelo PNLD 2015, destacamos o item “Contextualização”, no qual é avaliada a presença da História da Matemática, objeto do nosso trabalho.

Destacamos que em todas as edições de avaliação do PNLD para o componente curricular Matemática, para o Ensino Médio, o item “Contextualização” foi avaliado, sempre no mesmo aspecto, sendo analisado se os conhecimentos matemáticos são contextualizados, de forma significativa, no que diz respeito às práticas sociais atuais, à História da Matemática e a outras áreas do conhecimento.

A resenha do item “Contextualização” no Guia de Livros Didáticos referente ao PNLD 2015, apresenta uma avaliação bastante sucinta no que diz respeito à abordagem da História da Matemática nas coleções analisadas:

No caso de contextualizações ligadas à história da Matemática, há obras didáticas em que se encontram breves informações, com ênfase na identificação dos personagens envolvidos no desenvolvimento de um determinado tema e suas localizações no tempo histórico. No entanto, sabe-se que é possível atribuir significado a conteúdos matemáticos pela discussão tanto da evolução histórica dos conceitos e de suas inter-relações no âmbito da Matemática, quanto das motivações sociais, econômicas e científicas que levaram ao avanço da Matemática (BRASIL, 2014, p. 106)

Ainda com relação ao item “Contextualização”, a resenha também apresenta a presença da História da Matemática, de forma bem sucinta, em cada uma das coleções.

Na coleção *Conexões com a Matemática* foi detectado na análise que “[...] na abordagem da história da Matemática, encontram-se apenas informações breves, sendo a ênfase na identificação dos personagens envolvidos com o desenvolvimento de um dado tema e suas localizações no tempo histórico” (BRASIL, 2014, p. 27).

Na coleção *Matemática: Contexto e aplicações* identificou-se que “[...] ao longo da coleção, recorre-se à história da Matemática para iniciar a discussão de um assunto ou como leitura complementar. No entanto, poucas vezes esse contexto é utilizado no desenvolvimento de conceitos” (BRASIL, 2014, p. 36-37).

Na coleção *Matemática: Paiva* “[...] há poucas situações em que se recorre à história da Matemática para compreensão de um determinado conteúdo. Geralmente, ela é usada apenas de modo ilustrativo, com a apresentação de personagens, fatos e datas” (BRASIL, 2014, p. 46).

Na coleção *Matemática – Ciência e aplicações* foi identificado que “[...] nos três volumes da coleção, as apresentações dos conteúdos matemáticos estão bem contextualizadas nas relações estabelecidas com a história da própria Matemática, com outras áreas do conhecimento ou com as práticas sociais” (BRASIL, 2014, p. 54).

Na coleção *Matemática – Ensino Médio*, “[...] embora haja menção a fatos importantes da evolução da Matemática, não há orientações suficientes sobre seu uso como recurso pedagógico que propicie a construção do conhecimento pelo aluno” (BRASIL, 2014, p. 63).

Na coleção *Novo Olhar: Matemática*, observa-se que com relação à história da Matemática, “[...] recorre-se apenas ao relato de eventos ou a biografias, sem que seus tópicos sejam empregados como recurso didático para compreensão atual dos conceitos matemáticos” (BRASIL, 2014, p. 72).

Com base nestas informações, podemos afirmar que as coleções analisadas no PNLD 2015, apresentam a História da Matemática de diferentes formas. Entretanto, as informações presentes no Guia do PNLD são bastante sucintas com relação a forma da apresentação desta história em tais materiais. Assim, no capítulo 4 desta dissertação exporemos a nossa análise com relação a presença da HM nestas coleções.

A seguir exporemos os aspectos metodológicos. Neste capítulo apresentaremos o *corpus* de análise e os procedimentos para realização da análise: descrição, identificação, mapeamento e definição dos agrupamentos do material encontrado nos livros didáticos.

3. ASPECTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo apresentamos o caminho que seguimos no desenvolvimento da presente investigação, ou seja, para identificar os conteúdos matemáticos que são trabalhados utilizando a HM, para reconhecer as menções à HM, mapeando-as com relação ao seu formato e para definir os agrupamentos relativos às funções didáticas desempenhadas pela HM presente nos livros didáticos analisados.

Iniciamos nossa investigação definindo o conceito de “menção histórica” que utilizaríamos. Esta definição foi elaborada *a posteriori*, ou seja, após várias leituras do material que seria analisado. Para nos auxiliar quanto ao que poderíamos considerar como HM, nos baseamos no livro “História da Matemática”, do autor Carl Boyer (2012). Assim, com base no conteúdo apresentado pelos livros didáticos, e em Boyer (2012), definimos como menção à HM trechos que abordam: origem/surgimento de alguma ideia/noção/conceito relacionado à Matemática; atribuição de autoria (fatos, obras, teoremas, relações, paradoxos, etc); biografias; fatos da vida de estudiosos ou suas realizações no campo da Matemática; cronologias; histórico do desenvolvimento de algum conceito matemático; conhecimento das antigas civilizações a respeito da Matemática (babilônios, egípcios, gregos, chineses, árabes, etc); problemas de origem histórica (Papiro de Rhind, de Cairo, etc); utilização de conhecimentos matemáticos em outras áreas (Astronomia, Física, Artes, Arquitetura, etc), que fazem parte da HM.

Ressaltamos que, para tornar a redação menos repetitiva, o termo “menção à História da Matemática”, por vezes será apresentado como “menção histórica”, ou apenas por “menção”.

O *corpus* documental desta investigação, conforme já apontado, é constituído por 6 (seis) coleções de livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio aprovadas pelo PNLD 2015, de acordo com o Quadro 3.1:

Quadro 3.1 – Coleções de livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio aprovadas pelo PNLD 2015

Coleção (vol. 1, 2 e 3)	Autor (es)	Editora	Edição/Ano
Conexões com a Matemática	Fábio Martins de Leonardo	Editora Moderna	2ª ed./2013
Matemática: Contexto e aplicações	Luiz Roberto Dante	Editora Ática	2ª ed./2013
Matemática: Paiva	Manoel Rodrigues Paiva	Editora Moderna	2ª ed./2013
Matemática – Ciência e aplicações	Gelson Iezzi e outros	Editora Saraiva	7ª ed./2013
Matemática – Ensino Médio	Kátia Cristina StoccoSmole Maria Ignez de Souza Vieira Diniz	Editora Saraiva	8ª ed./2013
Novo Olhar: Matemática	Joamir Souza	Editora FTD	2ª ed./2013

Fonte: Dados do Guia de Livros Didáticos PNLD 2015.

Para facilitar a identificação destas coleções, elaboramos os códigos C1, C2, C3, C4, C5 e C6 conforme o quadro a seguir:

Quadro 3.2 – Identificação das coleções

Coleção (vol. 1, 2 e 3)	Autor (es)	Código
Conexões com a Matemática	Fábio Martins de Leonardo	C1
Matemática: Contexto e aplicações	Luiz Roberto Dante	C2
Matemática: Paiva	Manoel Rodrigues Paiva	C3
Matemática: Ciência e aplicações	Gelson Iezzi e outros	C4
Matemática: Ensino Médio	Kátia Cristina StoccoSmole Maria Ignez de Souza Vieira Diniz	C5
Novo Olhar: Matemática	Joamir Souza	C6

Fonte: Elaborado pela autora, baseado nos dados do Guia de Livros Didáticos PNLD 2015.

Após a identificação das menções à HM, iniciamos a identificação dos conteúdos matemáticos que foram trabalhados, nestes livros, utilizando a HM. Para tanto, elaboramos uma ficha de descrição das menções com relação aos conteúdos matemáticos (Apêndice A).

A elaboração desta ficha foi orientada pelo Guia de Livros Didáticos PNLD 2015 (2014), que apresenta a seguinte classificação dos conteúdos: Números, Funções, Equações Algébricas, Geometria Analítica, Geometria e Estatística e Probabilidade. Nomeamos esses seis grupos como “Conteúdos Gerais”. Ressaltamos que entendemos, da mesma forma que os autores do Guia, que essa não é a única possibilidade de agrupamento dos conteúdos trabalhados no Ensino Médio.

O Guia de Livros Didáticos PNLD 2015 (2014), também apresenta detalhadamente os conteúdos agrupados em cada uma dessas classificações, aos quais denominamos de Conteúdos Específicos.

Para a classificação dos conteúdos matemáticos gerais, seguimos rigorosamente a divisão apresentada no Guia. Porém, para a determinação dos conteúdos matemáticos específicos, realizamos algumas alterações/adaptações para um melhor enquadramento das menções à História da Matemática que encontramos nos livros didáticos. Assim, utilizamos o seguinte agrupamento:

Quadro 3.3 – Relação dos conteúdos matemáticos específicos estabelecidos por nós.

Conteúdo matemático geral	Conteúdo matemático específico
<input type="checkbox"/> Números	<input type="checkbox"/> conjuntos <input type="checkbox"/> números complexos <input type="checkbox"/> análise combinatória
<input type="checkbox"/> Funções	<input type="checkbox"/> introdução à função <input type="checkbox"/> função afim <input type="checkbox"/> função quadrática <input type="checkbox"/> função exponencial <input type="checkbox"/> função logarítmica <input type="checkbox"/> função trigonométrica <input type="checkbox"/> função modular <input type="checkbox"/> sequências <input type="checkbox"/> matemática financeira <input type="checkbox"/> conceito de derivada
<input type="checkbox"/> Equações algébricas	<input type="checkbox"/> polinômios e equações polinomiais <input type="checkbox"/> matrizes, determinantes e sistemas lineares
<input type="checkbox"/> Geometria analítica	<input type="checkbox"/> geometria analítica
<input type="checkbox"/> Geometria	<input type="checkbox"/> geometria plana <input type="checkbox"/> trigonometria <input type="checkbox"/> geometria espacial
<input type="checkbox"/> Estatística e Probabilidade	<input type="checkbox"/> probabilidade <input type="checkbox"/> estatística

Fonte: Elaborado pela autora, baseado nos dados do Guia de Livros Didáticos PNLD 2015.

Já com o intuito de auxiliar a descrição do formato das menções à HM elaboramos uma ficha de descrição com base em Tzanakis e Arcavi (2000)⁸. Esta ficha pode ser encontrada no Apêndice B.

Ao analisar o formato de uma menção histórica (ou trecho histórico), de acordo com estes autores, devemos observar a exposição didática (texto expositivo ou uma atividade), o seu estilo (se aparece em destaque em relação ao texto principal) e o seu posicionamento no texto.

Sendo assim, construímos a ficha de descrição para a identificação do formato da menção histórica. Com base nela, buscamos identificar:

- a) a *exposição didática*: se a menção histórica é um texto expositivo ou uma atividade.
- b) *estilo* da menção: se a menção distingue-se do texto principal, por meio da utilização de molduras e/ou de cores, fundos e fontes diferenciados, ou imagem/ilustração/gravura/fotografia.
- c) o seu *posicionamento* em relação à exposição do conteúdo matemático em questão: se a menção aparece no início, no decorrer (intercalada no texto ou em nota de rodapé), em paralelo (separado dele) ou final da exposição do conteúdo.

⁸Para esses autores, as menções históricas, que eles chamam de “trechos históricos” (tradução nossa) presentes nos livros didáticos podem ser caracterizadas de duas formas: quanto ao formato e quanto ao conteúdo.

Para finalizar a análise dos livros didáticos, realizamos a análise das funções didáticas desempenhadas pelas menções à HM.

Para tanto, realizamos a leitura das menções históricas dos livros didáticos e com base nelas e em algumas ideias de Brolezzi (1991), Vianna (1995) e Fossa (2008) definimos os seguintes agrupamentos:

- HM e estratégia didática;
- HM e a elucidação dos *porquês*;
- HM e a elucidação do *para que?*;
- HM e formação cultural geral.

No agrupamento denominado “HM e estratégia didática” a HM desempenha o papel de possibilitar ao aluno a desenvolver algum raciocínio matemático. As menções históricas aqui agrupadas poderão “sugerir ideias que levem à compreensão do conteúdo” (VIANNA, 1995, p. 78). Neste caso, a menção à HM que desempenha esta função pode estar exposta na forma de um texto expositivo (acompanhado ou não de algum questionamento), ou em forma de atividade.

No agrupamento denominado “HM e a elucidação dos *porquês*” a HM desempenha o papel de mostrar ao aluno o porquê de certos conhecimentos matemáticos, ou seja, como surgiram, em que circunstâncias e por que surgiram. Nesta função didática, a motivação para o desenvolvimento daquele conceito é apresentada juntamente com o tópico a ser ensinado (KLINE, 1976, apud BROLEZZI, 1991). Neste sentido, a motivação está sendo entendida como “o que levou, ou o que incentivou o surgimento de determinado conteúdo matemático”. As menções aqui agrupadas geralmente aparecem na forma de textos expositivos.

No agrupamento denominado “HM e a elucidação do *para que?*” a HM desempenha o papel de mostrar ao aluno a “razão de ser de tópicos específicos da Matemática (BROLEZZI, 1991), mostrando sua utilidade ao longo do tempo, ou em um período específico. Neste caso, as menções que desempenham esta função apresentam as aplicações (dentro da própria Matemática ou em outras áreas do conhecimento) dos conteúdos matemáticos ao longo do tempo, mostrando que nem sempre os conteúdos apresentam uma aplicação imediata, e, ainda, mostrando que essas aplicações podem mudar ao longo do tempo.

Por fim, no agrupamento denominado “HM e formação cultural geral” a HM desempenha o papel de propiciar uma formação de cunho mais geral, que não o de conhecimento matemático, e sim de conhecimentos gerais, porém ligados à Matemática. As menções agrupadas nesta função geralmente apresentam informações históricas sucintas que

não contribuem para a aprendizagem de conteúdos matemáticos, como por exemplo, fatos da vida de algum “matemático”⁹.

Após esta descrição dos procedimentos de desenvolvimento desta pesquisa, no próximo capítulo, exporemos a nossa análise com relação a presença da HM nas coleções de livros didáticos.

⁹ Utilizaremos o termo “matemático” entre aspas para designar algum estudioso que teve importância no desenvolvimento da Matemática.

4. ANÁLISE DA INSERÇÃO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA IDENTIFICADA NOS LIVROS DIDÁTICOS

Este capítulo tem o intuito de apresentar uma análise das menções à HM identificadas nos livros didáticos aprovados pelo PNLD 2015. Para tanto, apresentaremos os conteúdos matemáticos que são trabalhados utilizando a HM e o mapeamento dos aspectos relacionados às menções à HM quanto ao seu formato. Além disto, apresentaremos a análise das funções didáticas desempenhadas pela HM presente nestes materiais.

Identificamos, nas seis coleções de livros didáticos analisadas, 294 menções à HM.

Apresentamos, por meio do Quadro 4.1, a seguir, a relação das menções históricas identificadas nas coleções, por volume e por página.

Quadro 4.1 – Relação das menções encontradas, por coleção, volume e página.

Coleção	Volume	Páginas
Conexões com a Matemática	1	42, 55, 146, 205, 210, 216, 244/245, 245A*, 245B*, 258.
	2	10, 44, 104, 113, 114, 139, 211, 231, 264, 274.
	3	124, 143, 160, 162, 163A*, 163B*, 169, 175, 198, 203.
Matemática: Contexto e aplicações	1	12, 18, 19, 20, 21, 22, 27, 40, 41, 49A, 49B, 62, 72, 107, 174, 178, 198, 204/205, 210/211, 217A*, 217B*, 234, 235, 244, 260, 262.
	2	24, 26, 35, 76, 92, 108, 133, 134, 137, 139, 153, 186, 187, 200, 214, 235, 261, 262, 264, 265, 266, 292, 293.
	3	30, 68, 70, 116, 142/143, 144, 146, 151A*, 151B*, 158, 166, 170/171, 186, 188, 191, 199, 200.
Matemática: Paiva	1	8, 9, 24, 30/31, 64, 72, 86/87, 95, 114, 230, 257, 264, 280.
	2	7, 16, 45, 94, 127, 129, 175, 181, 223, 239, 252, 256, 271/272.
	3	36, 108A*, 108B*, 141/142, 149, 159, 178, 179, 188, 190, 196.
Matemática – Ciência e aplicações	1	9, 10, 21, 34/35, 46, 145, 164, 165, 207/208, 225/226, 252, 255/256.
	2	20/21, 80, 111, 125, 127, 128, 149, 160/161, 184/185, 195, 202, 285, 288.
	3	9/10, 89, 96/97, 108, 165/166, 192, 220A*, 220B*, 227.
Matemática – ensino Médio	1	11, 11/12, 12/13, 16, 23/24, 29, 68A*, 68B*, 118, 140/141, 146/147, 151/152, 188/189, 231, 235A*, 235B*, 251.
	2	10/11/12, 133/134, 144, 194, 220A, 220B, 246, 263, 267, 271, 272, 274.
	3	15/16, 32/33, 80, 109, 110, 166, 166/167, 182/183/184, 197, 224/225, 227A*, 227B*, 250/251, 252, 288.
Novo Olhar: Matemática	1	11, 13, 19, 29A*, 29B*, 30A*, 30B*, 36A*, 36B*, 38, 42/43, 48A*, 48B*, 53, 54, 118, 128, 150, 152, 172, 173, 175, 184, 231, 244, 248, 258A*, 258B*, 262, 264A*, 264B*, 267, 268A*, 268B*, 276, 280A*, 280B*, 285, 293.
	2	10, 16, 25A*, 25B*, 75, 87, 88, 125, 184, 190, 191, 199, 204, 206/207, 208, 209, 235, 236A*, 236B*, 246
	3	46, 48, 51, 71, 73, 74, 86, 126, 150A*, 150B*, 186/187, 203A*, 203B*, 224/225, 230/231, 253, 256/257, 267, 269, 272A*, 272B*, 274, 275, 284.

*A/B – duas menções diferentes em uma mesma página.

Fonte: Dados da pesquisa

Apresentamos, por meio da Figura 4.1, o quantitativo de menções localizadas em cada coleção dos livros didáticos analisada:

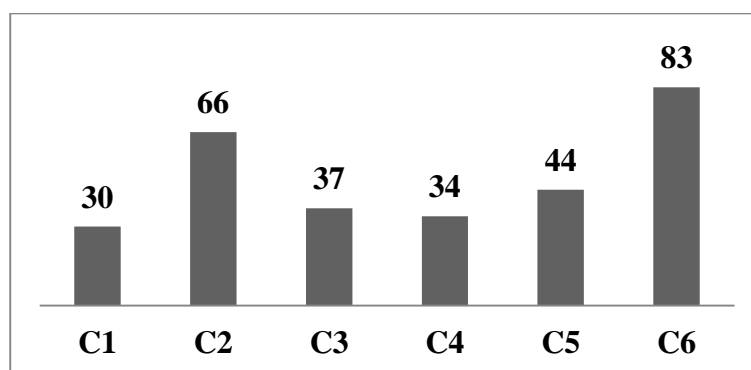


Figura 4.1 – Distribuição das menções por Coleção

Fonte: Dados da pesquisa

Percebemos que há uma discrepância entre a quantidade de menções à HM nas coleções analisadas. Quase metade das menções históricas foi identificada em apenas duas coleções, a saber: a Coleção 6 e a Coleção 2.

Apresentamos a seguir considerações sobre estas menções. Exporemos, inicialmente, os conteúdos matemáticos que são trabalhados utilizando a HM.

4.1. Conteúdos matemáticos que são trabalhados utilizando a HM

As menções à HM da matemática localizadas nos livros analisados foram classificadas com relação aos conteúdos matemáticos (Geral e Específicos) abordados. Por meio da Figura 4.2 apresentamos a distribuição das menções quanto ao conteúdo matemático geral:

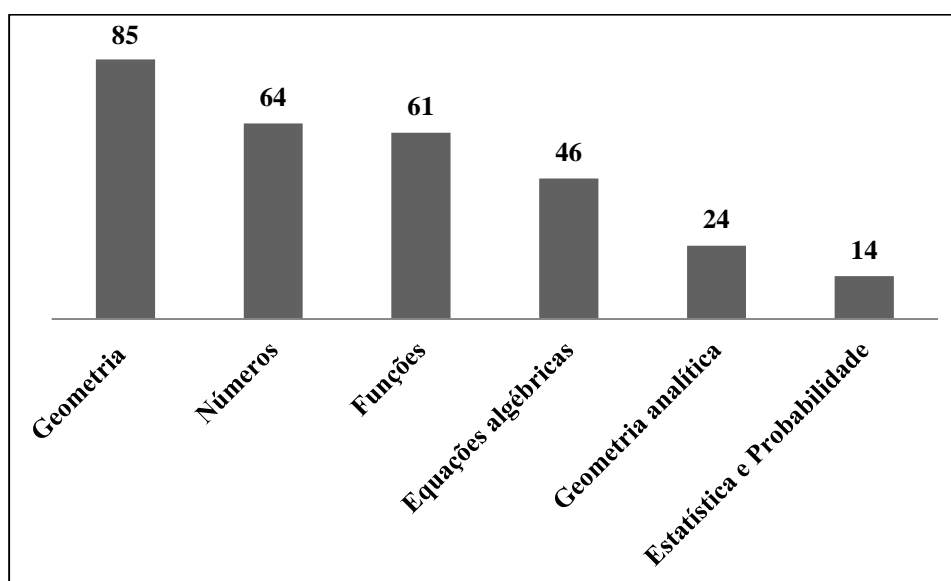


Figura 4.2 – Distribuição das menções por conteúdo matemático geral

Fonte: Dados da pesquisa

Observamos que o conteúdo matemático geral Geometria é mais contemplado pelas menções à HM nos livros analisados. Este é abordado em 85 menções, que representam 29% do total de menções. Destacamos que neste conteúdo matemático geral estão contidos os conteúdos matemáticos específicos: Geometria Plana, Geometria Espacial e Trigonometria, conforme o Guia do PNLD 2015.

Por meio do Quadro 4.2, apresentamos a distribuição das menções quanto aos conteúdos matemáticos específicos.

Quadro 4.2 – Distribuição das menções por conteúdo matemático específico

Conteúdo matemático específico	Total
Trigonometria	34
Conjuntos	34
Geometria espacial	28
Polinômios e equações polinomiais	26
Geometria analítica	24
Geometria plana	23
Números complexos	21
Matrizes, determinantes e sistemas lineares	20
Sequências	18
Funções	16
Introdução à função	13
Probabilidade	12
Análise combinatória	9
Função trigonométrica	5
Função quadrática	4
Matemática financeira	3
Estatística	2
Função afim	1
Conceito de derivada	1
Total geral	294

Fonte: Dados da pesquisa

Observamos que Trigonometria e Conjuntos são os conteúdos específicos mais abordados nas menções à HM, sendo cada um destes tratados em 34 menções. No item Conjuntos, estão compreendidos os conteúdos de teorias de Conjuntos e Conjuntos Numéricos. No caso da Trigonometria, se considerarmos, ainda, as funções trigonométricas, são 39 menções relacionadas a este conteúdo, o que representa 13% do total de menções.

Destacamos que Trigonometria, de acordo com Omena e Cavalari (2014), é o conteúdo mais recorrente nas teses e dissertações brasileiras que apresentam, explicitamente, propostas didáticas para o ensino médio utilizando a História da Matemática em sala de aula. Este

resultado pode estar relacionado ao fato de que a Trigonometria possui muitos fatos históricos relacionados ao seu desenvolvimento. Mendes (2006) expõe sobre esta vasta gama de fatos relacionados ao desenvolvimento histórico da Trigonometria, considerando que

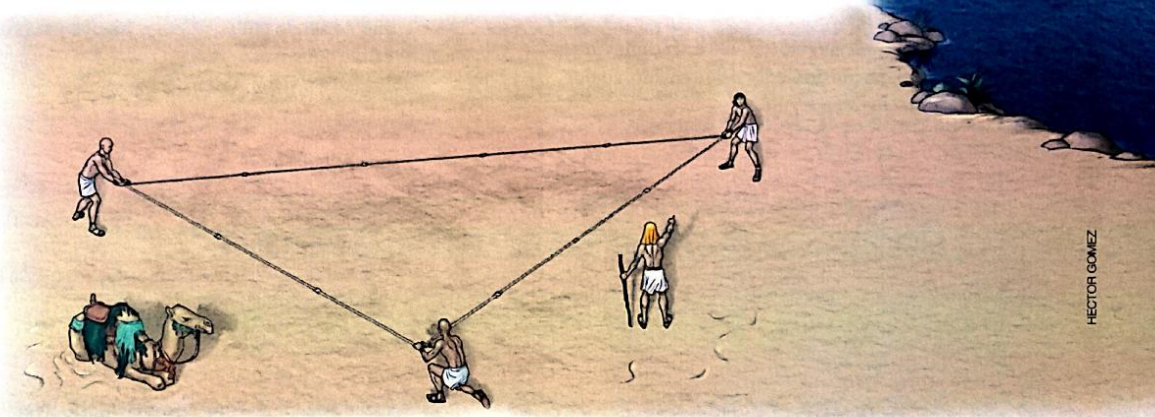
[...] as bases da trigonometria estão na astronomia babilônica, nas práticas de medição dos egípcios e nos estudos gregos, como os de Hiparco, Menelau e Ptolomeu, como o seu *Almagesto*, útil ao modelo de ciência da sua época. Além disso, há dados históricos indicativos de que os árabes também se apropriaram da trigonometria produzida pelos babilônios, egípcios e gregos, adaptando-a às suas conveniências e necessidades, transformando-a e difundindo-a pela Europa e Ásia até que esse conhecimento se transformasse em uma ferramenta útil à elaboração e representação de novas ideias matemáticas, como, por exemplo, os números complexos e as funções de uma variável complexa (p. 80).

Porém, ressaltamos que nem todos estes fatos foram identificados nas menções. A maioria das menções sobre Trigonometria dizem respeito às práticas de medição de terras e a utilização desses conhecimentos nos estudos astronômicos.

Para ilustrar, apresentamos a seguir um exemplo de menção encontrada no conteúdo matemático geral Geometria e no conteúdo matemático específico Trigonometria, representada pela Figura 4.3. Esta menção trata da utilização de cordas, no formato de um triângulo de lados 3, 4 e 5, para obtenção de um ângulo reto, pelos esticadores de corda, no antigo Egito, para demarcação de terras após as enchentes do rio Nilo.

O triângulo retângulo tem grande importância na história da Matemática, principalmente no que diz respeito ao cálculo de distâncias, como mostram as situações a seguir.

No antigo Egito (cerca de 3000 a.C.), as enchentes anuais do rio Nilo desfaziam os marcos de delimitação dos campos de plantação que margeavam o rio. Por isso, depois de cada inundação, os agrimensores tinham de remarcar esses campos. Conta-se que esse trabalho era feito com o auxílio de uma corda — com 12 nós espaçados igualmente a uma distância d — que eles esticavam sob a forma de um triângulo de lados 3, 4 e 5 na unidade d . Os “esticadores de corda”, como eram chamados, tinham conhecimento de que um triângulo com essas medidas determinava um ângulo reto e, desse modo, calculavam distâncias e áreas para a demarcação das fronteiras.



O triângulo retângulo foi usado também para calcular distâncias além dos limites do planeta Terra. O astrônomo grego Aristarco de Samos (cerca de 310 a.C.-230 a.C.) foi um dos pioneiros no cálculo das distâncias que separam a Terra, a Lua e o Sol; para isso, ele usou as relações entre as medidas dos lados e as medidas dos ângulos internos de triângulos retângulos (veja a seção *Matemática sem fronteiras* deste capítulo). A parte da Matemática que estuda essas relações é a **Trigonometria** (do grego *trígōnos*, que significa “triângulo”, e *métron*, “medida”).

Figura 4.3 - O triângulo retângulo no antigo Egito

Fonte: Paiva, 2013, v. 2, p. 7.

Apresentamos, a seguir, outros exemplos de menções históricas identificadas nos livros didáticos, apontando seus respectivos conteúdos matemáticos.

A menção representada pela Figura 4.4 aborda conceitos relativos ao conteúdo matemático geral Números e ao conteúdo matemático específico Conjuntos. Esta menção trata da noção de conjunto desenvolvida por Georg Cantor.

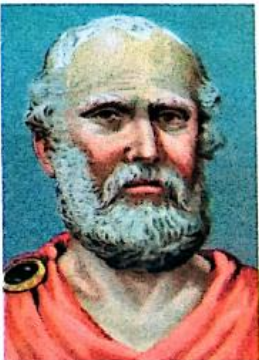
De uso corrente em Matemática, a noção básica de conjunto não é definida, ou seja, é aceita intuitivamente e, por isso, chamada **noção primitiva**. Ela foi utilizada primeiramente por Georg Cantor (1845-1918), matemático nascido em São Petersburgo, mas que passou a maior parte da vida na Alemanha. Segundo Cantor, a noção de conjunto designa uma coleção de objetos bem definidos e discerníveis, chamados elementos do conjunto.

Figura 4.4 - Noção de conjunto segundo Cantor

Fonte: Iezzi e outros, 2013, v. 1, p. 9.

A menção representada pela Figura 4.5 aborda conceitos relativos ao conteúdo matemático geral Geometria e ao conteúdo matemático específico Geometria Espacial. Esta

menção faz referência à Platão, apresentando alguns fatos de sua vida e sua relação com os poliedros.



Autor desconhecido. Séc. XX. Coleção particular.
Foto: Ann Roman Pictures/Heritage Images/Getty Images

Platão

> Poliedros de Platão

Platão (427 a.C.-347 a.C.) foi um filósofo grego, discípulo de Sócrates, nascido em Atenas. Em 387 a.C., após a morte de seu mestre, fundou em sua cidade natal uma escola que ficou conhecida como “Academia”. Na fachada dessa escola, podia-se ler: “Que ninguém que ignore a Geometria entre aqui”. Nessa frase, podemos observar que, apesar de Platão não ter dado contribuição significativa aos resultados matemáticos técnicos da época, ele tinha uma grande admiração pela Geometria.

Comumente é dito que Platão passou a ter uma visão matemática por influência de um amigo, Arquitas. Acredita-se também que foi a partir daí que ele soube da existência de cinco poliedros: o tetraedro, o cubo, o octaedro, o icosaedro e o dodecaedro. Nessa época, esses poliedros eram associados aos quatro elementos considerados primordiais: ar, associado ao octaedro; terra, associada ao cubo; fogo, associado ao tetraedro; e água, associada ao icosaedro. O quinto e último poliedro foi o dodecaedro, que Platão considerou o símbolo do universo.

Devido à sua importância, esses poliedros convexos são chamados **Poliedros de Platão**. Um Poliedro de Platão satisfaz simultaneamente as seguintes condições:

- todas as faces têm o mesmo número de arestas
- de cada vértice parte o mesmo número de arestas
- a Relação de Euler é válida

Figura 4.5 - Platão e sua relação com os poliedros

Fonte: Souza, 2013, v. 3, p. 74.

A menção representada pela Figura 4.6 aborda conceitos relativos ao conteúdo matemático geral Equações Algébricas e ao conteúdo matemático específico Matrizes, Determinantes e Sistemas lineares. Esta menção trata das expressões matemáticas estudadas pelos matemáticos Leibniz e Seki Kowa, e que, posteriormente, foram denominadas de determinantes por Gauss.

Ao estudarem a teoria dos sistemas lineares, durante o século XVII, os matemáticos Wilhelm von Leibniz (1646-1716), na Alemanha, e Seki Kowa (1642-1708), no Japão, criaram certas expressões matemáticas, definidas a partir dos coeficientes das incógnitas dos sistemas. Essas expressões estão relacionadas a matrizes e foram denominadas **determinantes**, nome utilizado no século XVIII pelo matemático Gauss.

Figura 4.6 - O surgimento dos determinantes

Fonte: Smole e Diniz, 2013, v. 2, p. 271.

Após a apresentação dos conteúdos das menções à HM localizadas nos livros didáticos analisados, exporemos, a seguir o mapeamento dos aspectos relacionados às menções à HM quanto ao seu formato.

4.2. Mapeamento dos aspectos relacionados às menções à HM quanto ao seu formato

Para analisar as menções à HM com relação ao seu formato, conforme já explicitado no capítulo 3, nos dedicamos a caracterizar estas menções com relação a sua exposição didática, seu estilo e seu posicionamento no texto. Apresentaremos estas caracterizações a seguir.

4.2.1. Exposição didática

Com relação à exposição didática, nos dedicamos a identificar se a menção é apresentada no formato de texto expositivo ou atividade.

Identificamos que, das 294 menções, 265 se encontram no formato de texto expositivo e 29 se apresentam na forma de atividades. Destacamos que no caso do texto expositivo, encontramos, também, texto expositivo com questionamentos, ou seja, após a exposição da menção histórica, há questionamentos ou sugestões de pesquisa sobre o assunto exposto. Das 265 menções que se encontram no formato de texto expositivo, 25 são neste formato.

A Figura 4.7 representa uma menção no formato de texto expositivo que aparece no conteúdo Trigonometria. Esta menção trata de uma breve referência da origem da Trigonometria, ligada ao Papiro de Rhind e à Astronomia.

Não se sabe ao certo a origem da Trigonometria; porém, há registros relacionados a ela no Papiro de Rhind, que data de cerca de 1650 a.C. É provável que seu estudo inicial esteja diretamente ligado à Astronomia. Atualmente, a Trigonometria é utilizada por profissionais de diversas áreas, como engenheiros, astrônomos e geógrafos.

Figura 4.7 - Menção à origem da Trigonometria

Fonte: Souza, 2013, v. 1, p. 268.

Já a figura 4.8, representa uma menção no formato de texto expositivo acompanhado de questionamento, que trata do conteúdo matemático Trigonometria. Esta menção apresenta a utilização, pelos egípcios, de um certo triângulo para obter ângulos retos. Após o texto expositivo, foi proposta uma pesquisa sobre os esticadores de corda no antigo Egito e os procedimentos adotados por eles.

O triângulo retângulo

CONTEÚDO DIGITAL

O triângulo retângulo é um dos mais importantes tipos de triângulo, pela utilidade que ele tem em Matemática e na vida cotidiana. Pelo fato de possuir um ângulo reto, o triângulo retângulo é muito usado em Engenharia, em construções de todos os tipos.

Há mais de 5 mil anos, os egípcios já utilizavam triângulos de lados proporcionais a 3, 4 e 5, feitos de corda, para obter ângulos retos.

Para refletir
Formem duplas e pesquisem quem eram os “esticadores de cordas” no antigo Egito e o que eles faziam.

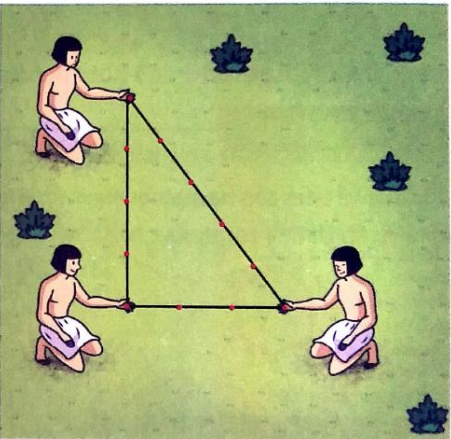


Figura 4.8 - O triângulo retângulo e os esticadores de corda

Fonte: Dante, 2013, v.1, p.244.

A Figura 4.9 representa uma menção no formato de atividade que aborda o conteúdo matemático Geometria Plana. Esta menção trata da utilização de uma regra pelos babilônicos para o cálculo da área do círculo, e uma aproximação para o valor de π .

46. (Vunesp-SP) Certos registros históricos babilônicos indicam o uso de uma regra para o cálculo da área do círculo equivalente à fórmula (em notação atual)

$$A = \frac{C^2}{12}$$

em que C representa o comprimento da circunferência correspondente. Determine o valor de π oculto nesses registros.

Figura 4.9 - Atividade sobre o cálculo do valor de π

Fonte: Dante, 2013, v. 2, p.153.

Nesta menção, no formato de atividade, é indicado ao estudante que ele determine o valor de π , assim, ele é levado a raciocinar sobre o valor de π e o seu significado, ou seja, a relação entre o comprimento da circunferência e o diâmetro da mesma.

De tudo o que foi exposto acerca dos aspectos relacionados à HM com relação à exposição didática, podemos afirmar que a maior parte das menções aparecem como texto expositivo (com ou sem questionamentos), e uma pequena parcela aparece como atividade. Quanto ao tipo de exposição didática, entendemos que o importante é que tanto o texto expositivo quanto as atividades levem o aluno a um processo de investigação, embora alguns autores indiquem, para tal processo, o uso de atividades. Com relação à investigação, Mendes (2006) entende que os alunos “[...] podem vivenciar experiências manipulativas resgatadas das informações históricas, com vistas a desenvolver o seu espírito investigativo, sua curiosidade

científica e suas habilidades matemáticas, de modo a alcançar sua autonomia intelectual [...]” (p. 87). Além disso, Fossa (2008) defende que, ao propor atividades estruturadas à luz da HM, o professor proporcionará uma experiência mais rica ao aluno. E, ainda, Mendes (2003) acredita que quando os aspectos históricos são incorporados às atividades, estes “[...] apresentam um caráter mais construtivo e útil à aprendizagem dos tópicos matemáticos” (p. 2).

Após a apresentação de aspectos relativos à exposição didática das menções à HM, apresentamos no item subsequente considerações acerca do estilo destas menções.

4.2.2. Estilo

Já com relação ao estilo, buscamos identificar se a menção distingue-se do texto principal, por meio da utilização de molduras e/ou de cores, fundos e fontes diferenciados, ou imagem/ilustração/gravura/fotografia. Neste caso, consideramos apenas as imagens, ilustrações, gravuras ou fotografias que tenham relação com a HM.

Identificamos que, das 294 menções, 183 distinguem-se do texto principal, utilizando um ou mais dos recursos descritos anteriormente. Destas 183 menções que utilizam algum dos recursos citados, 121 utilizam imagens de matemáticos ou imagens como a tábua de escrita cuneiforme dos babilônios, página do Tratado de Al-Khowarizmi, tela da obra *Mona Lisa*, mapa babilônico, a calculadora criada por Napier, a tábua de argila babilônica, Papiro de Rhind, etc.

Podemos afirmar que a maioria das menções estão, de alguma forma, destacadas do texto. Porém, cabe ressaltar que identificamos que a utilização destes recursos não está diretamente relacionada com a função didática desempenhada pelas menções. O fato de a menção estar ou não destacada do texto não é suficiente para afirmar que a mesma esteja contribuindo de fato com a aprendizagem dos conteúdos matemáticos pelos estudantes. O importante é a informação contida e o tipo de abordagem de utilização da HM presente nas menções.

4.2.3. Posicionamento das menções no texto

Para classificar o posicionamento das menções no texto, nos dedicamos a identificar se as menções à HM identificadas nas coleções analisadas estavam localizadas no início da unidade, do capítulo, ou de um tópico (que denominaremos simplesmente ‘texto’), no decorrer do texto (intercalada no texto ou em nota de rodapé), em paralelo a ele (separado dele) ou no final da exposição do conteúdo. Destacamos que neste item não consideramos as 29 menções à HM que classificamos como atividades.

Apresentaremos a seguir, por meio da Figura 4.10, a distribuição das menções quanto ao seu posicionamento no texto:

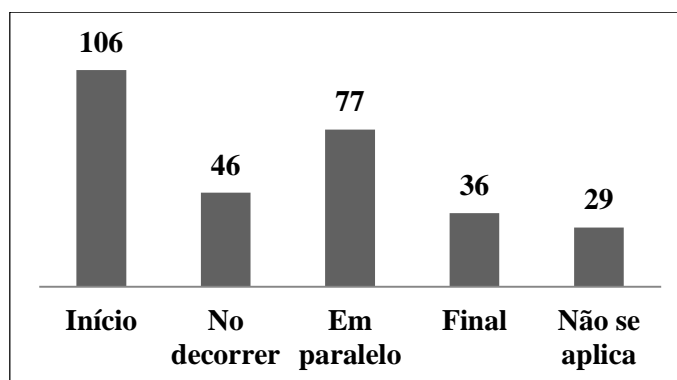


Figura 4.10 - Distribuição das menções quanto ao seu posicionamento no texto

Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos que mais de um terço das menções, ou seja, 106 menções, se encontram iniciando a discussão de um assunto, capítulo ou tópico. Este fato, em partes, pode nos levar a entender que estão, de certa forma, contribuindo para a apresentação do conteúdo.

O segundo tipo de posicionamento mais utilizado é a HM em paralelo ao texto, ou seja, separada deste, geralmente com recursos visuais que a distingue do texto principal. Embora não tenha sido identificado como o formato mais utilizado, Fossa (2008) menciona este tipo de utilização quando afirma que a HM tem sido apresentada nos textos de Matemática na forma de uma caixa, separada ou não do texto, às vezes na margem da página, outras vezes no final ou na seção de um capítulo.

O terceiro posicionamento mais utilizado foi “no decorrer do texto”. Este tipo de utilização é mencionado por Vianna (1995), quando este sugere o uso imbricado, ou seja, quando a HM aparece no decorrer do texto.

Identificamos, ainda, 36 menções à história da Matemática no final da exposição do conteúdo. Esta forma de utilização, após a explanação do conteúdo, nos indica que a HM está sendo utilizada como uma informação complementar ao conteúdo estudado.

Quanto ao posicionamento no texto, identificamos que o posicionamento mais utilizado foi no início da discussão de determinado assunto, o que pode ser bom, embora a melhor utilização seja aquela em que as menções, segundo Vianna (1995) estejam imbricadas ao longo da exposição do conteúdo, nem sempre de forma explícita, e que forneçam, através da História, elementos necessários ao desenvolvimento do conteúdo, proporcionando a aprendizagem pelo estudante. Entendemos que, independente do posicionamento, cada menção tem o seu valor

didático, e o importante é que, em conjunto, forneçam os elementos necessários à compreensão dos conteúdos.

Após a exposição da classificação das menções à HM com relação ao seu formato, apresentaremos a seguir as análises das funções didáticas desempenhadas por estas menções históricas.

4.3. Análise das funções didáticas

As funções didáticas desempenhadas pelas menções históricas encontradas nos livros didáticos, conforme já apontado, foram classificadas em quatro grupos: “HM e estratégia didática”, “HM e a elucidação dos *porquês*”, “HM e a elucidação do *para que?*” e “HM e formação cultural geral”.

Das 294 menções encontradas, identificamos a seguinte distribuição quanto à função didática, apresentada por meio do Quadro 4.3:

Quadro 4.3 - Classificação das menções quanto à função didática

Função didática	HM e estratégia didática	HM e a elucidação dos <i>porquês</i>	HM e a elucidação do <i>para que?</i>	HM e formação cultural geral
Número de menções	38	74	23	159
Percentual	13%	25%	8%	54%

Fonte: Dados da pesquisa

Observamos que mais da metade das menções estão desempenhando a função de “HM e formação cultural geral”. Identificamos também que esta função didática foi a mais encontrada em cada uma das seis Coleções. Destacamos que esta função, dentre as demais, é a menos interessante, pois não apresenta contribuições para a aprendizagem ou esclarecimentos acerca de certos conteúdos, conceitos ou ideias matemáticas, conforme apresentaremos posteriormente.

A função “HM e a elucidação dos *porquês*” foi utilizada em um quarto do total de menções, e desempenha o papel de mostrar ao aluno o porquê de certos conhecimentos matemáticos, ou seja, como surgiram, em que circunstâncias e por que surgiram.

A função “HM e estratégia didática” desempenha o papel de possibilitar ao aluno a desenvolver algum raciocínio matemático. Esta função, a princípio, é a mais interessante, e

talvez a mais importante, já que está diretamente relacionada ao raciocínio matemático, à compreensão de algum conteúdo ou conceito matemático. Entendemos que esta deveria ser a função mais utilizada, porém ela aparece em apenas 13% do total de menções.

Já a função didática “HM e a elucidação do *para que?*” foi a menos utilizada, apenas 8% do total de menções. Esta função tem o papel de mostrar as aplicações de conhecimentos matemáticos na própria Matemática e em outras áreas do conhecimento ao longo do tempo, ou em um período específico.

Após esta explanação inicial, descreveremos nos itens que se segue cada uma das funções didáticas encontradas nos livros didáticos.

➤ HM e estratégia didática

A função “HM e estratégia didática”, que desempenha o papel de propiciar o desenvolvimento de algum raciocínio matemático, foi identificada em 38 menções. A distribuição destas por coleção é apresentada no Quadro 4.4, a seguir:

Quadro 4.4 - Distribuição das menções quanto à função didática “HM e estratégia didática” por Coleção

Função didática	Coleção 1	Coleção 2	Coleção 3	Coleção 4	Coleção 5	Coleção 6
HM e estratégia didática	3	9	3	3	4	16

Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos que a Coleção 6 é a que mais apresenta menções exercendo a função “HM e estratégia didática”, seguida pela Coleção 2. De modo geral, as coleções apresentam poucas menções exercendo a função de estratégia didática, que deveria ser, a princípio, a função mais explorada.

Observamos que em todas as Coleções foi abordada a história de Gauss e a soma da sequência de 1 a 100 e também a Sequência de Fibonacci.

A menção representada pela Figura 4.11 foi extraída do conteúdo Sequências, e trata do tópico Soma dos termos de uma Progressão Aritmética finita. Apresenta uma história de Gauss e a soma dos números de 1 a 100.

2.4 Soma dos n primeiros termos de uma PA

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) é considerado um dos maiores matemáticos do século XVIII. Conta-se que, quando criança, o professor de sua turma pediu aos alunos que calculassem a soma: $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 98 + 99 + 100$

Para surpresa do professor, Gauss resolveu rapidamente o desafio e foi o único a acertar a resposta: 5.050. O pequeno Gauss percebeu que:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\
 & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \\
 & & & & & & & & 101 & & & & \\
 & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \\
 & & & & & & & & 101 & & & & \\
 & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \\
 & & & & & & & & 101 & & & & \\
 \end{array}$$

Como são 50 parcelas iguais a 101, a soma dos termos dessa PA será igual a: $50 \cdot 101 = 5.050$

A soma dos n primeiros termos de uma PA, sendo conhecidos o primeiro e o

último termo da progressão, é dada por: $S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$



Carl Friedrich Gauss, retratado por Christian Albrecht Jensen (1850), era filho único de pais sem instrução, foi matemático, astrônomo e físico.

Figura 4.11 - Gauss e a soma dos termos de uma PA

Fonte: Leonardo, 2013, v. 1, p. 216.

Interessante destacar que esta história de Gauss foi apresentada em todas as coleções, como estratégia didática. Brolezzi (1991) aponta que, ao expor esta história, basta uma pequena narrativa, que apresente a lógica utilizada por Gauss, que culminou na fórmula da soma da Progressão Aritmética. O importante é apresentar que Gauss observou que a soma do primeiro termo com o último era a mesma do segundo com o penúltimo, e assim por diante. Assim, o processo de obtenção da fórmula da soma da Progressão Aritmética fica mais razoável se utilizar a mesma sequência lógica atribuída a Gauss (BROLEZZI, 1991).

Dessa forma, ao mostrar o raciocínio de Gauss, esta menção está contribuindo para que o aluno compreenda a fórmula da soma dos termos de uma Progressão Aritmética. Esta menção torna-se fundamental neste conteúdo, uma vez que, em muitas situações, a fórmula da soma dos termos da PA é apresentada sem nenhuma contextualização. Neste caso, através dessa história, o aluno poderá reconstruir a fórmula, sem precisar ficar refém desta.

A menção a seguir, representada pela Figura 4.12, aparece em forma de atividade no conteúdo Sequências, e leva o aluno a raciocinar sobre a Sequência de Fibonacci, sua lógica e sua lei de formação. Destacamos que em todas as coleções as menções a HM que abordam esta temática foram classificadas como estratégia didática.

Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci, retratado ao lado em 1200, foi um matemático italiano que viveu de 1180 a 1250, aproximadamente. Em 1202, ele propôs em sua obra *Liber abaci* (Livro dos cálculos) o problema a seguir, de grande repercussão por ter aplicações em várias áreas do conhecimento, como Economia, Biologia, Física etc.: “Admitindo-se que cada casal de coelhos só procrie pela primeira vez aos dois meses, exatamente, após o seu nascimento e que, a partir de então, gere um casal a cada mês, quantos casais haverá ao final de doze meses, partindo-se de um único casal de coelhos recém-nascidos?”

A sequência formada pelo número de coelhos em cada mês ficou conhecida como **sequência de Fibonacci**. Agora, em grupos, resolvam os itens abaixo.

a) Representem os doze primeiros termos da sequência de Fibonacci.

b) Considerando infinita a sequência de Fibonacci, deem sua lei de formação.

(*Curiosidade:* Na sequência (a_n) de Fibonacci, a razão $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ tende ao número 1,61803..., quando n aumenta indefinidamente. Esse número é conhecido como número de ouro.)



Figura 4.12 - A sequência de Fibonacci

Fonte: Paiva, 2013, v. 1, p. 257.

Outra menção, representada pela Figura 4.13, foi retirada do tópico Semelhança de triângulos e apresenta uma versão da forma como Tales poderia ter calculado a altura de uma pirâmide.

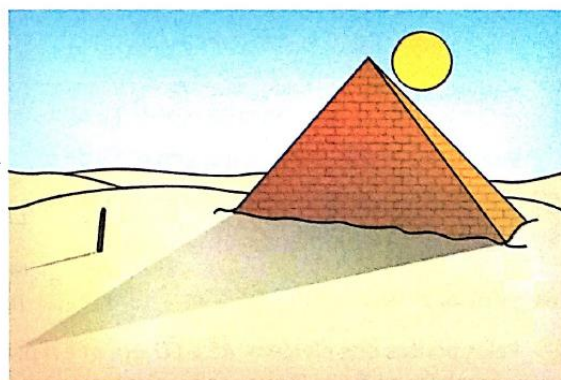
Neste capítulo retomaremos o estudo da Trigonometria (do grego: 'medida dos triângulos'), revendo e aprofundando a Trigonometria no triângulo retângulo. O conceito de proporcionalidade é questão central nesse processo, portanto faremos uma revisão de tópicos relevantes da Geometria plana.

A proporcionalidade, principalmente na forma do teorema de Tales ou de semelhança de triângulos, foi um dos conhecimentos geométricos mais úteis ao longo dos tempos. Foi com semelhança de triângulos que Aristarco (310 a.C.-230 a.C.) comparou as distâncias da Terra, e com que os matemáticos árabes estabeleceram as razões trigonométricas.

Tales de Mileto (624 a.C.-547 a.C.), considerado um dos mais versáteis gênios da Antiguidade, levou para a Grécia a Geometria dos egípcios e começou a aplicar a ela os procedimentos da Filosofia grega. Com seu método de comparar sombras, hoje conhecido como teorema de Tales, realizou muitos cálculos até então inéditos. O mais famoso deles foi a obtenção da altura de uma pirâmide.

Conta-se que Tales fincou uma vareta verticalmente no chão, ao lado da pirâmide. Esperou até um momento em que a sombra e a vareta tivessem exatamente o mesmo tamanho. Nesse instante, Tales mediu a sombra da pirâmide, descobrindo assim sua altura.

Junte-se com um colega e discutam como esse método usado por Tales permite que se descubra a altura da pirâmide. Poderia ter sido usado outro momento do dia, por exemplo, o momento em que a sombra da vareta fosse metade da altura dela?



Você sabia?

Tales é considerado um dos sete sábios da Antiguidade. Formem trios e pesquisem quem são os outros seis.

Figura 4.13 - Cálculo da altura da pirâmide

Fonte: Dante, 2013, v.1, p.235.

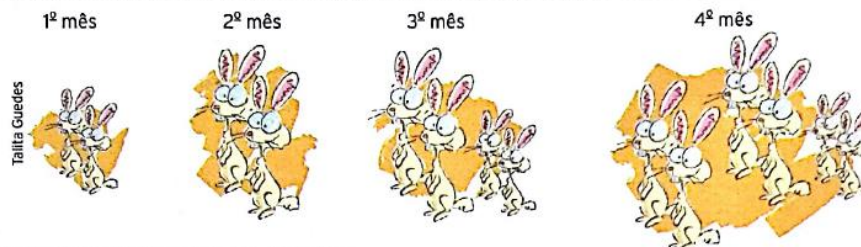
Ao levantar questionamentos sobre o método utilizado por Tales, esta menção está proporcionando uma investigação deste conteúdo matemático.

O próximo exemplo, representado pela Figura 4.14, aparece em forma de texto expositivo com questionamentos, também no conteúdo Sequências, e leva o aluno a raciocinar sobre a Sequência de Fibonacci, sua lógica e sua lei de formação.

Sequência de Fibonacci

Acompanhe este problema.

Quanto casais de coelhos serão gerados em um ano, começando com um único casal, se em cada mês cada casal gera um novo casal, que se torna fértil a partir do segundo mês de vida?



Se você respondeu 144 casais, acertou!

Copie e preencha a tabela com os dados que você obteve.

Mês	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º
Número de casais	1	1	2								89	144

Os números que representam a quantidade de casais (1, 1, 2, ..., 144) formam uma sequência denominada **sequência de Fibonacci**, em homenagem ao matemático italiano Leonardo de Pisa (1180-1250), apelidado **Fibonacci** – cujo significado é filho de Bonacci –, que observou essa sequência na natureza e a descreveu. Tente descobrir a lei de formação ou expressão geral da sequência de Fibonacci. Uma dica: é uma fórmula de recorrência!

Você deve estar lembrado de que na unidade 1 apresentamos a razão áurea e vimos que dois números estão em razão áurea se a razão entre eles é o número irracional ϕ (fi) = 1,618... Mas o que a razão áurea tem a ver com a sequência de Fibonacci?

A conexão entre a razão áurea e a sequência de Fibonacci foi feita pelo matemático escocês Robert Simson (1687-1768). Ele observou que a razão entre termos consecutivos da sequência de Fibonacci se aproximava da razão áurea. Por exemplo: $\frac{144}{89} \cong 1,618$. Use sua calculadora e verifique este fato para outros termos da sequência. Você pode consultar a tabela dos casais de coelhos.

A sequência de Fibonacci aparece frequentemente na natureza, como no desdobramento dos galhos de uma árvore e na disposição das folhas ao redor do caule. O número de flores que formam o centro do girassol, de segmentos da superfície de uma pinha e de escamas de alguns peixes são também exemplos de números de Fibonacci, isto é, de números da sequência de Fibonacci.

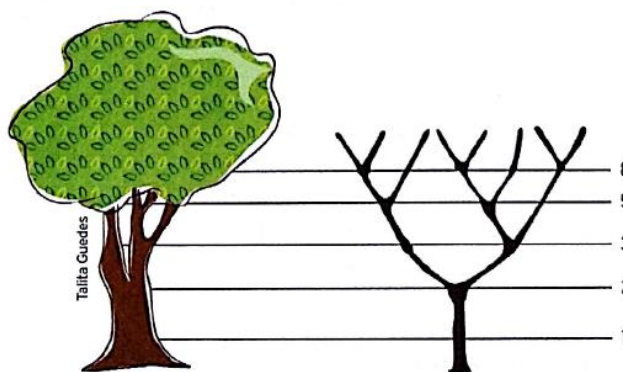


Figura 4.14 - A sequência de Fibonacci e a razão áurea

Fonte: Smole e Diniz, 2013, v. 1, p. 146-147.

A próxima menção, representada pela Figura 4.15, aparece no tópico Áreas de figuras planas, em forma de texto expositivo com questionamentos e, apresenta uma forma de calcular a área de um triângulo isósceles a partir da área de um retângulo.

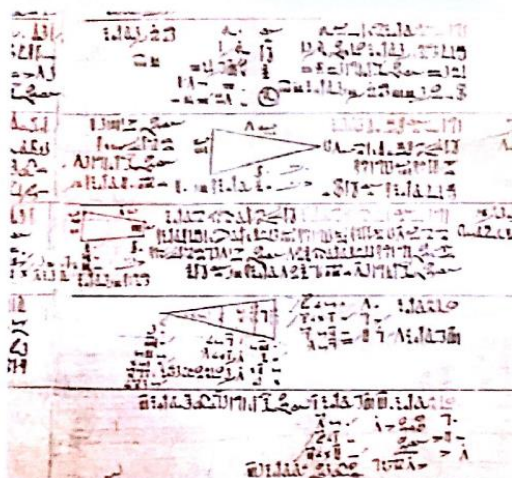
Como obter a área de um triângulo isósceles a partir de um retângulo?

Um dos mais antigos documentos com registros sobre o estudo da Matemática é um rolo de papiro de origem egípcia, com cerca de 0,30 m de altura por 5 m de comprimento, que atualmente encontra-se no British Museum, em Londres. Em 1858, esse papiro foi comprado por um antiquário escocês chamado Henry Rhind e, por isso, é conhecido como Papiro de Rhind ou, menos frequentemente, como Papiro de Ahmes, em homenagem ao escriba que o copiou, por volta de 1650 a.C.

Entre os problemas de Geometria que lá se encontram, há um, o de número 51, que consiste em se obter a expressão da área de um triângulo isósceles a partir da área de um retângulo.



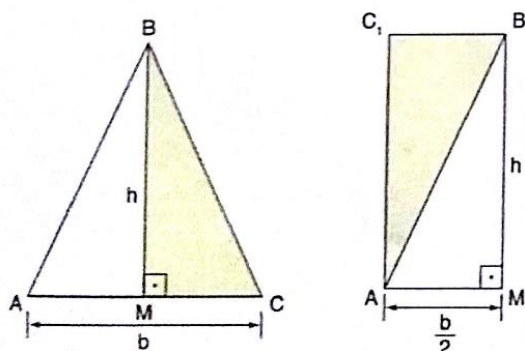
Henry Rhind.



British Museum, London. DeAgostini/Diomedea

Papiro de Rhind.

Ahmes descreve esse método sugerindo que todo triângulo isósceles pode ser dividido em dois triângulos retângulos congruentes, um dos quais pode ser deslocado para, junto com o outro, compor um retângulo, como mostram as figuras abaixo:



Assim, temos:

- $\triangle ABC$ isósceles e h = medida da altura relativa ao lado $\overline{AC} \Rightarrow M$ é ponto médio de $\overline{AC} \Rightarrow AM = \frac{b}{2}$;
- $\triangle AMB$ e $\triangle CMB$ são triângulos retângulos congruentes;
- $AMBC_1$ é um retângulo cujas dimensões são:

$$AM = \frac{b}{2} \text{ e } BM = h$$

$$\text{Logo: } A_{AMBC_1} = \frac{b}{2} \cdot h = \frac{b \cdot h}{2} = A_{ABC}$$

Pense nisto: Inspirando-se na solução apresentada para o problema 51, como você resolveria o problema 52, do Papiro de Rhind, em que a expressão da área de um trapézio isósceles é obtida a partir da área de um retângulo?



Figura 4.15 - Obtenção da área de um triângulo isósceles a partir de um retângulo

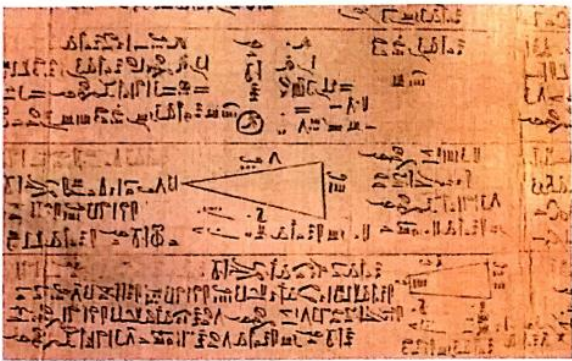
Fonte: Iezzi e outros, 2013, v. 2, p. 149.

Este tipo de menção pode proporcionar o raciocínio de formas de obter a expressão da área de um trapézio isósceles a partir da área de um retângulo.

O último exemplo deste agrupamento, representado pela Figura 4.16, foi retirado do tópico Áreas de figuras planas, em forma de atividade, e proporciona que o aluno raciocine sobre uma forma de obter a fórmula da área do círculo, além de pensar como obter uma aproximação de π .


É provável que por volta de 1650 a.C. o escriba Ahmes tenha copiado o Papiro de Rhind, uma das principais fontes de informações referentes à Matemática egípcia antiga, de um documento ainda mais antigo. O papiro é um texto matemático na forma de manual prático que contém 85 problemas. Ele foi adquirido no Egito pelo escocês Henry Rhind, sendo publicado em 1927. Tem cerca de 5,49 m de comprimento por cerca de 36 cm de altura.

Muitos dos problemas do Papiro de Rhind decorrem de fórmulas de mensuração necessárias para o cálculo de áreas de terras. Os problemas 48 e 50 podem dar uma pista de como os egípcios obtiveram a fórmula da área do círculo.



Fragmento do Papiro de Rhind.

Problema 48: "Compare a área do círculo com a do quadrado". Este é o único problema em que sua solução é geométrica.



Acevo da editora

Problema 50: "Exemplo de um corpo redondo de diâmetro 9. Qual é a sua área?"

Um escriba apresentou a seguinte solução a este problema: Remova $\frac{1}{9}$ do diâmetro, o restante é 8. Faça a multiplicação de 8 por 8. Portanto, a área é 64.

Em linguagem atual, temos:

"Para calcular a área do círculo, subtraia do diâmetro sua nona parte, e o restante eleve ao quadrado".

a) A partir do problema 50, é possível obter um valor para π que era utilizado pelos egípcios. Qual era essa aproximação?

b) De maneira geral, a quadratura do círculo ou o problema de construir um quadrado com área igual à de um círculo dado é um dos mais famosos problemas na história da Matemática. A importância desse problema reside no fato de que ele não pode ser resolvido com compasso e régua não graduada. Considerando um círculo de diâmetro d e a maneira pela qual os egípcios calculavam sua área, escreva uma relação entre o lado ℓ do quadrado e o diâmetro de um círculo de mesma área.

Figura 4.16 - O Papiro de Rhind e a aproximação para o valor de π

Fonte: Souza, 2013, v. 2, p. 204.

Podemos observar que as menções aqui agrupadas utilizam a HM como forma de propiciar aos estudantes o desenvolvimento de algum raciocínio ou procedimento, fato que contribui para a aprendizagem de conteúdos/conceitos matemáticos. Neste sentido, destacamos que esta forma de apresentação da HM deveria ser bastante utilizada.

Entretanto, enfatizamos que esta função foi a menos utilizada. Apenas 38 das 294 menções à HM foram apresentadas nesta perspectiva, tal fato está em consonância com Vianna (1995) que indica que este tipo de utilização da História da Matemática (como estratégia didática) não é muito utilizada em nossos livros didáticos.

➤ HM e a elucidação dos *porquês*

A função “HM e a elucidação dos *porquês*”, que desempenha o papel de apresentar a origem ou surgimento de certos conhecimentos matemáticos, foi identificada em 74 menções, e estão distribuídas pelas coleções analisadas conforme apresentado no Quadro 4.5, a seguir.

Quadro 4.5 - Distribuição das menções quanto à função didática “HM e a elucidação dos *porquês*” por Coleção

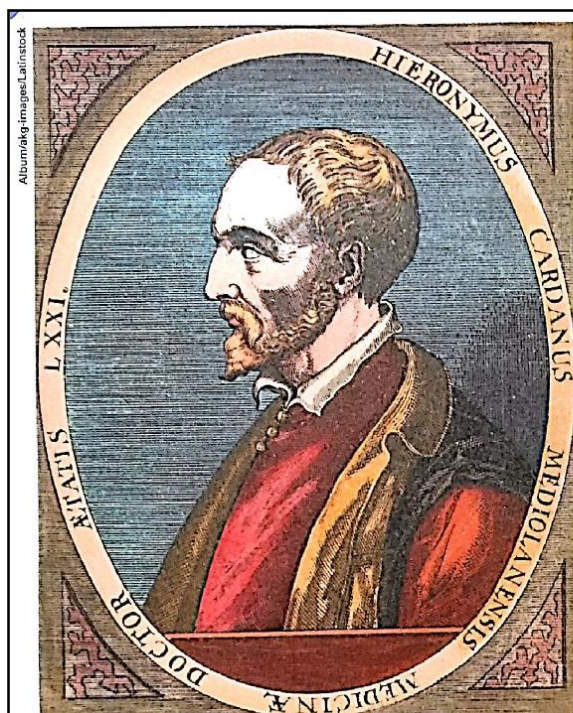
Função Didática	Coleção 1	Coleção 2	Coleção 3	Coleção 4	Coleção 5	Coleção 6
HM e a elucidação dos <i>porquês</i>	9	18	9	8	13	17

Fonte: Dados da pesquisa.

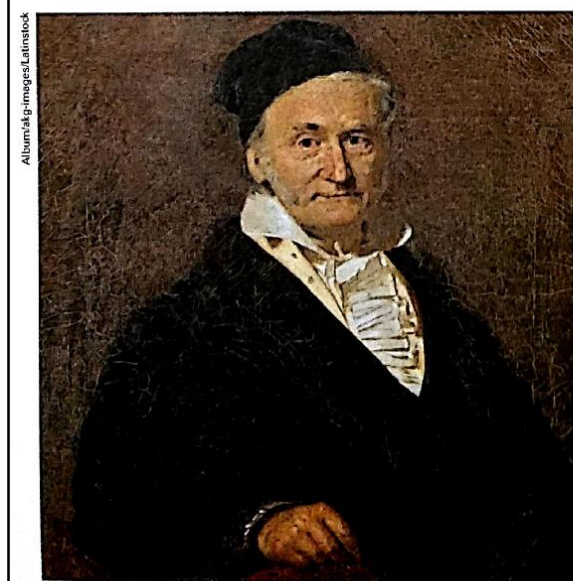
Observamos que, de todas as Coleções, a Coleção 2, seguida da Coleção 6, são as que mais apresentam menções exercendo a função “HM e a elucidação dos *porquês*”.

Para classificar as menções neste agrupamento, levamos em consideração a exposição da motivação para o desenvolvimento de alguma ideia/conceito matemático. Neste sentido, todas as menções aqui agrupadas tratam da origem de algum conhecimento matemático, ora abordando *como*, *por que* ou *em que circunstâncias* surgiu tal conceito. Ressaltamos que as menções que abordam somente quando surgiu o conceito, sem apresentar quaisquer dos três itens citados anteriormente, não foram classificadas neste agrupamento, mas sim como formação cultural. Isto se deve ao fato de que a menção, ao mostrar somente quando surgiu certo conhecimento, a nosso ver, não está contribuindo para o entendimento do porquê do surgimento do conhecimento em questão.

Interessante destacar que observamos que em todas as Coleções foi abordada a origem e motivação para o desenvolvimento dos números complexos. Para ilustrar, apresentamos um exemplo de menção que aborda a motivação para a construção dos números complexos, representada pela Figura 4.17:



Girolamo Cardano



Johann Carl Friedrich Gauss

Os números complexos apareceram no século XVI motivados pelas resoluções de equações de terceiro e quarto graus. Em 1545, o matemático italiano Girolamo Cardano (1501-1576) publicou seu famoso livro *Ars Magna*, no qual tratava da resolução da equação de terceiro grau do tipo $x^3 + ax + b = 0$.

O problema “Qual é a medida x , comum à aresta de um cubo e à altura de um paralelepípedo com base 15 unidades de área, sabendo que a diferença entre seus volumes é de 4 unidades?” corresponderia à equação $x^3 - 15x = 4$, e, aplicando-se uma fórmula deduzida por ele, apareceria a solução 4, obtida da expressão $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$. Cardano se perguntava como um número real poderia se originar de uma expressão que continha raízes de números negativos se estas não existiam. O mais curioso é que era possível operar com esses números “esquisitos”, mesmo que não tivessem sentido, pois matematicamente os problemas davam certo.

Mais tarde, o matemático italiano Rafael Bombelli (1526-1572) estudou o trabalho de Cardano e verificou que realmente esses números “funcionavam”. Sua representação sofreu variações no decorrer do tempo, até que foram escritos na forma de produto por $\sqrt{-1}$, como $\sqrt{-121} = 11\sqrt{-1}$.

No século XVIII, Leonhard Euler (1707-1783) introduziu o símbolo i para representar a raiz quadrada de -1 . Assim, $\sqrt{-121}$ passou a ser expresso por $11i$.

Finalmente, a representação geométrica dos números complexos elaborada pelo matemático, astrônomo e físico alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), no final do século XVIII, tornou mais significativo seu estudo e sua aplicabilidade.

Neste capítulo estudaremos a construção do conjunto dos números complexos, definindo suas operações e representações, expandindo o que já foi estudado no capítulo 1 do volume 1.

Figura 4.17 - A construção dos números complexos

Fonte: Dante, 2013, v.3, p.144.

Esta menção foi retirada do início da apresentação do conteúdo Números Complexos. Nela é exposta a origem desses números e a dificuldade de sua compreensão pelos matemáticos. Além de mostrar a motivação para o surgimento e a aceitação dos números complexos, apresenta, também, a introdução do símbolo i para representar a raiz quadrada de -1 , ou seja, mostra o significado do símbolo i .

Este tipo de abordagem é importante, uma vez que, a partir dessa menção, é possível que o aluno atribua maior significado ao conteúdo matemático em questão. Além disso, pode contribuir para mostrar que a matemática está em constante desenvolvimento.

A menção a seguir, representada pela Figura 4.18, aparece no tópico referente aos Números Irracionais, complementa e faz referência a outra menção sobre esses números, que traz a forma como os pitagóricos se depararam com um novo tipo de número: os números incomensuráveis.

A crise dos irracionais

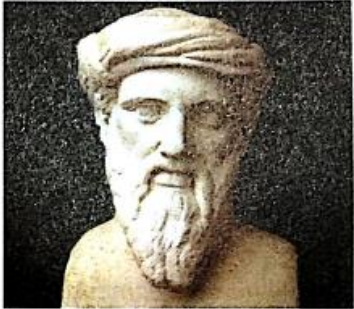
Como já dito anteriormente, os pitagóricos acreditavam que, tomando-se quaisquer dois segmentos, eles seriam comensuráveis. Para eles, o dogma de sua doutrina, "TUDO É NÚMERO", referia-se aos números racionais, já que eles não concebiam a existência de outros números que não fossem racionais (inteiro ou fração).

Assim, como estudamos, ao medirem a diagonal de um quadrado cujos lados medem 1 unidade de comprimento, os pitagóricos se depararam com o número irracional $\sqrt{2} = 1,414213562\dots$, ou seja, descobriram que o lado desse quadrado e sua diagonal são segmentos incomensuráveis.


Essa descoberta causou, na época, grande constrangimento, pois punha por terra um dos dogmas centrais dos pitagóricos: "TUDO É NÚMERO" (racional).

Conta-se que Pitágoras proibiu seus discípulos de divulgar tal descoberta para não abalar a sua doutrina, mas um deles, Hipaso, quebrou o voto de silêncio e foi, por isso, duramente punido.

A resistência aos números irracionais prosseguiu por vários séculos, até que, no fim do século XIX, o matemático George Cantor fundamentou-os adequadamente.



Busto de Pitágoras



George Cantor

Figura 4.18 - Os pitagóricos e os números incomensuráveis

Fonte: Dante, 2013, v.1, p. 22.

Através dessa menção, além do conhecimento de como surgiram os números irracionais, o aluno tem a possibilidade de observar o quanto a Matemática é falível. A menção nos mostra que os pitagóricos, ao acreditarem que qualquer segmento seria comensurável, percebiam nisso uma verdade, até se depararem com os números incomensuráveis, e como a própria menção nos apresenta, isto causa uma crise na doutrina. A menção também nos traz, além da questão da crise na doutrina, um longo processo, que levou séculos, até estes números serem adequadamente fundamentados e finalmente aceitos.


Nesse sentido, este tipo de abordagem está em consonância com Brolezzi (1991), que afirma que, como exemplo da história da Noção de Número, pode ser apresentada a questão da

crise da Escola Pitagórica perante aos incomensuráveis, além da dificuldade da apreensão do significado destes, já que a incorporação dos incomensuráveis fez alterar o significado de Número.

Assim, segundo o autor, da mesma forma que os matemáticos enfrentaram dificuldades na compreensão desse assunto, os alunos provavelmente também enfrentarão. Nesse caso, compreender o desenvolvimento “dos significados ao longo da História é fundamental para a elaboração de um ensino com significado, pois permite que se construam novamente os significados junto com os alunos” (p. 52).

Além disso, baseado em Tzanakis e Arcavi (2000), entendemos que esta menção poderá possibilitar o entendimento de que os erros, as dúvidas, incertezas, controvérsias, são partes integrantes da atividade matemática, além da visão de que a Matemática está em constante desenvolvimento.

A menção seguinte, representada pela Figura 4.19, aparece no decorrer do conteúdo Logaritmos e trata dos estudos de Napier, que resultou na teoria dos logaritmos.



John Napier, criador dos logaritmos.
Gravura, cerca de 1600.

Em que estágio estaria hoje o conhecimento astronômico se o matemático e astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630) tivesse tido à sua disposição uma dessas modernas calculadoras eletrônicas, tão comuns no nosso dia a dia?

Essa questão provoca algumas reflexões interessantes, por exemplo: o tempo despendido por Kepler em cálculos desgastantes como $3,25694 \cdot 1,78090$ ou $3,25694 : 1,78090$, tão frequentes em estudos astronômicos, poderia ter sido empregado em pesquisas, e talvez tivéssemos hoje uma *quarta lei de Kepler*.

Até o século XVII, cálculos envolvendo multiplicações ou divisões eram bastante incômodos, não só na Astronomia mas em toda ciência que tratasse de medidas. O escocês John Napier (1550-1617), também conhecido como Neper, preocupou-se seriamente em simplificar esses cálculos e, após vinte anos de pesquisa, publicou, em 1614, o resultado de seus estudos, apresentando ao mundo a **teoria dos logaritmos**. O princípio básico dos logaritmos é: **transformar uma multiplicação em adição ou uma divisão em subtração**, pois adicionar ou subtrair números é normalmente mais rápido que multiplicá-los ou dividi-los.

A ideia de Neper é relativamente simples: representam-se os números positivos como potências de um mesmo número. Por exemplo, cada coluna da tabela abaixo apresenta um número e a respectiva representação como potência de base 10. Assim, na primeira coluna, temos $1,78090 = 10^{0,25064}$.

Número	1,78090	1,82881	3,25694	5,80029
Potência de base 10	$10^{0,25064}$	$10^{0,26217}$	$10^{0,51281}$	$10^{0,76345}$

Figura 4.19 - Napier e a teoria dos logaritmos

Fonte: Paiva, 2013, v. 1, p. 230.

Esta menção apresenta a criação dos logaritmos, como uma necessidade de facilitar os cálculos da época, por Napier. Esta menção também mostra que Napier levou 20 anos de estudo


para chegar à teoria dos logaritmos, ou seja, a teoria dos logaritmos não foi “descoberta” por um gênio, mas foi desenvolvida por um estudioso empenhado em desenvolvê-la.

Este tipo de abordagem contribui para desmistificar a visão equivocada de que o conhecimento matemático aparece como obra de gênios alienados e desvinculados dos problemas do mundo (VALDÉS, 2006).

A próxima menção, representada pela Figura 4.20, aparece no decorrer do conteúdo de Probabilidade. Nela é apresentado o início do estudo sobre a teoria da probabilidade que teve como motivação inicial o estudo de jogos de azar.

Os primeiros registros ligados à teoria da probabilidade aparecem na obra do italiano Girolamo Cardano (1501-1576), sobre jogos de azar. Cerca de cem anos depois, Blaise Pascal deu novo impulso ao desenvolvimento da teoria da probabilidade, por meio das cartas que trocou com Pierre de Fermat (1601-1665), em que discutiam problemas ligados a jogos. Em sua obra sobre o triângulo aritmético, datada de 1654, há também alguns tópicos sobre probabilidade.

Retrato de Girolamo Cardano entalhado em cobre no século XVI.
Colorido posteriormente, autoria desconhecida.



No entanto, o primeiro artigo completo sobre o assunto só foi escrito em 1713, por Jacques Bernoulli, na obra *Ars Conjectandi* (*Arte de conjecturar*), que continha, inclusive, uma detalhada exposição sobre permutações e combinações. A partir de então, outros matemáticos dariam valiosas contribuições para o desenvolvimento da teoria das probabilidades, cujas aplicações em áreas como biologia, economia, saúde, tábuas atuariais, etc. não tardariam a ser reconhecidas.

Ilustração de Jacques Bernoulli feita a partir de uma gravura histórica. Data e autoria desconhecidas.


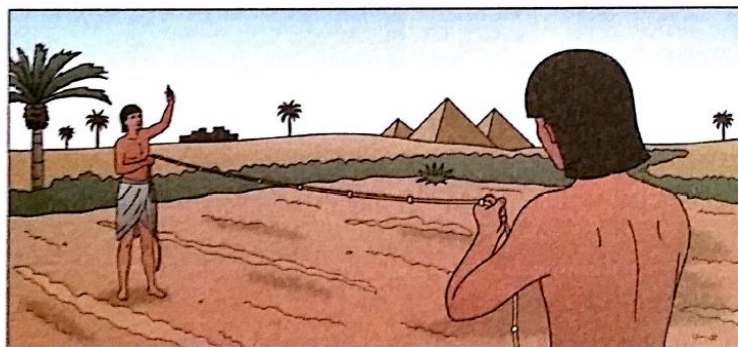


Figura 4.20 - A origem do estudo da probabilidade

Fonte: Iezzi e outros, 2013, v. 2, p. 285.

A menção a seguir, representada pela Figura 4.21, aparece no tópico Área de figuras planas, e mostra a origem desses cálculos, com a utilização destes por antigas civilizações, por necessidades práticas de demarcação de terras.

O conceito de área já era utilizado pelos egípcios há milhares de anos. Na época das cheias, quando as águas do rio Nilo começavam a subir, era inundada uma região ao longo de suas margens. Após as águas baixarem, as margens ficavam cobertas por uma lama contendo vários nutrientes, que tornava o solo mais fértil para o cultivo. No entanto, ao baixarem as águas, as demarcações que delimitavam as propriedades eram desfeitas, sendo necessária a realização de novas medições.



Essas medições eram realizadas pelos antigos agrimensores egípcios, que utilizavam cordas com vários nós, em que a distância entre um nó e outro indicava uma unidade de medida de comprimento.

Muitos dos registros envolvendo o cálculo de áreas podem ser encontrados no papiro de Rhind, importante documento egípcio de cerca de 1650 a.C.

Figura 4.21 - A origem do conceito de área

Fonte: Souza, 2013, v. 2, p. 184.

Diante dos exemplos apresentados, podemos perceber que este tipo de utilização da HM pode contribuir para uma mudança de percepção equivocada relativa a Matemática, que diz respeito à “visão aproblemática e ahistórica, que transmite conhecimentos já elaborados como fatos assumidos sem mostrar os problemas que geraram sua construção” (VALDÉS, 2006, p. 19).

Além disto, este tipo de utilização pode contribuir para o ensino de Matemática já que, segundo Tzanakis e Arcavi (2000), a aprendizagem de um conceito matemático, poderá ser enriquecida a partir da familiaridade com a motivação para o surgimento de tal ideia, noção ou conteúdo matemático.

Nesse sentido, este tipo de utilização da HM pode contribuir para transmitir um sentido ao conteúdo a ser aprendido pelo estudante, na medida em que mostra a Matemática como ciência em desenvolvimento, às vezes vinculado às questões utilitárias, e às vezes vinculado às questões intrínsecas à própria ciência Matemática.

➤ **HM e a elucidação do *para que*?**

A função “HM e a elucidação do *para que*”, que desempenha o papel de mostrar a utilidade da Matemática ao longo do tempo, e suas aplicações na própria Matemática e em outras áreas do conhecimento, foi identificada em 23 menções, e está distribuída conforme apresentado no Quadro 4.6, a seguir, por Coleção:

Quadro 4.6 - Distribuição das menções quanto à função didática “HM e a elucidação do *para que*?” por Coleção

Função Didática	Coleção 1	Coleção 2	Coleção 3	Coleção 4	Coleção 5	Coleção 6
HM e a elucidação do <i>para que</i>	2	8	3	4	3	3

Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos que, de todas as Coleções, a Coleção 2 é a que mais apresenta menções exercendo a função “HM e a elucidação do *para que*”.

As menções aqui agrupadas tratam, por exemplo, da aplicação das cônicas na Astronomia, a medida da circunferência da Terra, o número de ouro e sua aplicação nas Artes e Arquitetura, etc.

Apresentamos a seguir exemplos de menções deste agrupamento:

A menção apresentada a seguir, representada pela Figura 4.22, aparece no tópico referente ao estudo do Triângulo retângulo, e trata da resolução de problemas de Astronomia via conhecimentos matemáticos, como por exemplo, o cálculo da razão entre as distâncias Terra-Sol e Terra-Lua realizados por Aristarco de Samos.

Encontrar caminhos matemáticos para a resolução de problemas de astronomia, agrimensura, navegação e construção sempre despertou o interesse do ser humano. Desse tipo de especulação nasceu a Trigonometria, parte da Matemática que se dedica ao estudo das relações entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo.

O grego Aristarco de Samos (310-230 a.C.), considerado por muitos o primeiro grande astrônomo da história, fez uso das ideias da Trigonometria ao estabelecer um método geométrico para investigar a razão entre as distâncias Terra-Sol e Terra-Lua.

Seus cálculos partiram da observação de que, quando a Lua está no quarto crescente – ocasião em que exatamente metade dela aparece iluminada pelo Sol –, o triângulo TSL (sendo T um observador na Terra, S o centro do Sol e L o centro da Lua) é retângulo em L , como mostra o esquema ao lado.

Aplicando os conhecimentos da época, Aristarco observou que o ângulo entre as linhas de vista da Terra ao Sol e da Terra à Lua era $\frac{29}{30}$ de um ângulo reto (ou seja, $\beta = 87^\circ$). Na linguagem atual, isso significa que a razão entre as distâncias Terra-Lua e Terra-Sol é $\text{sen } 3^\circ$. Como ainda não haviam sido desenvolvidas tabelas trigonométricas, Aristarco recorreu a outros recursos para concluir que essa razão $\left(\frac{TL}{TS}\right)$ estava entre $\frac{1}{20}$ e $\frac{1}{18}$, e daí concluiu que a razão entre as distâncias Terra-Sol e Terra-Lua estaria entre 18 e 20.

Hoje, sabemos que esse valor é pouco menor que 400, o que significa que a distância Terra-Sol é cerca de 400 vezes a distância Terra-Lua. A grande diferença entre esse valor e o encontrado por Aristarco está relacionada ao ângulo β , cuja medida correta é de aproximadamente $89^\circ 50'$. Mesmo assim, o raciocínio de Aristarco foi perfeito.

Figura 4.22 - Aristarco de Samos e o cálculo da razão entre as distâncias Terra-Sol e Terra-Lua

Fonte: Leonardo, 2013, v. 1, p. 258.

A menção seguinte, representada pela Figura 4.23, aparece no final da exposição do conteúdo Geometria Espacial, e mostra a contribuição dos conhecimentos da Geometria, através de suas aplicações na Astronomia em diferentes períodos históricos. Além disso, apresenta a Geometria como uma construção humana, surgindo através de necessidades práticas.

A Geometria e o conhecimento científico

A Geometria, ao longo de toda a sua história, acompanhou o ser humano na busca pelo conhecimento da natureza que o cerca. Quando a civilização grega chegou ao ápice, os gregos assumiram o desenvolvimento da Geometria. Passaram a privilegiar o conhecimento dedutivo e não o empírico, como ocorria até então. E questões que sempre intrigaram a humanidade, como o tamanho do raio da Terra, a distância da Terra à Lua ou da Terra ao Sol, já estimadas em outras épocas por outros sábios, passaram, a partir de então, a ser tratadas com o auxílio dos conhecimentos geométricos.

Com o fim da hegemonia grega, o mundo passou por quase 15 séculos de trevas. Apenas com a queda de Constantinopla e o início do Renascimento, os textos gregos voltaram à Europa, trazidos pelos que fugiam da invasão turca. E, com o seu ressurgimento, também voltaram as contribuições da Geometria aos outros campos do conhecimento científico.

Eis alguns bons exemplos de contribuições da Geometria à ciência ao longo do tempo:

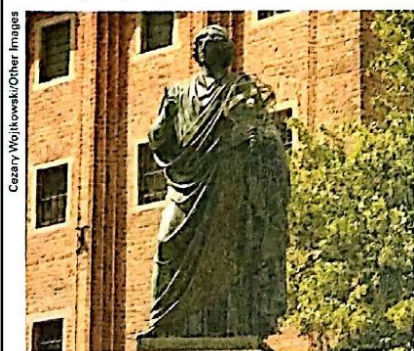
O grego Aristarco de Samos (310 a.C.-230 a.C.) foi brilhante em perceber como comparar as distâncias da Terra à Lua e da Terra ao Sol usando triângulos retângulos, semelhanças de triângulos e proporções.

Eratóstenes (276 a.C.-196 a.C.) não era grego, mas estudou em Atenas e viveu em Alexandria, importante centro cultural da época. Ficou conhecido por sua versatilidade e por uma engenhosa ideia para calcular o raio da Terra, baseado na proporcionalidade entre medida e comprimento de arcos, nos ângulos correspondentes em paralelas cortadas por transversais e na razão entre comprimento da circunferência e seu diâmetro.”

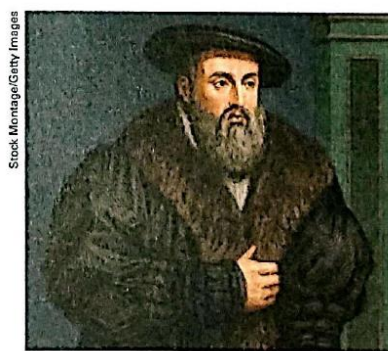
O polonês Nicolau Copérnico (1473-1543) retomou as hipóteses heliocêntricas de Aristarco (que na época não vingaram) e elaborou toda uma teoria em que os planetas teriam órbitas circulares em torno do Sol, calculando os períodos de revolução dos planetas e suas distâncias até o Sol, com base na proporcionalidade de arcos e semelhança de triângulos (já na forma de Trigonometria).”

O alemão Johannes Kepler (1571-1630) aperfeiçoou as ideias de Copérnico ao afirmar que as órbitas planetárias são na verdade elípticas e apresentou as três leis que hoje conhecemos como “leis de Kepler”, repletas de proporcionalidades, áreas e elipses.

A Geometria que estudamos hoje é essencialmente a mesma que serviu de alicerce para que os estudiosos do passado conseguissem cada vez mais adquirir conhecimento e entender melhor a natureza que nos cerca. Se hoje sabemos muito sobre ela e seus fenômenos, isso é resultado do esforço e da dedicação de muitos sábios da Antiguidade, alguns dos quais considerados os maiores astrônomos, geômetras ou matemáticos de suas épocas.



Monumento em homenagem a Nicolau Copérnico esculpido por Bertel Thorvaldsen, localizado na cidade de Torun na Polônia.



Johannes Kepler (1571-1630).

Figura 4.23 - A Geometria e o conhecimento científico

Fonte: Dante, 2013, v. 2, p. 235.

A próxima menção, representada pela Figura 4.24, aparece no conteúdo referente ao estudo das Cônicas e trata do estudo das cônicas por Apolônio, que, em sua época, não se mostrou útil, mas que mais tarde, teve várias aplicações.

Da origem das cônicas às suas aplicações atuais

O mais completo tratado sobre as cônicas foi escrito pelo matemático e astrônomo grego Apolônio de Perga, por volta de 225 a.C., embora elas já tivessem sido estudadas antes dele.

A obra *As cônicas*, de Apolônio, foi duramente criticada por alguns sábios de sua época, que encaravam esse estudo como puro deleite do autor, sem nenhum interesse no mundo real. O tempo se incumbiu de mostrar que esses sábios estavam enganados: por volta de 1605, o astrônomo alemão Johannes Kepler descobriu que os planetas descrevem órbitas **elípticas** em torno do Sol; em 1632, Galileu Galilei descreveu como **parabólica** a trajetória de projéteis lançados obliquamente para cima; em 1662, Robert Boyle descobriu que, sob temperatura constante, a função que expressa a relação entre o volume de uma massa fixa de gás e a pressão exercida sobre ela é **hiperbólica**. Constatamos, ainda, a presença das cônicas em muitas outras situações do mundo real, como na construção de antenas, espelhos e lentes parabólicos ou hiperbólicos; na construção de pontes pênséis; nas trajetórias elípticas, parabólicas ou hiperbólicas de astros celestes; em Economia, no estudo da curva parabólica de possibilidades de produção etc.

Figura 4.24 - Apolônio, o estudo das cônicas e suas aplicações

Fonte: Paiva, 2013, v. 3, p. 108.

Esta menção mostra um exemplo de que nem todo o conhecimento Matemático tem uma aplicação imediata. As cônicas, por exemplo, quando foram estudadas, a princípio, não tinham uma motivação prática e tampouco aplicação. Porém, após muito tempo, estas ideias foram aplicadas nos estudos astronômicos de Galileu e Kepler.

Além disto, este tipo de menção nos mostra que o desenvolvimento de certos conhecimentos matemáticos nem sempre ocorre incentivado por questões utilitárias, mas também por questões internas, intrínsecas à Matemática enquanto ciência.

A menção seguinte, representada pela Figura 4.25, foi retirada do conteúdo Logaritmos e trata da teoria dos logaritmos estudada por Napier, com vistas a facilitar cálculos com números grandes. Esta menção mostra também que atualmente a aplicação dos logaritmos não é a mesma de quando foram apresentados por Napier.

A invenção dos logaritmos

Credita-se ao escocês John Napier (1550-1617) a descoberta dos logaritmos, embora outros matemáticos da época, como o suíço Jobst Bürgi (1552-1632) e o inglês Henry Briggs (1561-1630), também tenham dado importantes contribuições.

A invenção dos logaritmos causou grande impacto nos meios científicos da época, pois eles representavam um poderoso instrumento de cálculo numérico que impulsionaria o desenvolvimento do comércio, da navegação e da Astronomia. Até então, multiplicações e divisões com números muito grandes eram feitas com auxílio de relações trigonométricas.

Basicamente, a ideia de Napier foi associar os termos da sequência $(b; b^2; b^3; b^4; b^5; \dots; b^n)$ aos termos de outra sequência $(1, 2, 3, 4, 5, \dots, n)$, de forma que o produto de dois termos quaisquer da primeira sequência $(b^x \cdot b^y = b^{x+y})$ estivesse associado à soma $x + y$ dos termos da segunda sequência.

Veja um exemplo:

①	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
②	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16394	32788

Para fazer $512 \cdot 64$ note que:

- o termo 512 de ② corresponde ao termo 9 de ①;
- o termo 64 de ② corresponde ao termo 6 de ①;
- assim, a multiplicação $512 \cdot 64$ corresponde à soma de $9 + 6 = 15$ em ①, cujo correspondente em ② é 32788, que é o resultado procurado.

Em linguagem atual os elementos da 1ª linha da tabela correspondem ao logaritmo em base 2 dos respectivos elementos da 2ª linha da tabela.

Em seu trabalho *Descrição da maravilhosa regra dos logaritmos*, datado de 1614, Napier considerou uma outra sequência de modo que seus termos eram muito próximos uns dos outros.

Ao ter contato com essa obra, Briggs sugeriu a Napier uma pequena mudança: uso de potências de 10. Era o surgimento dos logaritmos decimais, como conhecemos até hoje.

Durante um bom tempo os logaritmos prestaram-se à finalidade para a qual foram inventados: facilitar cálculos envolvendo números muito grandes (veja observação na página 167). Com o desenvolvimento tecnológico e o surgimento de calculadoras eletrônicas, computadores, etc., essa finalidade perdeu a importância.

No entanto, a função logarítmica (que estudaremos neste capítulo) e a sua inversa, a função exponencial, podem representar diversos fenômenos físicos, biológicos e econômicos (alguns exemplos serão aqui apresentados) e, deste modo, jamais perderão sua importância.



Frontispício da obra de Napier sobre logaritmos datada de 1614.

Figura 4.25 - A utilidade dos logaritmos

Fonte: Iezzi e outros, 2013, v. 1, p. 164.

Desta forma, esta menção mostra um exemplo de que a aplicação de certos conhecimentos matemáticos pode mudar ao longo do tempo.

Já a menção representada pela Figura 4.26, que foi extraída do conteúdo Conjuntos numéricos, apresenta uma aplicação da matemática nas Artes. Para tal, apresenta como exemplos a obra *Mona Lisa* e *Homem Vitruviano*. Além disto, esta menção mostra que o número áureo pode ser encontrado com muita frequência na natureza.

Resolvendo a equação na variável x , temos:

$$x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 + 4m^2}}{2} = \frac{m \pm m\sqrt{5}}{2} = \frac{m(1 \pm \sqrt{5})}{2}$$

Como x é número positivo, o sinal negativo não deve ser considerado e

$$\frac{x}{m} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Esse número é conhecido como **número áureo**.

O retângulo com essa propriedade chama-se **retângulo áureo** e foi utilizado pelos gregos em sua arquitetura e em muitas obras clássicas do Renascimento, como a *Mona Lisa*, do italiano Leonardo da Vinci (1452-1519).

Arquitetos e pintores de várias gerações têm considerado o retângulo áureo uma forma cujas dimensões apresentam uma relação perfeita e harmoniosa.

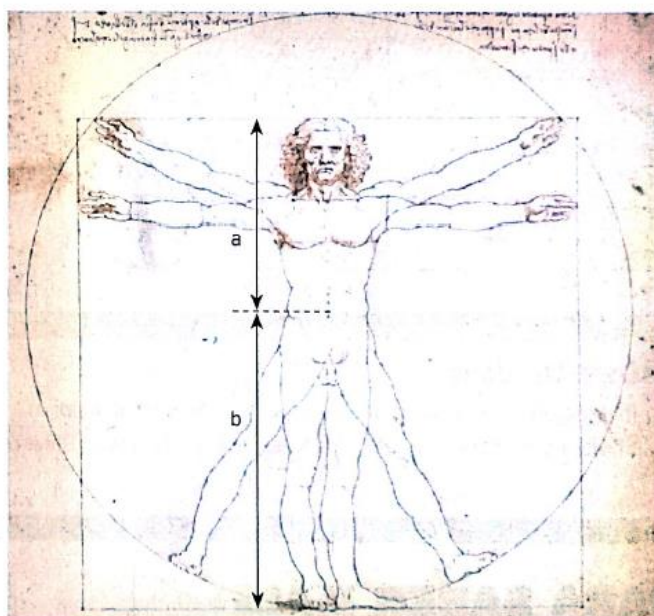
O número áureo, também conhecido como **razão áurea**, pode ser encontrado com muita frequência na natureza. Ele está presente em muitos padrões harmônicos. Esses padrões se manifestam no crescimento das plantas, nos insetos, nos animais, nas proporções do corpo humano.

Um dos primeiros estudiosos sobre as proporções humanas foi Marcus Vitruvius Pollio, arquiteto e escritor romano do século I. Esse estudioso alegava que um corpo bem formado devia apresentar proporções harmoniosas. Observe a interpretação que Leonardo da Vinci fez das ideias de Vitruvius, quase quinze séculos mais tarde.

Famoso desenho de Leonardo da Vinci, *Homem vitruviano*, com destaque para uma das proporções áureas no corpo humano.



Mona Lisa, pintura sobre madeira feita por Leonardo da Vinci entre 1503 e 1506.



Leonardo da Vinci. The proportions of the human figure (after Vitruvius), c. 1492/ Thinkstock/Getty Images/Galleria dell'Accademia, Venice

Figura 4.26 - O número áureo e sua aplicação nas Artes

Fonte: Smole e Diniz, 2013, v. 1, p. 24.

Diante dos exemplos apresentados, podemos perceber que esta forma de utilização da HM, que apresenta as contribuições e aplicações do conhecimento matemático ao longo do tempo, contribui para a desmistificação da visão da Matemática como uma ciência isolada, mostrando que ela possui relações com as necessidades sociais e também com outras áreas do conhecimento.

➤ HM e formação cultural

A função “HM e formação cultural”, que desempenha o papel de fornecer informações de cunho geral, não relacionada diretamente à aprendizagem de algum conteúdo matemático,

porém ligada à Matemática, foi identificada em 159 menções, e está distribuída conforme apresentado no Quadro 4.7, a seguir, por Coleção:

Quadro 4.7 - Distribuição das menções quanto à função didática “HM e formação cultural” por Coleção

Função Didática	Coleção 1	Coleção 2	Coleção 3	Coleção 4	Coleção 5	Coleção 6
HM e formação cultural	16	31	22	19	24	47

Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos que, de todas as Coleções analisadas, a Coleção 6 é a que mais apresenta menções exercendo a função “HM e formação cultural”.

As menções aqui agrupadas tratam, quase em sua totalidade, de atribuição de autoria, ou seja, de apresentar a relação criação/nome do “matemático”. Na maioria dos casos, estas menções expõem um retrato de algum matemático, acompanhado de um texto explicativo que apresenta informações relacionadas a este “matemático” e suas contribuições para o desenvolvimento da matemática.

Apresentamos a seguir exemplos de menções deste agrupamento:

A menção representada pela Figura 4.27 aparece no capítulo Poliedros e trata de um selo comemorativo, de 1983, mostrando a relação de Euler.



Figura 4.27 - Selo em homenagem a Euler.

Fonte: Leonardo, 2013, v. 2, p. 139.

A menção representada pela Figura 4.28 foi retirada do conteúdo Conjuntos e trata da representação de conjuntos por meio do diagrama de Venn, e seu criador, John Venn (1834-1923).



Figura 4.28 - Diagrama de Venn

Fonte: Dante, 2013, v.1, p. 27.

A menção representada pela Figura 4.29 foi extraída do conteúdo sobre as Cônicas, e trata de uma ilustração da trajetória parabólica realizada por Galileu em seus estudos no século XVI.

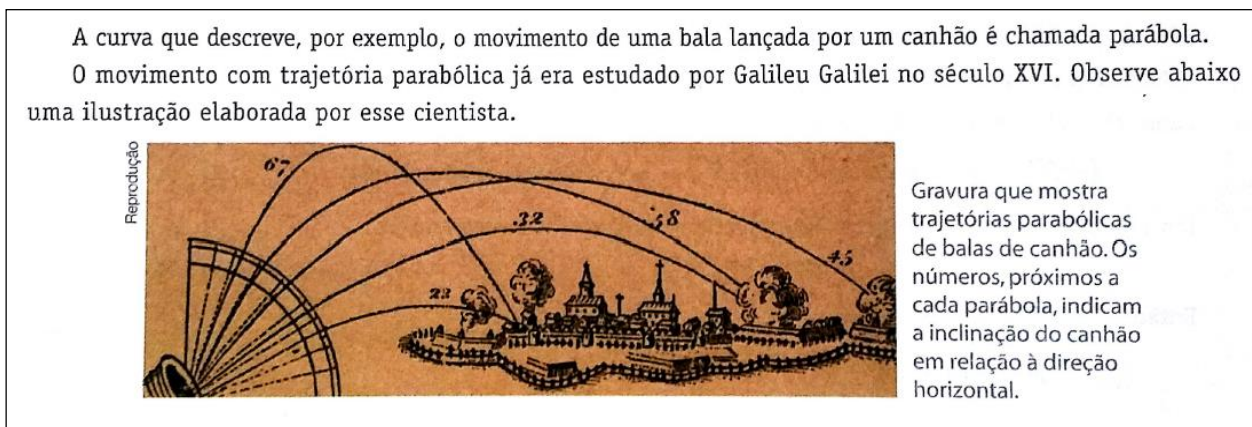


Figura 4.29 - Ilustração da trajetória parabólica por Galileu

Fonte: Iezzi e outros, 2013, v. 3, p. 108.

A menção representada pela Figura 4.30 foi retirada do conteúdo Trigonometria. Esta menção apresenta Tales de Mileto como o primeiro dos “sete sábios” da Grécia Antiga e expõe fatos de sua vida e algumas contribuições para a Matemática.

Tales de Mileto (640-546 a.C.) é conhecido como o primeiro dos "sete sábios" da Grécia Antiga.

Considerado o primeiro filósofo, é a ele que se atribui a introdução na Grécia do estudo de Geometria. Era um homem de reconhecida inteligência, que se dedicou a diversas atividades. Foi comerciante, homem de Estado, filósofo, engenheiro, astrônomo e matemático. Em sua meia-idade, dedicou-se ao comércio e suas atividades o levaram ao Egito, onde estudou as ciências físicas e matemáticas com os sacerdotes. Os historiadores da época relatam que Tales não demorou a superar seus mestres e a conquistar a admiração do rei Amásis, por ter sido capaz de medir as alturas das pirâmides a partir das sombras daqueles monumentos.

As aplicações da Geometria em situações práticas foram um de seus grandes feitos. Ele usou conhecimentos sobre triângulos semelhantes para calcular distâncias inacessíveis, como a distância de navios à praia.

Com Tales tem início o estudo científico da Astronomia. Ele se tornou célebre ao prever um eclipse solar, que viria a ocorrer em 585 a.C. Conta-se dele que, enquanto caminhava durante uma noite contemplando as estrelas, caiu em um fosso. Uma senhora que o acudiu comentou: "Como pode saber das coisas do céu quando não sabe o que passa sob seus pés?".

Figura 4.30 - Tales de Mileto, o primeiro dos "sete sábios" da Grécia Antiga

Fonte: Smole e Diniz, 2013, v. 1, p. 235.

Salientamos que as menções classificadas nesta função representam mais da metade das menções históricas identificadas. Destacamos que esta não é a forma mais desejável de utilização da HM no ensino de Matemática, pois nestas menções são apresentadas informações apenas a título de curiosidade, que não contribuem para a construção do conhecimento matemático pelo estudante.

Nesse sentido, Valdés (2006) expõe que o conhecimento histórico não deve ser exposto em forma de historietas ou anedotas, como forma de curiosidade, apenas para entreter o aluno. Este autor ainda reforça que "[...] relacionar um nome e uma data com uma ideia, conceitos ou procedimentos não é suficiente" (p. 25).

Por outro lado, ainda que essa forma de utilização da HM não seja a mais desejável, concordamos com Fossa (2008) que expõe que a apresentação deste tipo de informação desempenha a função de proporcionar um primeiro contato do aluno com a HM, contribuindo para a formação cultural deste.

Assim, em que pese o fato de que esta não é, de acordo com a literatura especializada, a abordagem mais adequada para a utilização da HM em sala de aula, destacamos que se trata de "[...] uma tentativa incipiente de aproveitar da mesma para fins pedagógicos" (FOSSA, 2008, p. 09).

Nesse sentido, entendemos que esta forma de utilização da HM, enquanto formação cultural dos alunos, é uma tentativa (mesmo que incipiente), de introduzir a HM nos livros didáticos.


Destacamos, também, que a apresentação destas informações no livro didático, pode contribuir para uma visão da Matemática como construção humana. Porém, deve-se ser cauteloso ao apresentar somente a imagem do “matemático” com informações biográficas ou a relação criação/autoria, pois desta forma, pode-se colaborar para uma visão equivocada dos matemáticos como gênios, “[...] fechados em ambientes e alheios à necessária tomada de decisão” (VALDÉS, 2006, p. 19).

Com base nas informações expostas sobre as funções didáticas desempenhadas pelas menções históricas identificadas nas coleções, podemos afirmar que há muito que ser feito, para que a incorporação da HM nos livros didáticos seja feita da melhor forma possível, de modo a contribuir efetivamente para o desenvolvimento e a compreensão dos conteúdos matemáticos.

A forma como a utilização da HM foi apresentada nestas coleções não se mostrou como a melhor, já que a maioria das menções apresentaram apenas informações de cunho geral, que não estão contribuindo, de certa forma, para a compreensão dos conteúdos matemáticos. Entendemos que este tipo de menção também é importante, porém, o ideal, é que menções exercendo as outras três funções apareçam com mais frequência.

Porém, destacamos que a presença da HM nestas coleções já indica uma preocupação em sua utilização. Neste sentido, reforçamos o fato de que a utilização da HM nos livros didáticos seja aperfeiçoada cada vez mais.

Embora não seja um dos objetivos do nosso trabalho, cabe mencionar, ainda, que algumas menções à HM localizadas nos livros didáticos analisados apresentam informações históricas distorcidas. Apresentamos a seguir um exemplo que ilustra essa situação, representado pela Figura 4.31.



MUSEU DO LOUVRE, PARIS

Gravura de René Descartes, que rompeu com as tradições clássicas da Geometria grega e criou a Geometria analítica.

FAUSTINO

1 Introdução

Em qualquer ciência, o entendimento de um objeto de estudo é facilitado quando o representamos por mais de um registro (desenhos, equações, símbolos etc.) e transitamos por esses registros, de modo que a carência de um seja suprida pelo outro.

Um exemplo notável dessa prática é a Geometria analítica, concebida pelo matemático francês René Descartes (1596-1650). Transitando entre Álgebra e Geometria euclidiana, a Geometria analítica possibilita a representação de figuras geométricas por meio de pares ordenados, equações ou inequações. Por exemplo:

- O par ordenado $(5, 4)$ representa o ponto P da figura abaixo.

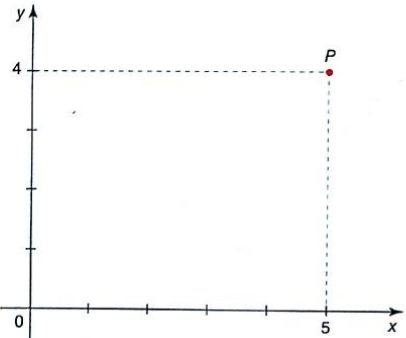


Figura 4.31 - René Descartes e a Geometria Analítica

Fonte: Paiva, 2013, v. 3, p. 36.

Esta menção faz referência à Descartes como o criador da Geometria Analítica. Esta informação deve ser observada com cautela, pois não é muito fiel à história, visto que Descartes é considerado precursor da Geometria Analítica juntamente com Pierre de Fermat (1601-1665) e, portanto, não é o único precursor da Geometria Analítica.

Além disto, em algumas menções, encontramos as palavras como “inventou”, “concebeu”, etc. Estas palavras devem ser utilizadas com parcimônia, pois, em alguns casos, podem contribuir para a visão equivocada da Matemática como uma criação de gênios, de forma individualista, e não coletiva.

Nestes casos, caberá ao professor realizar um trabalho de esclarecimento dessa situação.

Assim, apesar de existirem informações distorcidas através das menções à HM, de modo geral, podemos afirmar que houve um certo interesse em utilizar a HM nas coleções de livros didáticos. Este fato pode ser comprovado pela presença de uma quantidade razoável de menções históricas nas coleções. Embora mais da metade das menções apresente apenas informações de cunho geral, que, de certa forma, não contribui para a compreensão dos conteúdos matemáticos em si, entendemos que este já é um início de uma cultura em se utilizar a HM nestes materiais, inclusive, porque este é um item requisitado na avaliação pelo PNLD.

Com relação ao que se espera da utilização da HM, o Guia dispõe que sejam avaliadas “[...] as contextualizações feitas com base na história da Matemática, com o objetivo de tornar o estudo mais significativo” (BRASIL, 2014, p. 18).

O Guia do PNLD 2015 apresenta uma análise geral, e análises, por coleção, da presença da HM nas coleções. Todas as análises são bastante sucintas. Além disso, não encontramos os critérios específicos utilizados para esta análise. As análises não seguiram um determinado padrão, sendo apresentadas de formas diferenciadas para cada coleção.

Diante disto, tentaremos estabelecer uma relação entre nossa análise e as análises apresentadas pelo Guia. Com relação à análise geral, o Guia dispõe que:

No caso de contextualizações ligadas à história da Matemática, há obras didáticas em que se encontram breves informações, com ênfase na identificação dos personagens envolvidos no desenvolvimento de um determinado tema e suas localizações no tempo histórico. No entanto, sabe-se que é possível atribuir significado a conteúdos matemáticos pela discussão tanto da evolução histórica dos conceitos e de suas inter-relações no âmbito da Matemática, quanto das motivações sociais, econômicas e científicas que levaram ao avanço da Matemática (BRASIL, 2014, p. 106).

Com relação a esta análise geral do Guia, as nossas análises apontam para uma direção um pouco distinta. Embora mais da metade das menções esteja exercendo a função de “HM e formação cultural”, e apresentam, de fato, breves informações sobre “matemáticos”, suas obras e a localização no tempo, o restante (pouco menos da metade), está exercendo funções interessantes e importantes, do ponto de vista da compreensão dos conteúdos matemáticos.

Apresentamos a seguir as análises, por coleção, constantes no Guia do PNLD 2015, seguidas das nossas análises, também, por coleção. Ressaltamos que não faremos comparações entre as coleções, visto que este não é um dos objetivos da nossa investigação.

Na coleção *Conexões com a Matemática* foi detectado, na análise realizada pelo Guia, que “[...] na abordagem da história da Matemática, encontram-se apenas informações breves, sendo a ênfase na identificação dos personagens envolvidos com o desenvolvimento de um dado tema e suas localizações no tempo histórico” (BRASIL, 2014, p. 27).

Identificamos, nesta coleção, que 10% das menções estão desempenhando a função “HM e estratégia didática”, 30% das menções estão desempenhando a função “HM e a elucidação dos *porquês*”, 6,5% estão desempenhando a função “HM e a elucidação do *para que*”, e 53,5% estão desempenhando a função de “HM e formação cultural”. Nesse sentido, nossas análises, também, se diferem um pouco da do Guia, uma vez que 46,5% das menções apresentam funções que não apenas a identificação de “matemáticos” e a localização no tempo.

Na coleção *Matemática: Contexto e aplicações* identificou-se, de acordo com o Guia, que “[...] ao longo da coleção, recorre-se à história da Matemática para iniciar a discussão de um assunto ou como leitura complementar. No entanto, poucas vezes esse contexto é utilizado

no desenvolvimento de conceitos” (BRASIL, 2014, p. 36-37).

Identificamos, nesta coleção, que 13,6% das menções estão desempenhando a função “HM e estratégia didática”, 27,3% das menções estão desempenhando a função “HM e a elucidação dos *porquês*”, 12,1% estão desempenhando a função “HM e a elucidação do *para que*”, e 47% estão desempenhando a função de “HM e formação cultural”. Neste caso, mais da metade das menções desta coleção está exercendo funções que, de certa forma, colaboram para a compreensão dos conteúdos matemáticos. Quanto ao posicionamento no texto, identificamos que mais da metade das coleções, de fato, se encontram iniciando ou finalizando o assunto em questão.

Com relação a este aspecto, enfatizamos que consideramos que o mais importante, é a função que as menções a HM estão exercendo, e, que, a princípio, não podemos afirmar que o posicionamento das menções seja bom ou ruim.

Na coleção *Matemática: Paiva*, de acordo com o Guia, “[...] há poucas situações em que se recorre à história da Matemática para compreensão de um determinado conteúdo. Geralmente, ela é usada apenas de modo ilustrativo, com a apresentação de personagens, fatos e datas” (BRASIL, 2014, p. 46).

Identificamos, nesta coleção, que 8,1% das menções estão desempenhando a função “HM e estratégia didática”, 24,3% das menções estão desempenhando a função “HM e a elucidação dos *porquês*”, 8,1% estão desempenhando a função “HM e a elucidação do *para que*”, e 59,5% estão desempenhando a função de “HM e formação cultural”. De fato, esta coleção apresenta um grande percentual de menções exercendo a função “HM e formação cultural”, ou seja, que apresentam apenas informações de cunho geral, como informações sobre “matemáticos”, que não contribuem para a compreensão dos conteúdos matemáticos em si. No entanto, não podemos generalizar, pois 40,5% das menções estão exercendo outras funções interessantes, que não só a apresentação de forma ilustrativa.

Na coleção *Matemática – Ciência e aplicações* foi identificado, segundo o Guia, que “[...] nos três volumes da coleção, as apresentações dos conteúdos matemáticos estão bem contextualizadas nas relações estabelecidas com a história da própria Matemática, com outras áreas do conhecimento ou com as práticas sociais” (BRASIL, 2014, p. 54).

Identificamos, nesta coleção, que 8,8% das menções estão desempenhando a função “HM e estratégia didática”, 23,5% das menções estão desempenhando a função “HM e a elucidação dos *porquês*”, 11,7% estão desempenhando a função “HM e a elucidação do *para que*”, e 56% estão desempenhando a função de “HM e formação cultural”. A nosso ver, esta coleção não difere muito das outras com relação ao percentual de cada função didática. O que

podemos afirmar é que esta coleção também apresenta, como as demais, um percentual significativo (56%) de menções que apresentam apenas informações de cunho geral, e também, como as outras coleções, um percentual razoável de menções exercendo funções diretamente relacionadas à compreensão do conteúdo matemático em questão. Portanto, não observamos distorções em nossos resultados que difere esta coleção das demais.

Na coleção *Matemática – Ensino Médio*, de acordo com o Guia, “[...] embora haja menção a fatos importantes da evolução da Matemática, não há orientações suficientes sobre seu uso como recurso pedagógico que propicie a construção do conhecimento pelo aluno” (BRASIL, 2014, p. 63).

Identificamos, nesta coleção, que 9% das menções estão desempenhando a função “HM e estratégia didática”, 29,5% das menções estão desempenhando a função “HM e a elucidação dos *porquês*”, 7% estão desempenhando a função “HM e a elucidação do *para que*”, e 54,5% estão desempenhando a função de “HM e formação cultural”. Com relação a esta coleção, as nossas análises, indicam que assim como as demais, esta também apresenta em percentual significativo de menções que abordam apenas informações de cunho geral, e outras que exercem funções que contribuem para a compreensão do conteúdo matemático em si. Como na coleção anterior, também não identificamos grandes diferenças na forma de abordagem da HM.

Na coleção *Novo Olhar: Matemática*, seguindo o Guia, observa-se que com relação à história da Matemática, “[...] recorre-se apenas ao relato de eventos ou a biografias, sem que seus tópicos sejam empregados como recurso didático para compreensão atual dos conceitos matemáticos” (BRASIL, 2014, p. 72).

Identificamos, nesta coleção, que 19,3% das menções estão desempenhando a função “HM e estratégia didática”, 20,5% das menções estão desempenhando a função “HM e a elucidação dos *porquês*”, 3,6% estão desempenhando a função “HM e a elucidação do *para que*”, e 56,6% estão desempenhando a função de “HM e formação cultural”. Neste caso, as nossas análises também divergem da análise apresentada pelo Guia, pois, embora apresente um percentual considerável de menções que abordam a HM somente através de informações sobre “matemáticos”, esta coleção apresenta menções (43,4%) importantes que colaboram para a compreensão dos conteúdos matemáticos. Inclusive, de acordo com os dados desta investigação, esta coleção é a que mais apresenta menções exercendo a função de estratégia didática, que é aquela função em que a menção à HM contribui para que o aluno desenvolva algum raciocínio matemático.

Com base nas informações expostas, podemos afirmar que as menções à HM localizadas nos livros didáticos não estão, ainda, sendo apresentadas da forma como aponta a literatura.

Porém, o que foi encontrado nos livros didáticos já apresenta um indicativo de melhorias quanto a esta utilização, quando comparado com as análises de livros didáticos apresentadas por meio de trabalhos anteriores, já mencionados no capítulo de Introdução.

Nesse sentido, esperamos que, a cada edição do PNLD, os autores possam aprimorar e incorporar da melhor forma, a HM em suas coleções de livros didáticos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente investigação foi desenvolvida com o intuito de analisar a História da Matemática nos livros de Matemática do Ensino Médio aprovados pelo PNLD 2015. Para tanto, nos dedicamos a identificar os conteúdos matemáticos que são trabalhados utilizando a História da Matemática; identificar as menções à HM e mapeá-las com relação ao seu formato (exposição didática, estilo e posicionamento no texto); e analisar as funções didáticas desempenhadas pela HM nestes livros didáticos.

Ao analisar as seis coleções de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio aprovados no PNLD 2015, identificamos 294 menções à HM. Nestas, observamos que o conteúdo geral mais abordado foi Geometria (85 menções). Neste item, estão contidos os conteúdos matemáticos específicos Geometria Plana, Geometria Espacial e Trigonometria. Dentre os conteúdos matemáticos específicos, Trigonometria (incluindo funções trigonométricas) é o que mais aparece utilizando HM (39 menções). Este resultado pode estar relacionado ao fato de que a Trigonometria possui muitos fatos históricos relacionados ao seu desenvolvimento e que existem variados trabalhos de HM em língua portuguesa relacionados a esta temática.

Com relação aos aspectos relacionados ao formato das menções, identificamos que a maioria das menções se distingue do texto principal, utilizando recursos visuais, estando, de alguma forma, destacada. Porém, cabe ressaltar que identificamos que a utilização destes recursos não está diretamente relacionada com a função didática desempenhada pelas menções. O fato de a menção estar ou não destacada do texto não é suficiente para afirmar que a mesma esteja contribuindo de fato com a aprendizagem dos conteúdos matemáticos pelos estudantes.

Já com relação à exposição didática, identificamos que a maior é de texto expositivo, e uma pequena parcela se apresenta na forma de atividades. Destacamos que no caso do texto expositivo, encontramos texto expositivo com questionamentos, ou seja, após a exposição da menção histórica, há questionamentos ou sugestões de pesquisa sobre o assunto exposto. A nosso ver, o mais importante é que, independente do tipo de exposição, a menção deverá levar o aluno a algum raciocínio matemático, que, por sua vez, levará à aprendizagem do conteúdo em questão.

Observamos também que mais de um terço das menções se encontram iniciando a discussão de um assunto, capítulo ou tópico. Este fato, em parte, pode nos levar a entender que estão, de certa forma, contribuindo para a apresentação do conteúdo.

Com relação às funções didáticas, identificamos que pouco mais da metade estão desempenhando a função “HM e formação cultural geral”, que a nosso ver, é a função menos interessante do ponto de vista da compreensão de conteúdos ou conceitos matemáticos, pois, geralmente, as menções encontradas neste agrupamento não apresentam contribuições para a aprendizagem ou esclarecimentos acerca de certos conteúdos, conceitos ou ideias matemáticas, ou sua utilidade e conexão com outras áreas do conhecimento. Porém, entendemos que esta forma de utilização da HM já é um começo, uma tentativa de introduzir a cultura de utilização da HM no conteúdo dos livros didáticos.

Já um terço das menções encontradas estão desempenhando as funções didáticas “HM e a elucidação dos *porquês*” e “HM e a elucidação do *para que*”, como a contribuição para o conhecimento da origem de certos conteúdos, bem como suas aplicações na própria Matemática e em outras áreas do conhecimento. Estas duas menções deveriam ser mais exploradas, visto que, de acordo com nossas análises, contribuem para uma mudança de percepção em relação à Matemática. Estas possibilitam a desmistificação da Matemática como uma ciência isolada e acabada, à medida que mostram a Matemática como ciência em desenvolvimento e, também, as motivações e aplicações, ao longo do tempo, de conceitos matemáticos.

A função “HM e estratégia didática” foi identificada numa pequena parcela de menções (38). Esta é a função que entendemos, em consonância com a literatura, como a função mais interessante, visto que esta desempenha o papel de proporcionar ao aluno o desenvolvimento de algum raciocínio matemático, levando-o à compreensão do conteúdo ou conceito matemático.

Observamos, através dos resultados obtidos, que, caso o professor queira fazer uso destas coleções, com o intuito de inserir a HM em suas aulas, o ideal é que ele faça uma pesquisa bibliográfica em todas as coleções. Isto porque, mesmo sendo observado algumas repetições de trechos utilizando a HM, uma só coleção não satisfaz este intuito, uma vez que as coleções, em conjunto, contribuem com um repertório maior de opções de utilização da HM.

Assim, a partir da nossa análise, observamos um certo interesse em utilizar a HM nesta coleção de livros didáticos, seja pela exigência de tal utilização na avaliação dos livros pelo PNLD, seja pela vontade própria do autor. Porém, entendemos que a utilização da HM nos livros didáticos deve centrar-se mais nas funções que contribuem com a aprendizagem dos conteúdos matemáticos pelo aluno, e também para uma mudança de percepção em relação à Matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARRETO, B. C.; MONTEIRO, M. C. G. G. Professor, livro didático e contemporaneidade. **Revista Pesquisas em Discurso Pedagógico**, Rio de Janeiro, n. 1, p. 01-06, 2008. Disponível em: <<http://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/11983/11983.PDF>>. Acesso em: 18 fev. 2015.

BIANCHI, M. I. Z. **Uma reflexão sobre a presença da História da Matemática nos livros didáticos**. 2006, 103p. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-graduação em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista, Rio Claro-SP.

BITTENCOURT, C. M. F. Em Foco: História, produção e memória do livro Didático. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 30, n. 3, Apresentação, set./dez. 2004. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/ep/v30n3/a07v30n3.pdf>>. Acesso em: 18 fev. 2015.

BOYER, C.B. **História da matemática**. Trad. de Helena Castro. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio: PNLEM 2006: matemática: ensino médio**. – Brasília: MEC/SEB, 2004. 84p.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio: PNLEM 2009: matemática: ensino médio**. – Brasília: MEC/SEB, 2008. 84p.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Guia de livros didáticos: PNLD 2012: matemática: ensino médio**. Brasília: MEC/SEB, 2011. 108p.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Guia de livros didáticos: PNLD 2015: matemática: ensino médio**. Brasília: MEC/SEB, 2014. 108p.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: MEC/SEB – Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, 2000.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. (Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais). Brasília: MEC/SEB. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, 2002.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o Ensino Médio**. Brasília: MEC/SEB. Vol 2: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. 2006, 135p.

BROLEZZI, A. C. **A Arte de contar: Uma Introdução ao Estudo do Valor Didático da História da Matemática**. 1991. 75p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1991.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Fotogravura Nacional, 1951.

CHOPPIN, A. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v.30, n.3, p. 549-566, set./dez. 2004. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/ep/v30n3/a12v30n3.pdf>>. Acesso em: 18 fev. 2015.

D' AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática**. 17^a ed. Campinas, SP: Papirus, 2009, 120p.

DANTE, L. R. Livro Didático de Matemática: uso ou abuso? **Revista Em Aberto**, Brasília: INEP, ano 16, n.69, p. 83-97, jan./mar. 1996. Disponível em: <<http://emaberto.inep.gov.br/index.php/emaberto/article/viewFile/1040/942>>. Acesso em: 18 fev. 2015.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações**. 2.ed. São Paulo: Ática, 2013. Vol. 1.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações**. 2.ed. São Paulo: Ática, 2013. Vol. 2.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações**. 2.ed. São Paulo: Ática, 2013. Vol. 3.

DÍAZ, O. R. T. A atualidade do livro didático como recurso Curricular. Tradução: Maria Susley Pereira. **Linhas Críticas**, Brasília: DF, v. 17, n. 34, p. 609-624, set./dez. 2011. Disponível em: <<http://periodicos.unb.br/index.php/linhascriticas/article/view/6248/5121>>. Acesso em: 18 fev. 2015.

FAUVEL, J. Using History in Mathematics Education. **For the Learning of Mathematics**, Vol. 11, No. 2, Special Issue on History in Mathematics Education, Jun., 1991, pp. 3-6.

FOSSA, J. A. Recursos pedagógicos para o ensino da matemática a partir das obras de dois matemáticos da Antiguidade. In: MENDES, I. A.; FOSSA, J. A.; VALDÉS, J. E. N. **A História como um agente de cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Editora Sulina, 2006, pp. 137-182.

FOSSA, J. A. Matemática, História e Compreensão. **Revista Cocar**. UEPA, v.2, p. 7-15, 2008. Disponível em <<http://paginas.uepa.br/seer/index.php/cocar/article/view/77>>. Acesso em: 01 abr. 2015.

GIARDINETTO, J.R.B. Reflexões sobre o uso da história da matemática como contribuição para a melhoria do ensino da geometria analítica (nível 1º e 2º graus). **Nuances**: Revista do Curso de Pedagogia, Departamento de Educação, UNESP, Campus de Presidente Prudente, v. 6, nº 6, pp. 136-42, 2000.

GOMES, L.G. **As práticas culturais de mobilização de histórias da matemática em livros didáticos destinados ao ensino médio**. 2008. 163p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R; ALMEIDA, N. **Matemática: ciência e aplicações**. 7.ed. São Paulo: Saraiva, 2013. Vol. 1.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R; ALMEIDA, N. **Matemática: ciência e aplicações**. 7.ed. São Paulo: Saraiva, 2013. Vol. 2.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R; ALMEIDA, N. **Matemática: ciência e aplicações**. 7.ed. São Paulo: Saraiva, 2013. Vol. 3.

LAJOLO, M. Livro Didático: um (quase) manual de usuário. **Revista Em Aberto**, Brasília: INEP, ano 16, n. 69, p. 3-9, jan./mar. 1996. Disponível em:<<http://emaberto.inep.gov.br/index.php/emaberto/article/viewFile/1033/935>>. Acesso em: 18 fev. 2015.

LEONARDO, F. M. **Conexões com a Matemática**. 2.ed. São Paulo: Moderna, 2013. Vol. 1.

LEONARDO, F. M. **Conexões com a Matemática**. 2.ed. São Paulo: Moderna, 2013. Vol. 2.

LEONARDO, F. M. **Conexões com a Matemática**. 2.ed. São Paulo: Moderna, 2013. Vol. 3.

MEGID NETO, J.; FRACALANZA, H. O Livro Didático de Ciências: problemas e soluções. **Ciência & Educação**, Bauru-SP, v. 9, n. 2, p. 147-157, 2003. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/ciedu/v9n2/01>>. Acesso em: 18 fev. 2015.

MENDES, I. A. História da matemática: um enfoque transdisciplinar. In: **XI CIAEM**, Blumenau: FURB. 2003, Anais.

MENDES, I. A.; FOSSA, J. A.; VALDÉS, J. E. N. **A História como um agente de cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Editora Sulina, 2006, 182 p.

MENDES, I. A. A investigação histórica como agente da cognição matemática na sala de aula. In: MENDES, I. A.; FOSSA, J. A.; VALDÉS, J. E. N. **A História como um agente de cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Editora Sulina, 2006, pp. 79-136.

MIGUEL, A. **Três estudos sobre história e educação matemática**. 1993. 346p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1993.

MIGUEL, A. As potencialidades pedagógicas da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. **Zetetiké**, v. 5, n. 8, p. 73-105, 1997.

MIGUEL, A.; BRITO, A. J. A história da matemática na formação de professores. **Cadernos Cedes** nº 40, pp. 47-61, 1996. Campinas (SP): Papyrus.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática: propostas e desafios**. 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011, 208 p. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

MORALES, C.; AMBROSIO, M. B.; MAGALHÃES, O. L. C. S; PEDRASSOLI, R. **Uma história da educação matemática no Brasil através dos livros didáticos de Matemática dos anos finais do ensino fundamental**. 2003, 174p. Monografia (Pós-graduação Lato Sensu em Metodologia do Ensino-Aprendizagem da Matemática no Processo Educativo) – Faculdade de Educação São Luís, Jaboticabal, 2003. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Monografia_Morales.pdf> Acesso em 17 jan. 2015.

PEREIRA NETO, A. F.; SALLES, P. P.; OKUHARA, Y.; GENARI, C.; SALLES, R.; FRICK, C. M. S.; OLIVEIRA, M. Z. M. S.; SOUZA, R. S. M.; VIANA, L. Site oficial da família e dos admiradores de Malba Tahan, (s/d). Disponível em: <http://www.malbatahan.com.br/julio_cesar.php>. Acesso em 17 jan. 2015.

NOBRE, S. Alguns “porquês” na História da Matemática e suas contribuições para a Educação Matemática. **Cadernos Cedes**, n. 40, pp. 29-35, 1996. Campinas (SP): Papirus.

OMENA, B. S. S.; CAVALARI, M. F. Considerações sobre as atividades para sala de aula que utilizam a História da Matemática presentes em teses e dissertações brasileiras. In: **14º Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia**, Belo Horizonte: UFMG, 2014. Anais eletrônicos. Disponível em: <http://www.14snhct.sbhc.org.br/conteudo/view?ID_CONTEUDO=800>. Acesso em: 09 fev. 2016.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa**. 3ª ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011, 136 p. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

PAIVA, M. **Matemática: Paiva**. 2.ed. São Paulo: Moderna, 2013. Vol. 1.

PAIVA, M. **Matemática: Paiva**. 2.ed. São Paulo: Moderna, 2013. Vol. 2.

PAIVA, M. **Matemática: Paiva**. 2.ed. São Paulo: Moderna, 2013. Vol. 3.

ROMANATTO, M. C. O livro didático: alcances e limites. In: **VII Encontro Paulista de Educação Matemática**, São Paulo, 2004. Anais. Disponível em: <http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:U6aBf7FaMU0J:www.miltonborba.org/CD/Interdisciplinaridade/Anais_VII_EPDM/mesas_redondas/mr19-Mauro.doc+&cd=1&hl=pt-BR&ct=clnk&gl=br>. Acesso em: 18 fev. 2015.

SEBASTIANI FERREIRA, E. Apresentação. **Cadernos Cedes** nº 40, pp. 5-6, 1996. Campinas (SP): Papirus.

SILVA, C. M. S. A história da matemática e os cursos de formação de professores. In: CURY, H. N. (org.). **Formação de professores de matemática: uma visão multifacetada**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2001, pp. 129-165.

SILVA, D. R. **Livro didático de Matemática: lugar histórico e perspectivas**. 2010. 152p. Dissertação (Mestrado em Educação) –Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática Ensino Médio**. 8.ed. São Paulo: Saraiva, 2013. Vol. 1.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática Ensino Médio**. 8.ed. São Paulo: Saraiva, 2013. Vol. 2.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática Ensino Médio**. 8.ed. São Paulo: Saraiva, 2013. Vol. 3.

SOUZA, J. **Novo olhar Matemática**. 2.ed. São Paulo: FTD, 2013. Vol. 1.

SOUZA, J. **Novo olhar Matemática**. 2.ed. São Paulo: FTD, 2013. Vol. 2.

SOUZA, J. **Novo olhar Matemática**. 2.ed. São Paulo: FTD, 2013. Vol. 3.

STRUIK, D. J. Por Que Estudar História da Matemática? Trad. De Célia Regina A. Machado e Ubiratan D'Ambrosio. In: **História da técnica e da tecnologia: textos básicos**. Ruy Gama (org.). São Paulo: T. A. Queiroz e EDUSP, 1985, pp. 191-215.

TZANAKIS, C.; ARCAVI, A. Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In: J. Fauvel and J. van Maanen (Eds.). **History in Mathematics Education**. The ICMI Study. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000, Chapter 7, pp. 201–240.

VALDÉS, J. E. N. A história como elemento unificador na educação matemática. In: MENDES, I. A.; FOSSA, J. A.; VALDÉS, J. E. N. **A História como um agente de cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Editora Sulina, 2006, pp. 15-78.

VIANNA, C. R. **Matemática e História: Algumas relações e implicações pedagógicas**. 1995. 228p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1995.

APÊNDICE A – Ficha para análise do conteúdo matemático em que se encontra a menção histórica

<i>Com relação ao conteúdo em que se encontra a menção histórica</i>		
Conteúdo matemático	Geral	Específico
	<input type="checkbox"/> Números	<input type="checkbox"/> conjuntos <input type="checkbox"/> números complexos <input type="checkbox"/> análise combinatória
	<input type="checkbox"/> Funções	<input type="checkbox"/> Introdução à função <input type="checkbox"/> função afim <input type="checkbox"/> função quadrática <input type="checkbox"/> função exponencial <input type="checkbox"/> função logarítmica <input type="checkbox"/> função trigonométrica <input type="checkbox"/> função modular <input type="checkbox"/> seqüências <input type="checkbox"/> matemática financeira <input type="checkbox"/> conceito de derivada
	<input type="checkbox"/> Equações algébricas	<input type="checkbox"/> polinômios e equações polinomiais <input type="checkbox"/> matrizes, determinantes e sistemas lineares
	<input type="checkbox"/> Geometria analítica	<input type="checkbox"/> geometria analítica
	<input type="checkbox"/> Geometria	<input type="checkbox"/> geometria plana <input type="checkbox"/> trigonometria <input type="checkbox"/> geometria espacial
	<input type="checkbox"/> Estatística e Probabilidade	<input type="checkbox"/> probabilidade <input type="checkbox"/> estatística

APÊNDICE B – Ficha para análise dos aspectos quanto ao formato da menção histórica

<i>Com relação aos aspectos de formato das menções históricas</i>		
Formato da menção	exposição didática	<input type="checkbox"/> texto expositivo <input type="checkbox"/> atividade
	posicionamento em relação à exposição do conteúdo matemático	<input type="checkbox"/> início <input type="checkbox"/> intercalada no texto ou em nota de rodapé <input type="checkbox"/> paralela ao texto principal (separado dele) <input type="checkbox"/> final <input type="checkbox"/> não se aplica (atividade)
	estilo da menção	<input type="checkbox"/> distingue-se do texto principal (usando cores, fundos e fontes diferentes, ou moldura) <input type="checkbox"/> apresenta imagem/ilustração/gravura/fotografia, etc.

Minicurso:

A História da Matemática em livros didáticos de Matemática do Ensino Médio

1. Apresentação

Este minicurso será ministrado pela prof^a. Elisângela Miranda Pereira, mestranda do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências, e se configura como o “produto final”, parte do requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências.

O minicurso foi elaborado a partir da pesquisa de mestrado intitulada “A História da Matemática nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio: conteúdos e abordagens”, desenvolvida no referido programa, sob a orientação da prof^a. Dra. Mariana Feiteiro Cavalari.

A pesquisa foi realizada com o objetivo de analisar a História da Matemática nos livros de Matemática do Ensino Médio aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático 2015 (PNLD 2015).

Nesta edição do PNLD foram aprovadas seis coleções de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, a saber: *Conexões com a Matemática*, de Fábio Martins de Leonardo; *Matemática: Contexto e aplicações*, de Luiz Roberto Dante; *Matemática: Paiva*, de Manoel Rodrigues Paiva; *Matemática: Ciência e aplicações*, de Gelson Iezzi e outros; *Matemática: Ensino Médio*, de Kátia Cristina Stocco Smole e Maria Ignez de Souza Vieira Diniz e *Novo Olhar: Matemática*, de Joamir Souza.

Com vistas a atingir o objetivo proposto na pesquisa, nos dedicamos a identificar os conteúdos matemáticos que são trabalhados utilizando a História da Matemática; identificar as menções¹⁰ à História da Matemática e mapeá-las com relação ao seu formato¹¹, na perspectiva de Tzanakis e Arcavi (2000); e analisar as funções didáticas desempenhadas pela História da Matemática presente nos livros didáticos.

O presente minicurso está estruturado de modo a expor, inicialmente, algumas concepções acerca da utilização da HM em sala de aula. Posteriormente, serão apresentadas algumas menções a História da Matemática retiradas dos livros didáticos analisados e serão realizados questionamentos que possibilitarão aos participantes uma reflexão e discussão a respeito da abordagem da HM nestes materiais. Estes questionamentos foram elaborados com base na revisão teórica e nas categorias desenvolvidas na pesquisa supracitada.

¹⁰ As menções à HM correspondem aos trechos retirados dos livros didáticos que entendemos que fazem referência à HM, tais como origem de algum conceito matemático, fatos da vida de algum estudioso da Matemática, desenvolvimento de conhecimentos matemáticos em outras áreas, etc.

¹¹ Ao analisar o formato de uma menção histórica, de acordo com Tzanakis e Arcavi (2000), devemos observar a exposição didática (texto expositivo ou uma atividade), o seu estilo (se aparece em destaque em relação ao texto principal) e o seu posicionamento no texto.

2. Objetivo, público-alvo e carga horária

O objetivo deste minicurso é proporcionar aos participantes um contato maior com a temática da utilização da História da Matemática no ensino de Matemática e com materiais disponíveis para a sua utilização.

O público-alvo deste minicurso são licenciandos em Matemática e também mestrandos dos cursos de Ensino de Ciências e de Educação em Ciências, ambos da UNIFEI.

O minicurso terá duração de 2 horas.

3. Metodologia

O minicurso será dividido em duas partes. Na primeira parte, será realizada uma apresentação de algumas concepções acerca da utilização da HM em sala de aula. Esta parte terá duração aproximada de 20-30 minutos.

Na segunda parte, serão apresentadas e entregues aos participantes, por grupos, menções à HM retiradas dos livros didáticos, seguindo as etapas abaixo:

1ª Etapa: leitura das menções e identificação do conteúdo (matemático e histórico), abordado em cada menção.

2ª Etapa: escolha dos participantes de menções que eles utilizariam em sala de aula, e o porquê de suas escolhas.

3ª Etapa: identificação e agrupamento das menções, de acordo com contribuição para a formação do aluno, quais sejam:

- contribuição para a compreensão dos conteúdos matemáticos (TZANAKIS e ARCAVI, 2000; VIANNA, 1995; MENDES, FOSSA e VALDÉS, 2006; MIGUEL e MIORIM, 2011; dentre outros);
- contribuição para a percepção de como as ideias matemáticas se desenvolveram, em cada contexto e em diferentes épocas, levando-se em consideração as necessidades humanas (FAUVEL, 1991; MIGUEL e MIORIM, 2011; dentre outros);
- contribuição para a percepção das conexões da Matemática com outras áreas do saber (TZANAKIS e ARCAVI, 2000; MIGUEL e MIORIM, 2011; dentre outros).
- contribuição para motivação dos estudantes por meio da apresentação de biografias e/ou “curiosidades”.

4ª Etapa: caracterização e potencialidades de cada agrupamento formado na etapa anterior.

- Após estas etapas, será exposto como foram elaborados e nomeados os agrupamentos na pesquisa.
- Para finalizar, será discutido de que forma estas menções, de acordo com as funções exercidas, estão contribuindo para a formação do aluno, seja para a formação matemática, seja para a formação cultural geral.

4. A História da Matemática como proposta didática

O processo de ensino e aprendizagem da Matemática enfrenta vários obstáculos. Dentre eles, podemos citar a falta de interesse dos alunos devido à forma como os conteúdos matemáticos são apresentados. Esta falta de interesse se deve, entre outros fatores, aos porquês relacionados a determinados conteúdos da Matemática, quando o aluno não consegue perceber qualquer utilidade para o assunto, e também à falta de esclarecimento acerca da origem e do porquê do formalismo matemático (MENDES, 2006).

Nesse sentido, Tzanakis e Arcavi (2000) expõem que a Matemática, muitas vezes, é vista como um conjunto de axiomas, teoremas, provas, enfim, como uma estrutura organizada de forma lógica. A apresentação da Matemática como essa organização lógica pode, por vezes, ser entendida como suficiente para a compreensão dos conteúdos matemáticos. Porém, atualmente na área de Educação Matemática entendemos que isto não é suficiente. Para Miguel e Miorim (2011), os defensores da utilização da História no processo de ensino-aprendizagem da Matemática entendem que a forma lógica através da qual a Matemática é apresentada ao aluno não reflete o modo como esse conhecimento foi produzido historicamente, e por isso, consideram que a História possibilitaria a desmistificação da Matemática, no sentido de combater a falsa ideia de que a Matemática é uma ciência pronta e acabada.

Nesse mesmo contexto, Brolezzi (1991) expõe que o distanciamento entre o modo como os conteúdos matemáticos são apresentados ao aluno e o seu desenvolvimento ao longo da História, acaba por reforçar a ideia de um falso imobilismo desta ciência.

Assim, Brolezzi (1991) afirma que, sendo a Matemática uma ciência, como qualquer outra, que se desenvolve ao longo do tempo, sendo, pois, não estática, e que possui uma história, faz-se necessário que seu ensino percorra outros caminhos que não o de definições, teoremas, demonstrações, enfim, caminhos que mostrem um desenvolvimento das ideias matemáticas.

Da mesma forma, Valdés (2006) expõe que o conhecimento histórico também nos proporciona compreender que a Matemática apresenta um desenvolvimento contínuo, sua conexão com as outras áreas do conhecimento, e seu surgimento pela necessidade de resolver problemas práticos, além de nos aproximar da história dos matemáticos, homens [e mulheres] que impulsionaram a Matemática ao longo de sua construção, cada qual com sua motivação.

Portanto, a perspectiva histórica nos proporciona a visão clara de que o conhecimento matemático “[...] trata de objetos culturais produzidos e utilizados em cada fase do desenvolvimento das sociedades espalhadas pelo planeta, ao longo dos anos” (MENDES, FOSSA E VALDÉS, 2006, p. 11).

Destacamos ainda, que “a perspectiva histórica nos aproxima da Matemática como ciência humana, não-endeuzada, às vezes penosamente rastejante e, em ocasiões falíveis, porém, capaz também de corrigir seus erros” (VALDÉS, 2006, p. 16).

Corroborando esta ideia, Tzanakis e Arcavi (2000) defendem que a HM poderá contribuir para uma visão acerca da natureza e da atividade matemática, visto que esta possibilita o entendimento de que os erros, as dúvidas, incertezas, controvérsias, são partes integrantes da atividade matemática, bem como a natureza evolutiva da Matemática, ou seja, a Matemática em constante desenvolvimento.

Nesse sentido, a HM contribui para a percepção da Matemática como um empreendimento cultural, e não simplesmente uma estrutura formal e rígida de resultados, “[...] mas um processo intelectual humano em constante evolução, fortemente ligado a outras ciências, à cultura e sociedade” (TZANAKIS e ARCAVI, 2000, p. 207, tradução nossa).

Além disto, a HM contribui para mostrar as conexões entre a matemática e outras disciplinas, que em um primeiro momento, podem parecer alheias. Nesse sentido, Tzanakis e Arcavi (2000) expõem que, através da HM, os alunos poderão perceber que, muitas vezes, os conhecimentos matemáticos são motivados e desenvolvidos por questões e problemas de outras disciplinas, que aparentemente não estão relacionadas com a Matemática.

Assim, segundo Tzanakis e Arcavi (2000), a HM desempenha um papel importante na medida em que contribui para o conhecimento das motivações que impulsionaram o desenvolvimento de certos conceitos ou ideias matemáticas.

Por outro lado, através de exemplos históricos, os alunos poderão perceber que o desenvolvimento da Matemática não foi impulsionado apenas por questões utilitárias, mas também foram motivados “[...] por questões estéticas, pela curiosidade intelectual, por desafio e prazer, para fins recreativos, etc” (TZANAKIS e ARCAVI, 2000, p. 207, tradução nossa).

Brolezzi (1991) defende que a dificuldade dos alunos em lidar com a relação do conhecimento matemático e sua aplicação prática pode ser decorrente da falta de visão da totalidade do mesmo pelo aluno. Um exemplo dessa situação, de acordo com o autor, é que os alunos frequentemente questionam: “Para que serve isso?” (BROLEZZI, 1991, p. 57). Nesse sentido, o uso da HM se torna uma estratégia útil, podendo se configurar como uma grande fonte de exemplos práticos e de aplicação em vários níveis.

Assim como a HM contribui para a visão da totalidade pelos variados exemplos de aplicações práticas, segundo Brolezzi (1991) ela também contribui para a compreensão de que nem todos os tópicos apresentam aplicações práticas imediatas, pois facilita a compreensão de que o fato de o conteúdo estudado “[...] ter *significado* não é o mesmo que ter *aplicações práticas*” (p. 63, grifo do autor).

Destacamos, também, que alguns estudiosos entendem que a história da Matemática deve ser utilizada no ensino de Matemática para motivar o estudante.

Além disso, Vianna (1995) afirma que a HM “[...] pode ser usada para atrair a atenção das pessoas para a Matemática” (p. 26), e uma possibilidade para tal é apresentar a origem de determinados assuntos, ou citar nomes de matemáticos, apresentando as suas contribuições para o desenvolvimento da matemática, etc.

Nesta perspectiva, Fossa (2006) menciona que muitos alunos acham interessantes os tópicos de HM, e desta forma, esta poderá ser utilizada com a função de motivar o aluno.

Corroborando esta ideia, Vianna (1995) defende a utilização da HM como motivação, desde que tenha relação com o conteúdo que está sendo apresentado. Este autor expõe que “[...] pode-se buscar na história uma dificuldade enfrentada por algum matemático para resolver um determinado problema [...]” (p. 121-122), e, assim, desta situação “[...] pode resultar uma motivação para começar uma unidade ou apresentar um problema atual”.

Miguel (1997), ainda, expõe sobre a utilização da HM como motivação, na forma de história-anedotário (quando fatos históricos são apresentados com função lúdica ou de recreação), vista como um momento de relaxamento, em contraponto aos momentos de aprendizagem dos conteúdos matemáticos, que exigem grande concentração dos estudantes.

Porém, Miguel (1993) afirma que “a história, podendo motivar, não necessariamente motiva, e não motiva a todos igualmente e da mesma forma” (p. 70).

Além disto, Miguel (1997), alerta que ao utilizar a HM somente com o intuito de motivar os estudantes por meio da apresentação de biografias e/ou “curiosidades”, a HM acaba sendo inserida de forma esporádica em sala de aula e não privilegia a aprendizagem dos conteúdos matemáticos em si. Neste sentido, Giardinetto (2000, p. 137), aponta que “embora seja

importante a utilização da história da matemática da forma ilustrativa ou informativa, essa utilização pouco contribui para o entendimento da própria lógica dos conceitos”.

Considerando que a abordagem da HM como motivação apresenta limitações, Fossa (2008) afirma que há outras duas formas de utilização da HM em sala de aula que se apresentam mais eficazes, quais sejam: “[...] o uso da História da Matemática como um agente de formação cultural, em que a história aborda a matemática como parte do patrimônio cultural da humanidade”, e “[...] o uso da História da Matemática como um agente de formação cognitiva na sala de aula” (p. 07), ou seja, a HM contribuindo para a formação matemática do aluno.

Já para Valdés (2006), mais que contribuir com a formação cultural, mostrando a Matemática como uma criação humana, as informações históricas devem contribuir para a formação matemática do aluno. Assim, a HM, por exemplo, poderá ser utilizada para facilitar a compreensão de conteúdos matemáticos considerados difíceis e de uma forma mais adequada.

Após esta explanação podemos afirmar que a HM pode contribuir para o processo de ensino-aprendizagem da Matemática, dependendo da forma como é abordada.

5. Referências

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Guia de livros didáticos: PNLD 2015: matemática: ensino médio**. Brasília: MEC/SEB, 2014. 108p.

BROLEZZI, A. C. **A Arte de contar: Uma Introdução ao Estudo do Valor Didático da História da Matemática**. 1991. 75p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1991.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações**. 2.ed. São Paulo: Ática, 2013. Vol. 1.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações**. 2.ed. São Paulo: Ática, 2013. Vol. 2.

FAUVEL, J. Using History in Mathematics Education. **For the Learning of Mathematics**, Vol. 11, No. 2, Special Issue on History in Mathematics Education, Jun., 1991, pp. 3-6.

FOSSA, J. A. Matemática, História e Compreensão. **Revista Cocar**. UEPA, v.2, p. 7-15, 2008. Disponível em <<http://paginas.uepa.br/seer/index.php/cocar/article/view/77>>. Acesso em: 01 abr. 2015.

GIARDINETTO, J.R.B. Reflexões sobre o uso da história da matemática como contribuição para a melhoria do ensino da geometria analítica (nível 1º e 2º graus). **Nuances**: Revista do Curso de Pedagogia, Departamento de Educação, UNESP, Campus de Presidente Prudente, v. 6, nº 6, pp. 136-42, 2000.

LEONARDO, F. M. **Conexões com a Matemática**. 2.ed. São Paulo: Moderna, 2013. Vol. 3.

MENDES, I. A.; FOSSA, J. A.; VALDÉS, J. E. N. **A História como um agente de cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Editora Sulina, 2006, 182 p.

MENDES, I. A. A investigação histórica como agente da cognição matemática na sala de aula. In: MENDES, I. A.; FOSSA, J. A.; VALDÉS, J. E. N. **A História como um agente de cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Editora Sulina, 2006, pp. 79-136.

MIGUEL, A. **Três estudos sobre história e educação matemática**. 1993. 346p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1993.

MIGUEL, A. As potencialidades pedagógicas da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. *Zetetiké*, v. 5, n. 8, p. 73-105, 1997.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática: propostas e desafios**. 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011, 208 p. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

PAIVA, M. **Matemática: Paiva**. 2.ed. São Paulo: Moderna, 2013. Vol. 1.

PAIVA, M. **Matemática: Paiva**. 2.ed. São Paulo: Moderna, 2013. Vol. 3.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática Ensino Médio**. 8.ed. São Paulo: Saraiva, 2013. Vol. 1.

SOUZA, J. **Novo olhar Matemática**. 2.ed. São Paulo: FTD, 2013. Vol. 2.

TZANAKIS, C.; ARCAVI, A. Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In: J. Fauvel and J. van Maanen (Eds.). **History in Mathematics Education**. The ICMI Study. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000, Chapter 7, pp. 201–240.

VALDÉS, J. E. N. A história como elemento unificador na educação matemática. In: MENDES, I. A.; FOSSA, J. A.; VALDÉS, J. E. N. **A História como um agente de cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Editora Sulina, 2006, pp. 15-78.

VIANNA, C. R. **Matemática e História: Algumas relações e implicações pedagógicas**. 1995. 228p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1995.