



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO**

**FUNÇÕES DE AGLUTINAÇÃO BASEADAS EM  
EFICIÊNCIA: UMA ABORDAGEM DE A PARA  
PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO  
MULTIOBJETIVO**

**Michele de Santana Carmelossi**

**Itajubá – MG**  
**2014**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO**

**Michele de Santana Carmelossi**

**FUNÇÕES DE AGLUTINAÇÃO BASEADAS EM  
EFICIÊNCIA: UMA ABORDAGEM DE A  
PARA  
PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO  
MULTIOBJETIVO**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção como parte dos requisitos para obtenção do título de *Mestre em Ciências em Engenharia de Produção*.

**Área de Concentração:** Qualidade e Produto

**Orientador:** Prof. Anderson Paulo de Paiva, Dr.

**Co-Orientador:** Prof. Rafael Coradi Leme, Dr.

**Itajubá – MG**  
**2014**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO**

**Michele de Santana Carmelossi**

**FUNÇÕES DE AGLUTINAÇÃO BASEADAS EM  
EFICIÊNCIA: UMA ABORDAGEM DE A PARA  
PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO  
MULTIOBJETIVO**

Dissertação aprovada por banca examinadora em 13 de Outubro de 2014, conferindo ao autor  
o título de **Mestre em Ciências em Engenharia de Produção**.

**Banca Examinadora:**

Prof. Dr. Anderson Paulo de Paiva (Orientador)

Prof. Dr. José Henrique Gomes

Prof. Dr. Rogério Santana Peruchi

Prof. Dr. Ronã Rinston Amaury Mendes

**Itajubá**  
**2014**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Mauá –  
Bibliotecária Margareth Ribeiro- CRB\_6/1700

C287f

Carmelossi, Michele de Santana

Funções de aglutinação baseadas em eficiência: uma Abordagem  
DEA para problemas de otimização multiobjetivo / Michele de San\_  
tana Carmelossi. -- Itajubá, (MG) : [s.n.], 2014.

80 p. : il.

Orientador: Prof. Dr. Anderson Paulo de Paiva.

Coorientador: Prof. Dr. Rafael Coradi Leme.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Itajubá.

1. Análise Envoltória de Dados (DEA). 2. Otimização multiobje\_  
tivo. 3. Eficiência. 4. PGMAW. I. Paiva, Anderson Paulo de, orient.  
II. Leme, Rafael Coradi, coorient. III. Universidade Federal de  
Itajubá. IV. Título.

*Ao pedaço da minha vida,  
meu maior incentivo e  
orgulho dia após dia,  
Silma Regina de Santana,  
minha mãe.*

## AGRADECIMENTOS

A Jesus Sacramentado, sustento da minh'alma. "Minha vida é toda Tua, os meus planos, os meus sonhos, de nada vale o existir, se não for pra Te ofertar". Pela força, coragem e sabedoria que me conduziu durante toda minha vida, em especial por esse trabalho. Nos momentos de descrença que eu possa gritar *Quis ut Deus?*

Ao Prof. Anderson Paulo de Paiva, o grande responsável por essa 'loucura', por ter me acolhido como sua orientada, por sempre estar disponível e motivando a ir além a cada novo passo, acreditando que eu era capaz. Sem palavras pra te agradecer professor!

Ao Prof. Rafael Coradi Leme que aceitou me co-orientar, pela motivação constante em todas as vezes que estive em sua sala, pelas ideias e sugestões e tão importantes contribuições no desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. Pedro Paulo Balestrassi por ser aquele que fez brotar o sonho do mestrado. Não estaria aqui se não tivesse 'jogado' a semente!

A vocês Profs. Anderson, Rafael e Pedro Paulo não tem como deixar passar em branco a imensa contribuição que fazem a esta Universidade, pelas ideias brilhantemente malucas que têm, por não se limitarem a apenas transmitir o que sabem, mas a incentivar aos alunos a darem o melhor de si e ir além.

Aos professores do IEPG pelo conhecimento que compartilharam nas disciplinas.

A minha mãe Silma Regina de Santana que sempre me orientou sobre a importância do estudo e conhecimento e ao meu irmão Marcel Rodrigo Carmelossi, minha alegria ao retornar para casa. Amo vocês sem limite!

Ao meu primo Rogério Santana Peruchi, pelo incentivo, suporte desde a primeira prova, pela companhia nas longas viagens para um dia longo de pesquisa e pelas vezes que teve a paciência para traduzir aquelas maluquices que eu via nos livros.

A minha família que soube entender as minhas ausências, me deram todo apoio e souberam, melhores do que ninguém, me incentivar.

A David Rafael Leal, por ter sido um pilar nos momentos de dificuldades, pela paciência e por muitas mudanças de planos, pois haveria uma dissertação entre nós.

A meus amigos de longa e nova data que compreenderam os momentos que não pudemos compartilhar juntos e por me incentivarem com palavras de apoio e com orações antes mesmo dessa jornada começar.

Aos alunos da Especialização em Qualidade e Produtividade Turma 2010/2011, que foi onde esse sonho em Engenharia começou, por se tornarem verdadeiros amigos, confiarem que daria tudo certo e me incentivarem a continuar a caminhada.

Aos alunos do GEPE de Qualidade e Produto por serem companheiros não apenas de sala e cafezinhos, mas nas pesquisas, solução de problemas, pela contribuição em conversas informais que se tornam formais, pelas risadas e constante apoio nas disciplinas compartilhadas.

Ao CNPQ pelo apoio financeiro e incentivo à pesquisa brasileira.

Obrigada!

*"Há três caminhos para o fracasso:  
não ensinar o que se sabe,  
não praticar o que se ensina,  
e não perguntar o que se ignora."*

*São Beda*

## RESUMO

Esta dissertação apresenta uma abordagem alternativa para a solução de problemas de otimização não lineares multiobjetivo de superfície de resposta utilizando a Análise Envoltória de Dados para gerar uma função de aglutinação das superfícies a partir de um índice de eficiência. Neste caso, objetivos que devem ser minimizados são considerados como *inputs* e os que devem ser maximizados, *outputs*. No algoritmo proposto, o cálculo da eficiência (soma de *output*/soma de *input*) é executado para cada DMU que, no caso, são representadas pelas combinações experimentais de um arranjo CCD. Para cumprir o objetivo proposto, o experimento é realizado na região de interesse de acordo com o arranjo escolhido e as respostas de interesse serão registradas e calculadas. Utilizando cada experimento do CCD como uma DMU, uma RSM é gerada para a eficiência e, posteriormente, maximizada. Espera-se que a otimização da superfície de resposta da eficiência conduza à localização de DMU's mais eficientes do que aquelas observadas no arranjo experimental, cujos objetivos se aproximem maximamente dos seus alvos. Auxiliando o processo, o *bootstrap* foi utilizado para estabelecer teste de hipóteses e intervalos de confiança mais confiáveis do que os modelos tradicionais. Para ilustrar a razoabilidade da proposta, apresenta-se a otimização do processo de soldagem PGMAW. Os principais resultados corroboram a boa adequação da proposta para este tipo de problema de otimização.

**Palavras-Chave:** Análise Envoltória de Dados (DEA), Otimização Multiobjetivo, Eficiência, PGMAW.

## ABSTRACT

This work presents an alternative approach for solution of optimization problems nonlinear multiobjective of response surface using the Data Envelopment Analysis to generate a function of bonding surfaces from an efficiency index. In this case, goals that must be minimized are considered as and that should be maximized, outputs. In the proposed algorithm, the calculation of efficiency (sum of output / input of sum) is performed for each DMU that, in the case, are represented by the experimental combinations of a CCD array. An RSM is generated for the efficiency and, subsequently, maximized. It is expected that the optimization of response surface of efficiency leads to the location of DMUs more efficient than those observed in the experimental arrangement, whose goals are maximally approach their targets. Assisting the process, the bootstrap was used to establish hypothesis testing and confidence intervals more reliable than traditional models. To illustrate the reasonableness of the proposal, we present the optimization of the welding process PGMAW. The main results confirm the good fit of the proposal for this type of optimization problem.

**Keywords:** Data Envelopment Analysis (DEA), Multiobjective Optimization, Efficiency, PGMAW.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Visão Sistêmica da empresa.....	23
Figura 2.2	Produtividade x Eficiência.....	25
Figura 2.3	Curva de um processo de produção.....	25
Figura 2.4	Alcance da Fronteira de Eficiência.....	26
Figura 2.5	Retorno Crescente de Escala.....	26
Figura 2.6	Retorno Constante de Escala.....	27
Figura 2.7	Retorno Decrescente de Escala.....	27
Figura 2.8	Alternativa do Retorno Decrescente de Escala.....	28
Figura 2.9	Fronteira linear por partes (ou <i>piece-wise linear</i> ).....	29
Figura 2.10	Comparação entre abordagens: DEA (não paramétrica) e regressão linear (paramétrica).....	29
Figura 2.11	Análise para um conjunto de empresas através do DEA.....	32
Figura 4.1	Fronteira de Pareto não-inferior.....	47
Figura 4.2	Fronteiras de Pareto e Pontos de Ancoragem.....	48
Figura 4.3	Fronteiras dos Métodos.....	53
Figura 5.1	Gráfico de Normalidade do Modelo Quadrático Completo.....	69
Figura 5.2	Gráfico da Superfície de Resposta.....	70
Fluxograma 5.1	Sequência de procedimento para aplicação de DEA para otimização multiobjetivo.....	61

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1	Softwares disponíveis para cálculo de eficiência.....	30
Tabela 2.2	Comparativo entre modelos matemáticos	
Tabela 5.1	Parâmetros do Processo.....	58
Tabela 5.2	Parâmetros e respostas do Processo.....	58
Tabela 5.3	Parâmetros de soldagem e respostas para o projeto CCD.....	59
Tabela 5.4	Dados do Experimento com 31 DMUs.....	62
Tabela 5.5	Pesos do Experimento com 31 DMUs.....	63
Tabela 5.6	DEA Primeiro Estágio.....	64
Tabela 5.7	DEA Segundo Estágio.....	67
Tabela 5.8	Resultados DEA para Primeiro e Segundo Estágios.....	68
Tabela 5.9	Parâmetros de soldagem e respostas para o projeto CCD do ponto ótimo.....	70

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>14</b>
1.1 Tema.....	14
1.1.1 Contextualização.....	14
1.1.2 Definição do tema.....	15
1.1.3 Objeto de pesquisa e unidade de investigação.....	15
1.1.4 Justificativa.....	16
1.2 Problema de pesquisa.....	16
1.3 Objetivos.....	16
1.4 Metodologia de pesquisa.....	16
1.5 Limitações do trabalho.....	17
1.6 Estrutura da dissertação.....	17
<b>2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....</b>	<b>19</b>
2.1 Conceitos Básicos.....	19
2.1.1 Eficiência.....	19
2.1.2 Produtividade.....	19
2.1.3 <i>Benchmarking</i> .....	19
2.1.4 <i>Decision Making Unit (DMU)</i> .....	20
2.1.5 <i>Outputs</i> .....	20
2.1.6 <i>Inputs</i> .....	20
2.1.7 Plano de Produção.....	20
2.1.8 Índice de Eficiência.....	20
2.2 Softwares para cálculo de eficiência.....	20
2.3 Análise Envoltória de Dados.....	21
2.3.1 O início da Análise Envoltória de Dados.....	21
2.4 Análise de Eficiência – Base Teórica.....	22
2.5 Eficiência Relativa.....	24
2.6 Modelos DEA.....	30
2.6.1 O Modelo CCR.....	31
2.6.2 O Modelo BCC.....	34
2.6.3 Diferenças entre os Modelos e Indicadores.....	36
2.7 Condições de Aplicação do DEA.....	37

2.8	Classificação das Variáveis	37
2.9	Escolha e Aplicação do Modelo	38
2.10	Ranking de Desempenho em DEA	38
2.11	Os Pesos.....	40
2.12	Estimativa pela Máxima Verossimilhança.....	41
<b>3.</b>	<b>DEA DOIS ESTÁGIOS (<i>TWO STAGES</i>).....</b>	<b>43</b>
3.1	Um modelo estatístico.....	44
<b>4.</b>	<b>OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO.....</b>	<b>47</b>
4.1	Aspectos gerais.....	47
4.2	Fronteira de Pareto.....	47
4.3	Métodos de Programação Multiobjetivo (MOP - <i>Multiple Objective Programming</i> ) .....	48
4.3.1	MOP: $\epsilon$ -Method.....	49
4.3.2	MOP: Lexicográfica.....	50
4.3.3	MOP: Soma Ponderada.....	50
4.4	Método do Critério Global (MCG) .....	50
4.5	Método Beta-Payoff.....	51
4.6	Métricas LP.....	51
4.7	Erro Quadrático Médio (MSE - <i>Mean Squared Error</i> ).....	52
4.8	Vantagens e desvantagens dos MOPs	53
<b>5.</b>	<b>APLICAÇÃO DO MÉTODO DEA À OTIMIZAÇÃO DO PROCESSO PGMAW.....</b>	<b>56</b>
5.1	Características do Processo de Soldagem PGMAW.....	56
5.2	Variáveis do Processo GMAW.....	57
5.3	Considerações Iniciais e Aplicação.....	58
<b>6.</b>	<b>CONCLUSÕES.....</b>	<b>74</b>
6.1	Conclusões Gerais.....	74
6.2	Sugestões para Trabalhos Futuros.....	75
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>76</b>

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1 Tema

### 1.1.1 Contextualização

A capacidade de competição de uma organização muitas vezes depende da habilidade que possui em mudar e encontrar novas direções para o seu crescimento estratégico. Intimidação pela concorrência e resultados obtidos tende a ser um dos grandes obstáculos para enfrentar um ambiente extremamente competitivo e se deixar abater pela concorrência prejudica o rendimento empresarial.

O processo de pensar o novo, de considerar ideias e soluções que ainda não são conhecidas, assume um papel importante em termos de aquisição de vantagem competitiva (ROMAN *et al.*, 2012).

As prioridades ou as vantagens competitivas podem ser definidas como sendo um conjunto consistente de características de desempenho que a empresa terá, e por meio da qual contribuirá para um aumento da competitividade da organização (CASTRO, SANTOS e SILVA, 2008).

Dessa forma, estudar elementos que geram competitividade é um grande auxílio para a organização de modo que possa buscar desenvolver produtos e processos “(...) com a utilização das melhores práticas em custos e em qualidade (...)” (ROMAN *et al.*, 2012, p. 28).

Na prática, uma corrente argumentação é como se pode medir a produtividade. Primeiramente é necessário classificar as unidades para em seguida medir a produtividade dessas variáveis. Para isso, é preciso identificar:

- Quais são as melhores entradas (*inputs*) para o sistema e quais os melhores medidores para elas?
- Quais são as melhores saídas (*outputs*) para o sistema e quais os melhores medidores para elas?
- Quais são as melhores formas de medir o relacionamento entre entradas (*inputs*) e saídas (*outputs*)?

Para auxiliar pesquisadores e gestores ao redor do mundo, se desenvolveu uma técnica capaz de comparar a eficiência de múltiplas unidades, mediante a consideração explícita do

uso de múltiplas entradas (ou recursos) na produção de múltiplas saídas (ou serviços). Um método muito útil utilizado para estimar as melhores práticas de desempenho medindo a eficiência de um conjunto de unidades produtivas, denominadas unidade de tomada de decisão ou DMU (do inglês, *decision making unit*) é a Análise Envoltória de Dados (do inglês, *Data Envelopment Analysis* - DEA). Essa metodologia permite ainda analisar DMUs que consomem múltiplos *inputs* (insumos, recursos) para produzir múltiplos *outputs* (produtos).

DEA aborda explicitamente o *mix* de entradas e saídas, comparando um grupo de unidades de forma que sejam identificadas as unidades tidas como relativamente ineficientes, medindo qual o tamanho da ineficiência, para assim comparar as unidades ineficientes com as eficientes, podendo descobrir como reduzir as ineficiências, utilizando os valores ótimos.

O uso da Análise Envoltória de Dados possibilita determinar de modo quantitativo a eficiência relativa de cada DMU, sobre a forma de taxas; sendo um *input* e *output* é possível bordar a origem e a quantidade de ineficiência relativa de cada DMU ainda dando suporte ao planejamento de metas para que as DMUs ineficientes sejam melhoradas a ponto de atingir a eficiência.

### **1.1.2 Definição do tema**

Segundo Appolinário (2006), o tema de uma pesquisa é o assunto geral que desejamos estudar e investigar. Neste trabalho, o tema será a análise, aplicação e avaliação da metodologia de Análise Envoltória de Dados como função de aglutinação de múltiplas funções objetivo

### **1.1.3 Objeto de Pesquisa e unidade de investigação**

Este trabalho pretende tratar da proposição e avaliação dos indicadores de eficiência DEA como função de aglutinação de múltiplas funções objetivo que simultaneamente devem ser maximizadas e minimizadas, de um processo de soldagem PGMAW (*Pulsed Gas Metal Arc Welding*).

### **1.1.4 Justificativa**

O método DEA apresenta inúmeras vantagens para sua aplicação. Deve ser utilizada com a finalidade de aglutinação, pois:

- O método gera um único Indicador de Desempenho;

- Possibilita a distinção entre unidades **eficientes** e **não-eficientes**;
- Pode capturar deficiências específicas das DMUs;
- Apresenta a possibilidade de vários tipos de análise de dados;
- Há facilidade no uso, pois não necessita de *softwares* que requeiram conhecimentos específicos dos usuários;
- É possível se utilizar vários *inputs* e *outputs* de forma simultânea;
- Pode ser utilizada em diversas aplicações;
- Abordagem não paramétrica, não exige uma forma funcional relacionando *input* e *output*;
- É possível alterar os pesos dos *inputs* e *outputs*.

## 1.2 Problema de Pesquisa

Neste trabalho o enfoque será como desenvolver uma função de aglutinação capaz de detectar as importâncias relativas de cada função objetivo, de modo que os alvos individuais de cada resposta sejam maximamente atendidos. Assim, pretende-se responder ao questionamento: O conceito de eficiência do modelo DEA poderá ser utilizado como uma forma de aglutinação de múltiplas funções objetivo, que simultaneamente devem ser maximizadas e minimizadas? Para verificar a adequação desta proposta, será utilizado o processo de soldagem PGMAW de PAIVA et al. (2010).

## 1.3 Objetivos

Em função do que foi exposto na Contextualização, esse trabalho se propõe a estudar um método de otimização multiobjetivo baseado no conceito de eficiência relativa obtida através de uma abordagem híbrida de Metodologia de Superfície de Resposta (RSM) e da Análise Envoltória de Dados (DEA). E possui como objetivo secundário aplicar e validar a proposta em um processo de modelagem e otimização de um processo de soldagem PGMAW.

## 1.4 Metodologia de Pesquisa

Esta pesquisa se caracteriza de natureza Aplicada devido ao seu interesse prático, de modo que seus resultados possam ser aplicados ou utilizados imediatamente para resolver problemas que de fato ocorrem. No que se refere aos seus objetivos, é classificada como Normativa. Possui abordagem Quantitativa, pois para sua análise considera tudo que pode ser quantificável, traduzindo de modo numérico as opiniões e informações para depois classificar

e analisar, utilizando métodos estatísticos para isso. Quanto ao método utilizado, será através de experimentos, como também modelagem e simulação.

## 1.5 Limitações do Trabalho

No decorrer do trabalho, deparou-se com algumas limitações, sendo que:

- A abordagem proposta foi aplicada apenas para o arranjo experimental do tipo composto central (CCD);
- A abordagem proposta levou em consideração apenas a formulação clássica BCC orientada a *output*;
- A abordagem proposta não leva em consideração a correlação entre as respostas;
- A abordagem proposta foi implementada em uma única aplicação, no caso a soldagem PGMAW.

## 1.6 Estrutura da dissertação

Esta dissertação está estruturada em 6 capítulos, de forma que o primeiro capítulo corroborou com a contextualização, apontando a justificativa para esta pesquisa, os objetivos a se alcançar, assim como o método de pesquisa utilizado nesta dissertação.

O **capítulo dois** apresentará o estado da arte, é abordado os termos utilizados, os modelos DEA e suas aplicações, além das principais diferenças entre os indicadores;

O **capítulo três** abordar o modelo aplicado em dois estágios (*two stages*);

O **capítulo quatro** abordará a aplicação do modelo em otimização multiobjetivo, os aspectos gerais, os tipos de fronteiras geradas, como também um breve resumo sobre os métodos de programação multiobjetivo;

O **capítulo cinco** descreverá uma aplicação da Análise Envoltória de Dados em um processo PGMAW com múltiplos *inputs* e *outputs*, objetivando realizar uma otimização multiobjetivo onde os múltiplos *inputs* e *outputs* deverão ser maximizados e minimizados simultaneamente.

O **capítulo seis** apresenta as conclusões e sugestões para pesquisas futuras.

## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 Conceitos Básicos

Para o estudo de técnicas de eficiência existem alguns conceitos que serão utilizados no decorrer de todo esse trabalho. Assim:

#### 2.1.1 Eficiência

É um conceito relativo. Pode ser definida como a comparação dos resultados alcançados com os recursos utilizados. Dessa forma pode-se dizer que quanto maior resultado obtido de acordo com uma determinada quantidade de recursos disponíveis maior será a eficiência dessa unidade. Soares Mello *et al.* (2005) dizem que a eficiência compara o que foi produzido, dados os recursos disponíveis, com o que poderia ter sido produzido com os mesmos recursos disponíveis.

Na forma resumida, quando se possui apenas um *input* e um *output*, a eficiência é definida como:

$$\text{Eficiência} = \frac{\text{Output}}{\text{Input}} \quad (2.1)$$

Pode-se também generalizar esse conceito quando existem múltiplos *inputs* e múltiplos *outputs*, resultando em uma soma ponderada dos *inputs* e *outputs* como:

$$\text{Eficiência} = \frac{\text{Soma Ponderada dos Outputs}}{\text{Soma Ponderada dos Inputs}} \quad (2.2)$$

#### 2.1.2 Produtividade

Produtividade para Soares de Mello *et al.* (2005) é conceituada como a razão entre o que foi produzido e o que foi gasto para produzir. Já para Heizer e Render (2001), pode ser conceituada como a relação entre a quantidade de bens ou serviços gerados (saídas) e a quantidade de recursos consumidos para gerá-los (entradas) num mesmo período de tempo (t).

#### 2.1.3 Benchmarking

O *benchmarking* pode ser entendido como um processo sistemático para a identificação da melhor prática (*benchmark*, ou ponto de referência), no ambiente externo ou interno, e para a modificação do conhecimento existente, de modo a alcançar em desempenho

superior. (...). As empresas, através da comparação com unidades consideradas eficientes, podem estabelecer ações gerenciais efetivas, com o objetivo de aprimorar os resultados (redução de custos, aumento de produção, etc.). Este é visto como um dos modernos instrumentos de gerência, que possibilita a melhoria do desempenho técnico-econômico das empresas de forma comparativa ou relativa (CAVALCANTE, 2009, p. 50-51).

#### **2.1.4 Unidade de Tomada de Decisão (*Decision Making Unit* - DMU)**

São as unidades tomadoras de decisão analisadas. Essas unidades deverão ser homogêneas, ou seja, que utilizem mesmos recursos (*inputs*) para obter os mesmos produtos (*outputs*) (PIMENTEL e CASA NOVA, 2005).

#### **2.1.5 Produtos (*Outputs* )**

São os produtos (resultados) obtidos por cada uma das DMUs, atendem ao critério de quanto maior, melhor (PIMENTEL e CASA NOVA, op. cit.).

#### **2.1.6 Insumos (*Inputs*)**

São os recursos (insumos) consumidos pelas DMUs para obterem os resultados desejados. Eles atendem o critério de quanto menor, melhor (PIMENTEL e CASA NOVA, op. cit.).

#### **2.1.7 Plano de produção**

São as quantidades observadas de *inputs* consumidos e *outputs* obtidos por cada DMU (PIMENTEL e CASA NOVA, op. cit.).

#### **2.1.8 Índice de Eficiência**

É o escore de eficiência calculado para cada DMU, através de um Algoritmo de Programação Linear (PPL). O indicador varia de 0 a 100%, sendo que um escore de eficiência igual a 100% identifica a unidade avaliada como eficiente em relação às demais (PIMENTEL e CASA NOVA, op. cit.).

## 2.2 Softwares para cálculo de eficiência

Para solucionar problemas de programação linear podem ser utilizados diversos programas para cálculo de eficiência. Da mesma forma q alguns dos *softwares* são comerciais, outros estão disponíveis gratuitamente para *download* instantâneo.

Na Tabela 2.1 são demonstrados alguns dos *softwares* disponíveis, gratuitos ou não, para o cálculo de eficiência.

**Tabela 2.1** – Softwares disponíveis para cálculo de eficiência

<b>SOFTWARE</b>	<b>ONDE ACHAR / CRIADOR</b>
<i>Warwick DEA</i>	Emmanuel Thanassoullis - <a href="http://www.deazone.com">http://www.deazone.com</a>
<i>Frontier Analyst</i>	<a href="http://www.banxia.com/famain.html">www.banxia.com/famain.html</a>
SEM	Holger Scheel's
DEAP 2.1	Tim Coelli – <a href="http://une.edu.au/econometrics/cepa.htm">http://une.edu.au/econometrics/cepa.htm</a>
ONFRONT 2	<a href="http://www.emq.com/software.html">www.emq.com/software.html</a>
SIAD v2.0	Ângulo Meza <i>et al.</i> 2004
SAED v1.0	<a href="http://www.mat.ufpr.be/volmir/DEA.html">www.mat.ufpr.be/volmir/DEA.html</a>
EMS 1.3 – <i>Efficiency Measurement System</i>	<a href="http://www.wiso.uni-dortmund.de/lsg/or/scheel/index.htm">www.wiso.uni-dortmund.de/lsg/or/scheel/index.htm</a>
Solver (Aplicativo do Excel)	Microsoft Excel®
IDEAL (livre)	<a href="http://www.coppe.ufrj.br">www.coppe.ufrj.br</a>
IDEAS	<a href="http://www.ideas2000.com">www.ideas2000.com</a>
DEA Solver	<a href="http://www.saitech-inc.com">www.saitech-inc.com</a>
DEA Excel Solver	<a href="http://www.deafrontier.com">www.deafrontier.com</a>
Pioneer	<a href="mailto:barn@seas.smu.edu">barn@seas.smu.edu</a>
Byu-DEA	<a href="mailto:larry@msml.byu.edu">larry@msml.byu.edu</a>
PIMsoft	<a href="http://www.deasoftware.co.uk">www.deasoftware.co.uk</a>

Fonte: Adaptado de PANEPUCCI (2003) e FERREIRA e GOMES (2009).

Para essa dissertação foram utilizados o aplicativo Solver do Microsoft Excel® e o software Matlab®.

## 2.3. Análise Envoltória de Dados

### 2.3.1 O início da Análise Envoltória de Dados

DEA foi apresentada no ano de 1984 por BANKER, CHARNES e COOPER no clássico artigo *Some Models estimating technical and scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis* como sendo “a utilização da programação matemática para obter avaliações da eficiência relativa dos resultados dos gestores, quer tenham sido planejados ou executados”.

O desenvolvimento do método da Análise Envoltória de Dados inicia-se com a tese de doutorado de Eduardo Rhodes em 1978 defendida na *Carnegie Mellon University*, tendo este sido orientado por W. W. Cooper.

Cooper avaliava os resultados de um programa que acompanhava estudantes carentes dentro de escolas públicas americanas com a ajuda do governo federal, e tentava avaliar a evolução dos alunos utilizando como medida termos de produtos definidos e insumos. O desenvolvimento desses alunos podia ser medido por termos definidos pelo autor: produto, como exemplo, “aumento da autoestima em crianças carentes” (possível através de testes psicológicos), e insumos, como exemplo, “tempo que as mães gastam em exercícios de leitura com seus filhos”.

Ao tentarem estimar a eficiência técnica das escolas tendo múltiplos insumos e múltiplos produtos, surge a formulação do Modelo CCR (abreviatura para o sobrenome dos autores Charnes, Cooper e Rhodes) findando com a publicação do primeiro artigo no *European Journal of Operation Research*, no ano de 1978.

A fim de se buscar selecionar o melhor conjunto de dados, os autores generalizaram o estudo de Farrel de 1957 tanto para trabalhar com múltiplos recursos (*inputs*) e múltiplos produtos (*outputs*), com a construção de um único produto “virtual” e um único insumo “virtual” (CHARNES *et al.*, 1997, p. 3).

A cada ano, novas e inúmeras aplicações de DEA são publicadas e suas abordagens diversificadas como em portfólio (BRANDA, 2013) bem estar social e econômico (REIG-MARTÍNEZ, 2013), centro de aprendizagens e EAD (GOMES JR. *et al.*, 2013), sustentabilidade (PÉREZ *et al.*, 2013). Também um método de avaliação baseado na classificação (WASHIO e YAMADA, 2013), funções de distância direcional e positiva

(FÄRE e GROSSKOPF, 2013) e atribuição de um custo fixo com grau de satisfação (LI *et al.*, 2013).

A Análise Envoltória de Dados inicialmente realiza um levantamento sobre o que está esclarecido no estudo de análises de eficiência produtiva. Em seguida, desenvolve-se a técnica DEA para analisar a eficiência relativa de unidades. Por fim, apresenta-se a aplicação do método.

## 2.4 Análise de Eficiência – Base Teórica

Demonstrar a relação entre recursos (*inputs*) e produtos (*outputs*) é possível ao realizar uma análise de eficiência de acordo com as curvas de produção. Durante uma abordagem rigorosa em se analisar à medida de eficiência na produção, Pareto-Koopmans e Debreu (1951) desenvolvem o conceito de pareto-eficiente para definir a eficiência técnica de uma unidade.

Um vetor *input-output* pode ser tido como eficiente somente se:

- a) nenhum dos *inputs* possa ser reduzido sem que outro *input* seja aumentado ou outro *output* precise ser reduzido;
- b) nenhum dos *outputs* possa ser aumentado sem que outro *output* seja reduzido ou outro *input* precise ser reduzido.

Assim, é possível verificar o estado da produção eficientes e ineficientes de forma diferenciada, mas está limitado a não estimar o grau de ineficiência ou ainda não apontar um combinado de vetores eficientes que possam ser comparados com o ineficiente. Para esse ponto, Debreu (1951) acrescenta uma medida radial de eficiência técnica que de forma equiproporcional deseja o mínimo uso possível de recursos (*inputs*) ou também de forma equiproporcional, máxima expansão para todos os produtos (*output*), corroborando com que cada unidade de medida seja independente de cada variável.

Se um vetor *input-output* é eficiente nessa medida de Debreu (1951) pode não ser eficiente da mesma maneira para Pareto-Koopmans ((PARETO (1909), KOOPMANS (1951))).

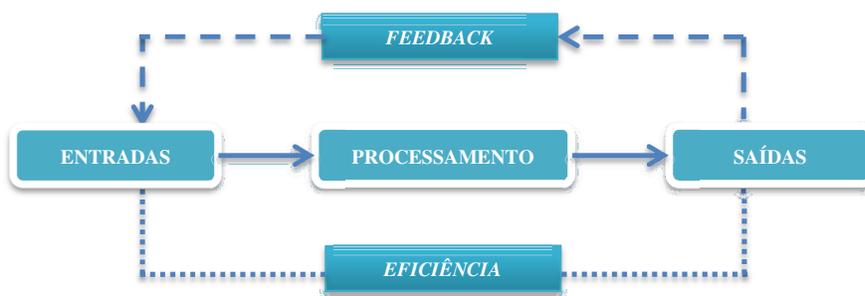
Nos anos seguintes, com o intuito de expandir os trabalhos de Koopmans e Debreu, Farrell (1957) propôs que fosse acrescido um componente capaz de selecionar o vetor *input-output* eficiente, de forma a considerar os respectivos pesos (preços) e assim, poder

determinar a eficiência máxima ao se incluir um vetor de pesos (preços) para os insumos (*inputs*) e produtos (*outputs*).

Charnes *et al.* (1978), com o anseio de trabalhar em múltiplos *inputs* e *outputs*, generalizaram o método de Farrell tanto para obter um indicador que também atendesse os conceitos de eficiência primeiramente concebido por Pareto-Koopmans (PARETO (1909), KOOPMANS (1951)), que visa a construção de fronteiras de produção juntamente com indicadores da eficiência produtiva, culminando assim, com a formulação da Análise Envoltória de Dados (DEA, *Data Envelopment Analysis*).

Enfim, Charnes e Cooper (1985) conceituam de forma relativa e de extrema importância que a eficiência de 100% de uma unidade se dá quando, ao se comparar com as demais unidades, não é possível identificar ineficiência para o uso de qualquer *input* ou *output*, assim, fortalecendo o conceito de unidades eficientes e ineficientes.

Ferreira, Venâncio e Abrantes (2009) dizem que organizações devem ser vistas como sistemas abertos, por influenciarem e sofrerem influência do meio, bem como por admitirem os mesmos componentes dos demais sistemas, quais sejam: entradas, processo de transformação e saídas demonstradas na Figura 2.1.



**Figura 2.1** – Visão Sistêmica da empresa  
Fonte: Adaptado de Oliveira (2002)

## 2.5 Eficiência Relativa

O método de Análise Envoltória de Dados permite avaliar o grau de eficiência relativa de unidades produtivas que desenvolvem a mesma atividade no que se refere à utilização de recursos (PIMENTA e SOARES DE MELO, 2005). A análise das unidades de tomada de decisão (DMU) através dos modelos DEA disponíveis geram uma fronteira de eficiência onde é possível visualizar as unidades tidas como eficientes, aquelas que possuem melhor relação

“insumo/produto” formando a fronteira de eficiência e todas as demais unidades menos eficientes estão situadas numa região inferior a essa fronteira, conhecida como envoltória.

DEA transforma os insumos (*inputs*) em produtos (*outputs*) originais pela agregação de valores, em combinação linear de *inputs* e *outputs*, respectivamente. Para essas combinações lineares, utiliza-se de pesos encontrados através de um problema de programação linear, de modo que cada uma receba a melhor combinação de pesos, maximizando sua eficiência (CHAVES, 2007). Assim, as unidades produtoras tomam decisões, originando a denominação DMU.

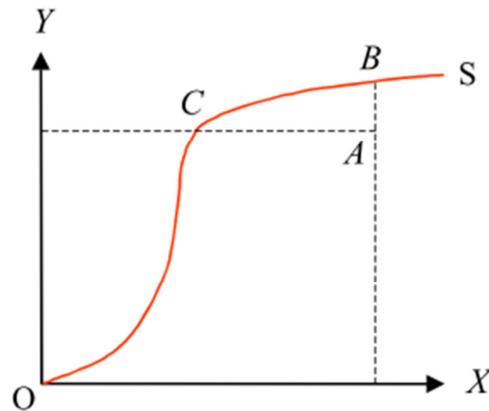
Já a eficiência de uma unidade é alcançada quando ao se comparar com as demais DMUs não é possível evidenciar qualquer ineficiência no uso de qualquer insumo (*inputs*) ou produto (*outputs*). Por isso, a DMU eficiente é aquela com maior produtividade utilizando os insumos (*inputs*) disponíveis para obter a maior quantidade de produtos (*outputs*) (CHAVES, 2007).

A Análise Envoltória de Dados se diferencia dos métodos paramétricos, pois não faz nenhuma suposição funcional e analisa que o máximo que poderia ter sido produzido é possível conseguir através da análise das unidades mais produtivas. Já os métodos paramétricos suporiam uma relação funcional pré-definida entre os recursos utilizados, com aquilo que foi produzido, e, geralmente, utilizam de médias para que seja determinado o que poderia ter sido produzido (CHAVES, 2007).

Embora o conceito de eficiência e produtividade trate da mesma relação entre *input* e *output*, produto /insumo, eles são diferentes.

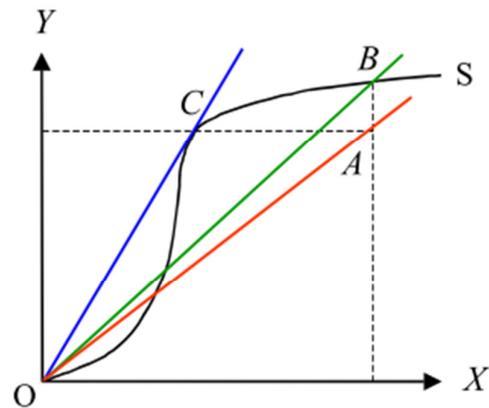
Soares de Mello *et al.* (2005) demonstram:

a) Na Figura 2.2, o eixo *X* representa os Recursos; *Y* representa a Produção; a curva *S*, chamada Fronteira de Eficiência, indica o máximo que foi produzido para cada nível de recurso. A região abaixo da curva é chamada de Conjunto Viável de Produção.



**Figura 2.2** – Produtividade x Eficiência  
Fonte: Kassai (2002)

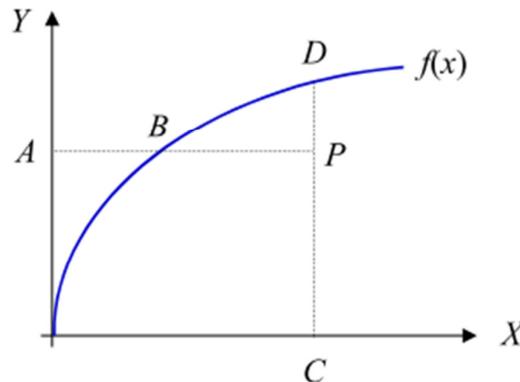
b) A Figura 2.3, apresenta a diferença entre os conceitos de produtividade e eficiência. Enquanto as unidades *B* e *C* são eficientes (uma vez que estão localizadas na fronteira de eficiência), apenas a unidade *C* é a mais produtiva. Observa-se este fato comparando-se os coeficientes angulares das retas *OC* e *OB*. Assim, a unidade mais produtiva é aquela cuja reta que a liga a origem tem o maior coeficiente angular possível. Em outras palavras, sendo *C* a unidade mais produtiva, a reta *OC* tem por coeficiente angular a derivada da função que relaciona produção com recursos, caso esta derivada exista. A unidade *A* é simultaneamente uma unidade não produtiva e não eficiente.



**Figura 2.3** – Curva de um processo de produção  
Fonte: Kassai (Op. cit.)

É possível tratar as unidades não eficientes de modo que se tornem eficientes: a) reduzindo os recursos (*insumo*) e mantendo constantes os produtos (*outputs*), assim tendo uma orientação a *input*; b) invertendo a situação anterior, assim tendo uma orientação a *output*.

c) Seja a fronteira de eficiência definida por  $f(x)$ . A DMU ineficiente  $P$  precisa caminhar até o ponto  $B$  se quiser tornar-se eficiente reduzindo recursos. No entanto, se preferir aumentar os produtos, tem que caminhar até o ponto  $D$ . Este esquema é demonstrado na Figura 2.4.

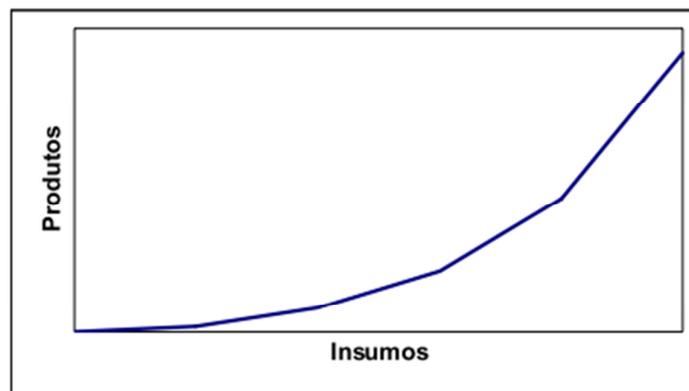


**Figura 2.4** – Alcance da Fronteira de Eficiência  
Fonte: Kassai (Op. cit.)

No primeiro caso, a eficiência é definida pelo quociente  $AB/AP$  e é um número entre 0 e 1. Já no segundo caso, a eficiência é dada por  $CP/CD$  que também é um valor entre 0 e 1.

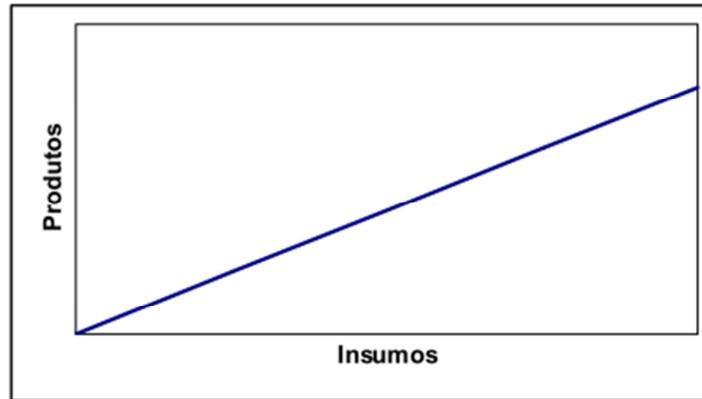
São tidas como base para a análise de eficiência, as curvas de produção, que visam uma definição de relação entre recursos (*inputs*) e produtos (*outputs*). Para que seja determinada essa relação, ocorrem algumas hipóteses:

- a) O **retorno crescente de escala**, demonstrado na Figura 2.5, é aquele no qual o aumento do consumo de recursos (*inputs*) implicará em um aumento mais que proporcional na quantidade de produtos (*outputs*), também chamado de economia de escalas.



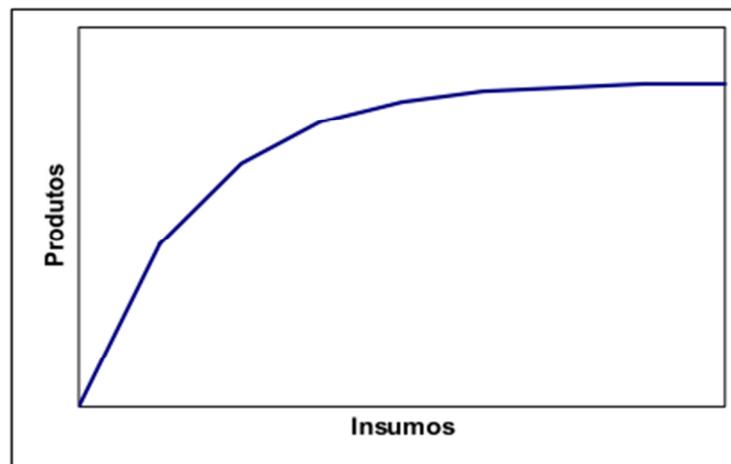
**Figura 2.5** – Retorno Crescente de Escala  
Fonte: Kassai (Op. cit.)

- b) O **retorno constante de escala**, demonstrado na figura 2.6, é aquele no qual ao aumentar o consumo de recursos (*inputs*) tem-se um aumento proporcional na quantidade de produtos (*outputs*).



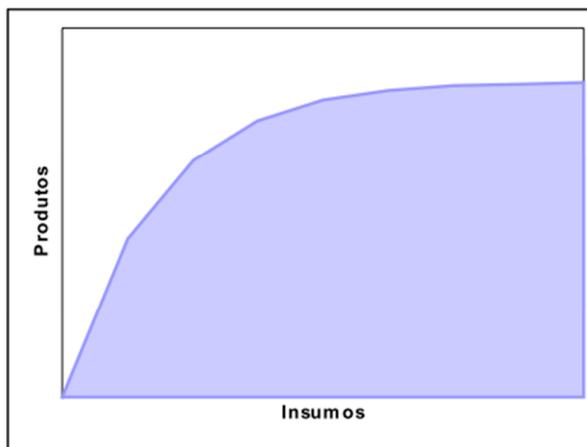
**Figura 2.6** – Retorno Constante de Escala  
Fonte: Kassai (Op. cit.)

- c) O **retorno decrescente de escala** onde se aumentar o consumo de recursos (*inputs*) implicará um aumento menos proporcional na quantidade de produtos (*outputs*) também chamada de *deseconomia de escalas*.



**Figura 2.7** – Retorno Decrescente de Escala  
Fonte: Kassai (Op. cit.)

- d) Adicionalmente, tem-se a *free disposal*, hipótese de **livre descarte**, na qual determinado nível de consumo de recursos (*inputs*) permite produzir a quantidade máxima ou mesmo qualquer quantidade inferior, de forma que o conjunto alternativo é constituído abaixo da curva máxima de produção, podendo ser visualizada conforme Figura 2.8.



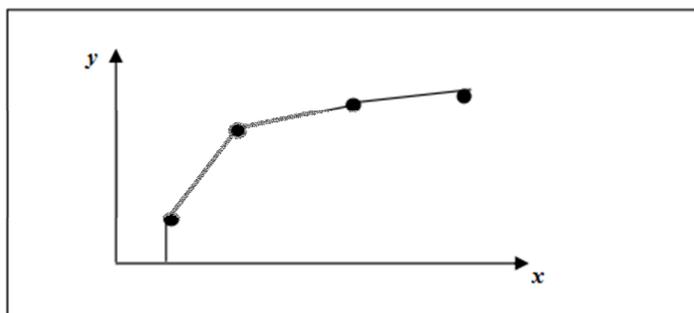
**Figura 2.8** – Alternativa do Retorno Decrescente de Escala  
Fonte: Kassai (Op. cit.)

Dessa forma, o lucro máximo pode ser apurado se for incluído na análise do vetor de preços para recursos (*inputs*) e produtos (*outputs*). Através da programação linear, pode-se resolver o sistema de inequações maximizadas dos resultados, de modo que as restrições sejam atendidas no que se refere aos recursos e processo produtivo analisado. Da mesma forma que se pode verificar o ponto na fronteira que indica onde se utilizará o mínimo de recursos possíveis para que se alcance um resultado determinado.

Chaves (2007) menciona que em qualquer um desses modelos DEA:

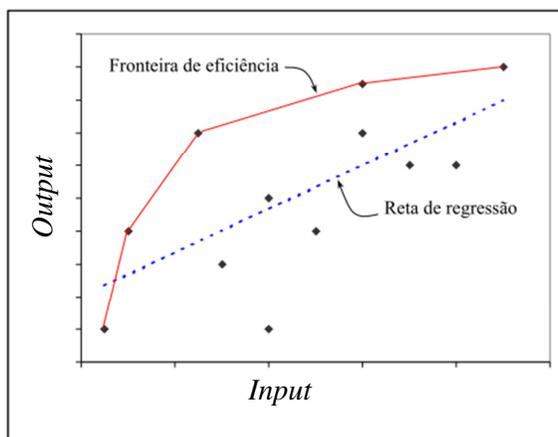
- a) Cada DMU possui seu próprio conjunto de pesos, de modo que pareça o melhor possível em relação às demais. Dessa forma, cada DMU pode ter um conjunto de pesos (multiplicadores) diferente;
- b) Todos os modelos são invariantes com a escala de medida;
- c) A DMU que apresentar a melhor relação (*output j*) / (*input i*) será sempre eficiente;
- d) Pré-escolha das variáveis, ou seja, identificar quais variáveis poderão compor o modelo. A decisão se elas entrarão efetivamente no modelo depende de uma segunda análise, mais aprofundada;
- e) As DMU escolhidas precisam estar alinhadas e desempenhando funções semelhantes. A partir da utilização de uma série de *inputs*, devem ser capazes de produzir um conjunto de *outputs*. Daí, a importância da escolha das variáveis que serão utilizadas como *input* e *output*, já que poderão ser levados em conta fatores controláveis (de gestão) e fatores não controláveis (do ambiente), tanto qualitativos, como quantitativos.

Adverso às abordagens paramétricas tradicionais, o método DEA otimiza cada unidade de tomada de decisão, DMU, de forma individual objetivando determinar uma fronteira linear por partes (ou *piece-wise linear*), compreendendo assim o conjunto de DMU Pareto-Eficiente, demonstrada na Figura 2.9.



**Figura 2.9** – Fronteira linear por partes (ou *piece-wise linear*)  
Fonte: Chaves (2007)

Na Figura 2.10 tem-se a comparação entre abordagens não paramétricas e paramétricas.



**Figura 2.10** – Comparação entre abordagens: DEA (não paramétrica) e regressão linear (paramétrica)

Desse modo, a Análise Envoltória de Dados é um método de apoio à tomada de decisão, sendo possível modelar de forma otimizada uma fronteira de eficiência indicando as unidades referência para as demais.

## 2.6 Modelos DEA

Sabe-se que os modelos de DEA são o CCR (de Charnes, Cooper e Rhodes), BCC (de Barnes, Charnes e Cooper), multiplicativos variante e invariante e o aditivo. A Tabela 2.1 traz um quadro comparativo entre esses modelos

**Tabela 2.1** – Comparativo entre modelos matemáticos

Modelo	Retorno à Escala	Forma da Fronteira
Aditivo	Variável	Linear por partes
Multiplicativo variante	Variável	Cobb-Douglas por partes
Multiplicativo invariante	Constante	Log-Linear por partes
BCC	Variável	Linear por partes
CCR	Constante	Reta de 45°

Devido às inúmeras formas de se interpretar amplamente os dados gerados, notou-se que os modelos mais utilizados são:

- **Modelo CCR** (1978) – desenvolvido por Charnes, Cooper e Rhodes, que permite uma avaliação objetiva da eficiência global e identifica as fontes e estimativas de montantes das ineficiências identificadas.
- **Modelo BCC** (1984) – criado por Banker, Charnes e Cooper, distingue entre ineficiências técnicas e de escala, estimando a eficiência técnica pura, a uma dada escala de operações, e identificando se estão presentes ganhos de escala crescentes, decrescentes e constantes, para futura exploração.

### 2.6.1 O Modelo CCR

A formulação original de Charnes *et al.* (1978) do modelo CCR tem **orientação ao consumo** (*input*) e é representada:

$$\text{Maximizar } \sum_{k=1}^S v_k y_{kp} \quad (2.3)$$

sujeito a

$$\sum_{j=1}^m u_j x_{jp} = 1 \quad (2.4)$$

$$\sum_{k=1}^s v_k y_{ki} - \sum_{j=1}^m u_j x_{ji} \leq 0 \quad \forall i \quad (2.5)$$

$$v_k, u_j \geq 0 \quad \forall k, j \quad (2.6)$$

Onde:

$k = 1$  para  $s$ ,

$j = 1$  para  $m$ ,

$i = 1$  para  $n$ ,

$y_{ki}$  = quantidade de *output*  $k$  produzida pela DMU  $i$ ,

$x_{ji}$  = quantidade de *input*  $j$  produzida pela DMU  $i$ ,

$y_{ki}$  = quantidade de *output*  $j$  utilizada pela DMU  $i$ ,

$v_k$  = peso dado para o *output*  $k$ ,

$u_k$  = peso dado para o *output*  $k$ ,

O objetivo do modelo é a minimização do consumo de insumos utilizando-os para produzir, no mínimo, o nível de produção dado. E isso está demonstrado na formulação de maximizar o somatório das quantidades produzidas  $v$  multiplicando pelos pesos correspondentes  $y$

A Equação (2.5) pode ser descrita como a subtração entre os somatórios das quantidades produzidas multiplicada pelo seu peso (preço) dos produtos ( $\sum_{k=1}^s v_k y_{ki}$ ) com o somatório dos insumos consumidos pelo seu respectivo peso (preço) ( $\sum_{j=1}^m u_j x_{ji}$ ), onde deve ser menor ou igual à zero, aonde se dá seu limite. Se a empresa analisada  $k$  obtiver o resultado “0” será eficiente, atendendo restrição.

A Equação (2.6), pode ser descrita como o somatório do produto das quantidades que foram consumidas de recursos pelo seu respectivo peso (preço) específicos para a empresa  $k$  ( $\sum_{i=1}^n v_i x_{ik}$ ) deve ser igual a 1. Se a empresa analisada  $k$  obtiver o resultado “1” será eficiente, atendendo a segunda restrição. Caso não seja eficiente, o resultado alcançado será sempre inferior a 1.

Esse processo deverá ser realizado para cada empresa  $k$ . Quando terminado o Problema de Programação Linear (PPL) para todas as empresas, será possível verificar o grupo de empresas eficientes, onde  $h_k$  é igual a 1.

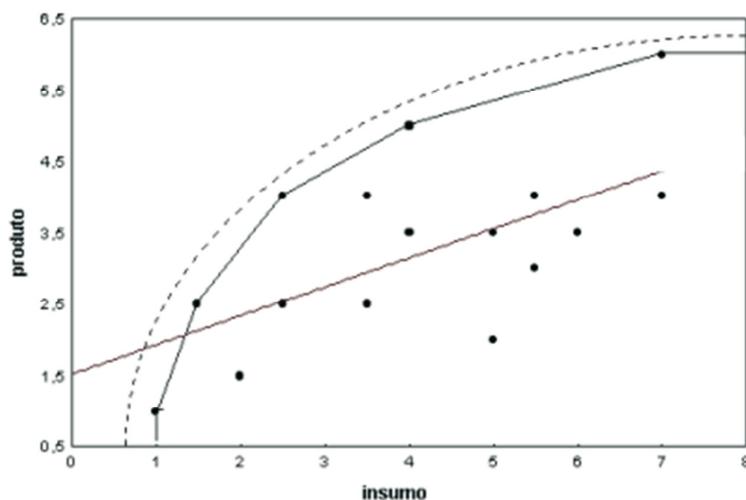
Pode-se construir uma curva de produção ao se ter um grupo de empresas e o plano de produção realizado por elas. Ao se resolver o PPL para cada empresa, é possível identificar aquela empresa que possui o plano de produção, dados os pesos (preços) determinados para

suas quantidades de insumos e produtos e que não pode ser sobrepujado por nenhum plano de nenhuma outra empresa do grupo de empresas analisadas.

Para superar esses problemas, pesquisadores utilizaram métodos baseados no desempenho de dados agrupados para identificar *benchmarks* mais adequados (DOYLE e & GREEN, 1994; TALLURI e & SARKIS, 1997). Assim, estes métodos agrupam DMU inerentemente semelhantes em grupos, e o melhor desempenho em determinado grupo é utilizado como referência por outras DMUs no mesmo conjunto de dados. Essa empresa será tida como referência para as demais.

Com os dados considerados dessa empresa, resolve-se o problema de todas as outras empresas de forma sucessiva, determinando, assim, quais empresas se tornam relativamente eficientes.

Graficamente na Figura 2.11, os planos de produção (representados por pontos) podem ser determinados.



**Figura 2.11** – Análise para um conjunto de empresas através do DEA

Onde:

- demonstra a Fronteira de Eficiência Efetiva
- demonstra a Fronteira de Eficiência Revelada

Os pontos representados na Figura 2.11 são os planos de produção de cada empresa do grupo analisado. A curva de produção demonstra as empresas, tidas como referência, que não tiveram seus planos de negócio superados por nenhuma outra considerando os pesos (preços)

que puderam ser determinados depois que o PPL foi realizado para as quantidades de insumos e produtos. Esse processo é chamado de **Frenteira de Eficiência**.

Vale ressaltar que, caso entre o conjunto de empresas uma ou outra tenha que ser acrescentada ou excluída da análise, automaticamente será modificada a frenteira.

Também, a frenteira tida como eficiente pode não ser necessariamente a frenteira eficiente efetiva, recebendo o nome de **eficiência relativa** (ou Pareto eficientes), pois, as empresas do grupo analisado “podem estar operando sob condições distantes do livre mercado” (KASSAI, 2002). As empresas eficientes devem ser definida como **Pareto não-denominados**.

Ainda de acordo com a Figura 2.11, os pontos que se encontram abaixo da curva de eficiência são planos de produção que já foram “dominados” pela análise e estão envolvidos pelas empresas eficientes, daí a origem do nome Envoltória, o envelopamento dos dados, pois cada ponto representado graficamente tem uma empresa que pode ser sua referência onde o conjunto de insumos e produtos são melhores.

Para Mariano *et al.* (2006) “a técnica DEA calcula a eficiência relativa de um conjunto de DMUs a partir de uma frenteira de eficiência cujo formato precisa ser previamente definido. Assim, a principal diferença entre os modelos matemáticos do DEA é em relação ao formato da frenteira e ao tipo de retorno de escala”.

O modelo CCR tem a **orientação para produto** (*output*) com a seguinte formulação:

$$\text{Maximizar } h_k = \sum_{i=1}^n v_i x_{ik} \quad (2.7)$$

sujeito a

$$\sum_{r=1}^m u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^n v_i x_{ij} \leq 0 \quad (2.8)$$

$$\sum_{r=1}^m u_r y_{rk} = 1 \quad (2.9)$$

$$u_r, v_i \geq 0 \quad (2.10)$$

$y$  = produtos

$x$  = insumos

$u, v$  = pesos

$r = 1, \dots, m$ ; (núm. produtos)

$i = 1, \dots, n$ ; (núm. insumos)

$j = 1, \dots, N$  (núm. empresas)

O objetivo é a maximização do nível de produção utilizando no máximo o consumo de insumos observados. Os modelos são equivalentes e pressupõem retornos constantes de escala.

## 2.6.2 O Modelo BCC

A nomenclatura desse modelo provém da abreviação de Banker, Charnes e Cooper (1984), que o desenvolveram e elucidam que o modelo “é a utilização da programação matemática para obter avaliações *ex post facto* da eficiência relativa dos resultados dos gestores, quer tenham sido planejados ou executados”.

O Modelo BCC pressupõe que as unidades avaliadas apresentem retornos variáveis de escala. É capaz de avaliar o grau de eficiência relativa de unidades de tomada de decisão, que executem uma mesma atividade, no que se refere à utilização dos seus recursos. Assim, essa técnica permite que seja avaliada a eficiência de uma DMU com múltiplos insumos (*inputs*) e múltiplos produtos (*outputs*), possíveis através da construção de uma fronteira de eficiência, de forma que as unidades que possuem melhor relação “produto x insumo” são consideradas mais eficientes no grupo e estão localizadas sobre esta fronteira, já as menos eficientes estarão localizadas em uma região inferior à fronteira, na área conhecida como envelope (envoltória). BELLONI (2000, p. 68) afirma que “ao possibilitar que a tecnologia exiba propriedades de retornos à escala diferentes ao longo de sua fronteira, esse modelo admite que a produtividade máxima varie em função da escala de produção”.

A formulação matemática do Modelo BCC, com **orientação ao consumo**, é:

$$\text{Maximizar } \sum_{r=1}^m u_r y_{rk} - u_k, \quad (2.11)$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^n v_i x_{ik} = 1 \quad (2.12)$$

$$\sum_{r=1}^m u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^n v_i x_{ij} - u_k \leq 0 \quad (2.13)$$

$$u_r, v_i \geq 0 \quad (2.14)$$

$y$  = produtos

$x$  = insumos

$u, v$  = pesos

$r = 1, \dots, m$ ; (núm. produtos)

$i = 1, \dots, n$ ; (núm. insumos)

$j = 1, \dots, N$  (núm. empresas)

Percebe-se que é introduzida uma variável  $u_k$  representando os retornos variáveis de escala. Essa variável não deve atender à restrição de positividade; pode, portanto, assumir valores negativos.

Já a formulação matemática do Modelo BCC, com **orientação ao produto**, é:

$$\text{Maximizar } \sum_{i=1}^n v_i x_{ij} - v_k \quad (2.15)$$

sujeito a

$$\sum_{r=1}^m u_r y_{rj} = 1 \quad (2.16)$$

$$\sum_{r=1}^m u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^n v_i x_{ij} - v_k \leq 0 \quad (2.17)$$

$$u_r, v_i \geq 0 \quad (2.18)$$

$y$  = produtos

$x$  = insumos

$u, v$  = pesos

$r = 1, \dots, m$ ; (núm. produtos)

$i = 1, \dots, n$ ; (núm. insumos)

$j = 1, \dots, N$  (núm. empresas)

Onde, novamente, o termo  $v_k$  representa a possibilidade de retornos de escala variáveis, podendo assumir valores negativos ou positivos.

Como ressaltado anteriormente, a possibilidade de retornos de escala variáveis do Modelo BCC admite que a produtividade máxima varie em função da escala de produção. O modelo permite, portanto, a utilização de unidades de portes distintos (BELLONI, op. cit.).

### 2.6.3 Diferenças entre os Modelos e Indicadores

As diferenças fundamentais entre os modelos estão relacionadas a:

*I. superfície de envelopamento (tipos de combinação e suposições sobre o retorno de escala); e*

*II. tipo de projeção do plano ineficiente à fronteira.*

*Os modelos CCR e BCC trabalham com diferentes tipos de tecnologias e, conseqüentemente geram fronteiras de eficiência diferentes e medidas de eficiência diferentes. No que diz respeito à orientação, cada um desses dois modelos pode ser escrito sob duas formas de projetar os planos ineficientes na fronteira: uma voltada para os produtos e outra voltada para os insumos. Na primeira orientação, as projeções dos planos observados sobre a fronteira buscam o máximo aumento equiproporcional de produção dado o consumo observado e, na segunda orientação, a maior redução equiproporcional do consumo para a produção observada". (PAIVA, 2000, p. 42),*

E complementa Belloni (2000, p. 69) “Os modelos apresentam também regiões de viabilidades distintas. A região viável do Modelo BCC é restringida a combinações convexas dos planos de produção observados, o que é caracterizado pelos retornos variáveis de escala. Como consequência, considerando a orientação do produto, o indicador de eficiência do Modelo BCC é **menor ou igual** ao indicador de eficiência do Modelo CCR”. (grifo nosso)

No que se refere aos indicadores de eficiência, ao se considerar a orientação ao produto, temos o indicador de eficiência de escala (EES) que pode ser representado pela formulação:

$$EES(x_k, y_k) = \frac{EP(x_k, y_k)}{ET(x_k, y_k)}, \quad (2.19)$$

Onde

$$EES(x_k, y_k) = \text{Eficiência de Escala} \quad (2.20)$$

$$EP(x_k, y_k) = \text{Eficiência Produtiva} \quad (2.21)$$

$$ET(x_k, y_k) = \text{Eficiência Técnica} \quad (2.22)$$

KASSAI (2002, p. 77) resume:

- Se o indicador de eficiência produtiva for igual a 1, a unidade opera em eficiência produtiva e deve ter os demais indicadores iguais a 1.
- Se o indicador de eficiência produtiva for superior a 1, a unidade analisada apresenta ineficiência produtiva, que pode ser decorrente de ineficiência técnica ou de escala.
- Se o indicador de eficiência técnica for igual a 1, a ineficiência produtiva é decorrente de a unidade operar em uma escala inapropriada.
- Se o indicador de eficiência técnica for maior que 1, a unidade opera com ineficiência técnica. Calcula-se, então, o indicador de eficiência de escala para constatar se a unidade opera com eficiência de escala.
- Se o indicador de eficiência de escala for igual a 1, toda a ineficiência é decorrente de fatores técnicos.
- Se o indicador de eficiência de escala for maior que 1, a unidade analisada apresenta fatores de ineficiência técnicas e de escala.

## 2.7 Condições de Aplicação do DEA

Para que o método da Análise Envoltória de Dados funcione adequadamente, é necessário algumas condições de aplicação. São eles:

- Necessita unidades comparáveis;
- Essas unidades comparáveis devem atuar nas mesmas condições de mercado;

- Os tipos de *inputs/outputs* sejam os mesmos para todas as DMUs;
- Dados numéricos disponíveis;
- Uma quantidade de *inputs* menor que a de *outputs* é preferível.

## 2.8 Classificação das Variáveis

Uma das grandes dificuldades encontradas pelos gestores é quanto à classificação das variáveis, o que não é um processo trivial e dependerá da experiência dos gestores do processo de acordo com o objetivo da análise.

Para BATISTA (2009) “Ao definir determinada variável como entrada ou saída no modelo, estamos na verdade considerando o modo pelo qual seu incremento influencia o desempenho da unidade sendo avaliada. A participação dos gestores nesse processo é imprescindível”.

Uma sugestão para auxiliar nesse processo de escolha das variáveis é citada por COOPER, SEIFORD e TONE (2006) apud BATISTA (2009, p. 53) diz: “Tomando por base a razão de eficiência, saídas/entradas, basta o decisor perguntar se um aumento na variável irá melhorar ou piorar o índice de eficiência de acordo com o objetivo pretendido na análise. Se o indicador melhorar, deve ser tratado como saída, e se piorar, como entrada”.

## 2.9 Escolha e Aplicação do Modelo

Ao escolher um modelo particular, determina-se:

- As propriedades implícitas dos retornos de escala;
- A geometria da superfície de envelopamento dos dados, que tem relação com as medidas de eficiência;
- As projeções de eficiência, ou seja, o caminho das DMUs (unidade de tomada de decisões) ineficientes até a fronteira de eficiência.(CHARNES *et al.*, 1994)

O *benchmark* das unidades ineficientes é determinado pela projeção destas nas fronteiras de eficiência. A determinação do modelo se dá pela forma como é realizada essa projeção: quando for orientada a *inputs*, a eficiência será atingida por uma redução equiproporcional de entradas, mas serão mantidas as saídas constantes; e quando for orientada a *outputs*, ao se maximizar serão atingidos os resultados sem diminuir os recursos.

## 2.10 Ranking de Desempenho em DEA

Os modelos tradicionais de DEA não permitem ranquear a DMU, especialmente os mais eficientes. Além disso, é possível na Análise Envoltória de Dados que algumas das DMUs ineficientes possuem, de fato, melhor desempenho em geral que determinadas DMUs tidas como eficientes. Isto é por causa do problema sem restrições da flexibilidade do peso nesse método.

Na determinação de um problema de eficiência relativa, permite pesos dos fatores irrestritos ( $u_r$  e  $v_i$ ). Assim, uma DMU pode alcançar uma pontuação elevada de eficiência em relação ao ser envolvido em um esquema de peso razoável (DYSON e & THANNASSOULIS, 1988; WONG e & BEASLEY, 1990).

Tais DMUs ‘pesadas’ possuem poucas medidas favoráveis e ignoram completamente os outros *inputs* e *outputs*. Estas DMUs podem ser consideradas como membros de nicho e não são bons em desempenhos globais. Eficiência cruzada em DEA é um método que poderia ser utilizado para identificar os bons desempenhos globais e efetivamente ranquear as DMUs (SEXTON *et al.*, 1986).

Eficiência cruzada é um método que avalia o desempenho de uma DMU considerando o *input* ótimo e os pesos do *output* ( $u_r$  e  $v_i$ ) das outras DMUs. Os resultados podem ser agregados em uma matriz de eficiência cruzada (CEM, do inglês, *cross-efficiency matrix*). No CEM, o elemento na linha e na coluna representam a eficiência da DMU quando avaliados em relação aos pesos ideais da DMU.

Assim, a DMU que tem um ótimo desempenho, deverá ter várias pontuações altas de eficiência cruzada ao longo da coluna no CEM. Da mesma forma a DMU com um baixo desempenho deve ter vários valores baixos. Os meios de coluna podem ser computados para efetivamente diferenciar um bom desempenho de um desempenho ruim (BOUSSOFIANE *et al.*, 1991).

Uma limitação na utilização da matriz de eficiência cruzada é que os pesos dos fatores obtidos na Equação (2.18) podem não ser únicos. Essa limitação pode prejudicar a eficácia da CEM em discriminar entre desempenhos bons e ruins. Algumas outras técnicas têm sido propostas para a obtenção de pesos dos fatores robustos para utilizar na construção da CEM.

DOYLE e GREEN (1994) desenvolveram um conjunto de formulações para esta finalidade. O que é mais apropriado para esta discussão é a formulação agressiva, que

identifica pesos ideais, que não só maximizam a eficiência de uma unidade, mas também minimizam a eficiência da unidade média que é construída a partir da outra  $n - 1$  unidade.

TALLURI (2000) propôs uma variação do modelo de DOYLE e GREEN (1994), na qual compara um par de DMUs de cada vez. Neste modelo, a DMU alvo (avaliador) não só maximiza a eficiência, mas também minimiza a pontuação da eficiência de cada unidade, por sua vez. Assim, os pesos ideais da DMU alvo podem variar, dependendo da ‘concorrência’ a ser avaliada. Em essência, a DMU alvo pode envolver várias estratégias (soluções ótimas ou os pesos de *input* e *output*), isto é, que enfatiza seus pontos fortes, que são as fraquezas de um concorrente específico. Estes resultados podem ser incorporados em uma CEM para identificar bons desempenhos globais.

Assim, ampliando o exemplo dado no parágrafo anterior, baseando-se no trabalho de COOK *et al.* (1996), SARKIS e TALLURI (1999), ambos propuseram uma combinação de modelos que permitiram uma classificação mais eficaz de DMUs na presença tanto de fatores quantitativos, como fatores qualitativos. Estes modelos também são baseadas em avaliações cruzadas em DEA.

Vários autores propuseram outros métodos, mas talvez um grande modelo de classificação foi proposto por Andersen e Petersen (1993). Neste modelo, a DMU testada é removida permitindo que o conjunto de restrições das DMUs para atingir um ganho de eficiência maior do que 1, o que proporciona um método de classificação para unidades eficientes e ineficientes.

## 2.11 Os Pesos

Na Análise Envoltória de Dados, dos fatores que mais divergem a opinião de pesquisadores é em relação a qual peso atribuir à otimização. Pela formulação tradicional, restringe-se o peso dos *inputs* e *outputs* a valores maiores ou iguais a zero.

Para utilizar pesos de forma a evitar a ocorrência de DMUs pseudoeficientes, uma alternativa utiliza a regra não-Arquimediana que auxiliam no controle e monitoramento dos recursos que são aplicados, pois é possível acrescentar fatores e variáveis de naturezas distintas.

Assim, na formulação de DEA, considere um conjunto de  $n$  DMU, com cada DMU  $j$ , ( $j = 1, \dots, n$ ), utilizando  $m$  entradas  $x_{ij}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) e gerando  $s$  saídas  $y_{rj}$  ( $r = 1, \dots, s$ ). Se os

preços ou multiplicadores  $\bar{u}_r$ ,  $\bar{v}_i$  associado com *outputs*  $r$  e *inputs*  $i$ , respectivamente, são conhecidas, em seguida, emprestando a teoria de custo/benefício, pode-se expressar a eficiência  $\bar{e}_j$  da DMU $_j$  como a relação das saídas ponderadas para entradas ponderadas, assim

$$\sum_r \bar{u}_r y_{rj} / \sum_i \bar{v}_i x_{ij} \quad (2.23)$$

De acordo com a Cook e Seiford (2009), a relação de custo/benefício é, obviamente, a base para a relação entre a produtividade da engenharia padrão. Na ausência de multiplicadores conhecidos, Charnes *et al.* (op. cit.) propuseram decorrentes multiplicadores apropriados para uma determinada DMU através da resolução de um problema de programação não-linear particular. Especificamente, se DMU $_o$  está sendo considerada, o modelo de Charnes *et al.* (1978) para a eficiência técnica de DMU que é dada pela solução do problema de programação fracionada:

$$\begin{aligned} e_o = \max \quad & \sum_r u_r y_{ro} / \sum_i v_i x_{io} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_r u_r y_{rj} - \sum_i v_i x_{ij} \leq 0, \quad \forall j \\ & u_r, v_i \geq \varepsilon > 0, \quad \forall r, i. \end{aligned} \quad (2.24)$$

onde  $\varepsilon$  é um valor não-Arquimediano projetado para cumprir a positividade estrita das variáveis. O problema na Equação (2.24) é conhecido como o modelo CCR, e prevê retornos constantes de escala (CRS). Observa-se no artigo original de 1978, que simplesmente restringem as variáveis a serem não-negativas ( $\varepsilon = 0$ ); a imposição de um limite inferior estritamente positivo ( $\varepsilon > 0$ ) foi introduzido em um artigo posterior ao original por Charnes *et al.* (1981). DEA tem sido universalmente reconhecida como uma ferramenta útil de avaliação de desempenho, mas muitas vezes mais de uma DMU é avaliada como DEA eficiente, o que faz com que  $\varepsilon = \left[ (ms + 1) \left( \sum_{i=1}^m x_{io} + \sum_{r=1}^s y_{ro} \right) \right]^{-1}$  seja definida para chegar a uma solução neste problema. Mais detalhes sobre a forma de impor restrição de peso mínimo em todas as entradas e saídas, a fim de uma DMU total ou parcialmente discriminada pode ser encontrada em Wang *et al.* (2009).

É essencial notar que o modelo da Equação (2.24) que envolve a relação de *outputs* para *inputs* é conhecido como o modelo orientado a *input*. Pode-se, assim, inverter essa relação e resolver o problema de minimização orientado ao *output* correspondente. Aplicando Charnes e Cooper (1962) a teoria de programação fracionária, fazendo a mudança das

variáveis  $\mu_r = t\mu_r$  e  $v_i = tv_i$ , onde  $t = \left(\sum_i v_i x_{io}\right)^{-1}$ , o problema da Equação (2.25) pode ser convertido para um modelo de programação linear (PL):

$$\begin{aligned}
 e_o = \max \quad & \sum_r \mu_r y_{ro} \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_i v_i x_{io} = 1 \\
 & \sum_r \mu_r y_{rj} - \sum_i v_i x_{ij} \leq 0, \quad \forall j \\
 & \mu_r, v_i \geq \varepsilon, \quad \forall r, i.
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

## 2.12 Estimativa pela Máxima Verossimilhança

O princípio da estimativa de máxima verossimilhança (*maximum-likelihood estimative* - MLE), foi desenvolvido por R. A. Fisher na década de 1920, diz que é um método que busca a distribuição de probabilidade e faz com que os dados observados sejam os mais “prováveis”, o que significa que deve-se buscar o valor do vetor de parâmetros que maximiza a função de verossimilhança (MYUNG, 2003).

Myung (op. cit.) elucida ainda que por conveniência computacional, a estimativa de máxima verossimilhança é obtida através da maximização da função de probabilidade logarítmica  $\ln L(w|y)$ . Isso ocorre pois duas funções,  $\ln L(w|y)$  e  $L(w|y)$  são relacionados uns com os outros de modo que a mesma estimativa MLE é obtido através da maximização de qualquer um.

Supondo-se que a função de log-verossimilhança  $\ln L(w|y)$ , é diferenciável, se  $w_{MLE}$  existe, ele deve satisfazer a seguinte equação diferencial parcial conhecida como a equação de verossimilhança:

$$\frac{\partial \ln L(w|y)}{\partial w_i} = 0 \tag{2.26}$$

Onde  $w_i = w_{i,MLW}$  para todo  $i = 1, \dots, k$ . Isso porque a definição de limites máximos ou mínimos de uma função contínua diferenciável implica que suas primeiras derivadas desapareçam nesses pontos.

Myung (op. cit.) explica que a equação de probabilidade representa uma condição necessária para a existência de uma estimativa de máxima verossimilhança. Assim, uma condição adicional deve ser igualmente observada para garantir que  $\ln L(w|y)$ , é um máximo e não o mínimo, já que a primeira derivada não pode revelar isso.

Para ser um máximo a forma da função de log-verossimilhança deve ser convexo (ele deve representar um pico, e não um vale), na proximidade de  $w_{MLE}$ . Através do cálculo das segundas derivadas das log-verossimilhanças essa explicação é observada mostrando se são todos negativos em  $w_i = w_{i,MLE}$  para  $i = 1, \dots, k$

$$\frac{\partial^2 \ln L(w|y)}{\partial w_i^2} < 0 \tag{2.27}$$

### 3 DEA DOIS ESTÁGIOS (*TWO-STAGE*)

Muitos estudos utilizaram uma abordagem em duas fases, nos quais a eficiência é estimada na primeira fase, e, em seguida, as eficiências estimadas (ou, em alguns casos, as razões de eficiência estimadas, índices Malmquist, etc) são regredidas em co-variáveis (tipicamente diferentes dos utilizados na primeira fase), que são consideradas como representando as variáveis ambientais (SIMAR e WILSON, 2007).

A abordagem em dois estágios é defendida por diversos autores entre eles Simar e Wilson (2007). Os autores apontam inúmeros outros trabalhos com Dois Estágios como Chilingirian e Sherman (2004), Ray (2004), e Ruggiero (2004); exemplos publicados recentemente incluem Cheng *et al.* (2000), Resende (2000), Worthington e Dollery (2000), Chakraborty *et al.* (2001), Mukherjee *et al.* (2001), Raczka (2001), Ralston *et al.* (2001), Isik e Hassan (2002), O'Donnell e van der Westhuizen (2002), Otsuki *et al.* (2002), Stanton (2002), Binam *et al.* (2003), Chu *et al.* (2003), Wang *et al.* (2003), Barros (2004), Okeahalam (2004), Turner *et al.* (2004) e Leme *et al.* (2014).

Fried *et al.* (1993, 1999b, 2002) regrediram os radiais de folga de forma sutil à abordagem DEA tradicional fazendo com que as variáveis dependentes sejam funções de eficiências estimadas.

Simar e Wilson (2007) apontam que nos levantamentos realizados nenhum dos estudos desta abordagem em dois estágios têm descrito o DGP (processo de geração de dados) subjacente, assim, uma vez que o DGP não foi descrito, há algumas dúvidas sobre o que está a ser estimado, em abordagens de dois estágios.

Autores têm argumentado que as estimativas de eficiência da DEA estão de alguma forma censurando uma vez que existem normalmente diversas estimativas iguais a um, mas nenhum relato coerente de como a censura surge foi proposto (SIMAR e WILSON, op. cit.).

Atualmente, os modelos propostos por Simar e Wilson (op. cit.) demonstram ser o mais adequado para lidar com amostras pequenas que induzem a alguns problemas de estimativa e inferência do segundo estágio decorrentes dessas amostras.

### 3.1 Um modelo estatístico

O método proposto por Simar e Wilson (2007) aborda problemas utilizando o tradicional método de mínimos quadrados ordinários ou regressão de Tobit encontrados na análise de pequenas amostras, decorrentes de estimativa e à inferência do segundo estágio.

No segundo estágio de DEA os escores obtidos são regredidos nas covariáveis pela estimativa demonstrada no modelo de regressão

$$\hat{\theta}_j = z_j\beta + \varepsilon_j \quad (3.1)$$

Onde  $\hat{\theta}_j$  é o estimador de DEA para o escore de eficiência e indica o uso de um modelo de regressão;  $z_j$  é o vetor (1 x r) de variáveis exógenas ou não discricionárias;  $\beta$  é o vetor (r x 1) de parâmetros; e  $\varepsilon_j$  é o termo de erro.

A princípio, os escores  $\hat{\theta}_j$ , estimados são correlacionados, isso faz com que os pontos observados na fronteira estimada tendam a mudar os escores estimados para as demais unidades.

Tendo os insumos e produtos correlacionados com as variáveis exógenas,  $z_j$  o vetor, está correlacionado com o termo  $\varepsilon_j$ . Ainda, pelo modelo, o estimador apresenta viés em direção a 1, e  $\hat{\theta}_j$  apresenta uma baixa taxa de convergência assintótica.

Simar e Wilson (op. cit.) apontam que estudos que utilizaram a abordagem de dois estágios têm assumido, explícita ou implicitamente, que as empresas enfrentam certas variáveis ambientais  $\mathbf{z}$ , e que estes restringem suas escolhas de entradas  $\mathbf{x}$  e saídas  $\mathbf{y}$ . No mundo real, o analista é confrontado com um conjunto de observações  $\Phi_n = \{(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i)\}_{i=1}^n$ .

Para solucionar tais problemas, Simar e Wilson (op. cit.) propõem que seja utilizado um algoritmo que envolva o uso de regressão truncada e do processo conhecido por *bootstrap*.

*Bootstrap* é um método de simulação que objetiva “(...) encontrar uma resposta à necessidade de testar a confiabilidade das estatísticas largamente utilizadas e estimar testes de hipóteses e intervalos de confiança mais próximos da verdadeira distribuição estatística, que é desconhecida” (BARROS e TENÓRIO JÚNIOR, 2010, p. 2).

O primeiro algoritmo que mencionam, apenas melhora a inferência sobre  $\beta$  e o erro padrão de  $\varepsilon_j$ .

O uso do segundo algoritmo é considerado o mais completo, pois pode corrigir o viés presente em  $\hat{\theta}_j$ , antes de que seja estimado  $\beta$  e  $\sigma$ .

Ribeiro (2008) descreve detalhadamente o algoritmo de Simar e Wilson (2007) da seguinte maneira:

- 1) Computar  $\hat{\theta}_j$  para todas as unidades de decisão da amostra pelo uso do método DEA;
- 2) Estimar a equação  $\hat{\theta}_j = z_j\beta + \varepsilon_j$  considerando-a uma regressão truncada, usando apenas as observações das unidades de decisão para as quais  $\hat{\theta}_j > 1$ . Obter as estimativas de máxima verossimilhança  $\hat{\beta}$  e  $\hat{\sigma}$ .
- 3) Primeira etapa da correção do viés presente em  $\hat{\theta}_j$ , com a obtenção dos conjuntos de estimativas *bootstrap*  $B_j = \{\hat{\theta}_{jb}^*\}_{b=1}^{L1}$  para todas as unidades de decisão. Repetir L1 vezes os quatro passos seguintes:
  - 3.1) Para cada  $j = 1, \dots, N$ , obter  $\varepsilon_j$  de uma distribuição  $N(0, \hat{\sigma}_*^2)$  truncada à esquerda em  $(1 - z_j\hat{\beta})$ .
  - 3.2) Para cada  $j = 1, \dots, N$ , computa  $\theta_j^* = z_j\hat{\beta} + \varepsilon_j$ .
  - 3.3) Faça  $y_{ij}^* = y_{ij}\hat{\theta}_j/\theta_j^*$  uma medida do produto modificada.
  - 3.4) Computar  $\theta_j^*$  (para cada  $j = 1, \dots, N$ ).
- 4) Segunda etapa da correção do viés presente em  $\hat{\theta}_j$  (para cada  $j = 1, \dots, N$ ), com a obtenção do estimador corrigido  $\hat{\hat{\theta}}_j$ , fazendo  $\hat{\hat{\theta}}_j = 2\hat{\theta}_j - \overline{\theta_j^*}$ , onde o último termo é a média aritmética *bootstrap* de  $\theta_j^*$ .
- 5) Estimar a regressão truncada de  $\hat{\hat{\theta}}_j$  em  $z_j$ , obtendo as estimativas de máxima verossimilhança  $\hat{\hat{\beta}}$  e  $\hat{\hat{\sigma}}$ .
- 6) Obtenção dos conjuntos de estimativas *bootstrap*  $C = \{(\hat{\hat{\beta}}_b^*, \hat{\hat{\sigma}}_b^*)\}_{b=1}^{L2}$ . Repetir L2 vezes os três passos seguintes:
  - 6.1) Para cada  $j = 1, \dots, N$ , obter de uma distribuição  $N(0, \hat{\hat{\sigma}}^2)$  truncada à esquerda em  $(1 - z_j\hat{\hat{\beta}})$ .
  - 6.2) Para cada  $j = 1, \dots, N$ , computar  $\theta_j^{**} = z_j\hat{\hat{\beta}} + \varepsilon_j$ .

6.3) Com o uso do método de máxima verossimilhança, estimar a regressão truncada de  $\theta_j^{**}$  em  $z_j$ , obtendo as estimativas  $\widehat{\beta}^*$  e  $\widehat{\sigma}_\varepsilon^*$ ;

7) Utilizar as estimativas  $\widehat{\beta}$  e  $\widehat{\sigma}$  do passo [5] e os valores *bootstrap* em C para construir intervalos de confiança ou testar hipóteses sobre cada elemento de  $\beta$  e  $\sigma_\varepsilon$ . Por exemplo, se quisermos determinar o valor-p para uma dada estimativa  $\widehat{\beta}_1 < 0$ , basta computarmos a frequência relativa de estimativas *bootstrap* não negativas de  $\widehat{\beta}_1^*$ .

Dos autores Simar e Wilson (op. cit.) vêm à sugestão de utilizar L1 = 100 para o cálculo da estimativa corrigida do escore de eficiência e L2 sendo 2.000 para estimativa de  $\beta$  e  $\sigma_\varepsilon$ .

## 4. OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO

### 4.1 Aspectos gerais

Um problema de Otimização Multiobjetivo com restrições de desigualdade pode ser representado de acordo com a função:

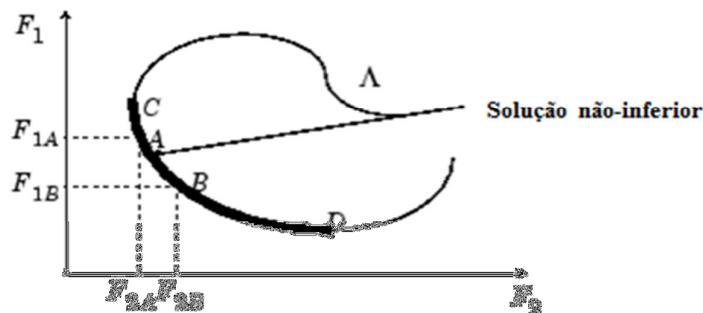
$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_p(\mathbf{x}) \\ & \text{Sujeito a: } g_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (4.1)$$

Onde:  $p$  é o número de funções objetivo a serem minimizadas. Ambos podem ser não-lineares. Em geral, não há solução  $x$  que minimize simultaneamente todas as funções.

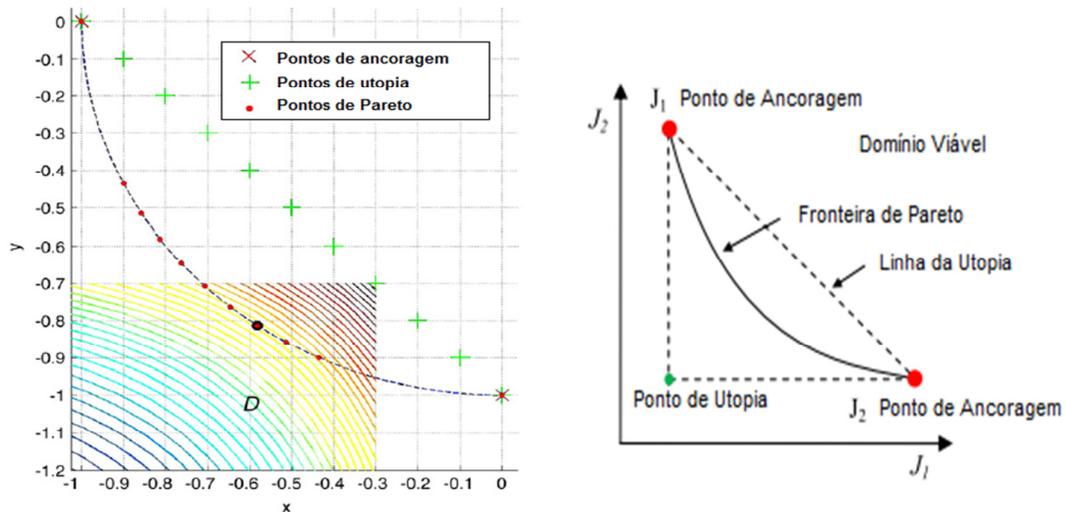
### 4.2 Fronteira de Pareto

Os problemas de otimização multiobjetivo se definem a partir da análise realizada no ordenamento das soluções, levando-se em conta os diversos objetivos. Assim, as soluções multiobjetivos, ou conhecidas como Soluções de Pareto, são as melhores soluções entre as quais não há como definir, partindo de avaliações funcionais objetivo, que uma determinada solução é melhor que a outra.

Pode ser definido como conjunto de soluções não-inferiores, não-dominadas ou Pareto-ótimas que formam a “Fronteira de Pareto”, demonstradas nas Figuras 4.1 e 4.2.



**Figura 4.1** - Fronteira de Pareto não-inferior  
Fonte: Mathworks



**Figura 4.2** - Fronteiras de Pareto e Pontos de Ancoragem  
Fonte: PAIVA (2012)

Conforme Paiva (2012), retas “Normais” à linha de Utopia, igualmente espaçadas, conduzem a pontos da Fronteira de Pareto também igualmente espaçados (*Even distribution*).

Pesos  $f(x)$  equidistantes não garantem que as Fronteiras de Pareto seja bem distribuídas (PAIVA, 2012). Dois elementos se destacam:

- ✓ **Pontos de ancoragem**, que definem os extremos da fronteira; melhores valores da função objetivo;
- ✓ **Linha de utopia**, um plano que compreende todos os pontos de ancoragem (hiperplano de utopia).

### 4.3 Métodos de Programação Multiobjetivo (MOP - *Multiple Objective Programming*)

Esses métodos são divididos quanto a duas estratégias de solução: por aglutinação e priorização. Geralmente, problemas de otimização multiobjetivo seguem a Equação (4.2):

$$\begin{aligned}
 & \min_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m, \mathbf{x} \in \mathcal{F}, \\
 & \mathbf{f}: \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^m, \\
 & \mathcal{F} = \begin{cases} g_i(\mathbf{x}) \leq 0; & i = 1, \dots, p \\ h_j(\mathbf{x}) \leq 0; & j = 1, \dots, q \\ \mathbf{x} \in \mathcal{X} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Os problemas multiobjetivos são caracterizados por: (I)  $m$  funções objetivos devem ser minimizadas simultaneamente. Em geral, são conflitantes (ou contraditórias), isso quer dizer que, ao minimizar um objetivo outro será maximizado; (II) o conjunto de soluções geralmente é grande, em alguns casos são infinitos.

#### 4.3.1 MOP: $\epsilon$ -Method

Método mais simples para a abordagem de “Priorização”. Sugerida por RITZEL *et al.* (1994) como uma alternativa simples na resolução de problemas de otimização multiobjetivo utilizando Algoritmos Genéricos (AG) que se baseia na minimização da função objetivo principal, considerando os demais objetivos como restrições de fronteira por certos níveis permitidos  $\epsilon_i$ . Assim, uma otimização de objetivo único é dada para a função objetivo principal estando sujeita a restrições adicionais.

*Resumindo:* (I) Função mais importante é a função objetivo; (II) demais funções são restrições (de acordo com os limites).

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } f_r(\mathbf{x}) \\
 & \text{S.a.: } g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \\
 & \quad L_i \leq f_i(\mathbf{x}) \leq U_i
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Onde:

$$\begin{aligned}
 L_i &= \text{lowerbound} && (\text{limite inferior}) \\
 U_i &= \text{Upperbound} && (\text{limite superior})
 \end{aligned}$$

### 4.3.2 MOP: Lexicográfica

Sugerida por KURSAWE (1991), os objetivos são alocados conforme sua ordem de importância e o valor ótimo é obtido ao minimizar cada função objetivo conforme escolha.

*Resumindo:* (I) Problemas de otimização individual, a partir da função objetivo mais importante; (II) cada passo, o valor ótimo é nova restrição no passo  $i+1$ , para a função seguinte.

$$\begin{aligned} \text{Min } & f_i(\mathbf{x}) \\ \text{S.a.: } & g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \\ & f_i(\mathbf{x}) \leq f_i(\mathbf{x}^*) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Onde  $f_i(\mathbf{x}^*)$  é o valor ótimo da  $i$ -ésima função objetivo individual.

### 4.3.3 MOP: Soma Ponderada

É uma estratégia de “Aglutinação” que consiste em criar uma única função objetivo de modo que seja somado cada um dos objetivos multiplicados por um peso, estes adquiridos por meio de parâmetros.

A Equação (4.5) é descrita por SHIN *et al.* (2011)

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & F(\mathbf{x}) = \left[ \sum_{i=1}^p w_i f_i(\mathbf{x}) \right] \\ \text{Sujeito a: } & g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Peso  $w_i$  de acordo com importância no problema de otimização.

## 4.4 Método do Critério Global (MCG)

Também é uma estratégia de “Aglutinação”. Para este método, uma solução ótima é um vetor de variáveis de decisão o qual minimiza algum critério global. A função que descreve este critério global deverá ser definida de modo que seja obtido uma solução mais próxima possível da solução ideal. Considera alvos e o escalonamento das funções objetivo individuais.

A Equação (4.6) é descrita por RAO (1996).

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } F(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^p w_i \left\{ \frac{f_i(\mathbf{x}^*) - f_i(\mathbf{x})}{f_i(\mathbf{x}^*)} \right\}^2 \\ \text{Sujeito a: } g_j(\mathbf{x}) &\leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (4.6)$$

Onde  $f_i(\mathbf{x}^*)$  é o valor alvo.

## 4.5 Método Beta-Payoff

Escalonamento das funções objetivo (acompanhada por pesos) e utiliza a estratégia de valores da matriz Payoff. A função (4.7) é descrita por GOVINDALURI e CHO (2007).

$$\begin{aligned} \text{Min } \beta \\ \text{s.t.: } w_i \left( \frac{f_i(\mathbf{x}) - f_i^l(\mathbf{x})}{f_i^{\max}(\mathbf{x}) - f_i^l(\mathbf{x})} \right) &\leq \beta \\ g_j(\mathbf{x}) &\geq 0; \quad \beta \geq 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Onde:

$f_i^l(\mathbf{x})$  otimização individual de  $f_i(\mathbf{x})$ , cf. restrições de interesse.

$f_i^{\max}(\mathbf{x}) - f_i^l(\mathbf{x})$  normalização dos múltiplos objetivos

$f_i^{\max}(\mathbf{x})$ , valor máximo da  $i$ -ésima função objetivo na matriz Payoff.

## 4.6 Métricas LP

Somas ponderadas com ou sem escalonamento das funções objetivo (acompanhada por pesos), também utiliza a estratégia de valores da matriz Payoff. Envolve também raízes enésimas das somas ponderadas. A função (4.8) é descrita por SHIN *et al.* (2011).

$$\begin{aligned} L_p &= \left\{ \sum_{i=1}^k \gamma_i (f_i(\mathbf{x}^{\max_i}) - f_i(\mathbf{x}))^p \right\}^{1/p} \\ L_p &= \left\{ \sum_{i=1}^k \gamma_i \left( \frac{f_i(\mathbf{x}^{\max_i}) - f_i(\mathbf{x})}{f_i(\mathbf{x}^{\max_i}) - f_i(\mathbf{x}^{\min_i})} \right)^p \right\}^{1/p} \end{aligned} \quad (4.8)$$

## 4.7 Erro Quadrático Médio (MSE -*Mean Squared Error*)

Esse método é comumente utilizado em casos de Otimização Robusta (média x variância) ou Estocástica Não-linear Multiobjetivo. É necessário que esteja o mais próximo possível do alvo do valor da característica e com a menor variância, o que é equacionado pelo Erro Quadrático Médio (EQM, do inglês, *MSE – Mean Squared Error*).

Aqui, as formulações de otimização demonstradas anteriormente são estendidas.

A Equação (4.9) é descrita por Ardakani e Noorossana (2008).

$$\text{Min } MSE = [\mu(\mathbf{x}) - T]^2 + \sigma^2(\mathbf{x})$$

$$\text{S.a.: } g_i(\mathbf{x}) \leq 0$$

$$\text{Min } \beta$$

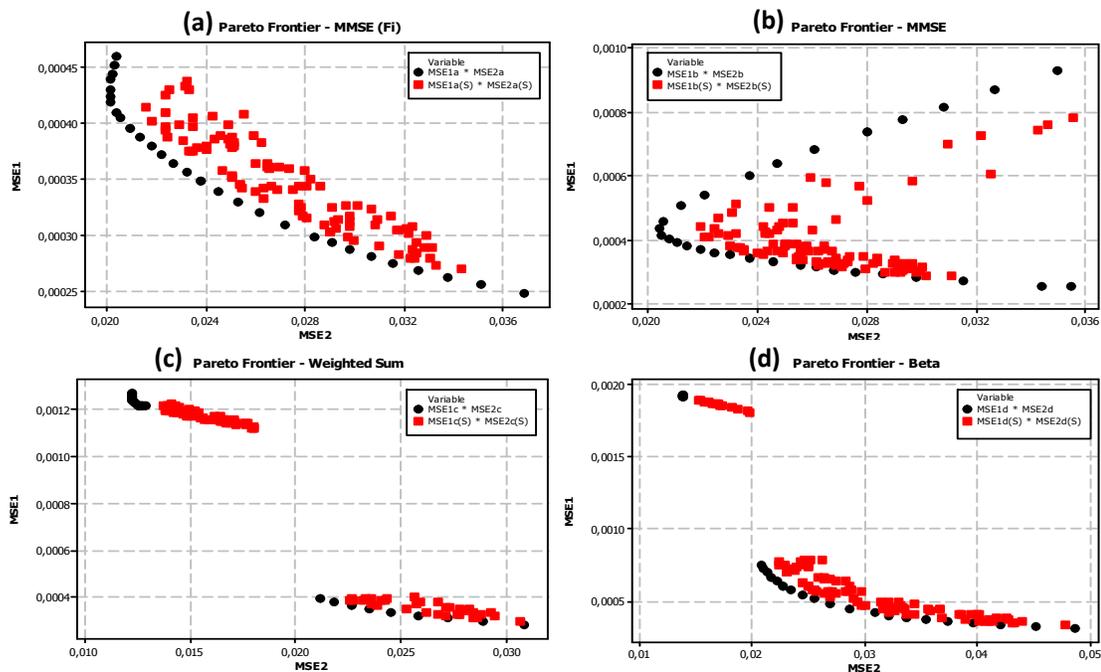
$$\text{s.t.: } w_i \left( \frac{MSE_i(\mathbf{x}) - MSE_i^l(\mathbf{x})}{MSE_i^{\max}(\mathbf{x}) - MSE_i^l(\mathbf{x})} \right) \leq \beta$$

$$g_j(\mathbf{x}) \geq 0$$

$$\beta \geq 0$$

$$MSE_T = \sum_{i=1}^p [w_i (\hat{y}_i - T_i)^2 + (1 - w_i) \hat{\sigma}_i^2] \quad (4.9)$$

Envolve também raízes enésimas das somas ponderadas. O que difere entre os métodos de otimização multiobjetivo é a fronteira de cada um, que pode ser visualizada na Figura 4.3.



**Figura 4.3 - Fronteiras dos Métodos**  
 Fonte: Paiva (2012) Notas de Aula (PSM-12)  
 (a)-(b)MSE; (c) Soma Ponderada; e, (d) Beta-Payoff

## 4.8 Vantagens e Desvantagens dos MOPs

Encontra-se nos tradicionais Métodos de Programação Multiobjetivo algumas desvantagens.

De acordo com Arroyo (2002) a principal desvantagem encontrada no Método de Soma Ponderada é que não é possível gerar todas as soluções Pareto-Ótimas quando o espaço objetivo não é convexo.

Já no  $\varepsilon$ -Method para construir o conjunto Pareto-ótimo, mesmo quando o espaço objetivo é não convexo, deve-se apenas variar o limite superior  $\varepsilon_i$ . Porém, se este limite não é adequado, o subconjunto de possíveis soluções obtido pode ser vazio, ou seja, não existe solução viável (PANTUZA JÚNIOR, 2011, p. 19)

Embora ocorra limitações também na Análise Envoltória de Dados é possível abordar as vantagens do método para solucionar problemas dos mais diversos campos.

Por se tratar de um método não-estocástico, a fronteira gerada pela DEA é suscetível a erros de medida e ao questionamento das propriedades estatísticas de seus resultados (CASADO, 2007).

Uma recuperação dessa problemática através de alternativas está na obra de Banker (1992) e a combinação de DEA com outros métodos em Marinho (1996).

Já em Thanassoulis (1993) é possível visualizar uma extensa lista, elucidada com aplicações, onde aborda as vantagens e desvantagens do uso de DEA em relação aos modelos de regressão.

Mello *et al.* (2000) apresentam como vantagens a capacidade de auxiliar estratégias de produção que maximizem as eficiências das DMUs que estão sendo avaliadas corrigindo as ineficientes através de determinação de alvos; e, também, a determinação da eficiência relativa das DMUs, pois cada uma é avaliada em relação a todas as outras que estejam sobre análise.

Já Lins & Meza (2000) apontam a falta de necessidade em converter todos os insumos e produtos em unidades monetárias, facilitando o uso no setor público, onde em inúmeros casos é impossível essa conversão de unidades; e, as DMUs podem ser obtidas nos mais diversos campos desde que sejam comparáveis, isto é, possuam as mesmas condições de fatores para insumos e produtos, devendo ser os mesmos para cada unidade, se diferenciando apenas na intensidade ou magnitude.

Azambuja (2002), no que se refere as limitações dos modelos DEA, aborda que a inclusão de nova(s) DMU(s) nos dados em estudo influencia no resultado, podendo reduzir os índices de eficiências que já foram estabilizados, como também além de não poder resultar no aumento da eficiência técnica de DMU, mas pode ocasionar o aumento da ineficiência; os resultados podem ser enviesados através da inclusão ou exclusão de insumos e produtos; por ser uma ferramenta não paramétrica é difícil formular hipóteses estatísticas; por utilizar Programação Linear para cada DMU durante o processo do estudo poderá exigir um tempo computacional elevado; e também, quando existem muitas variáveis no modelo, sejam insumos ou produtos, tenderá a ocorrer a incidência de muitas DMUs na fronteira de produção.

Badin (1997) corrobora que DEA possui como limitação a quantidade de DMUs analisadas, pois exige que o número de DMUs seja, no mínimo, igual ao dobro que o número de insumos e produtos para assim, o modelo proporcionar resultados consistentes.

## 5. APLICAÇÃO DO MÉTODO DEA À OTIMIZAÇÃO DO PROCESSO DE SOLDAGEM PGMAW

### 5.1 Características do Processo PGMAW

Na soldagem Pulsada-GMAW (ou PGMAW), a condição ideal de transferência é a de uma gota por pulso e se distingue pela redução do diâmetro da gota até um determinado valor de corrente, conhecida como corrente de transição, ocorrendo o “estrangulamento da gota” na extremidade do eletrodo. Para que a condição de uma gota por pulso seja atendida, é necessário que o diâmetro da gota seja similar ao do eletrodo.

Na soldagem PGMAW a corrente é quadrática, com os parâmetros operacionais  $I_p$ ,  $t_p$ ,  $I_b$  e  $t_b$ , respectivamente, corrente e tempo de pico e de base.

Pode-se definir a Frequência de Pulso como:

$$f = \frac{1}{t_p + t_b} \quad (5.1)$$

E o Ciclo de Carga como:

$$\beta = \frac{t_p}{t_p + t_b} \times 100\% \quad (5.2)$$

Onde  $t_p$  = tempo de pulso

$t_b$  = tempo de base

No processo PGMAW, a frequência de pulso teórico é obtida dividindo a velocidade de fusão do eletrodo com impulsos de corrente através da massa de uma gota (BY, KIM e EAGAR, 1993):

$$f_t = \frac{M_{pulso}}{V_{gota} \cdot (l_p) \cdot \rho_d} \quad (5.3)$$

Onde  $M_{pulso}$  = Taxa de fusão do eletrodo com corrente pulsada

$V_{gota}$  = Volume previsto da gota na  $l_p$  (diâmetro da gota = diâmetro do arame)

$\rho_d$  = Densidade da gota

A taxa média de fusão para corrente quadrática pode então ser considerada como a soma das taxas de fusão medidas para corrente de base e para a corrente de pico (BY, KIM e EAGAR, 1993).

$$M_{pulso} = \beta \cdot m \cdot (l_p) + (1 - \beta) \cdot m \cdot (l_b) \quad (5.4)$$

Onde:  $\beta$  = Ciclo de carga

$m(l_p)$  = Taxa de fusão na corrente de pico

$m(l_b)$  = Taxa de fusão na corrente de base

## 5.2 Variáveis do Processo GMAW

As variáveis do processo de soldagem podem ser reguladas para controlar as características do cordão, podendo afetar a penetração e a geometria do cordão de solda, como consequência afetam também as qualidades globais da solda.

Podem ser divididas em três grupos pertencentes a esse processo: pré-selecionadas, primárias e secundárias.

As **variáveis pré-selecionadas** (conhecidas como variáveis fixas) são o diâmetro e o tipo de arame, o tipo de gás de proteção e sua vazão.

As **variáveis primárias** reguláveis (conhecidas também com parâmetros de soldagem) controlam o processo depois que as variáveis pré-selecionadas foram determinadas. São elas a tensão do arco, a velocidade de alimentação do arame e a velocidade de soldagem.

As **variáveis secundárias**, que também podem ser reguláveis, são, às vezes, difíceis de medir com precisão. Elas não afetam diretamente a formação do cordão, mas agem sobre uma variável primária que, por sua vez, provoca certa modificação nas características. São elas a distância do bocal até a peça, e os ângulos de ataque e de trabalho da tocha. O ângulo de trabalho é dado pela posição da tocha num plano perpendicular à direção de avanço (CORAINI, 2011, p. 21).

O processo GMAW pode ser utilizado com uma grande gama de materiais, necessitando assim uma correta seleção dessas variáveis como o arame utilizado (sua composição química e o diâmetro), gás de proteção (tipo e vazão), sentido de soldagem, entre outros (PAIVA *et al.*, 2010).

### 5.3 Considerações Iniciais da Aplicação

Para demonstrar a função de aglutinação multiobjetivo através da Análise Envoltória de Dados, optou-se por um processo pulsado de gás de metal de solda a arco (PGMAW).

Assim, para otimizar as variáveis de saída que afetam as características de qualidade de solda PGMAW, adotou-se a abordagem de DEA de modo que maximize e minimize algumas características simultaneamente.

O processo PGMAW apresenta muitas particularidades. Estas referem-se principalmente a evitar os inconvenientes do modo globular. Ao mesmo tempo, o processo alcança os benefícios do spray de transferência utilizado no processo tradicional de gás de metal de soldagem a arco (GMAW). O PGMAW é caracterizado por uma pulsação de corrente entre um fundo de baixo nível de corrente e de alto nível de pico de corrente. Os impulsos de corrente, de tal forma que uma corrente média é sempre abaixo do nível de limiar de transferência de pulverização. A corrente de base é usada para manter o arco quando correntes de pico são longas o suficiente para garantir que não há o desapego das gotículas de fundição (PRAVEEN *et al.*, 2005).

No processo MIG tradicional, o modo de transferência de metal globular ocorre quando o sistema está em funcionamento em baixa corrente de solda. O modo modular é caracterizada pela formação periódica de gotas grandes no exterior dos eletrodos. A formação de gotículas grandes faz com que o processo pare de sofrer de instabilidade do arco e uma falta de controle sobre as gotículas fundidas. Enquanto o modo de pulverização oferece uma elevada taxa de deposição, para alguns materiais, a corrente mínima é demasiado elevada. Outras desvantagens incluem a sua grande entrada de calor (...) (PRAVEEN *et al.*, 2005).

No processo experimental realizado por PAIVA *et al.* (2010), foi utilizada uma fonte de energia elétrica em execução em uma taxa de corrente de modo pulsado. Essa fonte normalmente permite mais flexibilidade para ajustar os parâmetros. Ligado ao equipamento estava um trator mecânico usado para movimentar o maçarico ligado à velocidade de solda ajustável.

Todos os testes de soldagem foram realizados usando uma técnica de solda na chapa (BOP – *Gapped Bead-on-Plate*). Foi usado um arame AWS ER 70S-6 com um diâmetro de 1,2 mm. O tipo de material base foi ABNT 1045 com 120×40×6 mm. O gás de proteção é uma mistura de argônio + 25% de CO<sub>2</sub> com um fluxo constante de 15 l/min. A velocidade de soldagem foi mantida constante a 40 cm/min, e para todos os ensaios realizados e a distância

de contato do bico com a placa utilizada foi de 22,5 mm. Os parâmetros de soldagem obtidos através da metodologia de Superfície de Resposta (RSM) com Arranjo Composto Central (*Central Composite Design - CCD*) e dos níveis encontram-se descritos na Tabela 5.1.

**Tabela 5.1 – Parâmetros do Processo**

Parâmetros	Símb.	Unid.	Nível				
			-2	-1	0	1	2
Corrente de pico	<i>lp</i>	Ampere	245	280	315	350	385
Corrente de base	<i>lb</i>	Ampere	55	70	85	100	115
Ciclo de trabalho	<i>Ca</i>	%	35	40	45	50	55
Taxa de alimentação do arame	<i>f</i>	m/min	4.5	5	5.5	6	6.5

De acordo com GHOSH *et al.*(2007), a fim de obter o ciclo de trabalho (*Ca*) foi utilizada a Equação (5.5), tempo de pico (*tp*) é o tempo máximo e foi mantido fixo em 4 ms e o tempo de base (*tb*) variando de acordo com o nível desejado:

$$Ca = \frac{tp}{tp+tb} \quad (5.5)$$

Após a soldagem, todas as amostras de teste foram seccionadas transversalmente, polidas e tratadas quimicamente, e a penetração (*p*), reforço (*r*), largura (*w*) e a área global (*A*) do cordão de solda foram determinadas. Além disso, a convexidade do cordão de solda (*CI*) foi determinada pela relação entre o reforço (*R*) e a largura (*W*). Os parâmetros e respostas do processo são demonstrados na Tabela 5.2 e as respostas para o projeto CCD na Tabela 5.3

**Tabela 5.2: Parâmetros e Respostas do Processo**

PARÂMETROS	RESPOSTAS
Corrente de pico ( <i>lp</i> )	Penetração ( <i>P</i> )
Corrente de base ( <i>lb</i> )	Largura ( <i>W</i> )
Ciclo de Trabalho ( <i>Ca</i> )	Reforço ( <i>R</i> )
Taxa de Alimentação do Arame ( <i>f</i> )	Área Global ( <i>A</i> )
	Convexidade do Cordão ( <i>CI</i> )

Tabela 5.3 – Parâmetros de soldagem e respostas para o projeto CCD

Parâmetros					Respostas				
N	lp	lb	Ca	f	P, mm	R, mm	W, mm	CI	A, mm <sup>2</sup>
1	280	70	40	5	1,60	2,87	7,70	37,20	20,70
2	350	70	40	5	1,60	2,90	6,60	44,40	19,00
3	280	100	40	5	1,70	2,80	7,00	39,60	20,70
4	350	100	40	5	1,87	3,10	6,30	43,00	18,70
5	280	70	50	5	1,90	3,00	7,30	41,60	23,20
6	350	70	50	5	1,66	3,70	6,00	52,50	20,90
7	280	100	50	5	1,96	2,90	8,10	35,50	21,50
8	350	100	50	5	1,90	3,30	7,90	38,00	22,80
9	280	70	40	6	1,20	3,48	7,30	46,00	20,70
10	350	70	40	6	1,90	3,10	8,10	38,90	24,90
11	280	100	40	6	1,22	3,50	7,20	48,30	23,00
12	350	100	40	6	1,95	3,10	8,60	35,90	27,00
13	280	70	50	6	2,10	3,20	8,10	39,20	25,70
14	350	70	50	6	2,08	3,20	8,70	36,40	25,10
15	280	100	50	6	1,96	3,00	8,40	36,40	25,50
16	350	100	50	6	2,30	3,20	9,20	28,50	28,40
17	245	85	45	5,5	1,85	3,00	8,80	40,00	29,00
18	385	85	45	5,5	2,29	3,12	8,10	38,10	27,00
19	315	55	45	5,5	1,79	2,91	8,50	34,50	21,70
20	315	115	45	5,5	2,20	3,00	9,30	29,10	26,00
21	315	85	35	5,5	1,42	3,00	7,60	39,50	22,30
22	315	85	55	5,5	2,10	3,40	9,20	32,70	28,30
23	315	85	45	4,5	1,80	2,80	6,00	46,40	17,40
24	315	85	45	6,5	2,02	3,20	8,10	39,50	26,80
25	315	85	45	5,5	2,60	3,25	8,80	36,20	30,70
26	315	85	45	5,5	2,10	3,30	8,10	40,70	27,60
27	315	85	45	5,5	2,20	3,30	8,70	38,10	28,90
28	315	85	45	5,5	2,50	3,10	8,00	38,80	26,90
29	315	85	45	5,5	2,32	3,35	7,80	42,00	28,00
30	315	85	45	5,5	2,40	3,30	8,30	39,80	30,10
31	315	85	45	5,5	2,40	3,10	8,40	36,90	25,90

Uma vez que é calculada a eficiência para cada experimento em um CCD (do inglês, *Central Composite Design*), esse índice de multirresposta é utilizado como uma variável dependente. Procedendo como a Metodologia de Superfície de Resposta (RSM) tradicional, os coeficientes do modelo são obtidos empregando o método dos Mínimos Quadrados

Ordinários. Após a inspeção da significância individual, é possível decidir se o modelo quadrático reduzido ou completo deve ser adotado.

Quando trabalha-se com a Análise Envoltória de Dados, busca-se calcular a eficiência, assim, com o cálculo da eficiência é possível estimar o impacto das variáveis nos fatores através da regressão truncada, e a partir desse momento, a reamostragem (*bootstrap*) do erro. Para esse erro são gerados números aleatórios a fim de calcular o intervalo de confiança dos coeficientes (ou o viés dos coeficientes).

Ao trabalhar com uma minimização, a Equação (5.6)

$$\min \frac{1}{z} x^t Q x + b^t x + \beta_0, \quad (5.6)$$

A derivada de  $f$  é

$$\frac{\delta f}{\delta x} = Qx + b = 0, \quad (5.7)$$

Onde

$$Qx = -b, \quad (5.8)$$

E o  $x$

$$x = -Q^{-1} \cdot b \quad (5.9)$$

Dessa forma, a expressão de  $Q$ , a matriz de regressão da forma quadrática é

$$Q = \begin{bmatrix} 2\beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \beta_{12} & 2\beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ \beta_{13} & \beta_{23} & 2\beta_{33} & \beta_{34} \\ \beta_{14} & \beta_{24} & \beta_{34} & 2\beta_{44} \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

Da mesma forma para  $b$ , coeficiente de regressão, e, a estrutura da regressão ( $b \cdot x$ ) respectivamente

$$b = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

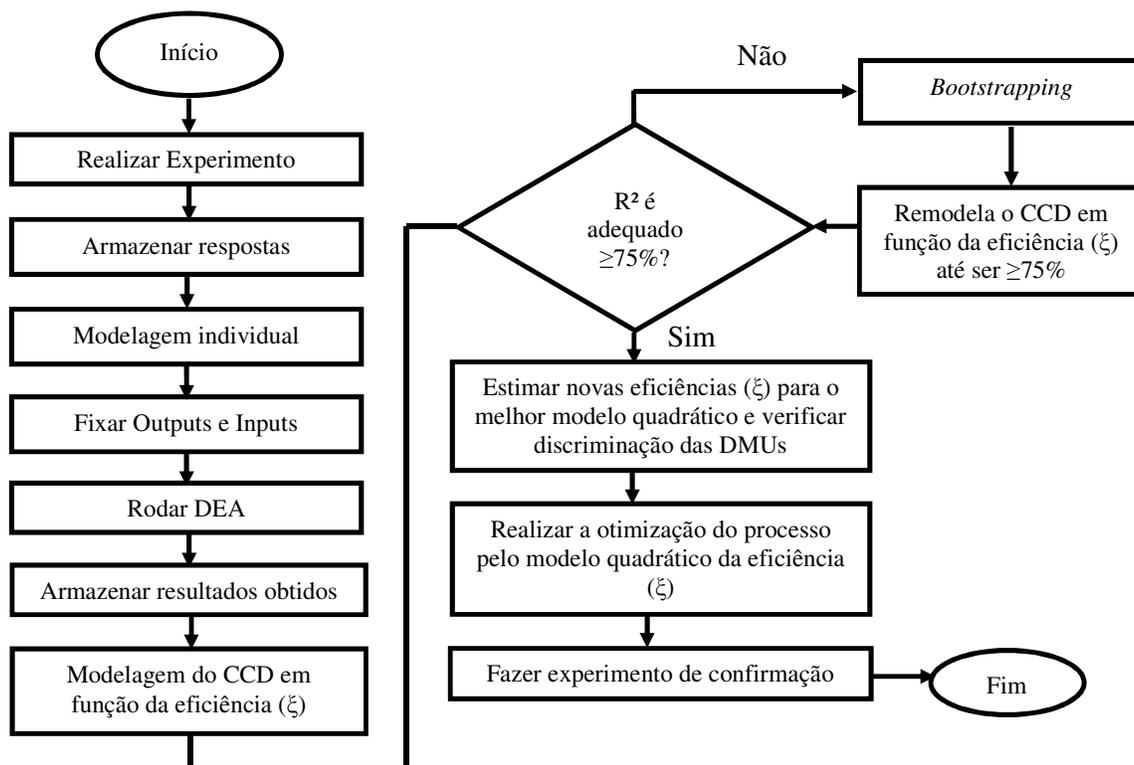
$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

Assim, a resposta obtida é representada por

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_{11} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2 + \beta_{33} x_3^2 + \beta_{44} x_4^2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \beta_{14} x_1 x_4 + \beta_{23} x_2 x_3 + \beta_{24} x_2 x_4 + \beta_{34} x_3 x_4 + \varepsilon, \quad (5.13)$$

Pode-se, assim, estimar os fatores pela máxima verossimilhança. A sequência do procedimento para aplicação da Análise Envoltória de Dados em problemas de otimização multiobjetivo acontece em etapas descritas no Fluxograma 5.1.

**Fluxograma 5.1** – Sequência de procedimento para aplicação de DEA 2 Estágios para otimização multiobjetivo



Primeiramente é necessário realizar o experimento. Nesse caso, o objeto é o processo experimental de solda PGMAW realizado por PAIVA *et al.* (2010). Para auxiliar esse estudo, optou-se por utilizar o software Matlab®. Por ser um programa de programação, as respostas de cada variável e característica (P, W, A, R e CI) do cordão de solda para cada um dos 31 experimentos deverão ser armazenadas. Na Tabela 5.4, tem-se os dados do experimento realizado para 31 unidades de tomada de decisão (DMU).

**Tabela 5.4** – Dados do Experimento com 31 DMUs

DMU	<i>Outputs</i>			<i>Inputs</i>	
	P	W	A	R	CI
1	1,60	7,70	20,70	2,87	37,20
2	1,60	6,60	19,00	2,90	44,40
3	1,70	7,00	20,70	2,80	39,60
4	1,87	6,30	18,70	3,10	43,00
5	1,90	7,30	23,20	3,00	41,60
6	1,66	6,00	20,90	3,70	52,50
7	1,96	8,10	21,50	2,90	35,50
8	1,90	7,90	22,80	3,30	38,00
9	1,20	7,30	20,70	3,48	46,00
10	1,90	8,10	24,90	3,10	38,90
11	1,22	7,20	23,00	3,50	48,30
12	1,95	8,60	27,00	3,10	35,90
13	2,10	8,10	25,70	3,20	39,20
14	2,08	8,70	25,10	3,20	36,40
15	1,96	8,40	25,50	3,00	36,40
16	2,30	9,20	28,40	3,20	28,50
17	1,85	8,80	29,00	3,00	40,00
18	2,29	8,10	27,00	3,12	38,10
19	1,79	8,50	21,70	2,91	34,50
20	2,20	9,30	26,00	3,00	29,10
21	1,42	7,60	22,30	3,00	39,50
22	2,10	9,20	28,30	3,40	32,70
23	1,80	6,00	17,40	2,80	46,40
24	2,02	8,10	26,80	3,20	39,50
25	2,60	8,80	30,70	3,25	36,20
26	2,10	8,10	27,60	3,30	40,70
27	2,20	8,70	28,90	3,30	38,10
28	2,50	8,00	26,90	3,10	38,80
29	2,32	7,80	28,00	3,35	42,00
30	2,40	8,30	30,10	3,30	39,80
31	2,40	8,40	25,90	3,10	36,90

Em seguida, um novo documento para programar o DEA no Matlab® deve ser criado e os dados utilizados devem esclarecer quais são os *inputs* (matriz de insumos para R e CI), os *outputs* (matriz de produtos para P, W e A), qual **orientação** que esta deverá seguir (insumo ou produto) e por fim, qual o modo de **retorno de escala** será aceito (constante, variável, etc.). Na tabela 5.5 é possível verificar os pesos alocados a cada dado do experimento.

**Tabela 5.5** – Pesos do Experimento com 31 DMUs

DMU	<i>Pesos dos Outputs</i>			<i>Peso dos Inputs</i>	
	vP	vW	vA	uR	uCI
1	1	3,8581	1	107,1648	1
2	35,1879	1	2,4887	182,3795	1
3	1	1	1	84,8153	1
4	55,2351	1	1	103,2062	1
5	78,9116	1	4,0796	259,6271	1
6	1	1	9,3387	1	1
7	1,6686	1,8253	1	104,2665	1
8	1	1	1	1	1
9	1	1	2,2948	1	1
10	1	8,6388	9,1171	91,0881	1
11	1	1,4403	2,3475	1	1
12	1	8,3962	5,3647	88,2388	1
13	59,1531	1	1	166,8184	1
14	1	1	2,3352	1	1
15	1	1	1	72,4834	1
16	1	1	3,5340	1	1
17	1	1	6,2451	60,9538	1
18	62,2979	1	1	166,8184	1
19	1	2,6679	1	95,1989	1
20	1	1	1,6632	55,3005	1
21	1	11,0236	1	88,5354	1
22	1	1	1	1	1
23	1	1	1	79,7913	1
24	1	1	11,0274	75,3049	1
25	3,2808	1	4,7942	1	1
26	1	1	9,3672	1	1
27	1	1,4403	9,2898	1	1
28	49,3930	1	1	92,8227	1
29	1	1	6,8630	1	1
30	1	1	8,4326	1	1
31	54,7986	1	1	128,0951	1

Com os dados das 31 DMUs para estabelecer um processo PGMAW altamente confiável, é preciso descobrir os parâmetros importantes e níveis que são ligados ao P, W, e A (penetração, largura e área, respectivamente), onde estes deverão ser maximizados. Já R e CI (reforço e índice de convexidade, respectivamente), deverão ser minimizados.

	Penetração ( <i>Penetration</i> )	<i>P</i>
<b>Maximizar</b>	Largura ( <i>Width</i> )	<i>W</i>
	Área global ( <i>Area</i> )	<i>A</i>
<b>Minimizar</b>	Reforço ( <i>Reinforcement</i> )	<i>R</i>
	Índice de Convexidade ( <i>Convexity Index</i> )	<i>CI</i>

Em seguida, de forma rápida, roda-se o DEA. O programa calcula as eficiências e armazena os dados obtidos.

Os fatores que serão controlados,  $lp$ ,  $lb$ ,  $Ca$  e  $f$  e as respostas P, W, A (max), R e CI (min).

A eficiência calculada de cada um será realizada com base nesses fatores para que sejam encontrados os maiores e melhores valores possíveis deles.

Esse trabalho está orientado a **output** e a literatura menciona que se a função analisada for eficiente seu resultado será 1. Se for acima de 1 é ineficiente pois indica que poderia ter sido feito mais com aquilo que realmente foi feito. Dessa forma, a formulação deseja minimizar a função objetivo, onde encontra-se uma regressão.

Assim,

$$\delta = f(lp, lb, Ca e f) + \varepsilon > 1 \quad (5.14)$$

Pode-se encontrar os melhores valores de  $lp, lb, Ca$  e  $f$ , através da máxima verossimilhança.

Através da estimativa por máxima verossimilhança (*maximum-likelihood estimation*) é possível estimar os parâmetros de um modelo estatístico. Dessa forma, possuindo dados e existindo um modelo estatístico, é possível estimar valores para os diferentes parâmetros do modelo, de forma a maximizar a probabilidade dos dados amostrados, em busca de parâmetros que maximizem a função de verossimilhança.

A resposta obtida nunca poderá ser menor que 1. Esse processo é denominado regressão.

Para esse trabalho, utilizou-se o modelo quadrático onde apenas um ponto de mínimo pode ser encontrado, mesmo tendo a limitação com o número de experimentos, apenas 31.

Mas ao calcular a eficiência (E) para cada função existe um erro ( $\varepsilon$ ) associado, assim,

$$E_1 + \varepsilon_1; E_2 + \varepsilon_2; E_3 + \varepsilon_3; (\dots) E_{31} + \varepsilon_{31} \quad (5.15)$$

Dessa forma, inicia-se a geração de números aleatórios a partir do erro. Isso faz com que o valor da eficiência mude. Quando a eficiência se altera, altera-se também o *input* e *output*, por isso, é possível criar-se uma distribuição envolta a cada um deles. Tem-se então, a primeira fase da Análise Envoltória de Dados.

É rodado o DEA no Matlab para as 31 DMUs a programação que sugere que seja alterada a formulação correspondente para cada DMU. Os resultados de cada eficiência são armazenadas na Tabela 5.6 para comparação onde as respostas encontradas no primeiro estágio do DEA enviesado. Devido à simplicidade desse método, a otimização das 31 DMUs poderia ser realizada no aplicativo Solver do Microsoft Excel®.

**Tabela 5.6** – DEA Primeiro Estágio

DMU	DEA	DMU	DEA
1	1,0325	17	1,0000
2	1,2214	18	1,0478
3	1,0000	19	1,0000
4	1,3168	20	1,0000
5	1,1360	21	1,2047
6	1,4675	22	1,0004
7	1,0000	23	1,0000
8	1,1733	24	1,1051
9	1,2721	25	1,0000
10	1,1252	26	1,0961
11	1,2624	27	1,0301
12	1,0522	28	1,0000
13	1,1234	29	1,0964
14	1,0654	30	1,0199
15	1,0605	31	1,0142
16	1,0000		

Nota-se que 9 DMUs (3, 7, 16, 17, 19, 20, 23, 25 e 28) são tidas como referências pois atingiram a eficiência máxima 1.

Para essa eficiência é gerada uma superfície de resposta que será otimizada no segundo estágio de DEA.

O próximo passo é utilizar o *bootstrap*, função utilizada para calcular a produtividade através do Índice Malmquist. Cria-se o DEA, identificando *input* e *output*, de acordo com a orientação do modelo e em seguida é reamostrado o erro. De forma simples, é calculado inúmeras vezes o DEA (neste estudo foram 100 vezes). Têm-se assim as eficiências corrigidas, ou seja, os tetas obtidos já possui o erro aleatório de previsão do modelo.

A partir desse ponto, começa a Análise Envoltória de Dados no Segundo Estágio.

Quando a eficiência é novamente calculada, a segunda fase começa a ser aplicada, utilizando as eficiências calculadas corrigidas, mantendo-as fixas. O programa continua gerando números aleatórios para o erro, como também continua recalculando os fatores, ou seja recalculando a distribuição dos coeficientes.

É importante ressaltar que no primeiro estágio tem-se uma distribuição de eficiência, e, no segundo estágio, uma distribuição da regressão dos fatores, os coeficientes da regressão ( $b_0, b_1, b_2$ ) que eram fixos se tornam função de probabilidades.

Um modelo de regressão linear simples é dado pela expressão

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon \quad (5.16)$$

Onde a variável dependente (ou de resposta) representada por Y está relacionada a uma variável independente (ou regresso) representada por x. O erro aleatório se dá por  $\varepsilon$ . Já  $\beta_0$  e  $\beta_1$  são os coeficientes de regressão.

O que o programa criado no Matlab® realiza durante esse processo é que as eficiências não são mais cálculos, mas sim os fatores, e estas serão corrigidas para as 31 DMUs, podendo ser representadas como:

$$E_{1(\text{corrigido})} + \varepsilon_{1(\text{corrigido})}; E_{2(\text{corrigido})} + \varepsilon_{2(\text{corrigido})}; E_{3(\text{corrigido})} + \varepsilon_{3(\text{corrigido})}; (\dots) E_{31(\text{corrigido})} + \varepsilon_{31(\text{corrigido})} \quad (5.17)$$

Para esse estágio no programa Matlab® foi utilizado o comando

```
[h,h_e,h_b,iDMU,h_b_mu,h_b_s,bias] = bootstrapdea(input,output,B,'output','VRS','2estagios',0,x);
```

Onde cada letra ou sigla está vinculado a uma ordem de execução ou aos dados, previamente estipulados durante a parte inicial de montagem do programa.

Os resultados obtidos para o Segundo Estágio de DEA é representado na Tabela 5.7.

Tabela 5.7 – DEA Segundo Estágio

DMU	DEA	DMU	DEA
1	1,0639	17	1,0330
2	1,2752	18	1,0824
3	1,0459	19	1,0751
4	1,3633	20	1,1117
5	1,1798	21	1,2660
6	1,5090	22	1,0069
7	1,0196	23	1,0989
8	1,1884	24	1,1283
9	1,2906	25	1,0428
10	1,1511	26	1,1185
11	1,2758	27	1,0464
12	1,0731	28	1,0400
13	1,1418	29	1,1267
14	1,0791	30	1,0469
15	1,0928	31	1,0465
16	1,0063		

É possível verificar se é o modelo orientado a *input* ou *output* somente notando que todos os valores obtidos são maiores que 1, isso significa que é orientado a *output*.

Uma dúvida que pode surgir é como verificar qual variável é eficiente nesse caso? Quando seria utilizado de insumo ou produto de outra?

Considere a  $DMU1 = 1,0639$ .

Diz-se que a  $DMU1$  indica que poderia ter produzido 6% a mais quantidade de produtos que produziu com os mesmos insumos utilizados, como também poderia ter um ponto mais eficiente do que o encontrado na fronteira. A sua produção se baseia na  $DMU$

vista como eficiente que possui a melhor combinação de parâmetros para a produção máxima desse processo.

As eficiências encontradas demonstram que todas as DMUs estão próximas a 1. As que se encontram mais próximas a 1, que referem-se as DMUs eficientes são 16 (1,0063) e 22 (1,0069). Das 9 DMUs encontradas como eficientes no primeiro estágio, apenas 2 continuam sendo eficientes e são apresentadas na Tabela 5.8.

**Tabela 5.8** – Resultados DEA para Primeiro e Segundo Estágios

DMU	DEA Primeiro Estágio	DEA Segundo Estágio	DMU	DEA Primeiro Estágio	DEA Segundo Estágio
1	1,0325	1,0639	17	1,0000	1,0330
2	1,2214	1,2752	18	1,0478	1,0824
3	1,0000	1,0459	19	1,0000	1,0751
4	1,3168	1,3633	20	1,0000	1,1117
5	1,1360	1,1798	21	1,2047	1,2660
6	1,4675	1,5090	22	1,0004	1,0069
7	1,0000	1,0196	23	1,0000	1,0989
8	1,1733	1,1884	24	1,1051	1,1283
9	1,2721	1,2906	25	1,0000	1,0428
10	1,1252	1,1511	26	1,0961	1,1185
11	1,2624	1,2758	27	1,0301	1,0464
12	1,0522	1,0731	28	1,0000	1,0400
13	1,1234	1,1418	29	1,0964	1,1267
14	1,0654	1,0791	30	1,0199	1,0469
15	1,0605	1,0928	31	1,0142	1,0465
16	1,0000	1,0063			

Geralmente o retorno constante possui apenas uma referência, mas no retorno crescente, temos mais do que um ponto de ótimo. Já no retorno constante de escala, um número menor de DMUs ficarão perto da reta, assim serão poucas tidas como eficiente. Nesse estudo, a DMU tida como eficiente então é a 16 (referência para ela mesma) e a 22, que estará mais próxima da DMU referência.

Para efeito de registro, os resultados obtidos para as Formulações apresentadas anteriormente para montar o programa no Matlab® tem-se:

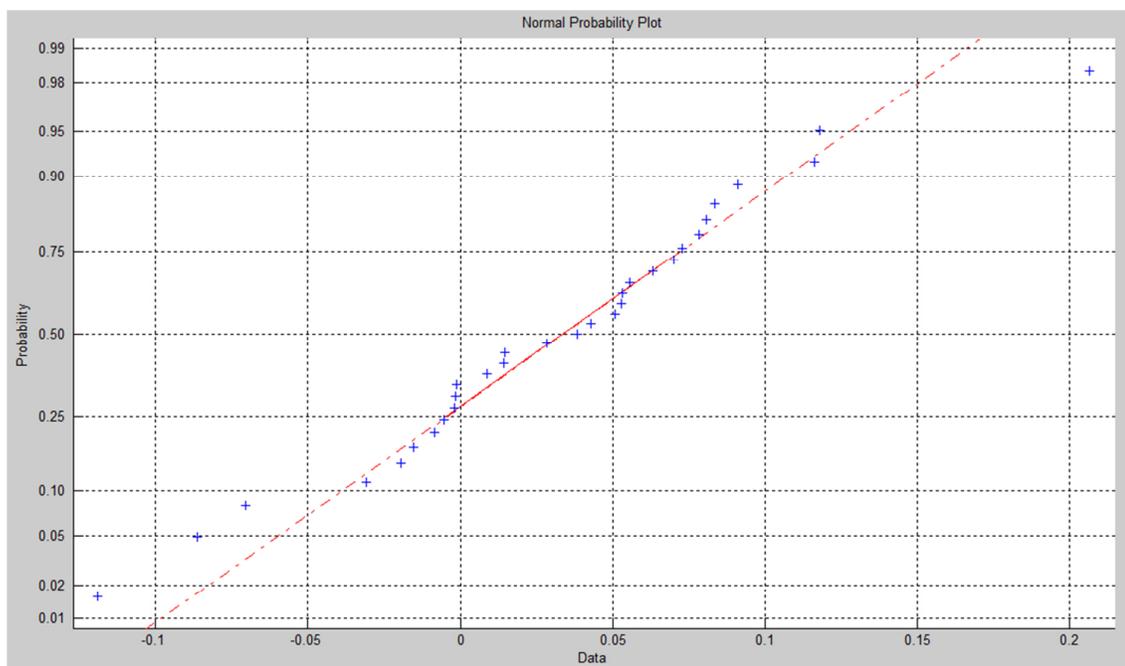
- a) Para a Equação 5.10, matriz da regressão da forma quadrática. Coeficientes dos termos não lineares do modelo quadrático completo da eficiência

$$Q = \begin{bmatrix} 0,000000000 & 0,000000000 & 0,000000000 & -0,0045824678 \\ 0,000000000 & 0,0001473819 & -0,00034662209 & 0,0000000000 \\ 0,000000000 & -0,0003466220 & 0,000000000 & -0,0119105791 \\ -0,0045824678 & 0,000000000 & 0,000000000 & 0,16139550154 \end{bmatrix}$$

- b) Para a Equação 5.11, coeficientes de regressão. Coeficientes dos termos lineares do modelo quadrático completo

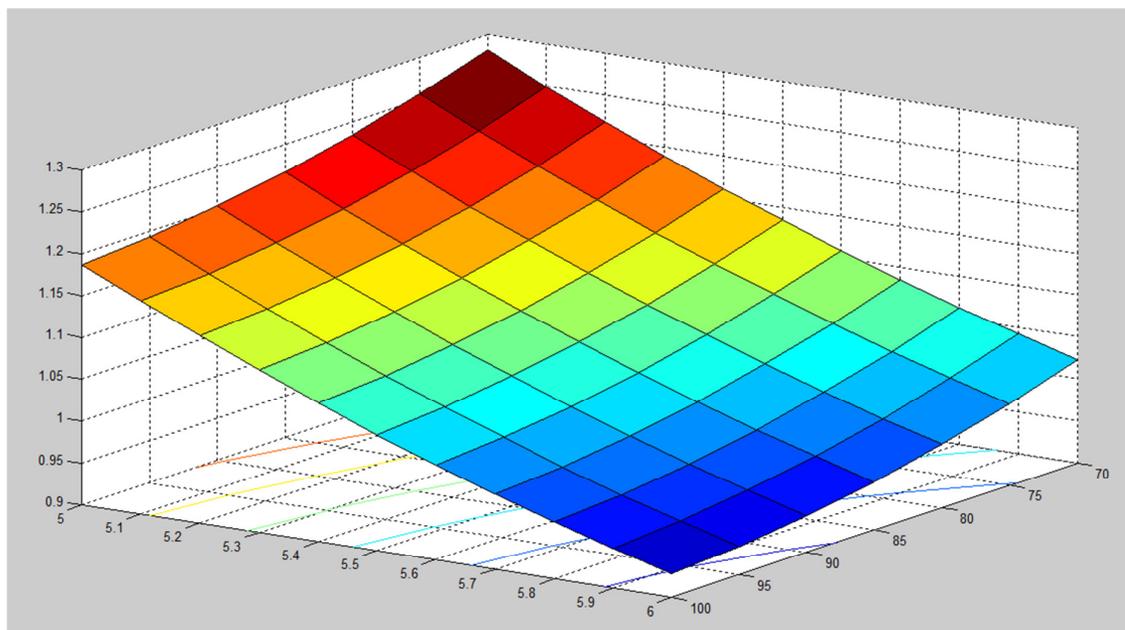
$$b = \begin{bmatrix} 0,0259692235 \\ 0,0020315829 \\ -0,0085233116 \\ 1,0356475421 \end{bmatrix}$$

Na Figura 5.1 verifica-se o Gráfico de Normalidade do Modelo Quadrático Completo obtido pela programação no Matlab® que demonstra a adequação do modelo empregado.



**Figura 5.1** - Gráfico de Normalidade do Modelo Quadrático Completo

Também a resposta obtida no processo de soldagem PGMAW tem sua adequação demonstrada através do comando *surf* ( $x_2, x_4, f_2$ ) na Figura 5.2.



**Figura 5.2** – Gráfico da Superfície de Resposta

Onde

*surf* ( $x_2, x_4, f_2$ )

Parâmetros				
DMU	lp	lb <sup>x2</sup>	Ca	f <sup>x4</sup>
16	350	100	50	6

Conjunto-referência (unidades específicas contra as quais uma DMU particular está sendo comparada), alcançada ao combinar os parâmetros de controle obtidos através do ponto ótimo: a DMU 16, demonstrados na Tabela 5.9.

**Tabela 5.9** – Parâmetros de soldagem e respostas para o projeto CCD do ponto ótimo

Parâmetros					Respostas				
N	lp	lb	Ca	f	P, mm	R, mm	W, mm	CI	A, mm <sup>2</sup>
16	350	100	50	6	2,30	3,20	9,20	28,50	28,40

Assim, as respostas obtidas nessa otimização para os parâmetros de soldagem PGMAW foram:

Penetração ( <i>Penetration</i> )	2,30 mm
Largura ( <i>Width</i> )	9,20 mm
Área global ( <i>Area</i> )	28,40 mm <sup>2</sup>
Reforço ( <i>Reinforcement</i> )	3,20 mm
Índice de Convexidade ( <i>Convexity Index</i> )	28,50

Essas respostas acabam por fazer destes modelos de expressões as melhores respostas para que o controle do processo seja adequado, de forma que apresentam baixos erros quanto à previsão das respostas

Pode-se concluir através da aplicação do método que a aglutinação baseadas em eficiência na qual abordou-se o método da Análise Envoltória de Dados (DEA) em problemas de otimização multiobjetivo utilizando os dados de soldagem PGMAW foi satisfatória, pois os resultados encontrados corroboram a boa adequação da proposta.

## 6. CONCLUSÕES

### 6.1 Conclusões Gerais

Esta dissertação abordou funções de aglutinação baseadas em eficiência onde utilizou uma abordagem de Análise Envoltória de Dados aplicada em um problema de otimização multiobjetivo.

O método da Análise Envoltória de Dados (DEA) e algumas extensões metodológicas que poderiam ser utilizadas para melhorar o seu poder discriminatório na avaliação de desempenho. As principais vantagens desta técnica são que considera múltiplos fatores e não requer pressupostos paramétricos dos tradicionais métodos multivariados.

Porém, existem alguns fatores críticos que devem ser considerados na aplicação desse método. Para citar (1) Os indicadores de eficiência podem ser muito sensíveis a alterações nos dados e dependem profundamente do número e do tipo de fatores considerados de *input* e de *output*. (2) De forma genérica, *inputs* podem incluir qualquer tipo de recurso utilizado por uma DMU e *outputs* podem variar conforme os produtos produzidos para uma variedade de medidas de desempenho e de atividade. (3) O tamanho do conjunto de dados analisados é também um fator de grande importância quando utilizamos modelos tradicionais de DEA.

A principal contribuição desta dissertação foi proporcionar o desenvolvimento de otimizações multiobjetivo onde buscou-se identificar uma combinação ótima de parâmetros que deveriam ser maximizados e minimizados ao mesmo tempo utilizando dados da literatura.

As conclusões obtidas são:

- A otimização multiobjetivo de um processo de soldagem pode ser bem representada quando utilizado a Análise Envoltória de Dados (DEA);
- Com o método de DEA foi possível realizar de forma satisfatória a otimização simultânea de múltiplos *inputs* com múltiplos *outputs* do processo de soldagem;
- A Análise Envoltória de Dados juntamente com dados de um processo de solda a arco pulsado (PGMAW, *Pulsed Gas Metal Arc Welding*) e o caso que ilustra a aplicabilidade desse método apresenta uma estrutura particular de correlação entre as características de qualidade;

- Durante a validação experimental dos resultados, a unidade de tomada de decisão (DMU) 16 é a unidade tida como *benchmarking* para as demais, pois obteve o valor mais próximo a fronteira de eficiência;
- A DMU 16 é referência para ela mesma, como temos uma função quadrática, obtivemos um ponto de ótimo;
- O método DEA dois estágios é uma solução viável para abordagem de problemas de otimização não lineares multiobjetivo de superfície de resposta, gerando uma função de aglutinação das superfícies a partir de um índice de eficiência. Os resultados conduzem à localização de DMU's mais eficientes do que aquelas observadas no arranjo experimental, cujos objetivos se aproximem maximamente dos seus alvos.
- Auxiliando o processo, o *bootstrap* foi utilizado para estabelecer teste de hipóteses e intervalos de confiança mais confiáveis do que os modelos tradicionais. Para ilustrar a razoabilidade da proposta, apresenta-se a otimização do processo de soldagem PGMAW.
- Os principais resultados corroboram a boa adequação da proposta para este tipo de problema de otimização.

## 6.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

Sugere-se para estudos futuros:

- Analisar se durante o Teste de Normalidade realizado em cima de resíduos os *outliers* irão contaminar a média final;
- Ponderar o que se utiliza para excluir um termo dentro do Matlab®;
- Propor um modelo onde utiliza-se o arranjo combinado para média e variância da eficiência;
- Empregar a Análise Envoltória de Dados de dois estágios descrevendo o processo de geração de dados descrevendo o que está sendo estimado;
- Analisar os motivos de, em estudos de DEA dois estágios, as estimativas de eficiência sempre estarem correlacionadas em série, o que pode causar mudanças na eficiência da estimativa.

## REFERÊNCIAS

ANDERSEN, P.; PETERSEN, N. C. A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis. **Management Science**, 39(10), 1261-1264. 1993.

APPOLINÁRIO, F. **Metodologia da ciência** – filosofia e prática da pesquisa. São Paulo: Editora Pioneira Thomson Learning, 2006, 240p.

ARDAKANI, M. K., NOOROSSANA, R. A new optimization criterion for robust parameter design – the case of target is best. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 38, pp. 851-859, 2008.

ARROYO, J. E. C. **Heurísticas e metaheurísticas para otimização combinatória multiobjetivo**. Tese de Doutorado em Engenharia Elétrica, Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Eletrica e de Computação, 2002, 232p.

AZAMBUJA, A. M. V. **Análise de Eficiência na Gestão do Transporte Urbano por ônibus em municípios brasileiros**. Tese de Doutorado em Engenharia de Produção. Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, SC. 2002, 385p.

BADIN, N. T. **Avaliação da Produtividade de Supermercado e seu Benchmarking**. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Produção. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, SC. 1997.

BANKER, R.D.; CHARNES, A.; COOPER, W.W. Models estimating technical and scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis. **Management Science**, v. 30, n. 9, p. 1078-1092, 1984.

BANKER, R. D. Maximum likelihood, consistency and DEA: a statistical foundation. **Management Science**, v. 39, n. 10, p. 1265-1273, 1993.

BARROS, E. S.; TENÓRIO JÚNIOR, A. J. A.; OLIVEIRA, S. A.; SILVA JÚNIOR, L. H. Aplicação do método *Bootstrap* na estimação de fronteiras não-paramétricas: o caso dos fruticultores do Vale do São Francisco. **48º SOBER (Sociedade Brasileira de Economia, Administração e Sociologia Rural)**. Campo Grande, 25 a 28 de julho de 2010, 16p.

BARROS, C. P. Measuring performance in defence-sector companies in a small NATO member-country. **Journal of Economic Studies** 31, 112–128. 2004.

BATISTA, F. D. **Metodologia para o uso da análise por envoltória de dados no auxílio à decisão**. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Produção. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Itajubá. Itajubá: UNIFEI. 2009.

BELLONI, J. A. **Uma Metodologia de avaliação da eficiência produtiva de Universidades Federais Brasileiras**. Tese de Doutorado em Engenharia de Produção. Departamento de

Engenharia de Produção e Sistemas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis. 2000.

BINAM, J. N.; SYLLA, K.; DIARRA, I.; NYAMBI, G. Factors affecting technical efficiency among coffee farmers in Cote d'Ivoire: evidence from the centre west region. **R&D Management** 15, 66–76. 2003.

BOUSSOFIANE, A.; DYSON, R. G.; & THANASSOULIS, E. Applied data envelopment analysis. **European Journal of Operational Research**, 52, 1-15. 1991.

BRANDA, M. Diversification-consistent data envelopment analysis with general deviation measures. **European Journal of Operational Research**, 226 (2013) 626–635.

BY, Y. - S. KIM and T. W. EAGAR. Metal Transfer in Pulsed Current Gas Metal Arc Welding. **Supplement to the Weldin Journal**, July 1993.

CASADO, F. L. Análise Envoltória de Dados: Conceitos, metodologia e estudo da arte na educação superior. **Sociais e Humanas**, Santa Maria, v. 20, n. 01, jan/jun 2007, 59-71.

CASTRO, M.; SANTOS, F. C. A.; SILVA, E. M. A Relação entre Prioridades Competitivas e Indicadores de Desempenho: Survey em Empresas Moveleiras. **Simpósio de Administração da Produção, Logística e Operações Internacionais**, São Paulo, 11. 2008.

CAVALCANTE, G. T.; FARIA, Roberto da Costa. O uso dos parâmetros de benchmarking da análise envoltória de dados (DEA) como instrumento de orçamentação. **Revista Interdisciplinar Científica Aplicada**, Blumenau, v.3, n.1, p.43-61 Sem I. 2009.

CHAKRABORTY, K.; BISWAS, B.; LEWIS, W. C. Measurement of technical efficiency in public education: a stochastic and nonstochastic production approach. **Southern Economic Journal** 67, 889–905. 2001.

CHARNES, A; COOPER, W.W. Programming with Fractional Functionals: I, Linear Fractional Programming. Systems Research Group. The Technological Institute, Northwestern University. **ONR Research Memorandum**, nº. 50, February 1962

CHARNES, A; COOPER, W.W. Preface to topics in data envelopment analysis. **Annals of Operations Research** 2, 59-94, 1985.

CHARNES, A; COOPER, W. W.; LEWIN, A. Y.; SEIFORD, L. M. **Data envelopment analysis: Theory, methodology and applications**. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1994.

CHARNES, A.; COOPER, W. W.; LEWIN, A. Y.; SEIFOR, L. M. **Data Envelopment Analysis: theory, methodology and application**. Massachussets (EUA): Kluwer, 1997.

CHARBES, A.; COOPER, W. W.; RHODES, E. Measuring the efficiency of decision making units. **European Journal of Operational Research** 2 (1978) 429-444.

CHAVES, A. C. A. **Avaliação de eficiência em DMU (Decision Making Units) utilizando a tecnologia DEA (Data Envelopment Analysis)**. Estudo de caso: Unidades de Atendimento do INSS, agências da Previdência Social, Gerência Executiva Fortaleza. Dissertação (Mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica do Ceará – CEFET-CE, Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, CE, 2007.

- CHENG, T. W.; WANG, K. L.; WENG, C. C. A study of technical efficiencies of CPA firms in Taiwan. **Review of Pacific Basin Financial Markets and Policies** 3, 27–44. 2000.
- CHILINGERIAN, J. A.; SHERMAN, H. D. Health care applications: from hospitals to physicians from productive efficiency to quality frontiers. In: Cooper, W.W., Seiford, L.M., Zhu, J. (Eds.), **Handbook on Data Envelopment Analysis**. Kluwer Academic Publishers, Boston, pp. 265–298 (Chapter 10). 2004.
- CHU, H. L.; LIU, S. Z.; ROMEIS, J. C.; YAUNG, C. L. The initial effects of physician compensation programs in Taiwan hospitals: implications for staff model HMOs. **Health Care Management Science** 6, 17–26. 2003.
- COOK, W. D.; KRESS, M.; SEIFORD, L. M. Data envelopment analysis in the presence of both quantitative and qualitative factors. **Journal of the Operational Research Society**, 47(7), 945-953. 1996.
- COOK, W.; SEIFORD, L. M. Data envelopment analysis (DEA) - Thirty years on. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, vol. 192(1), pages 1-17, January. 2009.
- CORAINI, R. **Soldagem GMAW-P robotizada de alumínio: influência do tipo de chanfro, tecimento e sentido de laminação na distorção angular**. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2011.
- DEBREU, G. The coefficient of resource utilization. **Econometrica**, v. 19, n.3, p. 273-92, 1951.
- DOYLE, J.; GREEN, R. Efficiency and cross-efficiency in DEA: Derivations, meanings and uses. **Journal of the Operational Research Society**, 45(5), 567-578. 1994.
- DYSON, R. G.; & THANNASSOULIS, E. Reducing weight flexibility in data envelopment analysis. **Journal of Operational Research Society**, 39(6), 563-576. 1988.
- FARREL, M. J. The measurement of productive efficiency. **Journal of the Royal Statistical Society**. Serie A, Vol. 120, n° 3 (1957) 253 – 290.
- FÄRE, R. GROSSKOPF, S. DEA, directional distance functions and positive, affine data transformation. **Omega**, 41, p. 28-30, 2013.
- FERREIRA, M. A.; VENÂNCIO, M. M.; ABRANTES, L. A. Análise da eficiência do setor de supermercados no Brasil. **Economia Aplicada**, v. 13, n. 2, 2009, pp. 333-347 Ribeirão Preto Apr./June 2009.
- FERREIRA, C. M. C.; GOMES, A. P. **Introdução à Análise Envoltória de Dados: teoria, modelos e aplicações**. Editora UFV, Viçosa, MG, 2009.
- FRIED, H. O.; LOVELL, C. A. K.; VANDEN EECKAUT, P. Evaluating the performance of U.S. Credit Unions. **Journal of Banking and Finance** 17, 251–265. 1993.
- FRIED, H. O.; SCHMIDT, S. S.; YAISAWARNG, S. Incorporating the operating environment into a nonparametric measure of technical efficiency. **Journal of Productivity Analysis** 12, 249–267. 1999b.

FRIED, H. O.; LOVELL, C. A. K.; SCHMIDT, S. S.; YAISAWARNG, S. Accounting for environmental effects and statistical noise in data envelopment analysis. **Journal of Productivity Analysis** 17, 157–174. 2002.

GHOSH, P.K.; DORN, L.; HÜBNER, M.; GOYAL, V. K. Arc characteristics and behaviour of metal transfer in pulsed current GMA welding of aluminium alloy. *J Mater Process Technol* 94:163 – 175. 2007.

GOMES JR, S. F.; MELLO, J. C. B. S.; MEZA, L. A. DEA nonradial efficiency based on vector properties. **International Transactions in Operational Research**. 20 (2013) 341–364.

GOVINDALURI, S. M. e CHO, B. R. Robust design modeling with correlated quality characteristics using a multicriteria decision framework. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 32, n. 5-6, p. 423-433, 2007.

HEIZER, J; RENDER, B. **Administração de Operações, bens e serviços**. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2001.

ISIK, I.; HASSAN, M. K. Technical, scale, and allocative efficiencies of Turkish banking industry. **Journal of Banking and Finance** 26, 719–766. 2002.

KASSAI, S. **Utilização da Análise por Envoltória de Dados (DEA) na Análise de Demonstrações Contábeis**. Tese de Doutorado em Ciências Contábeis. Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade – USP. 2002.

KOOPMANS, T. C. **Activity analysis of production and allocation**. John Wiley & Sons, New York. 1951.

KURSAWE, F. **A variant of evolution strategies for vector optimization**. Em H. P. Schwefel e R. Männer, editors, *Parallel Problem Solving from Nature*. 1<sup>st</sup> Workshop, PPSN I, volume 496 of *Lecture Notes in Computer Science*. 193-197, Berlin, Alemanha, 1991.

LEME, R. C.; PAIVA, A. P.; SANTOS, P. E. S.; BALESTRASSI, P. P. Design of experiments applied to environmental variables analysis in electricity utilities efficiency: The Brazilian case. **Energy Economics** 45 (2014) 111–119.

LI, Y.; YANG, M.; CHEN, Y.; DAI, Q.; LIANG, L. Allocating a fixed cost based on data envelopment analysis and satisfaction degree. **Omega** 41 (2013) 55–60.

LINS, M. P. E.; MEZA, L. A. **Análise Envoltória de Dados e Perspectivas de Integração no Ambiente de Apoio à Decisão**. Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ. pp. 53,64. 2000.

MARIANO, E. B.; ALMEIDA, M. R.; REBELATTO, D. A. N. **Peculiaridades da Análise por Envoltória de Dados**. XII Simpósio de Engenharia de Produção - SIMPEP – Bauru, SP, 6 a 8 de novembro de 2006.

MARINHO, A. Metodologia para avaliação e ordenação de universidades públicas: o caso da UFRJ e demais IFES. **Ensaio**, v. 4, n° 13 (out/dez, 1996), 403-424, 1996.

- MUKHERJEE, K.; RAY, S. C.; MILLER, S. M. Productivity growth in large US commercial banks: the initial post-deregulation experience. **Journal of Banking and Finance** 25, 913–939. 2001.
- MYUNG, I. J. Tutorial on maximum likelihood estimation. **Journal of Mathematical Psychology** 47 (2003) 90–100.
- O'DONNELL, C. J.; VAN DER WESTHUIZEN, G. Regional comparisons of banking performance in South Africa. **South African Journal of Economics** 70, 485–518. 2002.
- OKEAHALAM, C. C. Foreign ownership, performance and efficiency in the banking sector in Uganda and Botswana. **Journal for Studies in Economics and Econometrics** 28, 89–118. 2004.
- OLIVEIRA, D. P. R. **Sistemas, organização e métodos: uma abordagem gerencial**. Atlas, São Paulo, 2002.
- OTSUKI, T.; HARDLE, I. W.; REIS, E. J. The implications of property rights for joint agriculture-timber productivity in the Brazilian Amazon. **Environment and Development Economics** 7, 299–323. 2002.
- PAIVA, A. P. Notas de aula. Disciplina de Engenharia da Qualidade II (EPR802). 2012.
- PAIVA, A. P.; COSTA, S. C.; PAIVA, E. J.; BALESTRASSI, P. P.; FERREIRA, J. R. Multi-objective optimization of pulsed gas metal arc welding process based on weighted principal component scores. **Int J Adv Manuf Technol** (2010) 50:113 – 125.
- PAIVA, F. C. **Eficiência produtiva de programas de ensino de pós-graduação em engenharias: uma aplicação do método Análise Envoltória de Dados – DEA**. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Produção. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis: UFSC. 2000.
- PANEPUCCI, G. T. M. **Avaliação de desempenho dos departamentos acadêmicos da UFSCar utilizando análise envoltória de dados-AED**. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Produção. Universidade Federal de São Carlos, 2003.
- PANTUZA JÚNIOR, G. **Métodos de Otimização Multiobjetivo de Simulação aplicados ao problema de planejamento operacional de lavra em minas a céu aberto**. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mineral. Universidade Federal de Ouro Preto. 2011.
- PARETO, V. **Manuel d’Economie Politique**. Giars & Briere, Paris. 1909.
- PÉREZ, V.; GUERRERO, F.; GONZÁLEZ, M.; PÉREZ, F.; CABALLERO, R. Composite indicator for the assessment of sustainability: The case of Cuban nature-based tourism destinations. **Ecological Indicators**. 29 (2013) 316–324
- PIMENTA, H. L. N.; SOARES DE MELLO, J. C. C. B. **Modelo DEA-Savage para análise de eficiência do parque de refino brasileiro**. Relatórios de Pesquisa em Engenharia de Produção. 2005. Disponível em: <<http://www.producao.uff.br/rpep/revista-V5-2005.htm>>. Acesso em 26 ago. 2013.

- PIMENTEL, R. C.; CASA NOVA, S. P. C. **Modelo integrado de avaliação da rentabilidade e liquidez:** estudo da aplicação da data envelopment analysis (DEA) a empresas brasileiras. In: Congresso Internacional de Custos, 9, 2005.
- PRAVEEN, P.; YARLAGADDA, P. K. D. V.; KANG, M. J. Advancements in pulse gas metal arc welding. *Journal of Materials Processing Technology*. 164–165 (AMPT/AMME05 Part 2), pp. 1113-1119. 2005.
- RACZKA, J. Explaining the performance of heat plants in Poland. *Energy Economics* 23, 355–370. 2001.
- RALSTON, D.; WRIGHT, A.; GARDEN, K. Can mergers ensure the survival of credit unions in the third millennium? *Journal of Banking and Finance* 25, 2277–2304. 2001.
- RAO, S. S. **Engineering optimization:** theory and practice. 3ed. USA: John Wiley & Sons, 1996.
- RAY, S. C. **Data Envelopment Analysis:** Theory and Techniques for Economics and Operations Research. Cambridge University Press, Cambridge. 2004.
- REIG-MARTÍNEZ, E. Social and Economic Wellbeing in Europe and the Mediterranean Basin: Building an Enlarged Human Development Indicator. *Soc Indic Res* (2013) 111:527–547.
- RESENDE, M. Regulatory regimes and efficiency in US local telephony. *Oxford Economic Papers* 52, 447–470. 2000.
- RIBEIRO, M. B. Desempenho e Eficiência do Gasto Público: uma análise comparativa do Brasil em relação a um conjunto de países da América Latina. **Finanças Públicas – XIII Prêmio Tesouro Nacional**. 2008. Disponível online: <[http://www3.tesouro.fazenda.gov.br/Premio\\_TN/XIIIpremio/qualidade/3qualidadeXIIIPTN/Desempenho\\_Eficiencia\\_gasto\\_Publico.pdf](http://www3.tesouro.fazenda.gov.br/Premio_TN/XIIIpremio/qualidade/3qualidadeXIIIPTN/Desempenho_Eficiencia_gasto_Publico.pdf)>. Acesso em 25.06.2013.
- RITZEL, B. J.; WAYLAND EHEART, J.; RANJITHAN, S. Using genetic algorithms to solve a multiple objective groundwater pollution containment problem. *Water Resources Research*. v. 30 issue 5, 1589–1603. 1994.
- ROMAN, D. J.; PIANA, J.; LOZANO, M. A. S. P. L.; MELLO, N. R.; ERDMANN, R. H. Fatores de competitividade organizacional. **BBR**, Vitória, v. 9, n. 1, Art. 2, p. 27-46, jan - mar 2012
- RUGGIERO, J. Performance evaluation in education: modeling educational production. In: Cooper, W.W., Seiford, L.M., Zhu, J. (Eds.), **Handbook on Data Envelopment Analysis**. Kluwer Academic Publishers, Boston, pp. 265–298 (Chapter 10). 2004.
- SARKIS, J.; TALLURI, S. A decision model for evaluation of flexible manufacturing systems in the presence of both cardinal and ordinal factors. *International Journal of Production Research*, 37(13), 2927-2938. 1999.
- SEXTON, T. R.; SILKMAN, R. H.; HOGAN, A. Data envelopment analysis: Critique and extensions. In R. H. Silkman (Ed.), *Measuring efficiency: An assessment of data envelopment*

analysis. Publication no. 32 in the series **New Directions of Program Evaluation**, Jossey Bass, San Francisco. 1986.

SHIN, S., SAMANLIOGLU, F., CHO, B. R., WIECEK, M. M. Computing trade-offs in robust design: Perspectives of the mean square error. **Computers and Industrial Engineering**, n. 60, pp. 248-255, 2011.

SIMAR, L.; WILSON, P. W. Estimation and inference in two-stage, semi-parametric models of production processes. **Journal of Econometrics** 136 (2007) 31–64.

SOARES DE MELLO, J. C. C. B. *et al.* **Avaliação de Turmas de Cálculo I, Usando DEA**. In: Anais XXXII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional. Viçosa, 2000.

SOARES DE MELLO, J. C. C. B.; ÂNGULO-MEZA, L.; GOMES, E. G.; BIONDI NETO, L. **Curso de Análise Envoltória de Dados**. XXXVII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (SBPO). Gramado, RS, 2005.

STANTON, K. R. Trends in relationship lending and factors affecting relationship lending efficiency. **Journal of Banking and Finance** 26, 127–152. 2002.

TALLURI, S., SARKIS, J. Extensions in efficiency measurement of alternat machine component grouping solutions via data envelopment analysis. **IEEE Transactions on Engineering Management**, 44(3), 299-304. 1997.

TALLURI, S. (forthcoming). A benchmarking method for business process reengineering and improvement. **International Journal of Flexible Manufacturing Systems**. 2000.

TURNER, H.; WINDLE, R.; DRESNER, M. North American containerport productivity: 1984–1997. **Transportation Research Part E** 40, 339–356. 2004.

WANG, K. L.; TSENG, Y. T.; WENG, C. C. A study of production efficiencies of integrated securities firms in Taiwan. **Applied Financial Economics** 13, 159–167. 2003.

WANG, Z.; GERSTEIN, M.; SNYDER, M. RNA-Seq: a revolutionary tool for transcriptomics. **Nat Rev Genet**. Jan;10(1):57-63. 2009.

WASHIO, S.; YAMADA, S. Evaluation method based on ranking in data envelopment analysis. **Expert Systems with Applications**. 40 (2013) 257–262.

WONG, Y. H B.; BEASLEY, J. E. Restricting weight flexibility in data envelopment analysis. **Journal of the Operational Research Society**, 41(9), 829-835. 1990.

WORTHINGTON, A. C.; DOLLERY, B. E. Productive efficiency and the Australian local government grants process. **Australian Journal of Regional Studies** 6, 95–121. 2000.