

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO**  
**EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**TESE DE DOUTORADO**

**Estudo Numérico do Problema Conjugado de  
Convecção Mista em Duto Contendo Fontes  
Conductoras e Geradoras de Energia Interna**

**Renato José Pinto**

**Itajubá, Junho de 2016**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO**  
**EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**Renato José Pinto**

**Estudo Numérico do Problema Conjugado de  
Convecção Mista em Duto Contendo Fontes  
Condutoras e Geradoras de Energia Interna**

**Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Mecânica como parte dos requisitos para obtenção  
do Título de Doutor em Ciências em Engenharia Mecânica.**

**Área de Concentração: Conversão de Energia**

**Orientador: Genésio José Menon**

**Co-orientador: Paulo Mohallem Guimarães**

**Junho de 2016**

**Itajubá**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO**  
**EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**TESE DE DOUTORADO**

**Renato José Pinto**

**Estudo Numérico do Problema Conjugado de**  
**Convecção Mista em Duto Contendo Fontes**  
**Condutoras e Geradoras de Energia Interna**

**Banca Examinadora:**

Prof. Dr. Rodolfo Molinari – POLI/USP

Prof. Dr. Edvaldo Angelo – MACKENZIE

Prof. Dr. Nelson Manzanares Filho – IEM/UNIFEI

Prof. Dr. Marcelo José Pirani – IEM/UNIFEI

Prof. Dr. Paulo Mohallem Guimarães – UNIFEI/ITABIRA (Co-orientador)

Prof. Dr. Genésio José Menon – IEM/UNIFEI (Orientador)

Itajubá  
2016

## **Dedicatória**

*À minha esposa Alessandra  
e ao meu filho Alisson.*

## **Agradecimentos**

Primeiramente a Deus, pela vida e por tudo mais que de suas mãos tenho recebido.

À minha querida esposa Alessandra e ao meu querido filho Alisson, pessoas especiais que Deus colocou em meu caminho, pelo amor, apoio e incentivo durante o período de realização deste trabalho, sendo compreensíveis nos momentos de minha ausência e pacientes com minha falta de humor em certos momentos.

À minha mãe Lhubumera pelo carinho e incentivo durante minha formação e aos meus irmãos Robson, Roberto e Marcelo, que sempre confiaram em mim e torceram pela minha vitória.

Ao meu sogro José e à minha sogra Dalva, os quais considero como pais.

Aos meus avós maternos Daniel e Ana, ao meu tio Antonio Borini e tia Teodora Borini, que de certa forma me apoiaram em algum momento da vida e já não estão mais entre nós.

Ao meu tio Inácio Polistchuk pela ajuda e incentivo no início da jornada profissional.

Ao meu orientador e amigo, professor Dr. Genésio José Menon, ao qual sou eternamente agradecido pela ajuda, dedicação, paciência e competência demonstrada durante todo o período de realização deste trabalho.

Ao meu co-orientador e amigo, professor Dr. Paulo Mohallem Guimarães pela ajuda, dedicação e orientações recebidas para realização deste trabalho.

Aos demais professores da Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI) pela atenção dispensada durante as aulas e constante incentivo, em especial agradeço aos professores Drs. Nelson Manzanares Filho e Marcelo José Pirani, que aceitaram participar da banca examinadora e avaliar este trabalho, apresentando relevantes contribuições para o mesmo.

Aos professores Drs. Rodolfo Molinari e Edvaldo Angelo, que participaram da banca examinadora como membros externos e também apresentaram relevantes contribuições para este trabalho.

Aos meus amigos professores e demais funcionários do Centro Universitário da FEI, com os quais convivo profissionalmente, pelo incentivo e colaboração durante o período de realização deste trabalho.

À empresa AÇOKORTE que, através da sua equipe gestora, incentivou a realização deste trabalho.

*“Ora, Àquele que é poderoso para fazer tudo muito mais abundantemente além daquilo que pedimos ou pensamos, segundo o poder que em nós opera, a Esse glória na igreja, por Jesus Cristo, em todas as gerações, para todo o sempre. Amém.”*

Aos Efésios 3:20-21

## RESUMO

**PINTO, R. J. (2016)**, *Estudo Numérico do Problema Conjugado de Convecção Mista em Duto Contendo Fontes Condutoras e Geradoras de Energia Interna*, Itajubá, 165 p. Tese de Doutorado em Conversão de Energia - Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá.

Apresenta-se um estudo numérico do problema conjugado de transferência de calor por convecção mista e condução em um duto contendo fontes condutoras e geradoras de energia interna. A convecção mista ocorre no domínio de um fluido (ar) e condução de calor com geração interna de energia no domínio sólido. Este assunto é de grande interesse na área de engenharia, principalmente em aplicações envolvendo o resfriamento de componentes eletrônicos, os quais operam atualmente com altas taxas de transferência de calor. O caso estudado consiste de um duto retangular contendo três corpos considerados fontes condutoras e com geração homogênea de energia, posicionados na parede inferior.

Utiliza-se o método de elementos finitos para a solução das equações de conservação em termos da função corrente, temperatura e vorticidade. A análise considera o escoamento bidimensional, em regime transitório e permanente. São determinadas as distribuições de temperaturas no fluido e no sólido, as velocidades do fluido, as taxas de calor transferidas entre o sólido e o fluido e as temperaturas médias e máximas nos corpos sólidos. O número de Nusselt médio é calculado em função dos parâmetros adimensionais número de Grashof na faixa de 0 a  $10^6$ , número de Prandtl fixado em 0,7, número de Reynolds na faixa de 10 a 1000 e razão de difusividades na faixa de 3 a 100. Verifica-se a influência da variação das alturas adimensionais  $H_c$  dos corpos com valores 0,075; 0,100 e 0,150 e dos ângulos de inclinação do duto  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $90^\circ$ , nos resultados.

### ***Palavras-chave***

Transferência de calor, Convecção mista e condução combinadas, Método de elementos finitos, Fontes geradoras protuberantes, Escoamento em dutos.



# ABSTRACT

**PINTO, R. J. (2016)**, *Numerical Study of Conjugate Mixed Convection in Channel with Inner Conductives and Internal Energy Generators Sources*, Itajubá, 165 p. PhD Thesis in Energy Conversion – Mechanical Engineering Institute, Federal University of Itajubá.

It is presented a numerical study of conjugate heat transfer problem by mixed convection and conduction in a channel with inner conductive and internal energy generators sources. The mixed convection occurs in fluid domain (air) and heat conduction with internal energy generation in solid domain. This subject is of great interest in the engineering area, mainly in applications involving cooling of electronic components, which nowadays operate with high heat transfer rates. The studied case consists of a rectangular channel with three inner bodies considered conductive and homogeneous energy generating sources, positioned on the bottom wall.

The finite element method is applied to solve the conservation equations in terms of the stream function, temperature and vorticity. The analysis considers two-dimensional, steady and unsteady-state flow. The temperature distribution in fluid and solid, fluid velocities, heat transfer rate between solid and fluid and the average and maximum temperature in solid bodies are determined. The average Nusselt number is calculated considering the dimensionless parameters of Grashof number in the range of 0 to  $10^6$ , Prandtl number fixed at 0.7, Reynolds number in the range of 10 to 1000 and diffusivities in the range of 3 to 100. The influence of variation in dimensionless bodies' heights  $H_c$ , with values of 0.075; 0.100 and 0.150, and in channel inclination angles,  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  and  $90^\circ$ , is verified.

## ***Keywords***

Heat transfer, Combined mixed convection and conduction, Finite element method, Protruding generators sources, Flow in channels.

# SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS</b>	<b>iv</b>
<b>LISTA DE TABELAS</b>	<b>viii</b>
<b>LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS</b>	<b>ix</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b>	<b>x</b>
<b>1. INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1. Motivação do Trabalho	1
1.2. Caso Estudado no Presente Trabalho	2
1.3. Revisão da Literatura	3
1.4. Objetivos do Presente Trabalho	12
1.5. Contribuições do Presente Trabalho	13
1.6. Delineamento do Presente Trabalho	14
1.7. Equipamento e Compilador Utilizado	16
<b>2. MODELO MATEMÁTICO</b>	<b>17</b>
2.1. Análise Teórica do Problema Conjugado	17
2.1.1. Equações de Conservação na Forma Dimensional para o Fluido	17
2.1.2. Equações de Conservação na Forma Dimensional para o Sólido	19
2.1.3. Condições Iniciais, de Contorno e de Interface na Forma Dimensional	20
2.2. Adimensionalização das Equações	21
2.2.1. Equações de Conservação na Forma Adimensional para o Fluido	22
2.2.2. Equações de Conservação na Forma Adimensional para o Sólido	23
2.2.3. Condições Iniciais, de Contorno e de Interface na Forma Adimensional	23
2.3. Equações Adimensionais em Termos de Função Corrente, Temperatura e Vorticidade	25
2.3.1. Equações Adimensionais para o Domínio Fluido	26
2.3.2. Equação Adimensional para o Domínio Sólido	27
2.3.3. Equações Unificadas Adimensionais para os Domínios Fluido e Sólido	27
2.3.4. Condições Iniciais e de Contorno na Forma Adimensional	28
2.4. Números de Nusselt Local e Médio	30
<b>3. MODELO NUMÉRICO</b>	<b>32</b>
3.1. Forma Geral para as Equações de Conservação	32
3.2. Obtenção Geral das Matrizes e Vetores para os Elementos	33

3.2.1. Desenvolvimento da Matriz $[C]^e$ para o Elemento	34
3.2.2. Desenvolvimento da Matriz $[K_\phi]^e$ do Elemento	35
3.2.3. Desenvolvimento do Vetor $\{R_\phi\}^e$ do Elemento	36
3.2.4. Resumo das Equações do Item 3.2	42
3.3. Obtenção das Matrizes e Vetores para os Elementos	43
3.3.1. Forma Matricial para os Elementos em Termos da Função Corrente	43
3.3.2. Forma Matricial para os Elementos em Termos de Temperatura Adimensional	44
3.3.3. Forma Matricial para os Elementos em Termos da Vorticidade	45
3.4. Algoritmo do Programa Computacional	46
<b>4. VALIDAÇÃO DOS MODELOS NUMÉRICOS</b>	<b>55</b>
4.1. Introdução	55
4.2. Validação 1 – Convecção Natural Numa Cavidade Quadrada	55
4.2.1. Equações de Conservação na Forma Adimensional para o Fluido em Termos de $\psi$ , $\theta$ e $\omega$	57
4.2.2. Condições Iniciais e de Contorno na Forma Adimensional	58
4.2.3. Números de Nusselt Local e Médio	59
4.2.4. Estudo de Malhas	59
4.2.5. Distribuições de Temperatura e da Função Corrente	61
4.2.6. Comparação de Resultados do Número de Nusselt	62
4.3. Validação 2 – Escoamento Num Duto com Degrau na Entrada	64
4.3.1. Equações de Conservação na Forma Adimensional para o Fluido	64
4.3.2. Condições Iniciais e de Contorno na Forma Adimensional	65
4.3.3. Estudo de Malhas	66
4.4. Validação 3 – Convecção Mista Num Duto com Aquecimento na Parede Inferior	68
4.4.1. Introdução	68
4.4.2. Equações de Conservação na Forma Adimensional para o Fluido	68
4.4.3. Condições Iniciais e de Contorno na Forma Adimensional	69
4.4.4. Estudo de Malhas	70
4.4.5. Distribuições de Temperaturas e Campo de Velocidades	71
4.4.6. Número de Nusselt Médio	72
<b>5. RESULTADOS</b>	<b>75</b>
5.1. Introdução	75

5.2. Estudo de Malhas	77
5.3. Estudo do Incremento de Tempo Adimensional - $\Delta\tau$	91
5.4. Resultados do Presente Trabalho	92
<b>6. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES</b>	<b>113</b>
6.1. Introdução	113
6.2. Conclusões	114
6.3. Recomendações para Trabalhos Futuros	116
<b>APÊNDICE A - FUNDAMENTOS DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS</b>	<b>117</b>
A.1. Introdução	117
A.2. Vantagens e Desvantagens do Método de Elementos Finitos	118
A.3. Desenvolvimento do Método	118
<b>APÊNDICE B - MÉTODO DE GALERKIN PARA A EQUAÇÃO DIFERENCIAL BIDIMENSIONAL EM REGIME NÃO PERMANENTE</b>	<b>123</b>
B.1. Introdução	123
B.2. Método de Galerkin	123
B.3. Aproximação dos Termos $\{\dot{\Phi}\}$ e $\{\Phi\}$	129
<b>APÊNDICE C - CÁLCULO DOS NÚMEROS DE NUSSOLT LOCAL E MÉDIO</b>	<b>131</b>
C.1. Introdução	131
C.2. Equação do Número de Nusselt Local	131
C.1. Equação do Número de Nusselt Médio	133
<b>APÊNDICE D - MÉTODO MATRICIAL PARA CÁLCULO DA VORTICIDADE NO CONTORNO</b>	<b>134</b>
D.1. Introdução	134
D.2. Cálculo da Vorticidade no Contorno	134
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>137</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Geometria e condições de contorno	2
Figura 2.1	Domínio computacional e condições de contorno dimensionais	17
Figura 2.2	Domínio computacional e condições de contorno adimensionais	24
Figura 3.1	Fluxograma do programa computacional desenvolvido	49
Figura 4.1	Geometria e condições de contorno dimensional	56
Figura 4.2	Geometria e condições de contorno adimensional	56
Figura 4.3	Malha para a cavidade quadrada com 5000 elementos e 2601 nós	60
Figura 4.4	Número de Nusselt médio na superfície fria, $Nu_c$ , versus número de elementos, NE	61
Figura 4.5	Distribuição de temperatura, $\theta$ (THETA) e função corrente, $\psi$ (PSI) para $Pr=0,733$ e $Gr = 20000$ , à esquerda, $Gr = 341064$ , à direita	62
Figura 4.6	Geometria com coordenadas adimensionais	64
Figura 4.7	Geometria com coordenadas adimensionais do presente trabalho	65
Figura 4.8	Malha parcial utilizada	67
Figura 4.9	Distâncias medidas para $X_s$ , $X_{rs}$ e $X_r$ na região de entrada do duto	67
Figura 4.10	Geometria adimensional e condições de contorno	68
Figura 4.11	Malha utilizada neste trabalho com 2072 elementos e 1125 pontos nodais	71
Figura 4.12	Distribuições de temperaturas adimensionais e velocidades do fluido	72
Figura 4.13	Distribuições de temperaturas adimensionais, velocidades e linhas de corrente	72
Figura 4.14	Número de Nusselt médio na superfície quente versus tempo adimensional	73
Figura 5.1	Geometria estudada (duto)	75
Figura 5.2	Geometria adimensional da cavidade com corpos internos geradores de energia	76
Figura 5.3	Exemplos de malhas para geometria com altura do corpo $H_c = 0,075$	78
Figura 5.4	Exemplos de malhas para geometria com altura do corpo $H_c = 0,100$	79
Figura 5.5	Exemplos de malhas para geometria com altura do corpo $H_c = 0,150$	80

Figura 5.6	Número de Nusselt médio na superfície do corpo 1, $Nu_{c1}$ , versus número de elementos, NE, para geometria $H_c = 0,075$	82
Figura 5.7	Número de Nusselt médio na superfície do corpo 3, $Nu_{c3}$ , versus número de elementos, NE, para geometria $H_c = 0,075$	82
Figura 5.8	Número de Nusselt médio na superfície do corpo 1, $Nu_{c1}$ , versus tempo adimensional, $\tau$ , para geometria $H_c = 0,075$	84
Figura 5.9	Número de Nusselt médio na superfície do corpo 1, $Nu_{c1}$ , versus número de elementos, NE, para geometria $H_c = 0,100$	85
Figura 5.10	Número de Nusselt médio na superfície do corpo 3, $Nu_{c3}$ , versus número de elementos, NE, para geometria $H_c = 0,100$	85
Figura 5.11	Número de Nusselt médio na superfície do corpo 1, $Nu_{c1}$ , versus número de elementos, NE, para geometria $H_c = 0,150$	86
Figura 5.12	Número de Nusselt médio na superfície do corpo 3, $Nu_{c3}$ , versus número de elementos, NE, para geometria $H_c = 0,150$	87
Figura 5.13	Número de Nusselt médio na superfície do corpo 1, $Nu_{c1}$ , versus tempo adimensional, $\tau$ , para geometria $H_c = 0,100$	88
Figura 5.14	Número de Nusselt médio na superfície do corpo 1, $Nu_{c1}$ , versus tempo adimensional, $\tau$ , para geometria $H_c = 0,150$	88
Figura 5.15	Tempo de processamento por iteração, em segundos, versus o número de elementos, NE	90
Figura 5.16	Número de Nusselt médio na superfície do corpo 1, $Nu_{c1}$ , versus tempo adimensional, $\tau$ , para geometria $H_c = 0,075$	91
Figura 5.17	Número de Nusselt médio no corpo 1, $Nu_{c1}$ , versus o número de Grashof, Gr	94
Figura 5.18	Número de Nusselt médio no corpo 3, $Nu_{c3}$ , versus o número de Grashof, Gr	94
Figura 5.19	Número de Nusselt médio na superfície do corpo 1, $Nu_{c1}$ , versus tempo adimensional, $\tau$ , para geometria $H_c = 0,075$	95
Figura 5.20	Número de Nusselt médio na superfície do corpo 3, $Nu_{c3}$ , versus tempo adimensional, $\tau$ , para geometria $H_c = 0,075$	95
Figura 5.21	Número de Nusselt médio na superfície do corpo 1, $Nu_{c1}$ , versus tempo adimensional, $\tau$ , para diferentes valores de Reynolds, Re	96
Figura 5.22	Número de Nusselt médio na superfície do corpo 3, $Nu_{c3}$ , versus tempo adimensional, $\tau$ , para diferentes valores de Reynolds, Re	96

Figura 5.23	Número de Nusselt médio na superfície dos corpos, $Nu$ , versus número de Reynolds, $Re$	97
Figura 5.24	Número de Nusselt médio na superfície do corpo 1, $Nu_{c1}$ , versus tempo adimensional, $\tau$ , para diferentes valores de difusividades	99
Figura 5.25	Número de Nusselt médio na superfície do corpo 3, $Nu_{c3}$ , versus tempo adimensional, $\tau$ , para diferentes valores de difusividades	99
Figura 5.26	Número de Nusselt médio na superfície do corpo 1, $Nu_{c1}$ , versus Grashof, $Gr$ , para diferentes valores de difusividades	100
Figura 5.27	Número de Nusselt médio na superfície do corpo 3, $Nu_{c3}$ , versus Grashof, $Gr$ , para diferentes valores de difusividades	100
Figura 5.28	Número de Nusselt médio na superfície do corpo 1, $Nu_{c1}$ , versus tempo adimensional, $\tau$ , para diferentes valores de inclinação $\alpha$	101
Figura 5.29	Número de Nusselt médio na superfície do corpo 3, $Nu_{c3}$ , versus tempo adimensional, $\tau$ , para diferentes valores de inclinação $\alpha$	101
Figura 5.30	Número de Nusselt médio na superfície do corpo 1, $Nu_{c1}$ , versus Grashof, $Gr$ , para diferentes valores de inclinação $\alpha$	102
Figura 5.31	Número de Nusselt médio na superfície do corpo 3, $Nu_{c3}$ , versus Grashof, $Gr$ , para diferentes valores de inclinação $\alpha$	102
Figura 5.32	Temperatura média, $\theta$ média, nos corpos 1, 2 e 3, versus tempo adimensional, $\tau$	104
Figura 5.33	Temperatura máxima, $\theta$ máx, nos corpos 1, 2 e 3, versus tempo adimensional, $\tau$	104
Figura 5.34	Distribuição de temperatura, $\theta$ , nos corpos internos: (a) corpo 1, (b) corpo 2 e (c) corpo 3. Parâmetros $Re = 500$ , $Pr = 0,7$ , $Gr = 10^5$ , $D=5$ , $\alpha=0$ e $H_c = 0,150$ .	105
Figura 5.35	Distribuição da temperatura adimensional, $\theta$ , e linhas de corrente, $\psi$ , para geometria $H_c = 0,150$ , $Pr = 0,7$ ; $D = 5$ , $\alpha = 0$ , Grashof $5 \times 10^4$	106
Figura 5.36	Distribuição da temperatura adimensional, $\theta$ , e linhas de corrente, $\psi$ , para geometria $H_c = 0,150$ , $Pr = 0,7$ ; $D = 5$ , $\alpha = 0$ , Grashof $10^5$	107
Figura 5.37	Distribuição da temperatura adimensional, $\theta$ , e linhas de corrente, $\psi$ , para geometria $H_c = 0,150$ , $Pr = 0,7$ ; $D = 5$ , $\alpha = 0$ , Grashof $3 \times 10^5$	108
Figura 5.38	Distribuição da temperatura adimensional, $\theta$ , e linhas de corrente, $\psi$ , para geometria $H_c = 0,150$ , $Pr = 0,7$ ; $D = 5$ , $\alpha = 0$ , Grashof $10^6$	109
Figura 5.39	Evolução temporal da distribuição da temperatura adimensional, $\theta$ , e linhas de corrente, $\psi$ , para geometria $H_c = 0,100$ , $Pr = 0,7$ ; $Re = 500$ , $D = 5$ , $\alpha = 0$ e Grashof $10^5$	111

Figura 5.40	Evolução temporal da distribuição da temperatura adimensional, $\theta$ , e linhas de corrente, $\psi$ , para geometria $H_c = 0,100$ , $Pr = 0,7$ ; $Re = 100$ , $D = 5$ , $\alpha = 0$ e $Grashof 10^5$	112
Figura A.1	Domínio discretizado e condições de contorno generalizadas	119
Figura A.2	Elemento triangular e função de interpolação	120
Figura C.1	Geometria dimensional do duto	131
Figura D.1	Pontos nodais internos e do contorno	134



## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1	Parâmetros das equações (3.1a) e (3.1b)	32
Tabela 4.1a	Comparação do número de Nusselt com valores obtidos em diversos trabalhos	63
Tabela 4.1b	Comparação do número de Nusselt com valores obtidos em diversos trabalhos	63
Tabela 4.2	Comparação dos resultados do presente trabalho com valores numéricos e experimentais	67
Tabela 4.3	Comparação do número de Nusselt médio no tempo ( $Nu_t$ ) com valores obtidos em outros trabalhos	73
Tabela 5.1	Coordenadas dos pontos apresentados na Figura 5.2, comuns a todas geometrias	76
Tabela 5.2	Resultados para as malhas estudadas considerando geometria com altura de corpo $H_c=0,075$ . Parâmetros utilizados: número de Grashof $10^5$ , razão de difusividades $D=5$ , ângulo de inclinação $\alpha=0$ , número de Prandtl 0,7 e número de Reynolds 100	83
Tabela 5.3	Resultados para as malhas estudadas considerando geometria com altura de corpo $H_c=0,100$ . Parâmetros utilizados: número de Grashof $10^5$ , razão de difusividades $D=5$ , ângulo de inclinação $\alpha=0$ , número de Prandtl 0,7 e número de Reynolds 100	86
Tabela 5.4	Resultados para as malhas estudadas considerando geometria com altura de corpo $H_c=0,150$ . Parâmetros utilizados: número de Grashof $10^5$ , razão de difusividades $D=5$ , ângulo de inclinação $\alpha=0$ , número de Prandtl 0,7 e número de Reynolds 100	87
Tabela 5.5	Resultados comparativos para as curvas apresentadas na Figura 5.16, regime permanente	92

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CPU	Central Processing Unit
FORTRAN	Formula Translator
IEM	Instituto de Engenharia Mecânica
MACKENZIE	Universidade Presbiteriana Mackenzie
POLI	Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
RAM	Random Access Memory
UNIFEI	Universidade Federal de Itajubá
USP	Universidade de São Paulo

# LISTA DE SÍMBOLOS

## LETRAS LATINAS

a	coeficiente
A	área do elemento triangular, matriz global ou comprimento da geometria adimensional
$A_1$	parâmetro da Equação (3.1b)
b	coeficiente ou comprimento dimensional dos corpos condutores e geradores de energia interna
B	matriz global ou comprimento adimensional dos corpos condutores e geradores de energia interna
$[B^e]$	matriz das derivadas parciais das funções de forma para o elemento
$B_1$	parâmetro da Equação (3.1b)
c	coeficiente
$[C]^e$	matriz do elemento da Equação (B.27)
$c_{pf}$	calor específico a pressão constante do fluido
$c_{ps}$	calor específico a pressão constante do sólido
$C_1$	parâmetro da Equação (3.1b)
D	razão de difusividades = $\alpha_s / \alpha_f$
dA	área elementar
dV	volume elementar
$D_1$	parâmetro da Equação (3.1b)
e	elemento
E	número total de elementos do domínio
$E_1$	constante do elemento
$F_1$	constante do elemento
g	aceleração gravitacional
Gr	número de Grashof = $g\beta \Delta T H^3 / \nu_f^2$
$G_1$	constante do elemento
h	coeficiente médio de transferência de calor por convecção
$h_c$	altura dimensional dos corpos condutores e geradores de energia interna
$h_L$	coeficiente local de transferência de calor por convecção

H	altura da geometria
$H_c$	altura adimensional dos corpos condutores e geradores de energia interna
$H_1$	constante do elemento
$I_1$	constante do elemento
$J_1$	constante do elemento
$k_f$	condutibilidade térmica do fluido
$k_s$	condutibilidade térmica do sólido
$[K_\phi]^e$	matriz do elemento
$[K_\psi]^e$	matriz do elemento
$[K_\theta]^e$	matriz do elemento
$[K_\omega]^e$	matriz do elemento
$[\bar{K}_\psi]$	matriz global
$[\bar{K}_\theta]$	matriz global
$[\bar{K}_\omega]$	matriz global
L	comprimento da geometria
$L_c$	comprimento adimensional da linha que delimita o corpo sólido e o fluido
M	número de pontos da malha na direção X
n	versor normal à superfície
$\bar{n}$	coordenada adimensional na direção normal
N	número de pontos da malha na direção Y ou função de forma
NE	número de elementos
$[N^e]$	matriz função de forma para o elemento
Nu	número de Nusselt médio
$Nu_c$	número de Nusselt médio na superfície dos corpos ou na superfície fria
$Nu_L$	número de Nusselt local
$Nu_t$	número de Nusselt médio no tempo
p	pressão
$p_0$	pressão de entrada do fluido
P	pressão adimensional
Pr	número de Prandtl = $\nu_f/\alpha_f$
$q''$	fluxo de calor
$q'''$	taxa de geração volumétrica
$Q_\phi$	função especificada

$Q_\psi$	função especificada da função corrente
$Q_\theta$	função especificada da temperatura adimensional
$Q_\omega$	função especificada da vorticidade
Ra	número de Rayleigh = Gr Pr
Re	número de Reynolds = $u_0 H / \nu_f$
Ri	número de Richardson = $Gr / Re^2$
$\{R\}$	vetor residual global
$\{R^e\}$	vetor residual do elemento
$\{R_\phi\}^e$	vetor do elemento
$\{R_\psi\}^e$	vetor do elemento
$\{R_\theta\}^e$	vetor do elemento
$\{R_\omega\}^e$	vetor do elemento
$\{\bar{R}_\psi\}$	vetor global
$\{\bar{R}_\theta\}$	vetor global
$\{\bar{R}_\omega\}$	vetor global
s	unidade de tempo em segundos
S	superfície de contorno qualquer, área da superfície ou geração adimensional
t	tempo ou espessura
T	temperatura
$T_c$	temperatura isotérmica fria ou temperatura de referência
$T_h$	temperatura da superfície quente
$T_o$	temperatura média = $(T_h + T_c) / 2$
u	velocidade do fluido na direção x
$u_0$	velocidade de entrada do fluido
U	velocidade adimensional do fluido na direção X
V	velocidade adimensional do fluido na direção Y
x	coordenada horizontal
X	coordenada adimensional na direção horizontal ou matriz global incógnita
y	coordenada vertical
Y	coordenada adimensional na direção vertical

## LETRAS GREGAS

$\alpha$	ângulo de inclinação do duto
$\alpha_f$	difusividade térmica do fluido = $k_f / (\rho_f \cdot c_{pf})$
$\alpha_s$	difusividade térmica do sólido = $k_s / (\rho_s \cdot c_{ps})$
$\alpha_1$	coeficiente da equação (A.1)
$\alpha_2$	coeficiente da equação (A.1)
$\alpha_3$	coeficiente da equação (A.1)
$\beta$	coeficiente de expansão volumétrica do fluido
$\delta$	parâmetro da equação (3.1a)
$\tau$	tempo adimensional
$\Delta\tau$	incremento de tempo adimensional
$\lambda$	parâmetro da equação (3.1a)
$\rho_f$	massa específica do fluido
$\rho_s$	massa específica do sólido
$\theta$	temperatura adimensional
$\{ \theta \}$	vetor global da temperatura adimensional
$\{ \theta^e \}$	vetor temperatura adimensional do elemento
$\phi$	grandeza genérica, a qual pode ser $\psi$ , $\theta$ ou $\omega$
$\phi^e$	equação linear para distribuição da grandeza $\phi$ no elemento
$\phi_o(X,Y)$	função especificada no contorno
$\{ \phi \}^e$	vetor função escalar $\phi$ do elemento
$\nu_f$	viscosidade cinemática do fluido
$\mu_f$	viscosidade dinâmica do fluido
$v$	velocidade do fluido na direção Y
$\omega$	vorticidade adimensional
$\omega_M$	vorticidade calculada pelo método matricial
$\{ \omega \}$	vetor global da vorticidade
$\{ \omega^e \}$	vetor vorticidade do elemento
$\Omega$	domínio de estudo
$\Omega_f$	domínio fluido

$\Omega_s$	domínio sólido
$\psi$	função corrente adimensional
$\{\psi\}$	vetor global da função corrente
$\{\psi^e\}$	vetor função corrente do elemento
$\Delta T$	diferença de temperatura de referência

## SUPERESCRITOS

a	número inteiro
b	número inteiro
c	número inteiro
e	referente ao elemento
®	marca registrada
T	transposta
TM	trade mark
$\tau$	referente ao tempo adimensional atual
$\tau - \Delta\tau$	referente tempo adimensional anterior

## SUBSCRITOS

B	ponto nodal pertencente ao contorno
$\beta$	representa os pontos nodais i, j, k
c	referente ao corpo condutor e gerador de energia ou referente a superfície fria
e	referente ao elemento
f	referente ao fluido
i	ponto nodal i
j	ponto nodal j
k	ponto nodal k
M	indica que é usado o método matricial para ser calculado
N	indica o valor já calculado ou ponto nodal a uma pequena distância $\ell$ do contorno
N+1	indica o valor que está sendo calculado

S	referente à superfície
x	calculado ao longo do eixo X
$\phi$	assume ser $\psi$ , $\theta$ ou $\omega$



# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1. MOTIVAÇÃO DO TRABALHO

O estudo da transferência de calor por convecção no interior de dutos e cavidades tem despertado muito interesse na comunidade científica, devido às diversas aplicações da engenharia nessa área, especialmente relacionadas ao resfriamento de componentes eletrônicos, os quais precisam ser mantidos em temperatura dentro de limites admissíveis para garantia de seu perfeito funcionamento. Por conta da constante miniaturização dos componentes eletrônicos, os mesmos operam atualmente com maiores taxas de transferência de calor. Na literatura são descritos vários estudos que foram realizados experimentalmente ou através de simulações numéricas, visando compreender a dinâmica do escoamento do fluido e da transferência de calor, podendo assim desenvolver técnicas de resfriamento para melhor remoção do calor gerado pelos componentes em operação.

Cabe ressaltar que o estudo da transferência de calor não tem sua importância limitada somente ao segmento industrial eletrônico. Outras aplicações como indústria alimentícia, trocadores de calor, resfriamento de reatores nucleares, equipamentos de processos químicos, sistemas de aquecimento, sistemas de controle ambiental e outros, buscam no entendimento do fenômeno de transferência de calor, melhorar o desempenho de seus processos.

Na presente análise, a taxa de transferência de calor que ocorre entre o sólido e o fluido depende de parâmetros térmicos e geométricos. Os parâmetros termofluidodinâmicos envolvidos no estudo são: o número de Reynolds, o número de Grashof, a relação de difusividades entre o sólido e o fluido, o número de Prandtl e a geração de energia interna nos três corpos existentes na parede inferior do duto sendo que, destes parâmetros, somente o número de Prandtl foi considerado constante neste estudo. Os parâmetros geométricos que serão variados são: a altura dos corpos e o ângulo de inclinação do duto.

## 1.2. CASO ESTUDADO NO PRESENTE TRABALHO

O presente trabalho estuda o problema conjugado da transferência de calor por convecção mista que ocorre no domínio fluido,  $\Omega_f$ , e a condução de calor com geração interna de energia que ocorre no domínio sólido,  $\Omega_s$ , mostrados na Figura 1.1. Esta situação está presente em aplicações envolvendo montagem de componentes eletrônicos que possuem geração interna de energia e que devem ser resfriados para o perfeito funcionamento.

A Figura 1.1 ilustra a geometria analisada, representando um duto de comprimento  $L$  e altura  $H$ . O fluido considerado foi o ar que entra na superfície  $S_1$ , com uma velocidade constante e uniforme  $u_0$ , pressão  $p_0$  e temperatura baixa uniforme  $T_c$ . As superfícies  $S_2$  e  $S_3$  são adiabáticas sendo que, sobre a superfície  $S_2$  são fixados três corpos de comprimento  $b$  e altura  $h_c$ , onde ocorre geração homogênea de energia térmica. A superfície  $S_4$  representa a superfície de saída do fluido. A superfície  $S_5$  é uma superfície de interface entre o domínio sólido e o domínio fluido. Para as situações analisadas, a altura dos corpos  $h_c$  varia em três valores distintos, bem como o ângulo de inclinação do duto  $\alpha$  que tem valores  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  ou  $90^\circ$ .

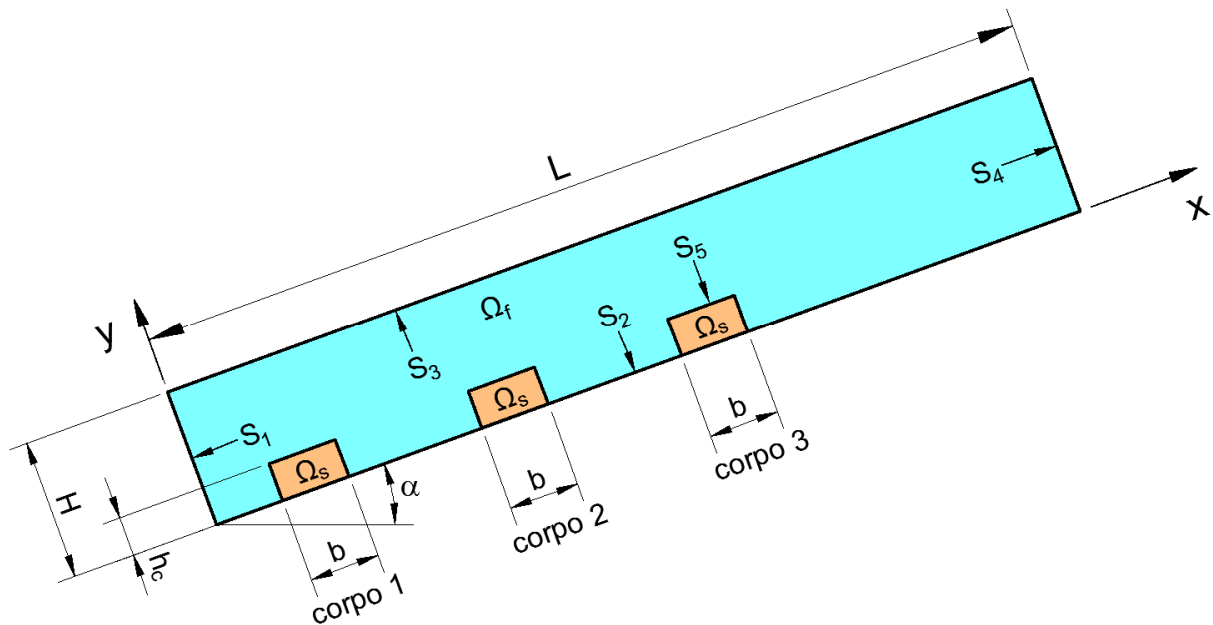


Figura 1.1 – Geometria e condições de contorno.

Os casos de interesse neste trabalho envolvem a convecção mista do fluido em regime transiente e permanente no interior do duto. Como resultado das simulações, são determinadas as distribuições de temperaturas no fluido e no sólido, bem como as velocidades do fluido e

são calculadas as taxas de calor transferidas entre o sólido e o fluido. As temperaturas médias e máximas são também determinadas nos corpos sólidos.

### 1.3. REVISÃO DA LITERATURA

A revisão da literatura mostrou uma grande quantidade de referências voltada para o estudo de convecção natural, forçada e mista destinada a aplicações envolvendo resfriamento de componentes eletrônicos, utilizando métodos numéricos para a aproximação da solução das equações diferenciais. O desenvolvimento tecnológico computacional contribuiu para que tais métodos se tornassem uma ferramenta muito útil em diversas áreas da engenharia, propiciando simulações numéricas com maior grau de precisão e com menor custo computacional devido ao aumento nas velocidades de processamento.

Tay e Davis (1971) utilizaram o método de elementos finitos no estudo da transferência de calor entre planos paralelos infinitos. A base teórica para utilização do método de elementos finitos para solução das equações diferenciais parciais e o procedimento numérico foram descritos de forma detalhada. O problema estudado consiste na determinação da distribuição de temperaturas e da variação axial do número de Nusselt médio para um fluido de propriedades físicas constantes, escoando entre dois planos paralelos infinitos, com temperaturas superficiais ou fluxo de calor especificados, considerando o fluxo hidrodinamicamente desenvolvido. O estudo verifica a validade do método de elementos finitos e apresenta as vantagens e limitações para o uso do mesmo.

Ramadhani *et al.* (1985) analisaram o problema conjugado de transferência de calor por convecção forçada/condução de uma pequena fonte isotérmica de comprimento  $L_h$ , montada em um substrato na parede inferior de um canal submetido a um escoamento laminar, permanente e bidimensional. Dois casos foram considerados, sendo um com uma fonte de calor e outro com duas fontes de calor. O método numérico utilizado foi o das diferenças finitas. O calor é transferido da fonte isotérmica a temperatura  $T_h$  para o fluido e para a parede do substrato que possuem condutividade térmica  $k_f$  e  $k_s$ , respectivamente. A espessura do substrato é muito maior que a espessura da fonte  $e$ , tanto o substrato como a parede superior são isolados. As análises levaram em consideração os efeitos do escoamento, geometria do canal e propriedades do fluido e substrato. Os resultados mostraram que para

altos valores de razão de condutividades ( $k_s/k_f$ ) e para baixos valores de número de Péclet, ocorre uma maior contribuição da condução no total de calor transferido da fonte. Se duas fontes são montadas lado a lado, considerando o sentido do escoamento a primeira fonte praticamente não é afetada pela presença da segunda fonte. Já a segunda fonte é fortemente influenciada pela primeira fonte e isso pode ser percebido pelo resultado do número de Nusselt que é muito reduzido na superfície da segunda fonte, por conta do aquecimento do fluido ocorrido pela primeira fonte.

Sugavanam *et al.* (1995) realizaram uma análise numérica bidimensional de um problema conjugado de convecção forçada e condução de calor envolvido no resfriamento de placas de circuito impresso. A solução numérica das equações foi realizada através do método de volumes finitos com esquema SIMPLER descrito por Patankar (1980). Fontes de calor são posicionadas na superfície de um substrato condutor que possui as superfícies superior e inferior resfriadas por convecção forçada de ar, com escoamento laminar, regime permanente e com propriedades constantes. O substrato situa-se na altura média do canal horizontal, dividindo o mesmo em duas partes de igual altura  $H$  por onde escoar o fluido (parte superior e parte inferior em relação ao substrato). A fonte geradora tem comprimento  $L_s$  e o substrato condutivo tem espessura  $t$  e condutividade térmica  $k_s$ . As paredes do canal são adiabáticas e o fluxo de ar é admitido na entrada do canal com perfil de velocidade uniforme e propriedades constantes. Os autores analisaram situações com substrato contendo uma ou duas fontes e os parâmetros com valores variados nas análises são: razão de condutividade entre sólido e fluido ( $0,1 \leq k_s/k_f \leq 100$ ), número de Reynolds ( $100 \leq Re \leq 1000$ ) e variações na espessura  $t$  da parede do substrato ( $2,5 \text{ mm} \leq t \leq 7,5 \text{ mm}$ ). Os resultados mostram que o calor transferido por condução no substrato aumenta para altos valores de razão de difusividades  $k_s/k_f$  e, portanto, diminuem o número de Nusselt na fonte geradora. Os efeitos da variação da espessura do substrato são significativos somente para altos valores de razão de condutividades ( $k_s/k_f > 10$ ).

Young e Vafai (1998) apresentaram um estudo de convecção forçada em duto horizontal bidimensional contendo múltiplos obstáculos aquecidos distribuídos de forma linear na parede inferior do duto. Três formas de número de Nusselt são apresentadas no estudo: distribuição local ao longo das faces expostas dos obstáculos, valores médios para as faces individualmente e valor médio geral para os obstáculos. O estudo detalha os efeitos das variações nas alturas, larguras e espaçamento entre os obstáculos, bem como o efeito da quantidade dos mesmos, levando também em consideração a condutividade térmica dos

obstáculos ( $k$ ), vazão do fluido e método de aquecimento dos obstáculos (fluxo de calor na base dos mesmos e taxa de geração volumétrica uniforme de energia). O método numérico utilizado é o de elementos finitos com a formulação de Galerkin. O fluido é considerado na temperatura ambiente e totalmente desenvolvido na entrada do canal e os gradientes de velocidades na saída são nulos. As paredes do canal são isoladas, exceto na localização dos obstáculos. O número de Reynolds foi variado ( $200 \leq Re \leq 2000$ ) de modo a manter o escoamento laminar. Houve também variação na razão de condutividade térmica entre sólido e fluido ( $10 \leq k_s/k_f \leq 1000$ ). Os resultados mostraram que obstáculos menores, mais espaçados resultam em transferência de energia térmica mais eficiente para o fluido, reduzindo suas temperaturas. O método de aquecimento (fluxo de calor na base dos obstáculos ou taxa de geração volumétrica) apresentam somente pequena variação no número de Nusselt.

Deng *et al.* (2002) investigaram a convecção natural induzida por múltiplas fontes discretas de calor em cavidade horizontal retangular. O estudo numérico é bidimensional e utilizou o método dos volumes finitos. De acordo com a configuração física do modelo, a interação entre as fontes discretas de calor na presente análise foi dividida em quatro casos a saber: (1) duas fontes com fluxo de calor constante na parede horizontal inferior; (2) uma fonte isotérmica na parede inferior juntamente com duas fontes volumétricas de calor; (3) uma fonte com fluxo de calor constante juntamente com duas fontes de geração volumétrica e (4) duas fontes de geração volumétrica com superfície horizontal adiabática. A definição do padrão de temperatura característico,  $\Delta T$ , levou em consideração a quantidade e o tipo de fontes de calor de cada caso. O estudo analisou em cada caso, os efeitos do número de Rayleigh, da capacidade térmica e da distância de separação das fontes discretas de calor, nas formas de interação entre as mesmas.

Manca *et al.* (2003) estudaram numericamente a transferência de calor por convecção mista que ocorre em um duto horizontal bidimensional contendo uma cavidade aberta em sua superfície inferior. Foi utilizado o método de elementos finitos baseado na técnica de Galerkin. O fluido (ar) entra no duto a temperatura ambiente e escoar através do mesmo em regime laminar. Uma das paredes da cavidade aberta é aquecida por fluxo de calor uniforme e todas as demais paredes, tanto da cavidade como também do duto são isoladas. É apresentado o efeito do posicionamento da parede aquecida nas três posições possíveis na cavidade: vertical esquerda, horizontal e vertical direita. O duto possui mesma altura de entrada e saída do fluido ( $H$ ) e a cavidade possui profundidade  $D$  e comprimento  $L$ . Os resultados são

apresentados em termos de linhas de corrente, distribuição de temperatura, temperatura da parede e perfis de velocidades em função da variação do número de Richardson ( $0,01 \leq Ri \leq 100$ ), número de Reynolds ( $100 \leq Re \leq 1000$ ) e razão entre a altura do duto e profundidade da cavidade ( $0,1 \leq H/D \leq 1,5$ ). O valor da temperatura máxima diminui com o aumento do número de Reynolds e de Richardson. O efeito da razão de alturas  $H/D$  influencia de forma significativa os padrões das linhas de corrente e distribuição de temperaturas.

Kurokawa *et al.* (2005) apresentaram um estudo numérico para o problema de convecção natural conjugada numa cavidade quadrada contendo três fontes de calor protuberantes, igualmente espaçadas, montadas na parede vertical esquerda da cavidade. A parede vertical direita foi mantida resfriada com temperatura constante e as paredes horizontais da cavidade foram mantidas isoladas termicamente. O estudo numérico utilizou o método de elementos finitos de Galerkin e malha não estruturada. O resfriamento da fonte de calor foi garantido somente pela convecção natural, caracterizando um mecanismo de transferência de calor isento das falhas, diferentemente do que ocorre em sistemas resfriados por convecção forçada. Os efeitos das condutividades do sólido e do fluido nos perfis de velocidade e temperatura foram analisados. A melhor disposição do conjunto de fontes foi obtida quando a fonte de calor de maior potência estava localizada na posição superior. Foi verificado que a razão entre as condutividades térmicas da fonte e do fluido não afetaram o desempenho do sistema.

Premachandran e Balaji (2006) investigaram numericamente o problema conjugado de convecção com radiação em canais horizontais com fontes protuberantes. O método numérico utilizado é o de volumes finitos. O escoamento do fluido (ar) é permanente, laminar, incompressível e hidrodinamicamente e termicamente desenvolvido. Os parâmetros geométricos como espaçamento das paredes do duto, espessura do substrato, tamanho das fontes e espaçamento entre as mesmas são fixados. Os resultados são apresentados em função da variação somente dos parâmetros térmicos envolvidos no problema e mostram que a temperatura adimensional e o efeito da radiação diminuem com o aumento do número de Reynolds. Referente ao aumento do número de Grashof, pode-se verificar que ocorre uma diminuição na temperatura adimensional de forma praticamente linear. São apresentados também resultados considerando as razões de condutividades térmicas entre substrato, fontes e fluido ( $k_s$ ,  $k_p$  e  $k_f$ , respectivamente) e considerando também as emissividades das fontes e do substrato ( $\varepsilon_p$  e  $\varepsilon_s$ , respectivamente).

Islan *et al.* (2006) realizaram um estudo da transferência de calor por convecção mista em uma cavidade quadrada contendo uma fonte de calor não protuberante na parede inferior, posicionada à esquerda da mesma, junto à parede vertical. O fluido frio (ar) entra por abertura inferior localizada na parede direita e sai aquecido por abertura superior localizada também na parede direita. O método numérico utilizado é o de elementos finitos com a formulação de Galerkin, considerando escoamento laminar, permanente e bidimensional. O estudo apresenta os resultados com ênfase para a influência do número de Grashof ( $10^3 \leq Gr \leq 10^6$ ) e do tamanho da fonte ( $0,125 \leq \varepsilon \leq 0,5$ ), sendo o número de Reynolds e Prandtl fixados ( $Re=100$  e  $Pr=0,71$ , respectivamente). Os resultados mostraram que a taxa de transferência de calor aumenta com a diminuição do tamanho da fonte e aumento do número de Grashof. A temperatura adimensional máxima diminui com o aumento do tamanho da fonte e com o aumento do número de Grashof.

Ghasemi e Aminossadati (2008) realizaram um estudo numérico referente à eficiência no processo de resfriamento de componentes eletrônicos com ênfase nos efeitos do posicionamento e quantidades dos mesmos, utilizando o método de volumes de controle com algoritmo SIMPLE. Os componentes são considerados fontes condutoras e geradoras de energia interna e são posicionados no interior de uma cavidade retangular. A análise considerou a transferência de calor por convecção mista, escoamento laminar e não permanente e com variação no número de Rayleigh ( $0 \leq Ra \leq 10^7$ ). As fontes de calor na cavidade promoveram o fluxo de calor da convecção natural enquanto que correntes de ar forçadas através da cavidade promoveram a convecção forçada. Os resultados mostraram que aumentando o número de Rayleigh significativamente, melhora o processo de transferência de calor no interior da cavidade. Para valores baixos de Rayleigh e com o aumento da quantidade de fontes de calor no interior da cavidade, a taxa de calor é reduzida e conseqüentemente ocorre o aumento da temperatura máxima global. O estudo concluiu também que o arranjo e número de fontes no interior da cavidade têm contribuição considerável na eficiência do resfriamento. Entretanto, com o aumento do número de Rayleigh esta contribuição é reduzida.

Aminossadati e Ghasemi (2009) investigaram a transferência de calor por convecção mista em um duto horizontal bidimensional com uma cavidade aberta em sua superfície inferior. O método numérico utilizado é o das diferenças finitas. Tanto o duto como a cavidade possuem as paredes isoladas. Uma fonte de calor é posicionada em uma das paredes da cavidade e três situações são consideradas nos estudos, referentes ao posicionamento da

fonte nas paredes da cavidade (parede esquerda, direita e inferior). A altura da entrada e saída do fluido ( $H$ ) é igual à profundidade da cavidade existente na superfície inferior e o comprimento da fonte de calor é definido em função desta altura em dois valores distintos para as situações estudadas,  $H/2$  e  $H/20$ , respectivamente. As análises são realizadas em função da variação do número de Richardson ( $0,01 \leq Ri \leq 100$ ) e da razão de aspecto da geometria da cavidade. O fluido (ar) é introduzido no canal a velocidade constante e temperatura  $T_c$ . É assumido escoamento em regime laminar e incompressível com número de Prandtl definido como  $Pr = 0,71$  e Grashof constante  $Gr = 10^4$ . Os resultados mostram que existe considerável diferença entre as três situações. Para baixos valores de Richardson as variações na razão de aspecto e a localização da fonte tiveram pouca influência no comportamento do escoamento do fluido. Já para valores mais elevados de Richardson observa-se que a transferência de calor é intensificada devido ao empuxo induzido do fluido e o mesmo possui comportamento diferente em função da localização da fonte de calor.

Rahman *et al.* (2009) estudaram numericamente o problema conjugado de transferência de calor em uma cavidade quadrada contendo um corpo sólido de formato quadrado posicionado no centro da mesma. O corpo possui condutividade térmica  $k_s$  e o fluido possui condutividade térmica  $k$ . A superfície direita da cavidade é isotérmica mantida aquecida a temperatura  $T_h$  e as demais superfícies são adiabáticas. O fluido entra na cavidade através de abertura na parede vertical esquerda e sai através de abertura na parede vertical direita. O estudo enfatiza a influência do número de Reynolds, número de Prandtl e o posicionamento das aberturas de entrada e saída do fluido nas paredes esquerda e direita, respectivamente. Os resultados são apresentados em termos de linhas de corrente, linhas isotermas, número de Nusselt médio da superfície vertical aquecida, temperatura média do fluido e temperatura no centro do corpo quadrado. Foi utilizado o método de elementos finitos com a formulação de Galerkin. Foi desenvolvido um estudo de malhas para a escolha da malha independente usada para a continuidade das simulações numéricas. Os resultados indicaram que o número de Reynolds tem efeito significativo no campo do escoamento nas regiões de convecção forçada pura e convecção mista. Já o número de Prandtl tem efeito significativo nas regiões de convecção mista e convecção natural. A localização das aberturas de entrada e saída do fluido tem efeito significativo nos campos do escoamento e térmicos.

Hamouche e Bessaih (2009) realizaram um estudo numérico da transferência de calor por convecção mista de duas fontes idênticas protuberantes simulando componentes eletrônicos, localizadas na parede inferior de um duto horizontal bidimensional. O objetivo do



estudo foi determinar os efeitos do número de Reynolds, altura e largura das fontes, bem como a distância entre as mesmas, nas características do escoamento do fluido (ar) e da transferência de calor. Foi utilizado o método de volumes finitos e algoritmo SIMPLER para solução das equações de conservação da massa, quantidade de movimento e energia. Os resultados mostram que a taxa de transferência de calor aumenta notavelmente com o aumento do número de Reynolds e com o aumento na distância entre as fontes. O aumento na altura e largura das fontes causam aumento considerável na taxa de remoção do calor.

Jaikrishna *et al.* (2010) investigaram numericamente a convecção natural em uma cavidade quadrada de lado  $L$ , com paredes superior e inferior adiabáticas, parede vertical esquerda aquecida e parede direita resfriada a temperatura constante. Na parede vertical esquerda foram posicionadas fontes discretas de calor em quatro situações possíveis, combinando a quantidade de fontes (1 ou 2), o posicionamento e o tamanho das mesmas ( $L/2$  ou  $L/4$ ). Para a parede direita, foram consideradas duas situações possíveis, sendo uma totalmente fechada e outra com abertura de  $L/4$  na parte superior. O método numérico utilizado foi o de volume de controle e os parâmetros considerados foram número de Rayleigh ( $10^3 \leq Ra \leq 10^7$ ) e número de Grashof ( $10^3 \leq Gr \leq 10^6$ ). Os resultados mostram que a transferência de calor por condução é dominante na faixa de número de Rayleigh  $\leq 10^4$  para todos os casos, independentemente da abertura no topo da parede fria. Já para valores maiores de número de Rayleigh, a transferência de calor por convecção é dominante e a abertura na parede fria tem efeito significativo no número de Nusselt médio. Para todos os casos analisados, a transferência de calor máxima ocorre para condições de contorno com a fonte localizada de forma centralizada na parede aquecida.

Alves e Altemani (2010) desenvolveram um estudo sobre a transferência de calor conjugada em um duto horizontal contendo um bloco aquecido, posicionado centralizado em substrato existente na parede inferior do duto. O escoamento do fluido é bidimensional e laminar e o substrato que contém o bloco é condutor. O resfriamento do bloco ocorre por convecção forçada com o fluxo de ar e por condução através do contato com o substrato condutor, caracterizando problema conjugado de transferência de calor. A geometria do duto é fixada, com altura  $H$  e comprimento  $20 H$  e a altura do bloco é variável. A entrada do escoamento no duto ocorre com velocidade e temperatura uniforme. O substrato possui espessura constante igual a  $0,1 H$  e o estudo foi desenvolvido com razões de condutividades entre substrato e ar ( $k_s/k$ ) variadas na faixa de 0 a 80 enquanto que a razão de condutividades entre o bloco e o ar é fixada ( $k_b/k=500$ ). Todas as demais paredes do duto são adiabáticas. O

aquecimento do bloco ocorre através de geração de calor volumétrica uniforme. As equações de conservação foram resolvidas numericamente com o método de volumes de controle com algoritmo SIMPLE. Os resultados são apresentados na forma adimensional considerando três condições distintas: escoamento com vazão em massa constante, pressão constante e potência de bombeamento constante. Os resultados mostram que a pressão no escoamento e a potência de bombeamento sempre aumentam com o aumento da altura do bloco aquecido e com o aumento da vazão em massa no duto. Por outro lado, a temperatura média na superfície do bloco aquecido diminui com o aumento da vazão em massa no escoamento ou da condutividade térmica do substrato. Quando a vazão em massa é fixada, a temperatura média da superfície do bloco diminui com o aumento da altura do bloco. Para altos valores de razão de condutividade entre o substrato e o ar ( $k_s/k=80$ ), os resultados mostram que cerca de 50% da taxa de dissipação de energia do bloco é transferida por condução para o substrato antes de ser transferida para o ar, evidenciando assim, a importância da utilização do substrato com boa capacidade de condução.

Boutina e Bessaih (2011) apresentaram um estudo numérico da convecção mista que ocorre no resfriamento de duas fontes de calor idênticas, simulando componentes eletrônicos, montadas em um duto inclinado. Foi utilizado o método de volumes finitos com algoritmo SIMPLER para solução das equações de conservação da massa, quantidade de movimento e energia. As influências do número de Reynolds ( $1 \leq Re \leq 200$ ), da inclinação do duto ( $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ ), das dimensões altura e largura das fontes, do espaço entre elas, são verificadas no campo do escoamento do fluido e na distribuição de temperaturas, no número de Nusselt local e médio. O duto possui largura  $H$  e comprimento  $L$  e a posição vertical do mesmo é definida como ângulo  $\theta=0$ . O ângulo  $\theta$  aumenta rotacionando o duto no sentido anti-horário e diminui no sentido horário. Usando a posição vertical como referência, as fontes situam-se na parede esquerda sendo que, a primeira situa-se à distância  $L_1$  da entrada do duto e a segunda à distância  $L_2$  da saída do duto. O fluido ar entra no duto com velocidade inicial  $v_0$  imposta e temperatura  $T_0$  uniforme. O escoamento ocorre no regime laminar e o número de Prandtl foi fixado  $Pr=0,71$ . Os resultados mostram que o número de Nusselt aumenta com o aumento do número de Reynolds. O ângulo  $\theta=45^\circ$  apresentou o melhor resultado na transferência de calor. A temperatura adimensional das fontes diminui e o número de Nusselt médio aumenta com o aumento do espaço entre as fontes.

Alves e Altemani (2011) realizaram, através do método de volumes finitos, uma análise numérica bidimensional de um problema conjugado de convecção forçada e condução de calor envolvido no resfriamento de placas de circuito impresso. Uma pequena placa geradora de calor de comprimento  $L_h$  é montada em um substrato condutivo de espessura  $t$  e condutividade térmica  $k_s$ , localizado na superfície inferior de um canal horizontal de comprimento  $L$  e altura  $H$ . Todas as paredes do canal são adiabáticas. Um escoamento laminar de ar com propriedades constantes e velocidade uniforme é admitido na entrada do canal. Os resultados são obtidos para variações no número de Reynolds ( $600 \leq Re \leq 1900$ ), variações na razão de condutividade térmica entre o substrato sólido e o ar  $k_s/k$  ( $10 \leq k_s/k \leq 80$ ) e variações na espessura da parede  $t$  ( $1 \text{ mm} \leq t \leq 5 \text{ mm}$ ) e indicam que a fração de transferência de calor do componente por conta da parede condutiva do substrato prevalece sobre a fração de transferência de calor representada por um aumento na temperatura média das superfícies adiabáticas. Os efeitos da convecção natural foram negligenciados para esta análise.

Guimarães e Menon (2011) estudaram o efeito da convecção mista em um canal simples contendo fontes de calor, com escoamento do fluido (ar) em regime não permanente, bidimensional e laminar. Inicialmente no domínio do fluido a temperatura e a velocidade têm valores zero. Como condições de contorno têm-se a superfície inferior isolada e a superfície superior resfriada e mantida na temperatura  $T_c$ . As condições de entrada do fluido são velocidade  $U_0$  e temperatura  $T_0$  constantes. O estudo é desenvolvido pelo método de elementos finitos Petrov-Galerkin com elementos quadrilaterais. O duto possui altura  $H$ , comprimento  $L$  e ângulo de inclinação  $\gamma$ . São consideradas três situações distintas, sendo a primeira com somente uma fonte de calor não protuberante com fluxo constante  $q'$  e comprimento  $B$ , situada na superfície inferior do canal. A transferência de calor é avaliada de acordo com a variação do número de Reynolds ( $1 \leq Re \leq 500$ ), Grashof ( $10^3 \leq Gr \leq 10^5$ ) e da inclinação ( $0^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$ ). Os parâmetros geométricos são fixados como  $B = H$  e  $L = 15 H$ . Para esta situação, foi observado que a inclinação do canal tem efeito significativo na distribuição de temperaturas e de velocidades para baixos valores de Reynolds e altos valores de Grashof. A segunda situação considera duas fontes de calor com fluxo constante  $q'_1$  e  $q'_2$  de comprimento  $B$ , também posicionadas na superfície inferior com distância  $d$  entre elas. Para esta situação, o canal é mantido na posição horizontal ( $\gamma = 0^\circ$ ). A transferência de calor é avaliada de acordo com a variação do número de Reynolds ( $1 \leq Re \leq 1000$ ), Grashof ( $10^3$ ,  $10^4$  e  $10^5$ ) e da variação da distância  $d$ . Para baixos valores de Reynolds e menores distâncias entre as fontes, as forças de empuxo geram recirculações do fluido que interferem uma na outra.

Para valores de Reynolds mais elevados, a transferência de calor através da fonte 2 é intensificada pelo calor dissipado da fonte 1. Uma conclusão importante deste estudo é que para esta situação, a distância mais afastada entre as fontes apresentou o melhor resultado em termos de dissipação de calor. Para a terceira situação, o canal é inclinado e agora com três fontes de calor com fluxo constante  $q'_1$ ,  $q'_2$  e  $q'_3$  de comprimento  $B$ , posicionadas na superfície inferior do canal. O estudo avalia os efeitos no número de Nusselt, de acordo com variações nos parâmetros ângulo de inclinação ( $\gamma = 0^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $90^\circ$ ), Reynolds ( $1 \leq Re \leq 10^3$ ) e Grashof ( $10^3$ ,  $10^4$  e  $10^5$ ). Os resultados mostram que o ângulo de inclinação tem forte influência no escoamento do fluido e na transferência de calor para baixos valores de Reynolds.

Kuznetsov e Sheremet (2011) realizaram um estudo numérico bidimensional envolvendo problema conjugado de convecção natural em uma cavidade retangular contendo uma fonte de calor com taxa de transferência constante, localizada na parede vertical interna esquerda da cavidade. Esta parede tem condições de troca de calor por convecção e radiação. Todas as paredes da cavidade são consideradas condutoras. O método numérico utilizado é o das diferenças finitas. O núcleo da fonte de calor é mantido a uma taxa de geração volumétrica constante. O processo de transferência de calor é governado pelo sistema de convecção natural e regime não permanente no gás e processo de transferência de calor por condução nas paredes sólidas por conta da presença de uma taxa de geração volumétrica no núcleo. Os resultados são apresentados em relação aos parâmetros governantes relevantes que são número de Grashof ( $10^6 \leq Gr \leq 10^8$ ), Prandtl ( $Pr=0,7$ ) e a razão de condutividades.

## 1.4. OBJETIVOS DO PRESENTE TRABALHO

O presente trabalho tem como objetivo o estudo numérico da convecção mista no interior de um duto com condução de calor e geração de energia interna em três corpos. A solução numérica utiliza o método de elementos finitos com elementos triangulares e malha não estruturada. O escoamento foi considerado laminar e bidimensional em regime transiente e permanente. O estudo fornece como resultados as distribuições da função corrente adimensional,  $\psi$ , temperatura adimensional,  $\theta$ , e vorticidade adimensional,  $\omega$  em todo o domínio. São apresentadas as distribuições da função corrente no fluido e as distribuições de temperaturas no corpo sólido e no fluido. São calculados os números de Nusselt local e médio

em função dos diversos parâmetros térmicos e geométricos, permitindo assim calcular o fluxo de transferência de calor nas superfícies de interface entre sólido e fluido. Adicionalmente são obtidas as temperaturas máximas e médias nos sólidos.

## 1.5. CONTRIBUIÇÕES DO PRESENTE TRABALHO

São contribuições deste trabalho:

É apresentado o desenvolvimento sistemático das equações de conservação para o fluido e para os corpos sólidos considerados fontes condutoras e geradoras de energia, existentes no interior do duto. No final, são obtidas equações válidas para todo o domínio,  $\Omega$ , de interesse.

O desenvolvimento das equações para aplicação do método de elementos finitos em regiões de forma complexa, utilizando malha não estruturada, é apresentado de modo completo. A metodologia desenvolvida permite estudar problemas sujeitos a vários tipos de condições de contorno impostas, em geometrias com formas diversas.

Foi desenvolvido um programa computacional na linguagem FORTRAN para realização das simulações numéricas do presente estudo.

A escolha das malhas utilizadas no presente trabalho é resultado de criteriosa avaliação da influência do grau de refinamento das mesmas nos resultados das simulações numéricas, com o objetivo de que as malhas escolhidas apresentem resultados precisos e com tempo de processamento razoável. O parâmetro comparativo é o valor, para o regime permanente, do número de Nusselt médio,  $Nu_c$ , nas superfícies dos corpos condutores e geradores de energia interna, em função do número de elementos,  $NE$ , das malhas consideradas no estudo realizado. O incremento de tempo,  $\Delta\tau$ , é testado com valores distintos nas simulações e os resultados são comparados. A definição do valor adotado para o estudo ocorre por meio de comparação do comportamento temporal do número de Nusselt médio,  $Nu_c$ , na superfície do corpo. Procedimento semelhante para determinação do incremento de tempo,  $\Delta\tau$ , foi adotada por Ghasemi (2005).

A transferência de calor ocorre tanto no fluido quanto no sólido (a esse processo se denomina transferência de calor conjugada), na forma de convecção mista no domínio fluido e condução de calor no domínio sólido. Através deste trabalho, é possível visualizar as distribuições da temperatura adimensional no fluido e no sólido, o comportamento do escoamento do fluido no interior do duto, bem como as temperaturas médias e máximas nos corpos sólidos, tanto para o regime permanente como também para o transiente, através da avaliação do padrão e desenvolvimento temporal do escoamento. Também, torna-se possível o cálculo da taxa de transferência de calor numa superfície escolhida.

## **1.6. DELINEAMENTO DO PRESENTE TRABALHO**

A seguir, são apresentados os conteúdos dos capítulos, de uma forma geral.

No Capítulo 2 é apresentado o modelo matemático utilizado no presente trabalho. Inicialmente são apresentadas as hipóteses consideradas no desenvolvimento das equações e, na sequência, são apresentadas as equações de conservação na forma dimensional para os domínios do fluido e do sólido, as condições iniciais e as condições de contorno.

Posteriormente, as equações de conservação na forma dimensional são adimensionalizadas e escritas em termos da temperatura adimensional,  $\theta$ , função corrente,  $\psi$ , vorticidade,  $\omega$ , dos números de Grashof,  $Gr$ , de Prandtl,  $Pr$ , de Reynolds,  $Re$ , da geração interna de energia,  $S$ , e da razão de difusividades,  $D$ . Esta adimensionalização tem por objetivo reduzir o número de parâmetros envolvidos nos cálculos e generalizar a solução numérica do problema. No final do capítulo são apresentadas as expressões para o cálculo do número de Nusselt local e médio.

O modelo numérico utilizado é apresentado no Capítulo 3. O método de elementos finitos com malha não estruturada é utilizado para a solução aproximada das equações de conservação. Utilizou-se o elemento triangular de três nós, com variação linear das grandezas dentro de cada elemento. As equações matriciais lineares obtidas pelo método numérico para a função corrente adimensional,  $\psi$ , temperatura adimensional,  $\theta$ , e vorticidade adimensional,  $\omega$ , são desenvolvidas numa forma matricial geral para o elemento. Finalmente, é descrito o programa computacional desenvolvido e utilizado para resolver o sistema de equações globais

acopladas em termos da função corrente adimensional,  $\psi$ , temperatura adimensional,  $\theta$ , e vorticidade adimensional,  $\omega$ , seguindo-se os cálculos do número de Nusselt local e médio e da temperatura média e máxima das fontes condutoras e geradoras de energia.

No Capítulo 4 é apresentada a validação do programa computacional. Os resultados obtidos com o programa desenvolvido são comparados com resultados encontrados na literatura. Na primeira validação são comparados os resultados obtidos para convecção natural numa cavidade quadrada. Para a segunda validação foi considerado o escoamento num canal com degrau na entrada e para a terceira validação foi considerada a convecção mista num canal com aquecimento na parede inferior.

Um detalhado estudo de malhas e o estudo do incremento de tempo adimensional são apresentados no capítulo 5, visando encontrar uma malha independente e tempo adimensional adequado para a realização das simulações. As malhas foram geradas pelo software aberto *Easymesh*. Os resultados das simulações realizadas para o caso proposto neste trabalho são também apresentados no Capítulo 5. Nestas simulações são avaliados os efeitos das variações nos parâmetros térmicos envolvidos no problema e também os efeitos nas alterações geométricas do duto, representadas pelas diferentes alturas das fontes,  $H_c$ , e ângulo de inclinação do duto,  $\alpha$ , conforme descrito no Capítulo 1.

No Capítulo 6 são apresentadas as principais conclusões e recomendações para possíveis trabalhos futuros, visando estender os estudos realizados neste trabalho.

O trabalho apresenta quatro apêndices. No Apêndice A são apresentados os fundamentos do método de elementos finitos. São apresentadas as equações das funções de forma para o elemento, bem como as equações para cálculo dos gradientes nas direções  $x$  e  $y$ .

No Apêndice B faz-se o desenvolvimento da equação diferencial bidimensional em regime não permanente, aplicando o método de Galerkin, com o objetivo de obter a equação matricial do elemento e global, do tipo  $A X = B$ .

As equações para o cálculo dos números de Nusselt local e médio são apresentadas no Apêndice C.

No Apêndice D é apresentado o método matricial para cálculo da vorticidade no contorno.

Por último, são apresentadas as referências bibliográficas consultadas para o desenvolvimento do presente trabalho.

## **1.7. EQUIPAMENTO E COMPILADOR UTILIZADO**

Os cálculos apresentados neste trabalho foram realizados num microcomputador computador ACER ASPIRE V3-571-9423, com processador Intel® Core™ i7-3632QM 2.2 GHz com Turbo Boost para 3.2 GHz, usando o compilador Compaq Visual Fortran 6.5a.

Foi utilizado o software Tecplot para geração dos resultados gráficos do pós-processamento.



## 2. MODELO MATEMÁTICO

### 2.1. ANÁLISE TEÓRICA DO PROBLEMA CONJUGADO

Este trabalho estuda o problema conjugado da transferência de calor por convecção mista que ocorre no domínio fluido,  $\Omega_f$ , e da condução de calor com geração interna de energia que ocorre no domínio sólido,  $\Omega_s$ , mostrado na Figura 2.1. As equações de conservação governantes do problema serão analisadas separadamente para o domínio fluido e para o domínio sólido. A seguir são apresentadas as equações para os domínios fluido e sólido.

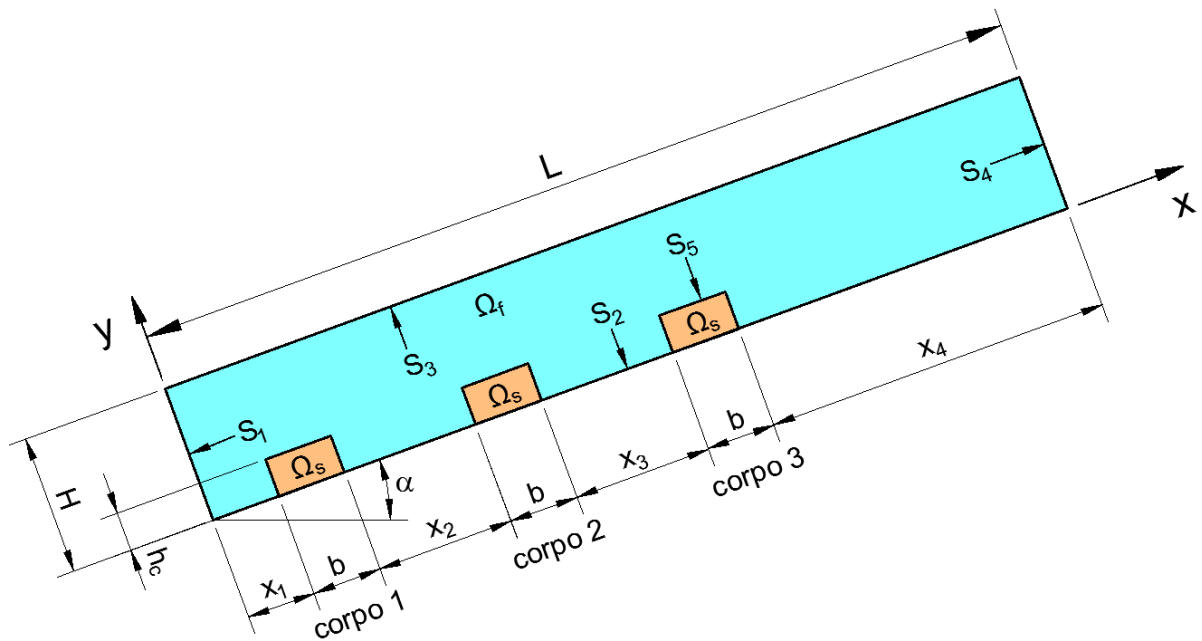


Figura 2.1 – Domínio computacional e condições de contorno dimensionais.

#### 2.1.1. Equações de Conservação na Forma Dimensional para o Fluido

As equações de conservação para o estudo de convecção mista no domínio fluido têm as seguintes hipóteses:

- a) O regime é transiente;
- b) O escoamento é bidimensional e laminar;
- c) O escoamento é incompressível;
- d) A função dissipação viscosa é desprezada;
- e) As propriedades físicas do fluido ( $\rho_f, \mu_f, \nu_f, c_{pf}, \alpha_f, k_f$ ) são constantes, exceto a massa específica,  $\rho_f$ , nos termos de empuxo, devido à aproximação de Boussinesq;
- f) Não existe geração de energia interna no fluido.

As propriedades físicas citadas anteriormente tem o sub índice f, os quais se referem ao fluido e são:  $\rho_f$  a massa específica,  $\mu_f$  a viscosidade dinâmica,  $\nu_f$  a viscosidade cinemática,  $c_{pf}$  o calor específico a pressão constante,  $\alpha_f$  a difusividade térmica e  $k_f$  a condutividade térmica.

Mediante as hipóteses anteriores as equações de conservação na forma dimensional para o domínio fluido,  $\Omega_f$ , são:

Conservação da massa,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

Conservação da quantidade de movimento,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu_f \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g\beta(T - T_c) \sin \alpha, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu_f \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g\beta(T - T_c) \cos \alpha, \quad (2.3)$$

Conservação da energia,

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_f \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \quad (2.4)$$

Sendo  $t$  o tempo,  $u$  e  $v$  as componentes de velocidades do fluido, respectivamente, nas direções das coordenadas  $x$  e  $y$ ,  $T$  a temperatura,  $p$  a pressão,  $g$  a aceleração da gravidade,  $\beta$  o coeficiente de expansão volumétrica,  $T_c$  é a temperatura de referência e  $\alpha$  o ângulo de inclinação do duto mostrado na Figura 2.1.

### 2.1.2. Equações de Conservação na Forma Dimensional para o Sólido

As componentes de velocidades  $u$  e  $v$  são nulas no domínio sólido. A equação da energia na forma dimensional para o domínio sólido,  $\Omega_s$ , apresenta as seguintes hipóteses:

- a) O regime é transiente;
- b) As propriedades físicas do sólido ( $\rho_s$ ,  $c_{ps}$ ,  $k_s$ ) são constantes;
- c) Existe geração homogênea de energia interna no sólido.

As propriedades físicas citadas anteriormente tem o sub índice  $s$ , os quais se referem ao sólido e são:  $\rho_s$  a massa específica,  $c_{ps}$  o calor específico a pressão constante e  $k_s$  a condutividade térmica.

Mediante as considerações anteriores, a equação de conservação da energia na forma dimensional para o domínio sólido,  $\Omega_s$ , é:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_s \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{q'''}{\rho_s c_{ps}}. \quad (2.5)$$

Sendo  $T$  a temperatura e  $q'''$  a taxa de geração volumétrica de energia no domínio sólido.

### 2.1.3. Condições Iniciais, de Contorno e de Interface na Forma Dimensional

A Figura 2.1 ilustra a geometria de um duto inclinado de um ângulo  $\alpha$  com relação ao plano horizontal, com três corpos sólidos fixados na superfície  $S_2$ . As superfícies  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  e  $S_4$ , mostradas na Figura 2.1, estão relacionadas com as condições de contorno consideradas na análise teórica. A superfície  $S_1$  representa uma superfície de entrada do fluido frio na temperatura  $T_c$ , pressão de entrada  $p_0$  e velocidade de entrada  $u_0$ . As superfícies  $S_2$  e  $S_3$  são isoladas termicamente. A superfície  $S_4$  representa uma superfície de saída do fluido onde se considera condições de escoamento desenvolvido. A superfície  $S_5$  é a interface entre o domínio sólido,  $\Omega_s$ , e o domínio fluido,  $\Omega_f$ . As componentes de velocidades do fluido no domínio sólido,  $\Omega_s$ , e nas superfícies  $S_2$ ,  $S_3$  e  $S_5$  são nulas.

As condições iniciais, as condições de contorno e as condições na interface na presente análise são:

i) condições iniciais:

para  $t = 0$ :

$$u = v = 0, \quad p = p_0, \quad T = T_c \quad (\text{em } \Omega), \quad (2.6)$$

sendo  $\Omega$  o domínio completo de estudo, o qual engloba os domínios fluido,  $\Omega_f$ , e sólido,  $\Omega_s$ .

ii) condições de contorno:

para  $t > 0$ :

$$T = T_c, \quad u = u_0, \quad v = 0, \quad p = p_0 \quad (\text{em } S_1), \quad (2.7a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0, \quad u = 0, \quad v = 0 \quad (\text{em } S_2), \quad (2.7b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0, \quad u = 0, \quad v = 0 \quad (\text{em } S_3), \quad (2.7c)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (\text{em } S_4), \quad (2.7d)$$

iii) condições de interface:

$$u = v = 0 \quad (\text{em } S_5). \quad (2.8)$$

sendo  $S_1, S_2, S_3$  e  $S_4$  as superfícies na fronteira do domínio  $\Omega$  e  $S_5$  a superfície de interface entre o domínio sólido e fluido, mostradas na Figura 2.1 e 'n' o versor normal à superfície.

O conjunto de equações de conservação (2.1) até (2.5), juntamente com as condições iniciais, de contorno e de interface, dadas pelas Equações (2.6) até (2.8), representam as equações conhecidas como formulação do problema usando variáveis primitivas dimensionais. Nessa formulação são tratadas como incógnitas: a temperatura,  $T$ , a pressão,  $p$ , e as componentes de velocidades,  $u$  e  $v$ . As grandezas físicas e parâmetros geométricos e térmicos, tais como:  $\rho_f, \rho_s, \nu_f, c_{ps}, \alpha_f, \alpha_s, \beta, g, T_c, q''', h_c$  e  $\alpha$  são tratados como valores conhecidos. Com a finalidade de reduzir o número de grandezas envolvidas na análise, na seção 2.2 as equações de conservação, bem como as condições iniciais, de contorno e de interface serão escritas na forma adimensional.

## 2.2. ADIMENSIONALIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

No sentido de generalizar a solução numérica do problema e reduzir o número de parâmetros envolvidos, são introduzidas as seguintes grandezas adimensionais para os domínios fluido e sólido:

$$\tau = \frac{u_o t}{H}, \quad X = \frac{x}{H}, \quad Y = \frac{y}{H}, \quad U = \frac{u}{u_o}, \quad V = \frac{v}{u_o}, \quad P = \frac{p}{\rho_f u_o^2}, \quad \theta = \frac{T - T_c}{\Delta T}. \quad (2.9)$$

sendo  $\tau$  o tempo adimensional,  $U$  e  $V$  as componentes adimensionais de velocidades, respectivamente, nas direções das coordenadas adimensionais  $X$  e  $Y$ ,  $P$  a pressão adimensional,  $\theta$  a temperatura adimensional,  $T_c$  a temperatura de referência e  $\Delta T$  a diferença de temperatura de referência, definida como:

$$\Delta T = \frac{q''' H^2}{k_f} \quad (2.10)$$

### 2.2.1. Equações de Conservação na Forma Adimensional para o Fluido

Substituindo (2.9) em (2.1), resulta a equação da conservação da massa na forma adimensional:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0. \quad (2.11)$$

Substituindo (2.9) em (2.2), resulta equação da conservação da quantidade de movimento na forma adimensional, na direção X:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) + \text{Ri} \theta \text{sen} \alpha. \quad (2.12)$$

sendo Re o número de Reynolds, Ri o número de Richardson e Gr o número de Grashof definidos por:

$$\text{Re} = \frac{u_o H}{v_f}, \quad \text{Ri} = \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2}, \quad \text{Gr} = \frac{g \beta \Delta T H^3}{v_f^2}. \quad (2.13a,b,c)$$

Substituindo (2.9) em (2.3), resulta a equação da conservação da quantidade de movimento na forma adimensional, na direção Y:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + \text{Ri} \theta \text{cos} \alpha. \quad (2.14)$$

Substituindo (2.9) em (2.4), resulta a equação da conservação da energia na forma adimensional:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Pr Re}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right). \quad (2.15)$$

sendo Pr o número de Prandtl do fluido definido por:

$$\text{Pr} = \frac{\nu_f}{\alpha_f} = \frac{\mu_f c_{pf}}{k_f} = \frac{\rho_f \nu_f c_{pf}}{k_f}. \quad (2.16)$$

### 2.2.2. Equações de Conservação na Forma Adimensional para o Sólido

Substituindo (2.9) em (2.5), resulta a seguinte equação da energia na forma adimensional para o domínio sólido:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{D}{\text{Pr Re}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) + S. \quad (2.17)$$

sendo  $D$  a razão das difusividades do sólido e do fluido, e  $S$  a geração de energia adimensional no domínio sólido, definidos por:

$$D = \frac{\alpha_s}{\alpha_f}, \quad S = \frac{q''' H}{\rho_s c_{ps} u_o \Delta T} = \frac{D}{\text{Pr Re}}. \quad (2.18a,b)$$

As difusividades térmicas do fluido e do sólido são dadas por:

$$\alpha_f = \frac{k_f}{\rho_f c_{pf}}; \quad \alpha_s = \frac{k_s}{\rho_s c_{ps}}. \quad (2.19)$$

### 2.2.3. Condições Iniciais, de Contorno e de Interface na Forma Adimensional

A Figura 2.2 ilustra a geometria de um duto inclinado de um ângulo  $\alpha$  com relação ao plano horizontal, com três corpos sólidos fixados na superfície  $S_2$ . A Figura 2.2 é semelhante à Figura 2.1, a diferença principal é que na Figura 2.2 as grandezas são adimensionais. A superfície  $S_1$  representa uma superfície de entrada do fluido frio na temperatura adimensional  $\theta = 0$ , pressão de entrada  $P_0$  e velocidade de entrada  $U_0$ . As superfícies  $S_2$  e  $S_3$  são isoladas termicamente, não havendo fluxo de calor através delas. A superfície  $S_4$  representa uma superfície de saída do fluido onde se considera condições de escoamento desenvolvido. A superfície  $S_5$  é a interface entre o domínio sólido,  $\Omega_s$ , e o domínio fluido,  $\Omega_f$ . As

componentes de velocidades adimensionais  $U$  e  $V$  do fluido no domínio sólido  $\Omega_s$  e nas superfícies  $S_2$ ,  $S_3$  e  $S_5$  são nulas.

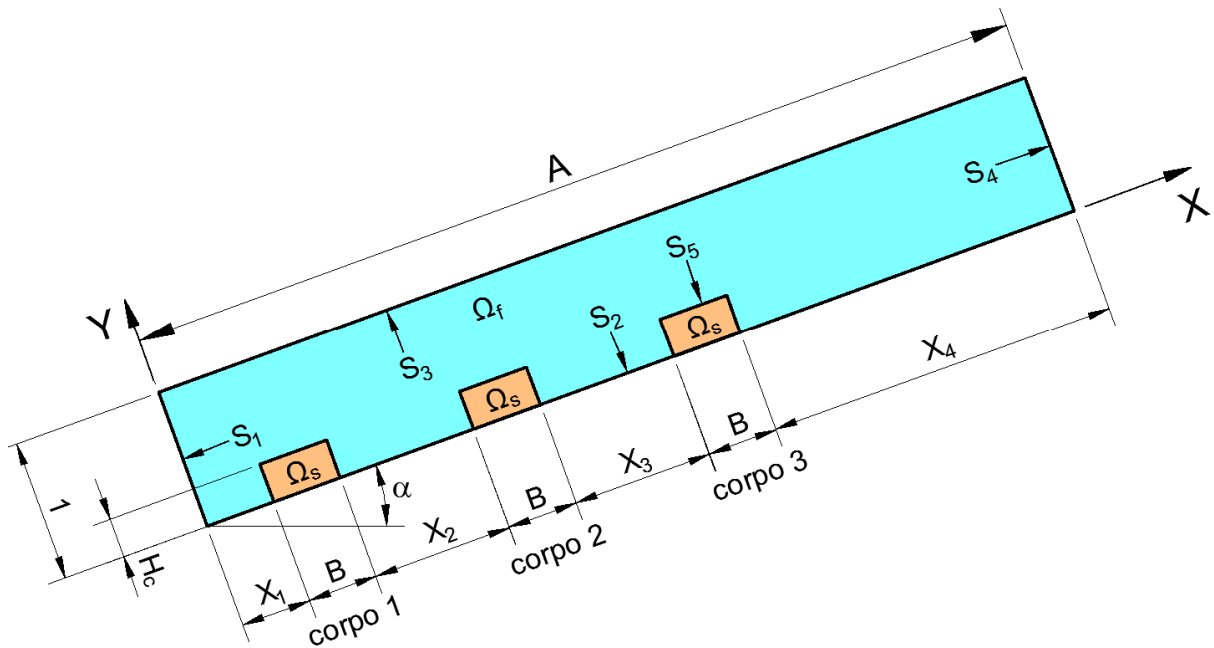


Figura 2.2 – Domínio computacional e condições de contorno adimensionais.

As condições iniciais, as condições de contorno e as condições na interface na presente análise, na forma adimensional, são:

i) condições iniciais:

para  $t = 0$ :

$$U = V = 0, \quad P = P_0, \quad \theta = 0 \quad (\text{em } \Omega), \quad (2.20)$$

sendo  $\Omega$  o domínio completo de estudo, o qual engloba os domínios fluido,  $\Omega_f$ , e sólido,  $\Omega_s$ .

ii) condições de contorno:

para  $t > 0$ :

$$\theta = 0, \quad U = U_0 = 1, \quad V = 0, \quad P = P_0 \quad (\text{em } S_1), \quad (2.21a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \bar{n}} = 0, \quad U = 0, \quad V = 0 \quad (\text{em } S_2), \quad (2.21b)$$



$$\frac{\partial \theta}{\partial \bar{n}} = 0, \quad U = 0, \quad V = 0 \quad (\text{em } S_3), \quad (2.21b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \bar{n}} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \bar{n}} = 0 \quad (\text{em } S_4), \quad (2.21c)$$

iii) condições de interface:

$$U = V = 0 \quad (\text{em } S_5). \quad (2.22)$$

O conjunto de equações de conservação (2.11), (2.12), (2.14), (2.15) e (2.17), juntamente com as condições iniciais, de contorno e de interface dadas pelas Equações (2.20) até (2.22), representam as equações conhecidas como formulação do problema usando variáveis primitivas adimensionais. Nessa formulação são tratadas como incógnitas: a temperatura adimensional,  $\theta$ , a pressão adimensional,  $P$ , e as componentes de velocidades adimensionais,  $U$  e  $V$ . São tratados como parâmetros conhecidos: o número de Reynolds,  $Re$ , o número de Grashof,  $Gr$ , o número de Prandtl,  $Pr$ , a relação de difusividades,  $D$ , a geração adimensional,  $S$ , a altura adimensional do corpo sólido,  $H_c$  e o ângulo de inclinação,  $\alpha$ . Assim, com a introdução das grandezas adimensionais, o número de parâmetros dessa análise foi reduzido quando comparados com o uso de parâmetros dimensionais.

### **2.3. EQUAÇÕES ADIMENSIONAIS EM TERMOS DE FUNÇÃO CORRENTE, TEMPERATURA E VORTICIDADE**

Neste item é apresentada a formulação adimensional que será utilizada nesse trabalho. Ela é conhecida como formulação função corrente  $\psi$ , vorticidade  $\omega$  e temperatura  $\theta$ . A principal vantagem dessa formulação é reduzir o número de equações diferenciais e também eliminar o termo de pressão.

### 2.3.1. Equações Adimensionais para o Domínio Fluido

Os termos de pressão que aparecem nas Equações (2.12) e (2.14) podem ser eliminados. Isto é conseguido derivando-se a Equação (2.12) em relação a Y e a Equação (2.14) em relação a X. Em seguida as equações são subtraídas, resultando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + U \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + V \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) = \\ = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left( \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left( \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \text{Ri} \frac{\partial \theta}{\partial X} \cos \alpha - \text{Ri} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \text{sen} \alpha. \end{aligned} \quad (2.23)$$

A vorticidade do fluido,  $\omega$ , é introduzida pela seguinte relação:

$$\omega = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y}. \quad (2.24)$$

Substituindo a Equação (2.24) em (2.23), vem:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \omega}{\partial X} + V \frac{\partial \omega}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) + \text{Ri} \frac{\partial \theta}{\partial X} \cos \alpha - \text{Ri} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \text{sen} \alpha. \quad (2.25)$$

A função corrente,  $\psi$ , é introduzida pela seguinte relação:

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y} \quad \text{e} \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial X}. \quad (2.26)$$

Com a definição dada por (2.26), a equação da continuidade (2.11) fica satisfeita.

Das Equações (2.24) e (2.26), resulta:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = -\omega. \quad (2.27)$$

Das Equações (2.15) e (2.26), vem:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Pr Re}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right). \quad (2.28)$$

Das Equações (2.25) e (2.26), vem:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) + \text{Ri} \frac{\partial \theta}{\partial X} \cos \alpha - \text{Ri} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \sin \alpha. \quad (2.29)$$

Reescrevendo as Equações (2.27), (2.28) e (2.29), resultam, respectivamente, para o domínio fluido:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \omega = 0, \quad (2.30)$$

$$\frac{1}{\text{Pr Re}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) + \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad (2.31)$$

$$\frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) + \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} \right) + \text{Ri} \frac{\partial \theta}{\partial X} \cos \alpha - \text{Ri} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \sin \alpha = \frac{\partial \omega}{\partial \tau}. \quad (2.32)$$

As Equações (2.30), (2.31) e (2.32) representam as equações para o fluido, em termos da função corrente,  $\psi$ , temperatura adimensional,  $\theta$ , e vorticidade,  $\omega$ , tendo sido eliminada a pressão.

### 2.3.2. Equação Adimensional para o Domínio Sólido

A equação da energia para o domínio sólido,  $\Omega_s$ , na forma adimensional, é dada pela Equação (2.17), a qual é repetida a seguir por conveniência:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{D}{\text{Pr Re}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) + S \quad (2.33)$$

### 2.3.3. Equações Unificadas Adimensionais para os Domínios Fluido e Sólido

Comparando-se as Equações (2.31) e (2.33), verifica-se que estas podem ser escritas na seguinte forma geral, válida para as regiões dos domínios sólido e fluido:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{D}{\text{Pr Re}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) + \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) + S. \quad (2.34)$$

Na Equação (2.34), tem-se que:

$$D = 1 \text{ e } S = 0 \quad (\text{para } \Omega_f), \quad (2.35a)$$

$$D = \frac{\alpha_s}{\alpha_f}, \quad \psi = 0 \text{ e } S = \frac{D}{\text{Pr Re}} \quad (\text{para } \Omega_s). \quad (2.35b)$$

As Equações (2.30), (2.34) e (2.32) formam, respectivamente, um conjunto de equações diferenciais parciais que são válidas para os domínios fluido e sólido, dadas por:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \omega = 0, \quad (2.36)$$

$$\frac{D}{\text{Pr Re}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) + \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) + S = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad (2.37)$$

$$\frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) + \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} \right) + \text{Ri} \frac{\partial \theta}{\partial X} \cos \alpha - \text{Ri} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \sin \alpha = \frac{\partial \omega}{\partial \tau}, \quad (2.38)$$

Nas Equações (2.36), (2.37) e (2.38), tem-se que:

$$D = 1 \text{ e } S = 0 \quad (\text{para } \Omega_f), \quad (2.39a)$$

$$D = \frac{\alpha_s}{\alpha_f}, \quad \psi = \omega = 0 \text{ e } S = \frac{D}{\text{Pr Re}} \quad (\text{para } \Omega_s). \quad (2.39b)$$

### 2.3.4. Condições Iniciais e de Contorno na Forma Adimensional

As condições iniciais e de contorno, na forma adimensional, correspondentes às Equações (2.36), (2.37) e (2.38), conforme indicadas na Figura 2.2 são:

condições iniciais:

para  $\tau = 0$ :

$$\theta = 0, \quad \psi = \omega = 0 \quad (\text{em } \Omega), \quad (2.40)$$

condições de contorno:

para  $\tau > 0$ :

$$\theta = 0, \quad \psi = Y, \quad \omega = 0 \quad (\text{em } S_1), \quad (2.41a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0, \quad \psi = 0, \quad \omega = \omega_M \quad (\text{em } S_2), \quad (2.41b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0, \quad \psi = 1, \quad \omega = \omega_M \quad (\text{em } S_3), \quad (2.41c)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\partial \omega}{\partial n} = 0 \quad (\text{em } S_4). \quad (2.41d)$$

sendo  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  e  $S_4$  as superfícies no contorno do domínio  $\Omega$ , mostradas na Figura 2.2. A Equação (2.40) estabelece as condições iniciais para  $\theta$ ,  $\psi$  e  $\omega$  em todo o domínio  $\Omega$ . A Equação (2.41a) estabelece que na superfície  $S_1$ , a temperatura adimensional de entrada do fluido frio no duto é  $\theta = 0$ , a função corrente adimensional na entrada varia linearmente, e a vorticidade adimensional é nula. A Equação (2.41b) estabelece que na superfície  $S_2$ , o gradiente de temperatura é nulo, isto é, a superfície é isolada termicamente; a função corrente adimensional é nula; e a vorticidade adimensional é calculada pelo método matricial apresentado no Apêndice D. A Equação (2.41c) estabelece que na superfície  $S_3$ , o gradiente de temperatura é nulo, isto é, a superfície é isolada termicamente; a função corrente adimensional é constante igual a 1; e a vorticidade adimensional é calculada pelo método matricial apresentado no Apêndice D. A Equação (2.41d) estabelece que na superfície  $S_4$  o escoamento é completamente desenvolvido.

As equações de conservação (2.36), (2.37) e (2.38) podem ser escritas na seguinte forma compacta:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + Q_\psi = 0, \quad (2.42a)$$

$$\frac{D}{\text{Pr Re}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) + Q_\theta = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} , \quad (2.43a)$$

$$\frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) + Q_\omega = \frac{\partial \omega}{\partial \tau} , \quad (2.44a)$$

sendo:

$$Q_\psi = \omega , \quad (2.42b)$$

$$Q_\theta = \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) + S , \quad (2.43b)$$

$$Q_\omega = \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} \right) + \text{Ri} \frac{\partial \theta}{\partial X} \cos \alpha - \text{Ri} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \sin \alpha . \quad (2.44b)$$

No Capítulo 3, será apresentada a metodologia numérica, através do método de elementos finitos, para resolver as Equações (2.42), (2.43) e (2.44), juntamente com as condições iniciais e de contorno do problema dadas pelas Equações (2.40) e (2.41).

## 2.4. NÚMEROS DE NUSSOLT LOCAL E MÉDIO

São apresentadas a seguir as equações para o cálculo dos números de Nusselt local e médio utilizados neste trabalho.

As Equações (2.36), (2.37) e (2.38) representam um sistema de equações diferenciais parciais não lineares e acopladas. Para se resolver este sistema de equações, é utilizado o método de elementos finitos, apresentado no Capítulo 3, com o objetivo de determinar as distribuições das funções  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\omega$ . Assim, após o cálculo dessas distribuições, é possível calcular os números de Nusselt local e médio em função dos diversos parâmetros geométricos e térmicos do problema.

As definições dos números de Nusselt local e médio, e os detalhes das deduções, são apresentadas no Apêndice C.

O número de Nusselt local para a superfície do corpo sólido  $S_5$ , chamada por conveniência de  $s$ , é dado por:

$$Nu_L = - \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{n}} \Big|_s. \quad (2.45)$$

sendo  $\theta$  a temperatura local, e  $\partial \theta / \partial \bar{n}$  o gradiente local de temperatura, ambos sobre a superfície do corpo sólido  $s=S_5$ .

O número de Nusselt médio para a superfície do corpo,  $s=S_5$ , é dado por:

$$Nu = \frac{1}{L_c} \int_0^{L_c} Nu_L \Big|_s dS = \frac{1}{L_c} \int_0^{L_c} \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{n}} \Big|_s dS. \quad (2.46)$$

sendo  $L_c$  o comprimento adimensional da linha que delimita o corpo sólido e o fluido.

Os números de Nusselt local e médio apresentados nas Equações (2.45) e (2.46), podem ser escritos em função de parâmetros térmicos e geométricos do problema, respectivamente, como :

$$Nu_L = Nu_L ( Re, Gr, Pr, D, S, H_c, \alpha ), \quad (2.47a)$$

$$Nu = Nu ( Re, Gr, Pr, D, S, H_c, \alpha ). \quad (2.47b)$$

sendo os parâmetros térmicos  $Re$ ,  $Gr$ ,  $Pr$ ,  $D$ ,  $S$ ; e os parâmetros geométricos  $H_c$  e  $\alpha$ . Os parâmetros térmicos são definidos, respectivamente, pelas Equações (2.13a), (2.13c), (2.16), (2.18a) e (2.18b); e os parâmetros geométricos são mostrados na Figura 2.2.

### 3. MODELO NUMÉRICO

#### 3.1. FORMA GERAL PARA AS EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO

As equações (2.42), (2.43) e (2.44), apresentadas no Capítulo 2, podem ser escritas na seguinte forma compacta geral:

$$\delta \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \right) + Q_\phi = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \tau}, \quad (3.1a)$$

sendo que  $Q_\phi$  é uma função especificada dada por:

$$Q_\phi = A_1 \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \phi}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) + B_1 \frac{\partial \theta}{\partial X} + C_1 \frac{\partial \theta}{\partial Y} + D_1 \omega + E_1, \quad (3.1b)$$

sendo  $\phi$  uma grandeza que pode representar  $\psi$ ,  $\theta$  ou  $\omega$ ; os parâmetros  $\lambda$ ,  $\delta$ ,  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$  e  $E_1$  são apresentados na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Parâmetros das equações (3.1a) e (3.1b).

$\phi$	$\lambda$	$\delta$	$A_1$	$B_1$	$C_1$	$D_1$	$E_1$
$\psi$	0	1	0	0	0	1	0
$\theta$	1	$\frac{D}{Pr Re}$	1	0	0	0	S
$\omega$	1	$\frac{1}{Re}$	1	$Ri \cos \alpha$	$-Ri \sin \alpha$	0	0



As condições de contorno relativas às equações (2.42a), (2.43a) e (2.44a) apresentadas no Capítulo 2, agora representadas pelas equações (3.1a) e (3.1b), podem ser escritas na forma:

$$\phi = \phi(X, Y), \quad (3.1c)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0. \quad (3.1d)$$

A condição de contorno dada pela Equação (3.1c) é uma condição de contorno de primeira espécie e representa a condição de  $\phi$  imposta no contorno, enquanto que a Equação (3.1d) é uma condição de contorno de segunda espécie e representa que o fluxo da grandeza  $\phi$  imposto no contorno é zero.

## 3.2. OBTENÇÃO GERAL DAS MATRIZES E VETORES PARA OS ELEMENTOS

No Apêndice B é mostrado que as equações (3.1a) e (3.1b), podem ser escritas na forma matricial, dada pela equação global (B.44), adaptada para o elemento como:

$$\left[ [K_\phi]^e + \frac{1}{\Delta\tau} [C]^e \right] \{ \phi^e \}_{N+1} = \frac{1}{\Delta\tau} [C]^e \{ \phi^e \}_N - \{ R_\phi \}^e. \quad (3.2)$$

sendo que de acordo com as Equações (B.36), (B.37), (B.38) e (B.39) tem-se:

$$[C]^e = \int_{V^e} \lambda [N^e]^T [N^e] dV, \quad (3.3)$$

$$[K_\phi]^e = \int_{V^e} \delta [B^e]^T [B^e] dV, \quad (3.4)$$

$$\{ R_\phi \}^e = - \int_{V^e} [N^e]^T Q_\phi^e dV - \int_{A^e} [N^e]^T q^e dA. \quad (3.5)$$

### 3.2.1. Desenvolvimento da matriz $[C]^e$ para o elemento

Da Equação (3.3) a matriz do elemento  $[C]^e$  é dada como sendo:

$$[C]^e = \int_{V^e} \lambda [N^e]^T [N^e] dV. \quad (3.6)$$

A matriz de forma para um elemento triangular linear é dada pela equação (A.7), como:

$$[N^e] = [N_i \quad N_j \quad N_k]. \quad (3.7)$$

Sendo que  $N_i$ ,  $N_j$  e  $N_k$  são as funções de forma dadas pelas Equações (A.6a), (A.6c) e (A.6e).

Considera-se que o elemento tem uma espessura  $t$  constante. Portanto,  $dV = t dA$ . Logo, das Equações (3.6) e (3.7) tem-se:

$$[C]^e = \int_{A^e} \lambda t \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k \end{bmatrix} dA = \lambda t \int_{A^e} \begin{bmatrix} N_i N_i & N_i N_j & N_i N_k \\ N_j N_i & N_j N_j & N_j N_k \\ N_k N_i & N_k N_j & N_k N_k \end{bmatrix} dA. \quad (3.8)$$

A integral da matriz da equação (3.8) pode ser realizada utilizando a Equação (8.38) da referência Zienkiewicz e Taylor (2000), dada por:

$$\int_{A^e} N_i^a N_j^b N_k^c dA = \frac{a! b! c!}{(a + b + c + 2)!} 2A. \quad (3.9)$$

Das equações (3.9) e (3.8), resulta que:

$$[C]^e = \frac{\lambda t A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

sendo que  $A$  é a área do elemento dada pela Equação (A.4), como:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix}. \quad (3.11)$$

### 3.2.2. Desenvolvimento da matriz $[K_\phi]^e$ do elemento

Da Equação (3.4), a matriz  $[K_\phi]^e$  do elemento é dada como sendo:

$$[K_\phi]^e = \int_{V^e} \delta [B^e]^T [B^e] dV. \quad (3.12)$$

A matriz das derivadas das funções de forma para o elemento é dada pela Equação (B.23) como:

$$[B^e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial X} & \frac{\partial N_j}{\partial X} & \frac{\partial N_k}{\partial X} \\ \frac{\partial N_i}{\partial Y} & \frac{\partial N_j}{\partial Y} & \frac{\partial N_k}{\partial Y} \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Substituindo (A.6a), (A.6c) e (A.6e) em (3.13), resulta:

$$[B^e] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

A matriz transposta  $[B^e]^T$  de (3.14) é dada por:

$$[B^e]^T = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_k & c_k \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Substituindo (3.14) e (3.15) em (3.12), vem:

$$[K_\phi]^e = \int_{V^e} \frac{\delta}{4A^2} \begin{bmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_k & c_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} dV =$$

$$= \frac{\delta}{4A^2} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ b_k b_i + c_k c_i & b_k b_j + c_k c_j & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix} \int_{V^e} dV. \quad (3.16)$$

Sendo  $dV = t \, dA$ , tem-se que:

$$\int_{V^e} dV = \int_{S^e} t \, dA = t \, A. \quad (3.17)$$

Substituindo (3.17) em (3.16) vem:

$$[K_\phi]^e = \frac{\delta t}{4A} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ b_k b_i + c_k c_i & b_k b_j + c_k c_j & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

### 3.2.3. Desenvolvimento do vetor $\{R_\phi\}^e$ do elemento

Para o presente trabalho, em todos os casos estudados, nas superfícies onde o gradiente de  $\phi$  é conhecido, esse gradiente é nulo, assim  $q = \partial\phi/\partial n = 0$ . Logo, a Equação (3.5) reduz-se à seguinte equação:

$$\{R_\phi\}^e = - \int_{V^e} [N^e]^T Q_\phi^e \, dV, \quad (3.19)$$

sendo  $Q_\phi^e$  dado pela Equação (3.1b) e  $dV = t \, dA$ , a Equação (3.19), torna-se:

$$\begin{aligned} \{R_\phi\}^e &= - \int_{A^e} \left[ A_1 \left( \frac{\partial\psi}{\partial X} \frac{\partial\phi}{\partial Y} - \frac{\partial\psi}{\partial Y} \frac{\partial\phi}{\partial X} \right) + B_1 \frac{\partial\theta}{\partial X} + C_1 \frac{\partial\theta}{\partial Y} + D_1 \omega + E_1 \right] [N^e]^T t \, dA = \\ &= - \int_{A^e} \left[ t A_1 \left( \frac{\partial\psi}{\partial X} \frac{\partial\phi}{\partial Y} - \frac{\partial\psi}{\partial Y} \frac{\partial\phi}{\partial X} \right) [N^e]^T \right] dA - \int_{A^e} t B_1 \frac{\partial\theta}{\partial X} [N^e]^T \, dA \\ &\quad - \int_{A^e} t C_1 \frac{\partial\theta}{\partial Y} [N^e]^T \, dA - \int_{A^e} t D_1 [N^e]^T \omega \, dA - \int_{A^e} t E_1 [N^e]^T \, dA. \end{aligned} \quad (3.20)$$

A Equação (3.20) pode ser escrita da seguinte forma compacta:

$$\{R_\phi\}^e = -(\{R_\phi\}_1^e + \{R_\phi\}_2^e + \{R_\phi\}_3^e + \{R_\phi\}_4^e + \{R_\phi\}_5^e). \quad (3.21)$$

### i-) Cálculo do vetor $\{R_\phi\}_1^e$ do elemento

Da Equação (3.20), vem que:

$$\{R_\phi\}_1^e = \int_{A^e} t A_1 \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \phi}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) [N^e]^T dA. \quad (3.22)$$

Define-se  $G_1$ , como sendo:

$$G_1 = \frac{\partial \psi^e}{\partial X} \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} - \frac{\partial \psi^e}{\partial Y} \frac{\partial \phi^e}{\partial X}. \quad (3.23)$$

As funções  $\psi^e$  e  $\phi^e$  do elemento podem ser assim escritas como:

$$\psi^e = [N^e] \{\psi^e\}, \quad (3.24)$$

$$\phi^e = [N^e] \{\phi^e\}. \quad (3.25)$$

Das Equações (A.10a) e (A.10b), resulta que:

$$\frac{\partial \psi^e}{\partial X} = \frac{1}{2A} (b_i \psi_i + b_j \psi_j + b_k \psi_k), \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial \psi^e}{\partial Y} = \frac{1}{2A} (c_i \psi_i + c_j \psi_j + c_k \psi_k), \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial \phi^e}{\partial X} = \frac{1}{2A} (b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_k \phi_k), \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \phi^e}{\partial Y} = \frac{1}{2A} (c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_k \phi_k). \quad (3.29)$$

Substituindo as equações (3.26) à (3.29) em (3.23) vem:

$$G_1 = \frac{1}{4A^2} \left[ (b_i \psi_i + b_j \psi_j + b_k \psi_k) (c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_k \phi_k) - (c_i \psi_i + c_j \psi_j + c_k \psi_k) (b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_k \phi_k) \right] . \quad (3.30)$$

Da Equação (3.22), observando-se que  $G_1$  é constante dentro de cada elemento, vem que:

$$\{R_\phi\}_1^e = t A_1 G_1 \int_{A^e} \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} dA . \quad (3.31)$$

Das equações (3.9) e (3.31), vem que:

$$\{R_\phi\}_1^e = \frac{t A_1 G_1 A}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} . \quad (3.32)$$

Substituindo (3.30) em (3.32) vem:

$$\{R_\phi\}_1^e = \left[ \frac{t A_1}{12 A} (b_i \psi_i + b_j \psi_j + b_k \psi_k) (c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_k \phi_k) - \frac{t A_1}{12 A} (c_i \psi_i + c_j \psi_j + c_k \psi_k) (b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_k \phi_k) \right] \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = A_1 F_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} , \quad (3.33)$$

sendo:

$$F_1 = \frac{t}{12 A} \left[ (b_i \psi_i + b_j \psi_j + b_k \psi_k) (c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_k \phi_k) - (c_i \psi_i + c_j \psi_j + c_k \psi_k) (b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_k \phi_k) \right] . \quad (3.34)$$

## ii-) Cálculo do vetor $\{R_\phi\}_2^e$ do elemento

Da Equação (3.20), vem que:

$$\{R_\phi\}_2^e = \int_{A^e} tB_1 \frac{\partial \theta}{\partial X} [N^e]^T dA. \quad (3.35)$$

Sendo o termo  $H_1$  definido como sendo:

$$H_1 = \frac{\partial \theta^e}{\partial X}. \quad (3.36)$$

A função  $\theta^e$  do elemento pode ser assim escrita:

$$\theta^e = [N^e] \left\{ \theta^e \right\}. \quad (3.37)$$

Da Equação (A.10a) resulta que:

$$\frac{\partial \theta^e}{\partial X} = \frac{1}{2A} (b_i \theta_i + b_j \theta_j + b_k \theta_k). \quad (3.38)$$

Substituindo a Equação (3.38) em (3.36) vem:

$$H_1 = \frac{\partial \theta^e}{\partial X} = \frac{1}{2A} (b_i \theta_i + b_j \theta_j + b_k \theta_k). \quad (3.39)$$

Da Equação (3.35), observando que  $H_1$  é constante dentro de cada elemento, vem que:

$$\{R_\phi\}_2^e = tB_1 H_1 \int_{A^e} \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} dA. \quad (3.40)$$

Das Equações (3.9) e (3.40), vem que:

$$\{R_\phi\}_2^e = \frac{tB_1 H_1 A}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (3.41)$$

Substituindo (3.39) em (3.41), vem:

$$\{\mathbf{R}_\phi\}_2^e = \frac{t\mathbf{B}_1}{6}(\mathbf{b}_i\theta_i + \mathbf{b}_j\theta_j + \mathbf{b}_k\theta_k) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_1 \mathbf{I}_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (3.42)$$

sendo:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{t}{6}(\mathbf{b}_i\theta_i + \mathbf{b}_j\theta_j + \mathbf{b}_k\theta_k). \quad (3.43)$$

### iii-) Cálculo do vetor $\{\mathbf{R}_\phi\}_3^e$ do elemento

De uma maneira análoga ao cálculo de  $\{\mathbf{R}_\phi\}_2$ , pode-se mostrar que o valor do vetor  $\{\mathbf{R}_\phi\}_3^e$  é:

$$\{\mathbf{R}_\phi\}_3^e = \frac{t\mathbf{C}_1}{6}(\mathbf{c}_i\theta_i + \mathbf{c}_j\theta_j + \mathbf{c}_k\theta_k) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \mathbf{C}_1 \mathbf{J}_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (3.44)$$

sendo:

$$\mathbf{J}_1 = \frac{t}{6}(\mathbf{c}_i\theta_i + \mathbf{c}_j\theta_j + \mathbf{c}_k\theta_k). \quad (3.45)$$

### iv-) Cálculo do vetor $\{\mathbf{R}_\phi\}_4^e$ do elemento

Da Equação (3.20), vem que:

$$\{\mathbf{R}_\phi\}_4^e = \int_{A^e} t\mathbf{D}_1 [\mathbf{N}^e]^T \omega \, dA = \int_{A^e} t\mathbf{D}_1 [\mathbf{N}^e]^T [\mathbf{N}^e] \{\omega^e\} \, dA, \quad (3.46)$$

Sendo que a vorticidade  $\omega$  no elemento é dada por:

$$\omega = [\mathbf{N}^e] \{\omega^e\}. \quad (3.47)$$

Das equações (3.46) e (3.47), pode-se escrever:



$$\begin{aligned}
\{R_\phi\}_4^e &= \int_{A^e} tD_1 \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{Bmatrix} dA = \\
&= tD_1 \int_{A^e} \begin{bmatrix} N_i N_i & N_i N_j & N_i N_k \\ N_j N_i & N_j N_j & N_j N_k \\ N_k N_i & N_k N_j & N_k N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{Bmatrix} dA. \tag{3.48}
\end{aligned}$$

Das equações (3.48) e (3.9), resulta:

$$\{R_\phi\}_4^e = \frac{tD_1 A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{Bmatrix} = D_1 K_1 \begin{Bmatrix} (2\omega_i + \omega_j + \omega_k) \\ (\omega_i + 2\omega_j + \omega_k) \\ (\omega_i + \omega_j + 2\omega_k) \end{Bmatrix}, \tag{3.49}$$

sendo:

$$K_1 = \frac{tA}{12}. \tag{3.50}$$

### v-) Cálculo do vetor $\{R_\phi\}_5^e$ do elemento

da Equação (3.20), vem que

$$\{R_\phi\}_5^e = \int_{A^e} tE_1 [N^e]^T dA. \tag{3.51}$$

Da Equação (3.51) observando que  $E_1$  é constante no elemento, vem que

$$\{R_\phi\}_5^e = tE_1 \int_{A^e} [N^e]^T dA = tE_1 \int_{A^e} \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} dA. \tag{3.52}$$

Das Equações (3.9) e (3.52), vem que

$$\{R_\phi\}_5^e = E_1 \frac{tA}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = E_1 L_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \tag{3.53}$$

Sendo

$$L_1 = \frac{tA}{3}. \quad (3.54)$$

### 3.2.4. Resumo das equações do item 3.2

As equações (3.1a) e (3.1b) podem ser escritas na seguinte forma matricial dada pela Equação (3.2), como sendo:

$$\left[ [K_\phi]^e + \frac{1}{\Delta\tau} [C]^e \right] \{ \phi^e \}_{N+1} = \frac{1}{\Delta\tau} [C]^e \{ \phi^e \}_N - \{ R_\phi \}^e. \quad (3.55)$$

Das equações (3.18), (3.10) e (3.55) vem, respectivamente, que:

$$[K_\phi]^e = \frac{\delta t}{4A} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ b_k b_i + c_k c_i & b_k b_j + c_k c_j & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix}, \quad (3.56)$$

$$[C]^e = \frac{\lambda t A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (3.57)$$

Substituindo as equações (3.33), (3.42), (3.44), (3.49) e (3.53) em (3.21), resulta:

$$\{ R_\phi \}^e = -(A_1 F_1 + B_1 I_1 + C_1 J_1 + E_1 L_1) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} - D_1 K_1 \begin{Bmatrix} (2\omega_i + \omega_j + \omega_k) \\ (\omega_i + 2\omega_j + \omega_k) \\ (\omega_i + \omega_j + 2\omega_k) \end{Bmatrix}, \quad (3.58)$$

sendo  $F_1$ ,  $I_1$ ,  $J_1$ ,  $L_1$  e  $K_1$  dados, respectivamente, pelas equações (3.34), (3.43), (3.45), (3.54) e (3.50). Os valores de  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  e  $D_1$  são apresentados na Tabela 3.1.

A seguir, as equações (3.55), (3.56), (3.57) e (3.58) que foram obtidas para uma grandeza  $\phi$  qualquer, serão aplicadas para o caso de convecção mista. Assim, serão obtidas as

formas matriciais para os elementos em termos da função corrente ( $\psi$ ), temperatura adimensional ( $\theta$ ) e vorticidade ( $\omega$ ).

### 3.3. OBTENÇÃO DAS MATRIZES E VETORES PARA OS ELEMENTOS

#### 3.3.1. Forma Matricial para os Elementos em Termos da Função Corrente

Da Tabela 3.1 para  $\phi = \psi$ , tem-se:  $Q_\phi = Q_\psi$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\delta = 1$ ,  $A_1 = 0$ ,  $B_1 = 0$ ,  $C_1 = 0$ ,  $D_1 = 1$  e  $E_1 = 0$ . Como o problema estudado é bidimensional, adotou-se uma espessura unitária para todos os elementos, isto é,  $t = 1$ . Substituindo esses valores nas equações (3.1a) e (3.1b), vem que:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + Q_\psi = 0, \quad (3.59)$$

sendo:

$$Q_\psi = \omega. \quad (3.60)$$

Substituindo  $\phi = \psi$  e  $\lambda = 0$  nas equações (3.55) e (3.57), vem:

$$[K_\psi]^e \{ \psi^e \} = -\{ R_\psi \}^e. \quad (3.61)$$

Fazendo  $\phi = \psi$  e  $\delta = 1$  na Equação (3.56), resulta:

$$[K_\psi]^e = \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ b_k b_i + c_k c_i & b_k b_j + c_k c_j & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix}. \quad (3.62)$$

Fazendo  $\phi = \psi$ ,  $A_1 = 0$ ,  $B_1 = 0$ ,  $C_1 = 0$ ,  $D_1 = 1$  e  $E_1 = 0$  na Equação (3.58), resulta em:

$$\{R_\psi\}^e = -\frac{A}{12} \begin{Bmatrix} (2\omega_i + \omega_j + \omega_k) \\ (\omega_i + 2\omega_j + \omega_k) \\ (\omega_i + \omega_j + 2\omega_k) \end{Bmatrix}, \quad (3.63)$$

### 3.3.2. Forma Matricial para os Elementos em Termos de Temperatura Adimensional

Da Tabela 3.1 para  $\phi = \theta$  tem-se:  $Q_\phi = Q_\theta$ ,  $t = 1$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\delta = D/\text{Pr Re}$ ,  $A_1 = 1$ ,  $B_1 = 0$ ,  $C_1 = 0$ ,  $D_1 = 0$  e  $E_1 = S$ . Substituindo esses valores nas equações (3.1a), (3.1b), vem que:

$$\frac{D}{\text{Pr Re}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) + Q_\theta = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad (3.64)$$

sendo:

$$Q_\theta = \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) + S. \quad (3.65)$$

Substituindo  $\phi = \psi$  e  $\lambda = 1$  nas equações (3.55) e (3.57), respectivamente, vem:

$$\left[ [K_\theta]^e + \frac{1}{\Delta \tau} [C]^e \right] \{ \theta^e \}_{N+1} = \frac{1}{\Delta \tau} [C]^e \{ \theta^e \}_N - \{ R_\theta \}^e. \quad (3.66)$$

$$[C]^e = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.67)$$

Fazendo  $\phi = \theta$ ,  $\delta = D/\text{Pr Re}$  na Equação (3.56), resulta:

$$[K_\theta]^e = \frac{D}{4 \text{Pr Re } A} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ b_k b_i + c_k c_i & b_k b_j + c_k c_j & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix}. \quad (3.68)$$

Fazendo  $\phi = \theta$ ,  $A_1 = 1$ ,  $B_1 = 0$ ,  $C_1 = 0$ ,  $D_1 = 0$  e  $E_1 = S$  na Equação (3.58) resulta em:

$$\{R_0\}^e = -\left(F_1 + \frac{AS}{3}\right) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (3.69)$$

sendo que  $F_1$  é dado pela Equação (3.34), como sendo:

$$F_1 = \frac{1}{12A} \left[ (b_i \psi_i + b_j \psi_j + b_k \psi_k) (c_i \theta_i + c_j \theta_j + c_k \theta_k) - (c_i \psi_i + c_j \psi_j + c_k \psi_k) (b_i \theta_i + b_j \theta_j + b_k \theta_k) \right]. \quad (3.70)$$

### 3.3.3. Forma Matricial para os Elementos em Termos da Vorticidade

Da Tabela 3.1 para  $\phi = \omega$  tem-se:  $Q_\phi = Q_\omega$ ,  $t = 1$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\delta = 1/\text{Re}$ ,  $A_1 = 1$ ,  $B_1 = \text{Ri} \cos \alpha$ ,  $C_1 = -\text{Ri} \sin \alpha$ ,  $D_1 = 0$  e  $E_1 = 0$ . Substituindo esses valores nas Equações (3.1a), (3.1b), (3.52), (3.53), (3.54) e (3.55) vem que:

$$\frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) + Q_\omega = \frac{\partial \omega}{\partial \tau}, \quad (3.71)$$

sendo:

$$Q_\omega = \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} + \text{Ri} \frac{\partial \theta}{\partial X} \cos \alpha - \text{Ri} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \sin \alpha. \quad (3.72)$$

Substituindo  $\phi = \omega$  e  $\lambda = 1$  nas Equações (3.55) e (3.57), respectivamente, vem:

$$\left[ [K_\omega]^e + \frac{1}{\Delta \tau} [C]^e \right] \{ \omega^e \}_{N+1} = \frac{1}{\Delta \tau} [C]^e \{ \omega^e \}_N - \{ R_\omega \}^e. \quad (3.73)$$

$$[C]^e = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.74)$$

Fazendo  $\phi = \omega$  e  $\delta = 1/\text{Re}$  na Equação (3.56), resulta:

$$[K_\omega]^e = \frac{1}{4 \operatorname{Re} A} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ b_k b_i + c_k c_i & b_k b_j + c_k c_j & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix}. \quad (3.75)$$

Fazendo  $\phi = \omega$ ,  $A_1 = 1$ ,  $B_1 = Ri \cos \alpha$ ,  $C_1 = -Ri \operatorname{sen} \alpha$ ,  $D_1 = 0$  e  $E_1 = 0$  na Equação (3.58) resulta:

$$\{R_\omega\}^e = -(F_1 + Ri \cos \alpha I_1 - Ri \operatorname{sen} \alpha J_1) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (3.76)$$

Sendo  $F_1$ ,  $I_1$  e  $J_1$  dados, respectivamente, pelas Equações (3.34), (3.43) e (3.45) como:

$$F_1 = \frac{1}{12A} \left[ (b_i \psi_i + b_j \psi_j + b_k \psi_k) (c_i \omega_i + c_j \omega_j + c_k \omega_k) - (c_i \psi_i + c_j \psi_j + c_k \psi_k) (b_i \omega_i + b_j \omega_j + b_k \omega_k) \right], \quad (3.77)$$

$$Ri \cos \alpha I_1 = \frac{Ri \cos \alpha}{6} (b_i \theta_i + b_j \theta_j + b_k \theta_k). \quad (3.78)$$

$$Ri \operatorname{sen} \alpha J_1 = \frac{Ri \operatorname{sen} \alpha}{6} (c_i \theta_i + c_j \theta_j + c_k \theta_k). \quad (3.79)$$

### 3.4. ALGORITMO DO PROGRAMA COMPUTACIONAL

No item 3.2 foi obtida a equação geral (3.2), para os elementos, em função da grandeza  $\phi$ . Nos itens 3.2.1, 3.2.2 e 3.2.3 foram desenvolvidas as matrizes e vetores dos elementos, para equação geral (3.2), em função dos diversos parâmetros apresentados na Tabela 3.1. A grandeza  $\phi$  da Equação (3.2) representa, como já visto no item 3.1, a função corrente  $\psi$ , a temperatura adimensional,  $\theta$ , ou a vorticidade,  $\omega$ . No Apêndice B mostram-se como as matrizes globais e vetores globais podem ser formados a partir da equação geral do elemento (3.2), em função da grandeza  $\phi$ . A partir das matrizes e vetores para os elementos, em função

de  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\omega$ , respectivamente, resulta o seguinte sistema de equações formadas pelas matrizes e vetores globais:

$$[\mathbf{K}_\psi] \{ \psi \} = - \{ \mathbf{R}_\psi \}, \quad (3.80)$$

$$\left[ [\mathbf{K}_\theta] + \frac{1}{\Delta\tau} [\mathbf{C}] \right] \{ \theta \}_{N+1} = \frac{1}{\Delta\tau} [\mathbf{C}] \{ \theta \}_N - \{ \mathbf{R}_\theta \}, \quad (3.81)$$

$$\left[ [\mathbf{K}_\omega] + \frac{1}{\Delta\tau} [\mathbf{C}] \right] \{ \omega \}_{N+1} = \frac{1}{\Delta\tau} [\mathbf{C}] \{ \omega \}_N - \{ \mathbf{R}_\omega \}. \quad (3.82)$$

As equações globais (3.80), (3.81) e (3.82) podem ser escritas numa forma compacta, respectivamente, como:

$$[\overline{\mathbf{K}}_\psi] \{ \psi \} = \{ \overline{\mathbf{R}}_\psi \}, \quad (3.83)$$

$$[\overline{\mathbf{K}}_\theta] \{ \theta \} = \{ \overline{\mathbf{R}}_\theta \}, \quad (3.84)$$

$$[\overline{\mathbf{K}}_\omega] \{ \omega \} = \{ \overline{\mathbf{R}}_\omega \}. \quad (3.85)$$

As Equações (3.83), (3.84) e (3.85) formam um sistema de equações lineares acopladas. Para resolver estas equações foi desenvolvido um programa computacional, com o objetivo de obter, em função do tempo, as distribuições das funções  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\omega$ , e calcular o número de Nusselt médio e as temperaturas médias e máximas, em função dos diversos parâmetros geométricos e térmicos do problema estudado.

As matrizes globais  $[\overline{\mathbf{K}}_\psi]$ ,  $[\overline{\mathbf{K}}_\theta]$  e  $[\overline{\mathbf{K}}_\omega]$  têm seus coeficientes mantidos constantes, pois o incremento de tempo  $\Delta\tau$  será um parâmetro que assume um valor fixo para cada tempo adimensional,  $\tau$ . Essas matrizes são simétricas e de banda.

Os coeficientes de cada matriz que compõem a diagonal principal e as diagonais superiores não nulas são armazenados na forma de uma matriz coluna. Assim, é possível reduzir a área de armazenamento e o tempo computacional de cálculo.

Os vetores globais  $\{\overline{R}_\psi\}$ ,  $\{\overline{R}_\theta\}$  e  $\{\overline{R}_\omega\}$  possuem coeficientes que são dependentes da vorticidade,  $\omega$ , função corrente,  $\psi$ , e da temperatura adimensional,  $\theta$ , e devem ser avaliados a cada tempo adimensional,  $\tau$ .

Os sistemas globais, dados pelas equações (3.80), (3.81) e (3.82), devem ser resolvidos e assim os vetores incógnitas globais  $\{\psi\}$ ,  $\{\theta\}$  e  $\{\omega\}$  são obtidos para cada tempo adimensional,  $\tau$ .

Na Figura 3.1 apresenta-se o fluxograma do programa computacional desenvolvido e, na sequência, são descritos os detalhes de cada bloco do mesmo.



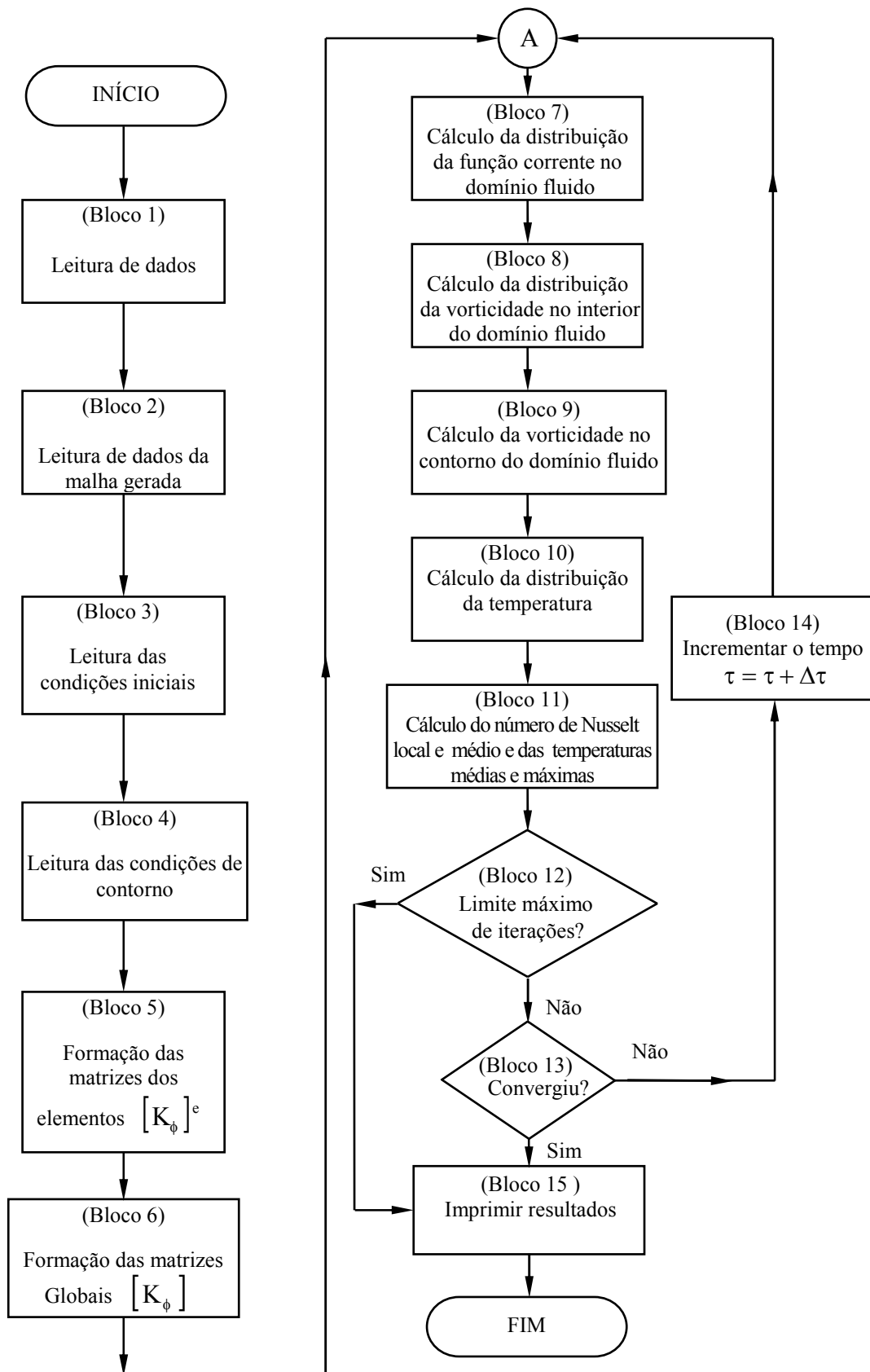


Figura 3.1 – Fluxograma do programa computacional desenvolvido.

### 1-) Leitura de dados ( bloco 1 )

O programa computacional inicialmente faz a leitura de um arquivo que contém os seguintes dados:

- a-) número de Prandtl,
- b-) número de Reynolds,
- c-) número de Grashof,
- d-) razão de difusividades,
- e-) incremento de tempo,
- f-) número máximo de iterações.

### 2-) Leitura de dados da malha gerada ( bloco 2 )

Foi utilizado um software livre chamado *Easymesh* que faz a geração da malha de elementos finitos triangulares. O software *Easymesh* gera uma malha não estruturada que permite o refinamento da malha em regiões previamente definidas pelo usuário. Os resultados calculados por esse software são gravados em arquivos, os quais contém os seguintes dados, que serão lidos pelo programa principal desenvolvido:

- a-) número total de pontos nodais da malha,
- b-) coordenadas globais X e Y de cada um dos pontos nodais da malha,
- c-) número total de elementos da malha,
- d-) conectividade de cada elemento da malha.

A conectividade é uma matriz que armazena os números dos pontos nodais ligados a cada um dos elementos triangulares.

### 3-) Leitura das condições iniciais ( bloco 3 )

O programa computacional faz a leitura de um arquivo que contém as condições iniciais utilizadas no presente trabalho. Conforme descrito pela Equação (2.40), as condições iniciais para  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\omega$ , para todos os casos estudados nesse trabalho, consideram que no tempo inicial  $\tau=0$ , as grandezas  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\omega$ , têm o valor zero em todo o domínio sólido e fluido.

### 4-) Leitura das condições de contorno ( bloco 4 )

O arquivo de dados lidos para as condições de contorno contém:

- a-) dados relativos às condições de temperaturas especificadas no contorno;
- b-) dados relativos às condições da função corrente especificada;
- c-) dados relativos às condições da vorticidade especificada;

Para as aplicações das condições de contorno de temperatura, função corrente e vorticidade é necessário fornecer qual é o número da superfície onde as condições de contorno são aplicadas, bem como o respectivo valor da condição de contorno, nos pontos nodais das superfícies. No caso das superfícies sólidas dos componentes eletrônicos, onde existe geração de energia, a função corrente e a vorticidade são iguais a zero no interior dos corpos sólidos. Nos casos de condição de contorno de fluxo de calor conhecido, neste trabalho se considera que o fluxo é nulo, isto é, para este tipo de condição de contorno se considera que a superfície é isolada termicamente.

### 5-) Formação das matrizes dos elementos $[K_\phi]^e$ ( bloco 5 )

A matriz geral dos elementos é dada pela Equação (3.56), sendo que o parâmetro  $\delta$  que aparece nessa Equação é apresentado na Tabela 3.1. A matriz do elemento  $[K_\phi]^e$ , pode ser calculada para  $[K_\psi]^e$ ,  $[K_\theta]^e$  e  $[K_\omega]^e$  dadas, respectivamente, pelas equações (3.62), (3.68) e (3.75).

#### 6-) Formação das matrizes globais $[\bar{K}_\phi]$ ( bloco 6 )

Conforme mostrado pela Equação (B.37), a matriz geral global  $[\bar{K}_\phi]$  pode ser formada a partir das respectivas matrizes dos elementos. Dessa maneira são formadas as matrizes globais  $[\bar{K}_\psi]$ ,  $[\bar{K}_\theta]$ ,  $[\bar{K}_\omega]$  a partir das respectivas matrizes dos elementos.

#### 7-) Cálculo da distribuição da função corrente ( bloco 7 )

Resolvendo-se o sistema global de equações lineares dados pela Equação (3.80), obtém-se a distribuição da função corrente  $\psi$  em todo domínio fluido, lembrando que no domínio sólido tem-se  $\psi=0$ .

#### 8-) Cálculo da distribuição da vorticidade no interior ( bloco 8 )

Resolvendo-se o sistema global de equações lineares dada pela Equação (3.82), obtém-se a distribuição da vorticidade no interior do domínio fluido. Na solução da Equação (3.82), consideram-se conhecidas as vorticidades nos pontos nodais da interface do domínio sólido e fluido. No interior do sólido a vorticidade é zero.

#### 9-) Cálculo da vorticidade no contorno ( bloco 9 )

Da equação matricial (C.9), do Apêndice C, obtém-se a vorticidade do fluido nos pontos nodais do contorno do domínio fluido.

#### 10-) Cálculo da distribuição da temperatura adimensional ( bloco 10 ).

Resolvendo-se o sistema de equações lineares dada pela Equação (3.81), obtém-se a distribuição da temperatura adimensional,  $\theta$ , nos domínios fluido e sólido.

11-) Cálculo dos números de Nusselt local e médio e das temperaturas médias e máximas. ( bloco 11 ).

Aplicando as Equações (2.45) e (2.46), respectivamente, é possível determinar os números de Nusselt local e médio para as superfícies das interfaces sólido-fluido dos três corpos sólidos, em função do tempo. Calculam-se também as temperaturas médias e máximas, para cada corpo sólido em função do tempo.

12-) Verificação do limite máximo de iteração ( bloco 12 )

O programa computacional verifica se o número de iterações atingiu o número máximo de iterações, valor este fornecido na leitura de dados ( bloco 1 ). Quando a igualdade é atingida o processo de cálculo é interrompido.

13-) Verificação de convergência ( bloco 13 )

Conclui-se que houve convergência ou que se atingiu o regime permanente, quando o seguinte critério é estabelecido:

$$\sum_{i=1}^n \left[ \left| \text{Nu}^{\tau} - \text{Nu}^{\tau - \Delta\tau} \right| \right] \leq 10^{-4} , \quad (3.83)$$

onde a somatória representa a soma dos n últimos valores de iteração. A somatória calcula, portanto, a diferença dos números de Nusselt médio para o tempo  $(\tau - \Delta\tau)$  e  $(\tau)$ , nas últimas n iterações. Na maioria dos casos estudados, adotou-se  $n \geq 500$ .

14-) Incremento de tempo ( bloco 14 )

Se o critério dado na Equação (3.83) for obedecido, o processo de cálculo é interrompido. Caso contrário, o tempo é incrementado e o processo de cálculo é iniciado a partir de A ( ver Figura 3.1 ).

#### 15-) Imprimir resultados ( bloco 15 )

Os resultados para as distribuições de  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\omega$ , bem como os números de Nusselt médio e as temperaturas médias e máximas de cada corpo são impressos para cada tempo  $\tau$ .

A seguir, no Capítulo 4, serão apresentados os testes de validações do programa computacional desenvolvido. Os resultados calculados serão comparados com os valores encontrados na literatura. Após a validação do programa computacional, apresentada no Capítulo 4, serão apresentados no Capítulo 5 os resultados para os casos de convecção mista estudados neste trabalho.

## **4. VALIDAÇÃO DOS MODELOS NUMÉRICOS**

### **4.1. INTRODUÇÃO**

Nesse capítulo, apresentam-se os resultados referentes a três casos testes de validação. Estes testes têm a finalidade de validar os métodos utilizados bem como os programas computacionais desenvolvidos neste trabalho, onde se utilizou o método de elementos finitos para a solução numérica aproximada das equações de conservação, em termos da função corrente,  $\psi$ , da temperatura adimensional,  $\theta$ , e da vorticidade  $\omega$ .

### **4.2. VALIDAÇÃO 1 – CONVECÇÃO NATURAL NUMA CAVIDADE QUADRADA**

A primeira validação estuda o escoamento do fluido e a transferência de calor por convecção natural numa cavidade quadrada. Foram feitas comparações do número de Nusselt médio deste trabalho com diversas referências da literatura. As Figuras 4.1 e 4.2 mostram uma cavidade quadrada e as condições de contorno utilizadas, respectivamente, na forma dimensional e adimensional. Esta geometria e condições de contorno serão utilizadas no teste do programa computacional. A superfície vertical do lado esquerdo é mantida fria a uma temperatura constante  $T_c$ . A superfície vertical do lado direito é mantida quente a uma temperatura constante  $T_h$ . As superfícies horizontais são isoladas termicamente.

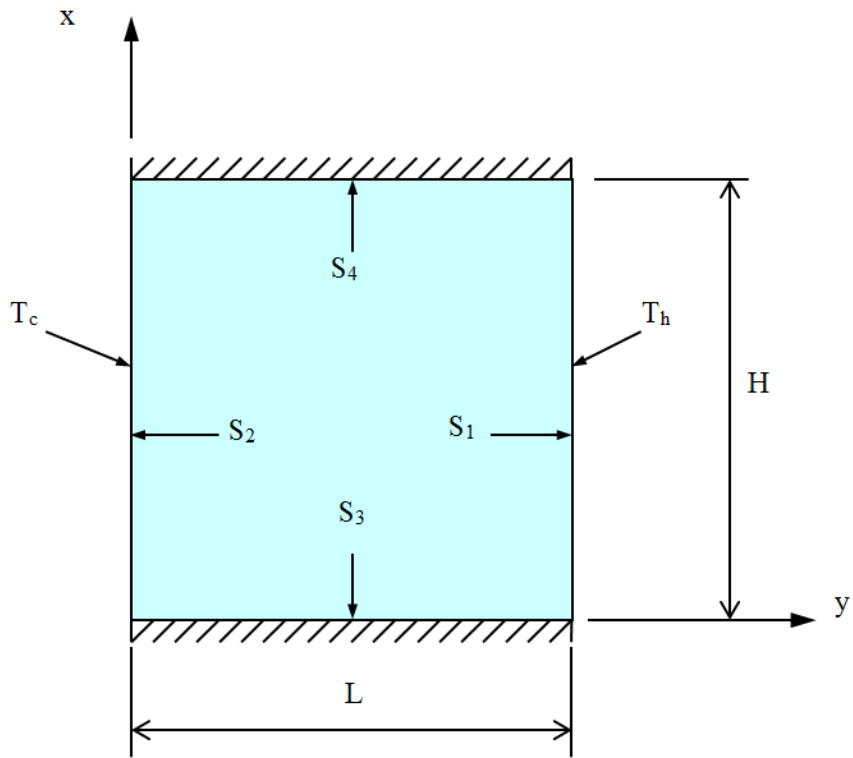


Figura 4.1 – Geometria e condições de contorno dimensionais.

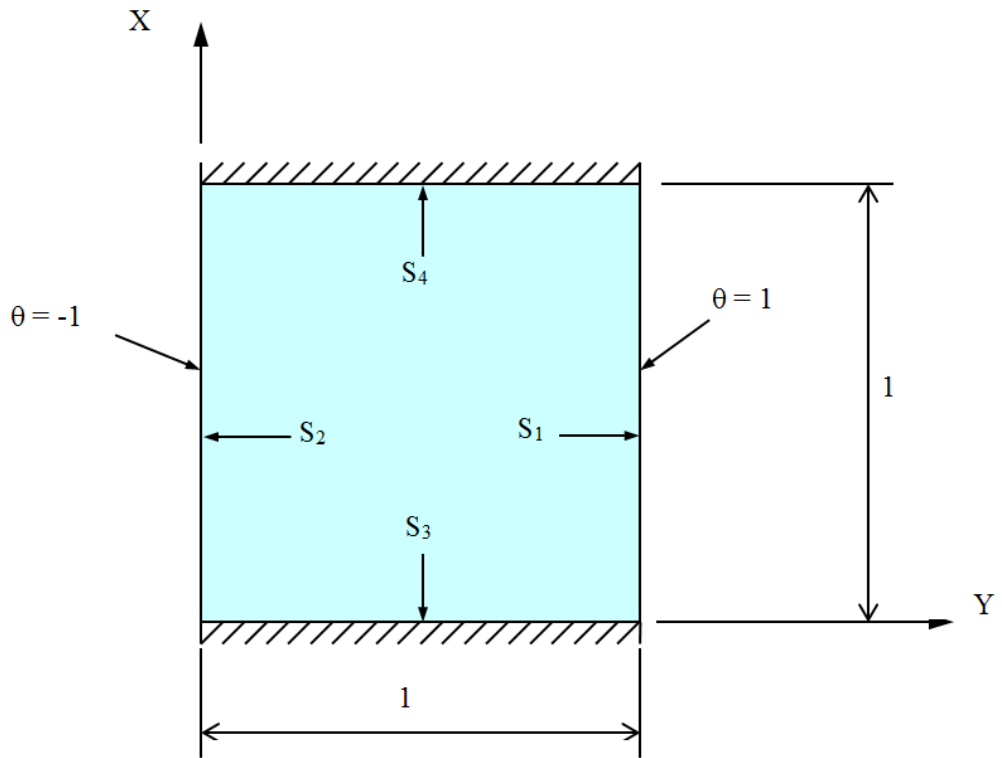


Figura 4.2 – Geometria e condições de contorno adimensionais.



### 4.2.1. Equações de Conservação na Forma Adimensional para o Fluido em Termos de $\psi$ , $\theta$ e $\omega$

As equações de conservação para o estudo de convecção natural no domínio fluido em cavidade quadrada têm as seguintes hipóteses:

a) O regime é não permanente;

b) O escoamento é bidimensional e laminar;

c) O escoamento é incompressível;

d) A função dissipação viscosa é desprezada;

e) As propriedades físicas do fluido ( $\rho_f, \mu_f, \nu_f, c_{pf}, \alpha_f, k_f$ ) são constantes, exceto a massa específica  $\rho_f$  nos termos de empuxo;

f) Não existe geração de energia interna no fluido.

Com as hipóteses anteriores, as equações em termos de  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\omega$ , respectivamente, para o domínio fluido podem ser vista em Pinto (2007), como sendo:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \omega = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) + \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} \right) + \frac{Gr}{2} \frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{\partial \omega}{\partial \tau}. \quad (4.3)$$

A temperatura adimensional  $\theta$  para o caso de convecção natural é definida como:

$$\theta = \frac{T - T_o}{T_h - T_o}. \quad (4.4)$$

Sendo  $T_c$  a temperatura da superfície fria,  $T_h$  a temperatura da superfície quente e  $T_o = (T_h + T_c)/2$ .

#### 4.2.2. Condições Iniciais e de Contorno na Forma Adimensional

As condições iniciais e de contorno, na forma adimensional, correspondentes às equações (4.1), (4.2) e (4.3), conforme a Figura 4.2 são:

condições iniciais:

para  $\tau = 0$ :

$$\psi = \theta = \omega = 0 \quad (\text{em } \Omega), \quad (4.5)$$

condições de contorno:

para  $\tau > 0$ :

$$\theta = 1 \quad (\text{em } S_1), \quad (4.6a)$$

$$\theta = -1 \quad (\text{em } S_2), \quad (4.6b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \quad (\text{em } S_3 \text{ e } S_4), \quad (4.6c)$$

$$\psi = 0 \quad (\text{em } S_1, S_2, S_3 \text{ e } S_4), \quad (4.6d)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad (\text{em } S_1, S_2, S_3 \text{ e } S_4), \quad (4.6e)$$

$$\omega = \omega_M \quad (\text{em } S_1, S_2, S_3 \text{ e } S_4). \quad (4.6f)$$

Sendo que  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  e  $S_4$  são as superfícies no contorno do domínio  $\Omega$ , mostradas na Figura 4.2. A equação (4.5) estabelece as condições iniciais para  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\omega$  em todo o domínio  $\Omega$ . As equações (4.6a) e (4.6b) estabelecem que as temperaturas adimensionais baixa e alta são respectivamente -1 e 1. A equação (4.6c) indica que o fluxo de calor através das superfícies  $S_3$  e  $S_4$  são nulos. As equações (4.6d) e (4.6e) estabelecem, respectivamente, as

condições de impermeabilidade e aderência no contorno. Na equação (4.6f),  $\omega_M$  representa a vorticidade do fluido junto ao contorno, calculado pelo método matricial mostrado no Apêndice D.

### 4.2.3. Números de Nusselt Local e Médio

Neste item são apresentadas as equações para o cálculo dos números de Nusselt local e médio para o caso de convecção natural em cavidade. As definições dos números de Nusselt local e médio são apresentadas por Brito (1999), pelas seguintes relações:

Número de Nusselt local para a superfície S, onde S pode ser a superfície  $S=S_1$  ou  $S=S_2$ :

$$Nu_L = \frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_S, \quad (4.7)$$

Número de Nusselt médio para as superfícies  $S=S_1$  ou  $S=S_2$ :

$$Nu = \frac{1}{S} \int_S Nu_L \Big|_S dS. \quad (4.8)$$

### 4.2.4. Estudo de Malhas

As malhas utilizadas para a cavidade quadrada foram estruturadas e uniformes. A Figura 4.3 mostra uma malha utilizada com  $M=51$  pontos na direção X, e  $N=51$  pontos na direção Y. Esta malha apresenta 5000 elementos e 2601 pontos nodais.

Foram testadas várias malhas, para verificar a influência do refinamento das malhas nos resultados para o Nusselt médio na superfície fria,  $Nu_c$ .

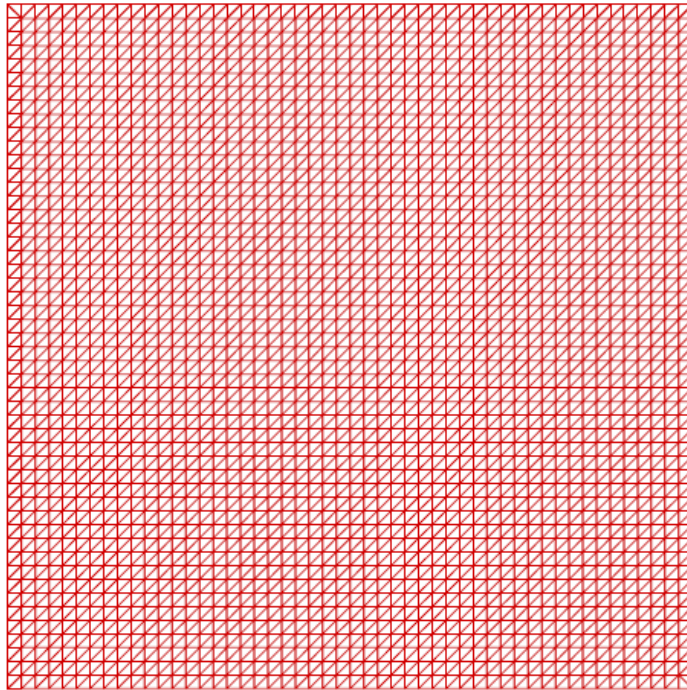


Figura 4.3 - Malha para a cavidade quadrada com 5000 elementos e 2601 nós.

A Figura 4.4 mostra o número de Nusselt médio na superfície fria,  $Nu_c$ , versus o número de elementos, NE. A finalidade dessa figura é verificar qual é o número de elementos que é necessário para se atingir a convergência nos resultados do número de Nusselt médio na superfície fria,  $Nu_c$ . Para se ter confiabilidade nos resultados, é necessário verificar também a influência dos diversos parâmetros envolvidos no problema. Nessa figura são tomados os casos mais críticos da análise. Considera-se uma cavidade quadrada, o fluido no interior da cavidade é o ar com número de Prandtl  $Pr=0,733$ , e escolheu-se um número de Grashof relativamente baixo ( $Gr=20000$ ) e um número de Grashof alto ( $Gr=341064$ ).

Na Figura 4.4 verifica-se que o número de Nusselt tende a convergir, quando se aumenta o número de elementos NE. Para número de Grashof baixo ( $Gr=20000$ ) verifica-se que a variação do número de Nusselt médio da superfície fria  $Nu_c$  é muito pequena. Para este número de Grashof baixo, com relativamente poucos elementos, já se obtém convergência nos resultados do número de Nusselt médio, não necessitando de uma malha muito refinada. Já para número de Grashof alto ( $Gr=341064$ ), é necessário usar uma malha mais refinada para se obter a convergência do número de Nusselt.

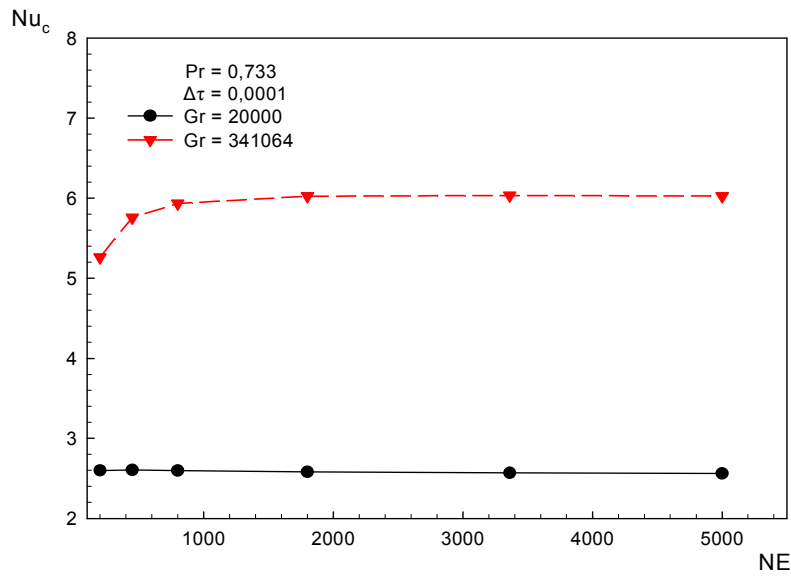


Figura 4.4 – Número de Nusselt médio na superfície fria,  $Nu_c$ , versus número de elementos, NE.

O aumento do número de elementos produz resultados mais precisos, entretanto, o aumento do número de elementos implica num aumento do tempo de processamento. Assim, nesse ponto há necessidade de escolher entre a precisão requerida e o custo computacional adequado. Neste estudo de malha para cavidade quadrada escolheu-se a malha 51x51, com 5000 elementos e 2601 pontos nodais, para todos os cálculos apresentados a seguir.

#### 4.2.5. Distribuições de Temperatura e da Função Corrente

A Figura 4.5 mostra as distribuições da temperatura adimensional,  $\theta$  (THETA) e da função corrente,  $\psi$  (PSI), considerando número de Prandtl fixado em  $Pr=0,733$ ; para baixo número de Grashof ( $Gr=20000$ ), à esquerda, e alto número de Grashof ( $Gr=341064$ ), à direita.

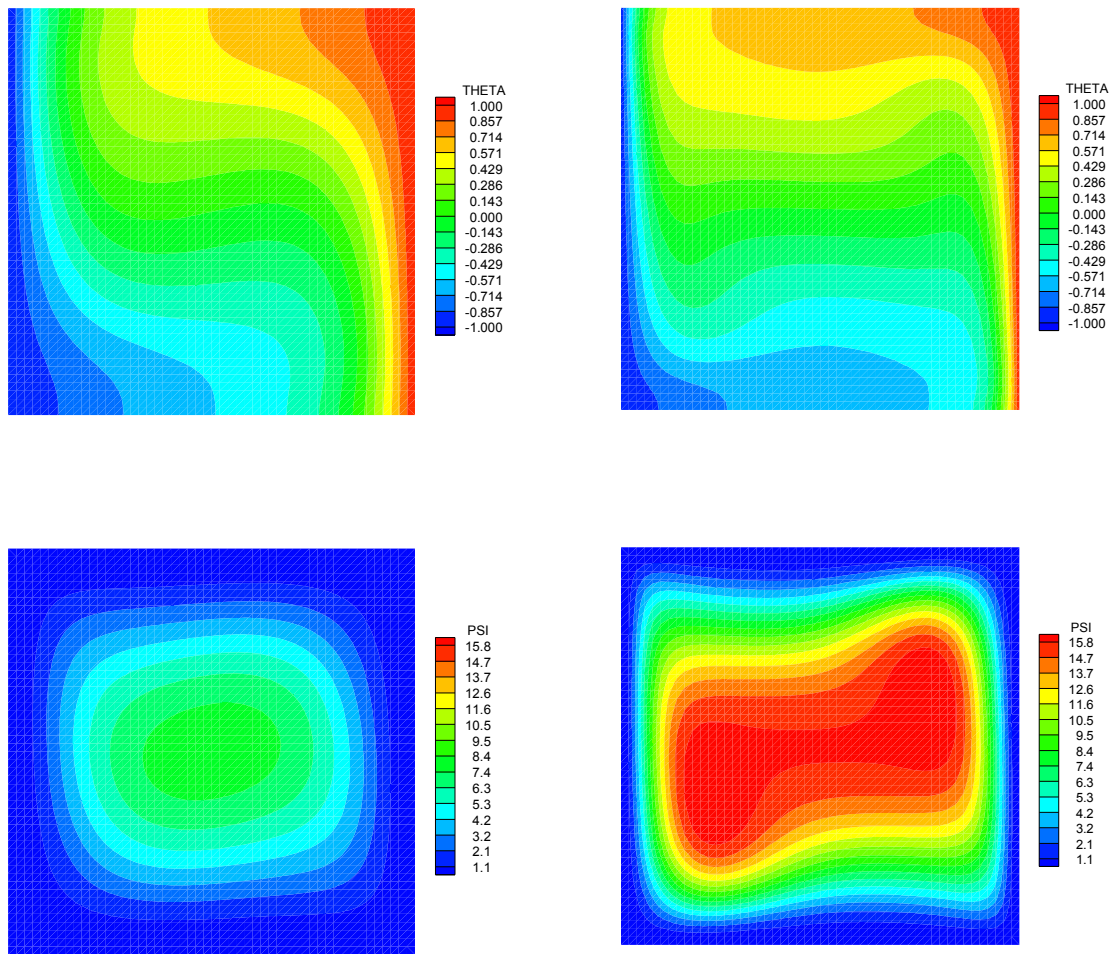


Figura 4.5 – Distribuição de temperatura,  $\theta$  (THETA) e função corrente,  $\psi$  (PSI) para  $Pr=0,733$  e  $Gr = 20000$ , à esquerda,  $Gr = 341064$ , à direita.

#### 4.2.6. Comparação de Resultados do Número de Nusselt

As comparações de resultados desse trabalho com outros publicados na literatura são apresentadas nas Tabelas 4.1a e 4.1b, as quais mostram o número de Nusselt médio na superfície fria,  $Nu_c$ , e os desvios em percentuais.

A Tabela 4.1a faz uma comparação dos resultados do presente trabalho com os de Figueredo *et al.* (1986), Wong e Raithby (1979). A Tabela 4.1b compara os resultados com os trabalhos de Brito (1999) e Souza (2006). Os valores do número de Grashof,  $Gr$ , usados foram: 34110; 60000; 100000; 136430 e 341064. O número de Prandtl  $Pr$  foi fixado como  $Pr=0,733$ . Figueredo *et al.* (1986), Wong e Raithby (1979) e Souza (2006), utilizaram o

método de diferenças finitas para solução das equações de conservação, enquanto que, Brito (1999) utilizou o método de elementos finitos.

Tabela 4.1a - Comparação do número de Nusselt com valores obtidos em diversos trabalhos.

Gr	Presente Trabalho	Figueredo <i>et al.</i> (1986)		Wong e Raithby (1979)	
		Nu <sub>c</sub>	Desvio [%]	Nu <sub>c</sub>	Desvio [%]
34.110	3,016	2,884	-4,57	2,972	-1,48
60.000	3,579	3,468	-3,20	-	-
100.000	4,180	4,160	-0,48	-	-
136.430	4,592	4,686	2,00	4,510	-1,82
341.064	6,027	-	-	5,920	-1,81
		Média	2,56	Média	1,70

Tabela 4.1b - Comparação do número de Nusselt com valores obtidos em diversos trabalhos.

Gr	Presente Trabalho	Brito (1999)		Souza (2006)	
		Nu <sub>c</sub>	Desvio [%]	Nu <sub>c</sub>	Desvio [%]
34.110	3,016	3,023	0,23	2,912	-3,57
60.000	3,579	3,588	0,25	3,456	-3,56
100.000	4,180	4,190	0,24	4,038	-3,52
136.430	4,592	4,602	0,22	4,440	-3,42
341.064	6,027	6,033	0,10	5,945	-1,38
		Média	0,21	Média	3,09

Figueredo *et al.* (1986) usaram uma malha 21 x 21 pontos nodais e Wong e Raithby (1979) usaram duas malhas: uma de 22 x 22 e outra de 42 x 42 pontos nodais. Wong e Raithby (1979), para a malha de 22 x 22, usaram os seguintes valores de número de Grashof: 136430 e 341070. Para o valor de número de Grashof Gr = 34110, Wong e Raithby (1979) usaram uma malha de 42 x 42 pontos nodais.

Souza (2006) utilizou uma malha de 51 x 51 pontos nodais, enquanto que Brito (1999) utilizou uma malha de 41 x 41. Tanto Souza (2006) quanto Brito (1999) utilizaram os seguintes valores de Grashof: 34110; 60000; 100000; 136430 e 341070.

O menor desvio do número de Nusselt médio, Nu<sub>c</sub>, encontrado nas Tabelas 4.1a e 4.1b foi de 0,10% para Gr = 341064, em relação ao valor obtido por Brito (1999). Para o maior desvio, o valor foi de -4,57%, para Gr = 34110, em relação ao valor obtido por Figueredo *et al.* (1986).

### 4.3. VALIDAÇÃO 2 – ESCOAMENTO NUM DUTO COM DEGRAU NA ENTRADA

Para a segunda validação foi realizado um estudo hidrodinâmico do escoamento num duto com um degrau na entrada. A comparação é realizada com resultados experimentais apresentados por Lee e Mateescu (1998) e Armaly *et al.* (1983), e com resultados numéricos de Gartling (1990), Kim e Moin (1985), Lee e Mateescu (1998) e Guimarães (2007).

A Figura 4.6 apresenta a geometria do duto com coordenadas adimensionais. O duto tem altura unitária e comprimento  $A=30$ . A origem do sistema de eixos está localizada na metade da geometria. As condições iniciais são de velocidades nulas e pressão igual a 1 em todo o domínio do fluido.

A entrada do escoamento ocorre na superfície  $S_1$  onde o fluido entra com um perfil de velocidades parabólico dado pela expressão  $U = 24Y(0,5 - Y)$  e  $V=0$ . Nas paredes, representadas pelas superfícies  $S_2$ ,  $S_3$  e  $S_4$ , as componentes de velocidades são nulas, isto é,  $U=V=0$ . A superfície de saída  $S_5$  apresenta condições de contorno de escoamento desenvolvido, isto é,  $\partial U / \partial X = 0$ . O número de Reynolds do escoamento é fixado em  $Re=800$ , sendo  $Re = UH/v$ , onde  $H$  é a altura do duto e  $v$  a viscosidade cinemática do fluido.

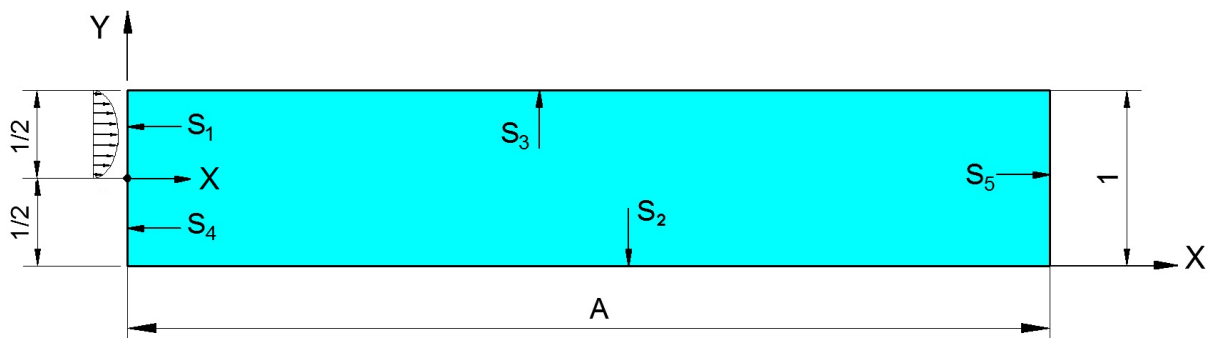


Figura 4.6 – Geometria com coordenadas adimensionais.

#### 4.3.1. Equações de Conservação na Forma Adimensional para o Fluido

As equações de conservação para o presente estudo do escoamento num duto com um degrau na entrada considerou as seguintes hipóteses:



- a) O regime é não permanente;
- b) O escoamento é bidimensional e laminar;
- c) O escoamento é incompressível;

Com as hipóteses anteriores, as equações em termos de  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\omega$ , respectivamente, para o domínio fluido são dadas por:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \omega = 0, \quad (4.9)$$

$$\frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) + \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} \right) = \frac{\partial \omega}{\partial \tau}, \quad (4.10)$$

#### 4.3.2. Condições Iniciais e de Contorno na Forma Adimensional

A Figura 4.7 mostra a geometria com coordenadas adimensionais utilizadas no presente trabalho. Deve-se observar que o eixo de coordenadas X foi colocado para a base do duto.

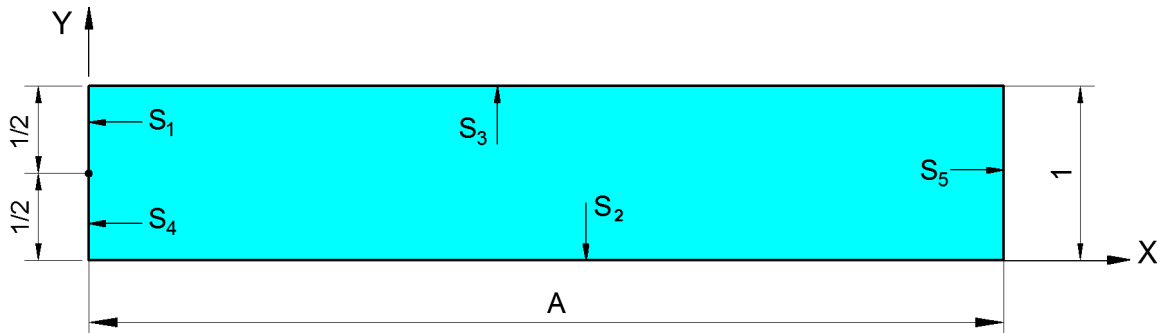


Figura 4.7 – Geometria com coordenadas adimensionais do presente trabalho.

No presente trabalho como foram utilizadas as variáveis independentes  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\omega$ . As condições iniciais e de contorno, apresentadas de acordo com a Figura 4.7 são:

condições iniciais:

para  $\tau = 0$ :

$$\psi = \theta = \omega = 0 \quad (\text{em } \Omega ), \quad (4.11)$$

condições de contorno:

para  $\tau > 0$  :

$$\psi = 6(Y - 0,5)^2 - 8(Y - 0,5)^3 \quad \omega = 48(Y - 0,5) - 12 \quad (\text{em } S_1), \quad (4.12a)$$

$$\psi = 0 \quad \omega = \omega_M \quad (\text{em } S_2 \text{ e } S_4), \quad (4.12b)$$

$$\psi = 0,5 \quad \omega = \omega_M \quad (\text{em } S_3), \quad (4.12c)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} = 0 \quad \frac{\partial \omega}{\partial X} = 0 \quad (\text{em } S_5), \quad (4.12d)$$

Nas equações (4.12b) e (4.12c),  $\omega_M$  representa a vorticidade do fluido junto ao contorno, calculado pelo método matricial mostrado no Apêndice D.

### 4.3.3. Estudo de Malhas

No trabalho de Guimarães (2007) foram utilizados os parâmetros: número de Reynolds 800 e malha com 6000 elementos finitos quadrilaterais.

A Figura 4.8 apresenta a malha parcial utilizada neste trabalho. No presente trabalho foi utilizado o número de Reynolds 800. A malha de elementos finitos triangular utilizada para validação é estruturada e uniforme e apresenta  $M=151$  pontos na direção  $X$ , e  $N=21$  pontos na direção  $Y$ , com 6000 elementos e 3171 pontos nodais.

A Figura 4.9 mostra as distâncias  $X_s$ ,  $X_{rs}$  e  $X_r$  medidas na região de entrada do duto para comparação com várias referências. Somente parte do duto é mostrada.

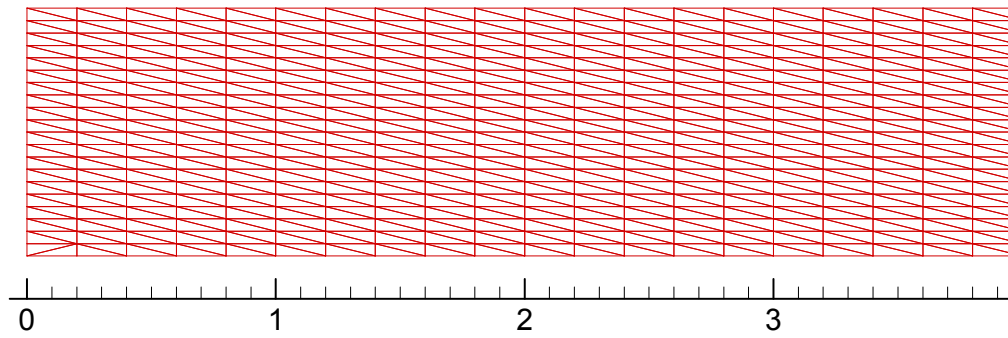
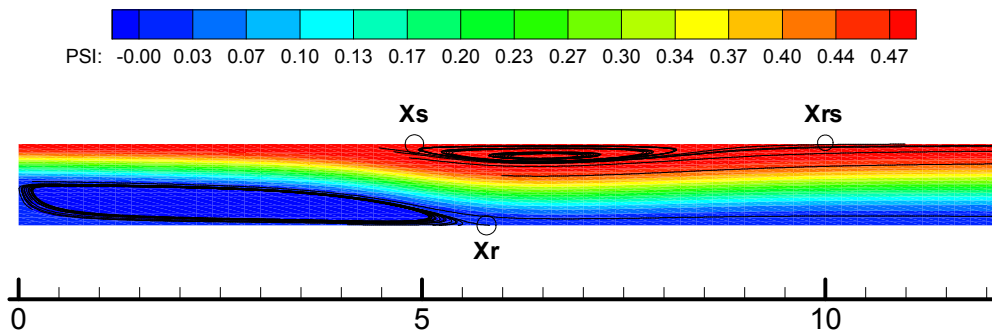


Figura 4.8 – Malha parcial utilizada.

Figura 4.9 – Distâncias medidas para  $X_s$ ,  $X_{rs}$  e  $X_r$  na região de entrada do duto.

A Tabela 4.2 mostra a comparação dos resultados para as distâncias de separação  $X_s$ , as distâncias de recolamento na parede superior  $X_{rs}$  e as distâncias de recolamento na parede inferior  $X_r$ . Os valores para estas distâncias foram obtidos na Figura 4.9. São apresentados também os desvios em % com relação ao presente trabalho.

Tabela 4.2 – Comparação dos resultados do presente trabalho com valores numéricos e experimentais.

		Resultados experimentais		Resultados numéricos				
		Lee e Mateescu (1998)	Armaly <i>et al.</i> (1983)	Presente trabalho	Gartling (1990)	Kim e Moin (1985)	Lee e Mateescu (1998)	Guimarães (2007)
Parede inferior	$X_r$	6,45 (10,85 %)	7,0 (17,85 %)	5,75 -	6,10 (5,73 %)	6,0 (4,16 %)	6,0 (4,16 %)	5,75 (0,00 %)
Parede superior	$X_s$	5,15 (3,88 %)	5,7 (13,15 %)	4,95 -	4,85 (-2,06 %)	-	4,8 (-3,12 %)	4,95 0,00 %
Parede superior	$X_{rs}$	10,25 (2,43 %)	10,0 (0,00 %)	10,0 -	10,48 (4,48)	-	10,3 (2,91 %)	9,90 (-1,01 %)
	$X_{rs}-X_s$	5,10 (0,98 %)	4,3 (-17,44 %)	5,05 -	5,63 (10,30 %)	5,75 (12,17 %)	5,5 (8,18 %)	4,95 (-2,02 %)
Reynolds		805	800	800	800	800	800	800

Na Tabela 4.2 os desvios médios em % foram: para ( $X_r$ ) 7,12%; para ( $X_s$ ) 4,44 %; para ( $X_{rs}$ ) 2,17 % e para ( $X_{rs}-X_s$ ) 8,51%.

## 4.4. VALIDAÇÃO 3 – CONVECÇÃO MISTA NUM DUTO COM AQUECIMENTO NA PAREDE INFERIOR

### 4.4.1. Introdução

Para a terceira validação foi realizado um estudo do escoamento e da transferência de calor num duto com aquecimento na parede inferior e resfriamento na parede superior. Os resultados do número de Nusselt médio deste trabalho foram comparados com os resultados do trabalho de Comini *et al.* (1997) e de Oliveira (2005).

A Figura 4.10 apresenta a geometria do duto utilizado nesta comparação usando coordenadas adimensionais. O comprimento do duto é  $A=5$  e a altura é 1.

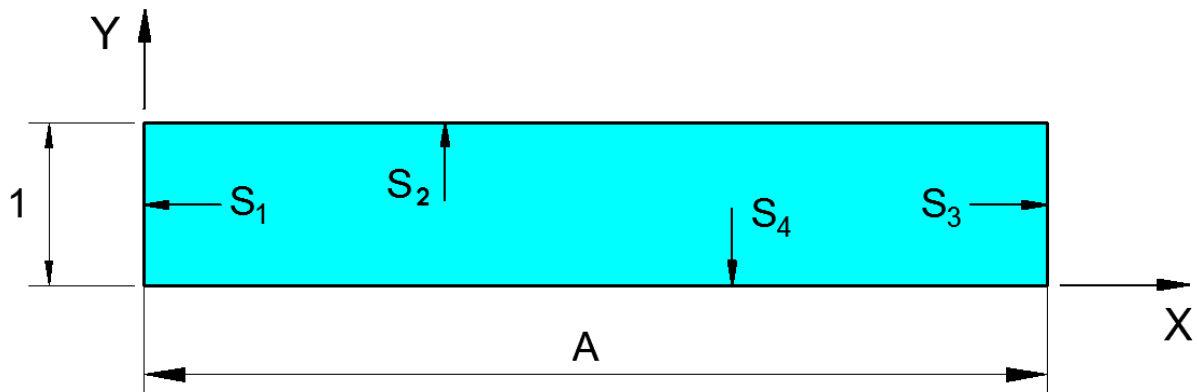


Figura 4.10 – Geometria adimensional e condições de contorno.

### 4.4.2. Equações de Conservação na Forma Adimensional para o Fluido

As equações de conservação para o estudo de convecção mista num duto considerou as seguintes hipóteses:

- a) O regime é não permanente;
- b) O escoamento é bidimensional e laminar;
- c) O escoamento é incompressível;
- d) A função dissipação viscosa é desprezada;
- e) As propriedades físicas do fluido ( $\rho_f, \mu_f, \nu_f, c_{p_f}, \alpha_f, k_f$ ) são constantes, exceto a massa específica  $\rho_f$  nos termos de empuxo;
- f) Não existe geração de energia interna no fluido.

Com as hipóteses anteriores, as equações em termos de  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\omega$ , respectivamente, para o domínio fluido são dadas por:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \omega = 0, \quad (4.13)$$

$$\frac{1}{Pr Re} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) + \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad (4.14)$$

$$\frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) + \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} \right) + \frac{Gr}{Re^2} \frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{\partial \omega}{\partial \tau}, \quad (4.15)$$

#### 4.4.3. Condições Iniciais e de Contorno na Forma Adimensional

No trabalho de Oliveira (2005) foi utilizado o método de volumes finitos utilizando variáveis primitivas ( $U, V, P, T$ ). As condições iniciais utilizadas foram: Para  $t=0$  tem-se  $U=V=P=T=0$ . As condições de contorno nas superfícies  $S_1, S_2, S_3$  e  $S_4$ , mostradas na Figura 4.10 foram as seguintes: Na superfície de entrada  $S_1$  o perfil de velocidades é parabólico dado por  $U = 6Y(1 - Y)$  e o perfil de temperaturas é linear dado por  $T = 1 - Y$ . Na superfície fria  $S_2$ , as componentes de velocidades são nulas, isto é,  $U=V=0$ , e a temperatura é constante  $T=0$ . Na superfície quente  $S_4$ , as componentes de velocidades são nulas, isto é,  $U=V=0$ , e a

temperatura é constante  $T=1$ . Na superfície de saída  $S_3$  tem-se as condições de escoamento desenvolvido  $\partial U/\partial X = \partial T/\partial X = 0$ .

No presente trabalho como foram utilizadas as variáveis independentes  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\omega$  as condições iniciais e de contorno mostradas na Figura 4.10 são:

condições iniciais:

para  $\tau = 0$ :

$$\psi = \theta = \omega = 0 \quad (\text{em } \Omega), \quad (4.16)$$

condições de contorno:

para  $\tau > 0$ :

$$\psi = 3Y^2 - 2Y^3 \quad \theta = 1 - Y \quad \omega = 12Y - 6 \quad (\text{em } S_1), \quad (4.17a)$$

$$\psi = 1 \quad \theta = 0 \quad \omega = \omega_M \quad (\text{em } S_2), \quad (4.17b)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \quad \frac{\partial \omega}{\partial n} = 0 \quad (\text{em } S_3), \quad (4.17c)$$

$$\psi = 0 \quad \theta = 1 \quad \omega = \omega_M \quad (\text{em } S_4), \quad (4.17d)$$

Na equação (4.17d),  $\omega_M$  representa a vorticidade do fluido junto ao contorno, calculado pelo método matricial mostrado no Apêndice D.

#### 4.4.4. Estudo de Malhas

Os parâmetros utilizados no trabalho de Oliveira (2005) foram: número de Reynolds 10, número de Prandtl 0,67 e número de Grashof 15.000. Foi utilizada uma malha com 3600 volumes finitos. O incremento de tempo adimensional foi 0,01 e os resultados do número de Nusselt médio foram até o tempo adimensional 20.

No presente trabalho foram utilizados os mesmos parâmetros de Oliveira (2005). Após realizar testes de malhas, a malha escolhida é aquela apresentada na Figura 4.11. A malha de

elementos finitos utilizada para validação é estruturada e uniforme e apresenta  $M=75$  pontos na direção X, e  $N=15$  pontos na direção Y, com 2072 elementos e 1125 pontos nodais.

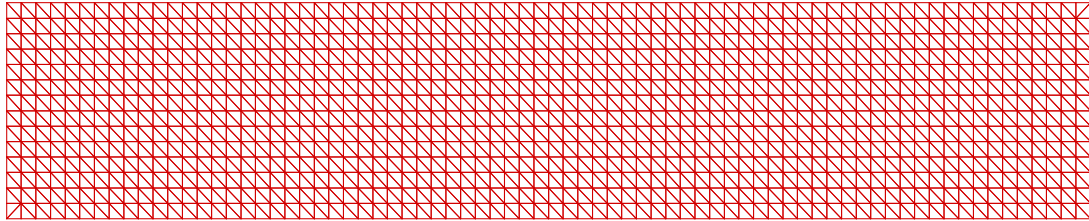


Figura 4.11 – Malha utilizada neste trabalho com 2072 elementos e 1125 pontos nodais.

#### 4.4.5. Distribuições de temperaturas e campo de velocidades

A Figura 4.12 apresenta a distribuição de temperaturas e o campo de velocidades do escoamento do ar no interior do duto. A escala de temperaturas (THETA) permite visualizar a temperatura adimensional do fluido, e as setas indicam os vetores velocidades locais do fluido. Na superfície horizontal inferior o fluido é aquecido e apresenta altas temperaturas, e na superfície horizontal superior o fluido é resfriado e apresenta baixas temperaturas. Esta diferença de temperaturas impostas nas paredes promove um mecanismo de convecção natural formando recirculações do fluido. Superposto ao mecanismo de convecção natural, existe o mecanismo de convecção forçada, imposto pela entrada de fluido na superfície vertical esquerda. O escoamento global do fluido, chamado de convecção mista, apresenta um escoamento oscilatório não permanente, o qual não atinge o regime permanente.

A Figura 4.13 apresenta a mesma distribuição de temperaturas e campo de velocidades da Figura 4.12, entretanto, são apresentadas as linhas contínuas, em cor preta, que são as linhas de corrente. Na Figura 4.13 pode ser visto o escoamento principal formado pelo escoamento entre as linhas de corrente, e o escoamento secundário formado pelo escoamento rotativo do fluido.

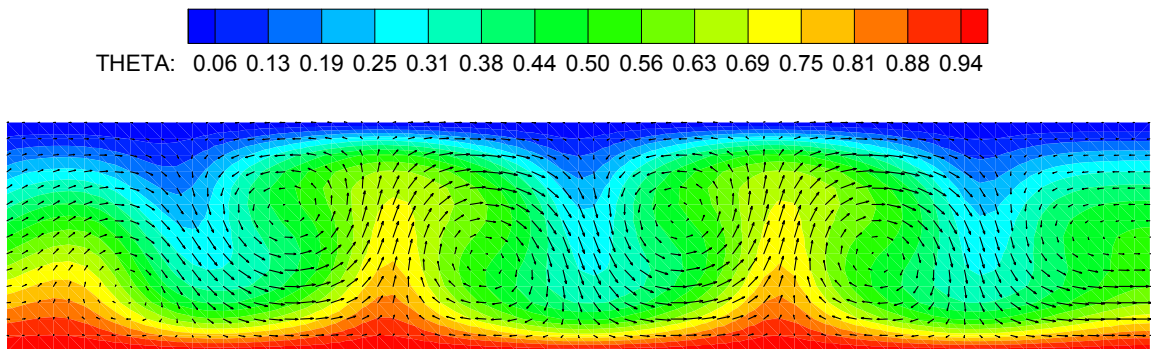


Figura 4.12 – Distribuições de temperaturas adimensionais e velocidades do fluido.

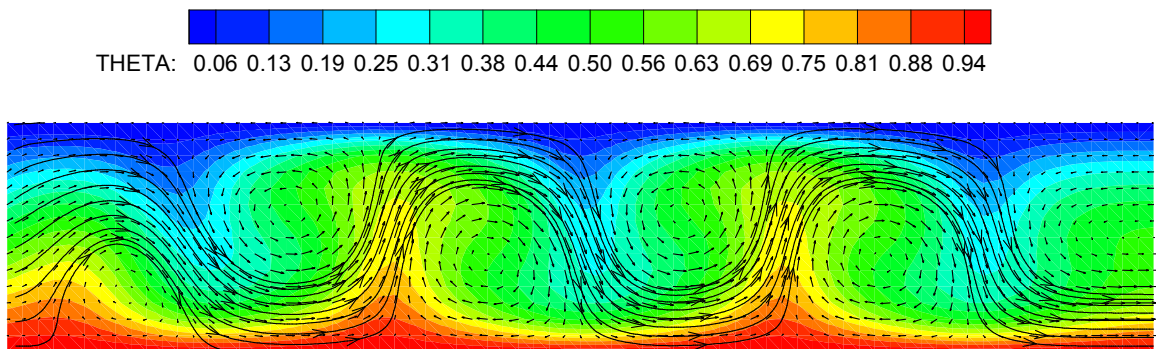


Figura 4.13 – Distribuições de temperaturas adimensionais, velocidades e linhas de corrente.

#### 4.4.6. Número de Nusselt Médio

Para calcular o número de Nusselt médio ( $Nu$ ) na superfície quente ( $S_4$ ) foi utilizada a equação (4.18) que também foi usada por Comini *et al.* (1997) e Oliveira (2005).

$$Nu = \frac{2q'' Pr H}{\mu C_p (T_h - T_{m\acute{e}dia})} \quad (4.18)$$

Sendo  $\mu$  a viscosidade dinâmica,  $C_p$  o calor específico a pressão constante,  $T_{m\acute{e}dia}$  a temperatura média do fluido,  $H$  a altura do duto,  $q''$  o fluxo de calor na superfície horizontal inferior.



A Figura 4.14 apresenta o número de Nusselt médio ( $Nu$ ) na superfície quente versus tempo adimensional ( $\tau$ ). Como pode ser observado na Figura 4.14 a partir do tempo adimensional  $\tau$  maior que 5 o número de Nusselt apresenta um comportamento oscilatório, indicando que o regime permanente não pode ser atingido. Um comportamento semelhante foi encontrado nos trabalhos de Comini *et al.* (1997) e Oliveira (2005).

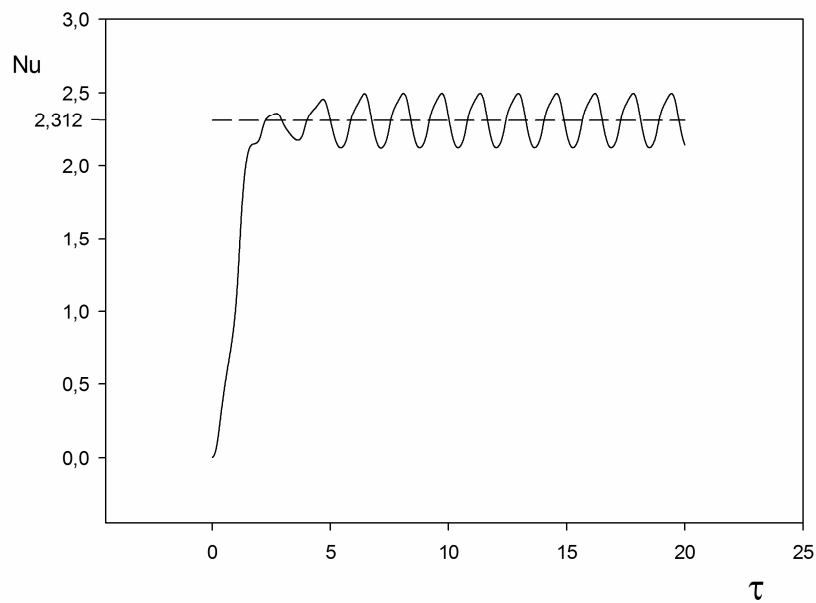


Figura 4.14 – Número de Nusselt médio na superfície quente versus tempo adimensional.

O resultado do número de Nusselt médio no tempo ( $Nu_t$ ), para  $0 \leq \tau \leq 20$ , do presente trabalho está apresentado na Tabela 4.3. Esta tabela apresenta também a comparação de resultados obtidos por Comini *et al.* (1997) e Oliveira (2005). O desvio foi de 1,19 % em relação ao trabalho de Comini *et al.* (1997), e 3,66 % em relação ao de Oliveira (2005).

Tabela 4.3 - Comparação do número de Nusselt médio no tempo ( $Nu_t$ ) com valores obtidos em outros trabalhos.

Presente Trabalho	Comini <i>et al.</i> (1997)		Oliveira (2005)	
	$Nu_t$	Desvio [%]	$Nu_t$	Desvio [%]
2,312	2,340	1,19	2,400	3,66

Neste capítulo foram apresentados três testes de validações dos métodos e dos programas desenvolvidos no presente trabalho. As comparações de resultados obtidos apresentaram em geral boa concordância com os resultados da literatura.

No capítulo seguinte os programas e métodos desenvolvidos são aplicados ao estudo de convecção mista conjugada.

## 5. RESULTADOS

### 5.1. INTRODUÇÃO

São apresentados neste capítulo os resultados numéricos do estudo realizado envolvendo o problema conjugado de transferência de calor por convecção mista que ocorre no domínio do fluido,  $\Omega_f$ , e da condução de calor com geração interna de energia que ocorre no domínio sólido,  $\Omega_s$ . A Figura 5.1 ilustra a geometria estudada (duto). As condições iniciais de contorno foram detalhadas no Capítulo 2.

O caso estudado caracteriza-se por apresentar um duto com três corpos fontes geradoras de calor em seu interior. Três geometrias diferentes foram avaliadas para o duto sendo que, a diferença entre as mesmas é somente na altura dos corpos,  $h_c$ .

Existe interesse em se determinar as distribuições de temperatura, vorticidades e da função corrente, bem como calcular a taxa de calor transferida, a temperatura máxima e média nos corpos. O valor utilizado para o número de Prandtl do ar para todos os casos foi 0,7.

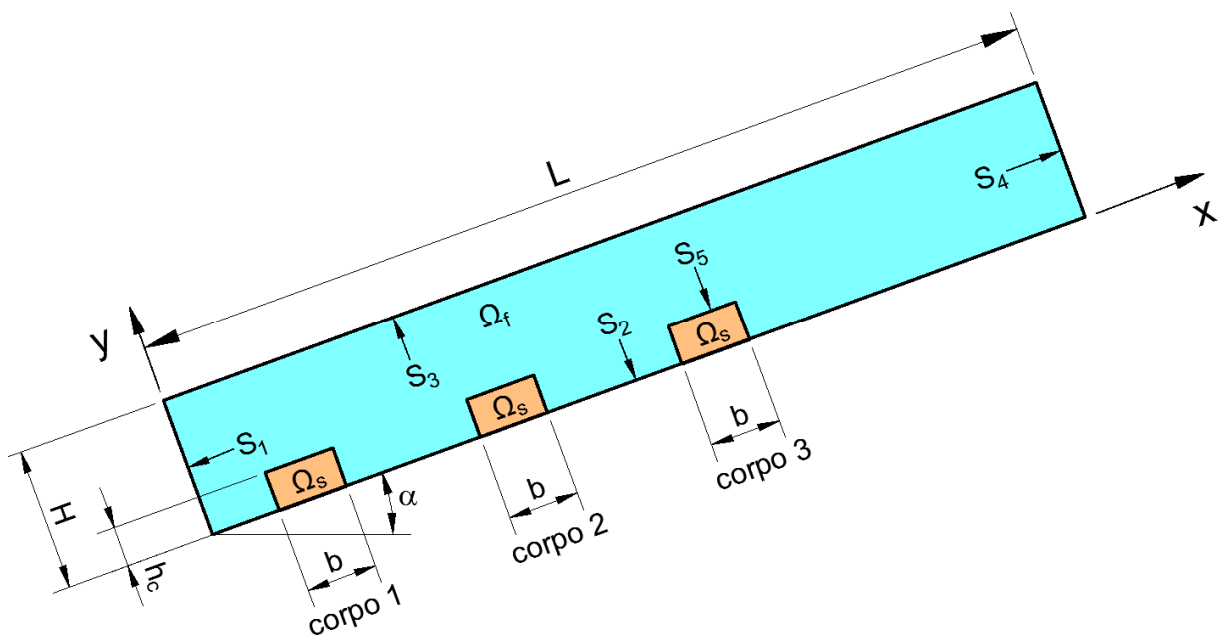


Figura 5.1 – Geometria estudada (duto).

Primeiramente, no Capítulo 4 foram realizados testes numéricos com a finalidade de validar os métodos utilizados bem como o programa computacional desenvolvido. Foram realizadas comparações dos presentes resultados com aqueles publicados na literatura. Após verificar que os modelos numéricos desenvolvidos apresentaram bons resultados, o estudo prosseguiu com o caso proposto neste trabalho.

O estudo do caso inicia-se com um estudo de malhas para cada geometria, a fim de encontrar uma malha de elementos finitos que seja independente, ou seja, o grau de refinamento da malha adotada deve produzir resultados que apresentem precisão e convergência em tempo de processamento considerado adequado aos recursos computacionais disponíveis.

A Figura 5.2 representa a geometria adimensional do duto. Com exceção do parâmetro  $H_c$  que representa a altura adimensional dos corpos, todos os demais parâmetros geométricos são fixados e estão definidos na Tabela 5.1.

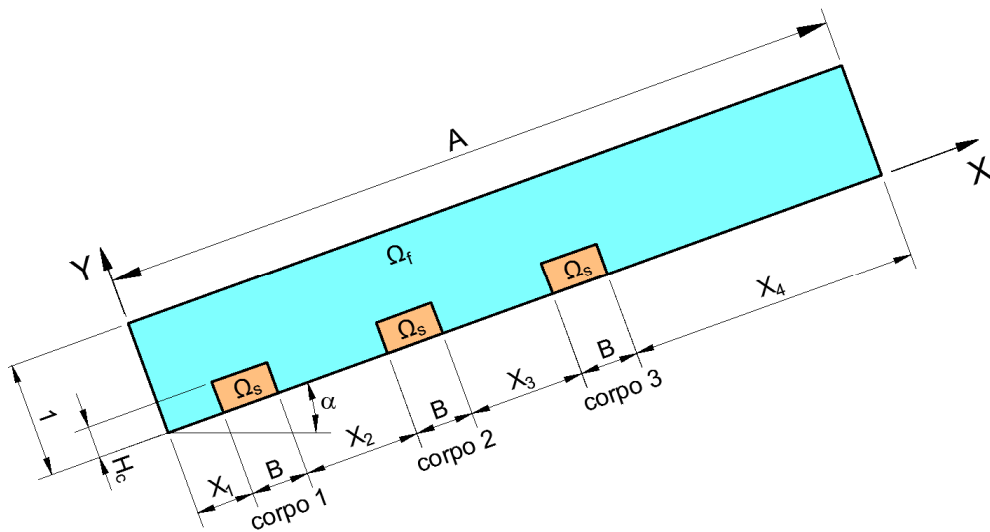


Figura 5.2 – Geometria adimensional da cavidade com corpos internos geradores de energia.

Tabela 5.1 – Coordenadas dos pontos apresentados na Figura 5.2, comuns a todas geometrias.

Comprimento adimensional	Valor adimensional
A	6,5
B	0,5
$X_1$	0,5
$X_2$	1,0
$X_3$	1,0
$X_4$	2,5

A altura dos corpos  $H_c$  é definida em valores distintos para os estudos realizados. A menor altura considerada é  $H_c = 0,075$ ; a intermediária é  $H_c = 0,100$  e a maior é  $H_c = 0,150$ .

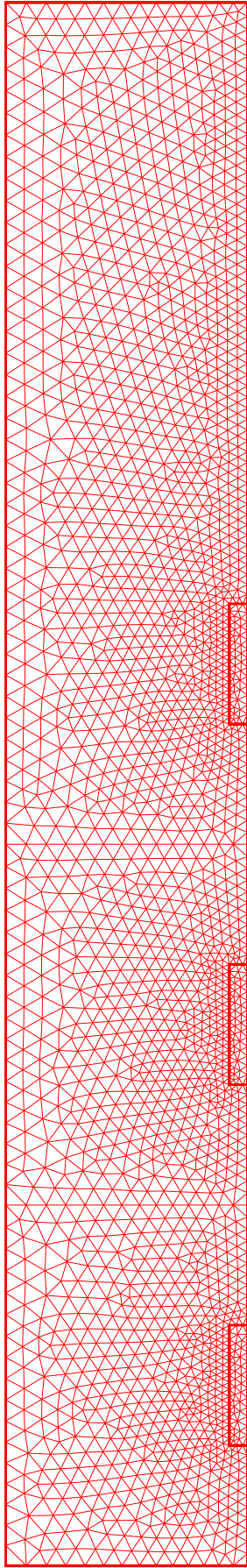
## 5.2. ESTUDO DE MALHAS

Um estudo de malhas é fundamental para a qualidade de um trabalho realizado com métodos numéricos. Neste trabalho foram desenvolvidas diversas malhas distintas não estruturadas e com elementos triangulares para cada geometria estudada, variando o grau de refinamento das mesmas. Para a geometria com altura de corpo  $H_c = 0,075$ , foram desenvolvidas sete malhas com números de elementos 4413, 5592, 6618, 7459, 8291, 11378 e 14814. A Figura 5.3 ilustra três exemplos de malhas para a altura  $H_c = 0,075$ , sendo os exemplos: a malha menos refinada (4413 elementos), uma malha intermediária (8291 elementos) e a malha mais refinada (14814 elementos).

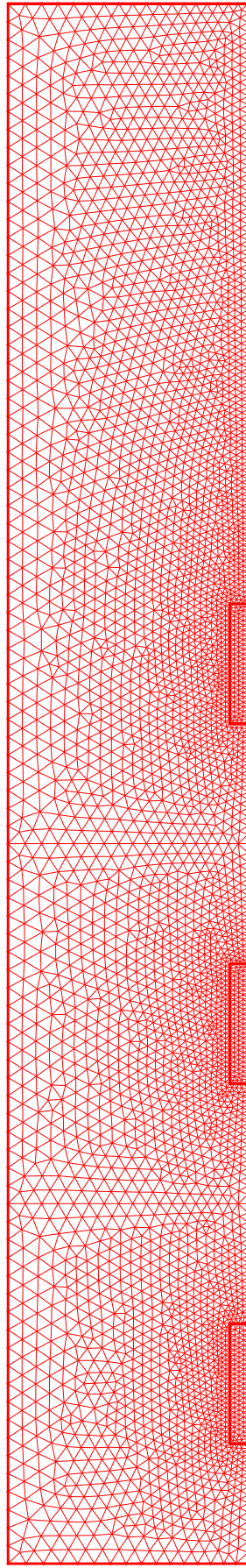
Da mesma forma, para a geometria com altura de corpo  $H_c = 0,100$  foram desenvolvidas nove malhas com números de elementos 4685, 6075, 6457, 6889, 7610, 8030, 9336, 11670 e 13681. A Figura 5.4 ilustra três exemplos de malhas para a altura  $H_c = 0,100$ , sendo os exemplos: a malha menos refinada (4685 elementos), uma malha intermediária (8030 elementos) e a malha mais refinada (13681 elementos).

Por fim, para a geometria com altura de corpo  $H_c = 0,150$  foram desenvolvidas oito malhas com números de elementos 4761, 5934, 6621, 7108, 8387, 9265, 12322 e 14184. A Figura 5.5 ilustra três exemplos de malhas para a altura  $H_c = 0,150$ , sendo os exemplos: a malha menos refinada (4761 elementos), uma malha intermediária (8387 elementos) e a malha mais refinada (14184 elementos).

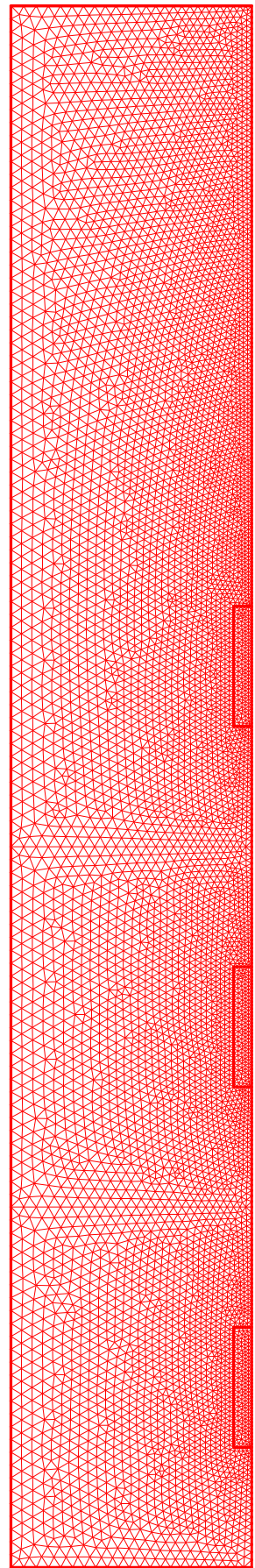
Conforme recomendado por Celik *et al.* (2008) os valores obtidos para as razões de refinamentos deste estudo de malhas são iguais ou superiores a 1,3. Isso é válido para as três geometrias, considerando a razão entre a malha intermediária e menos refinada, bem como entre a malha mais refinada e intermediária utilizadas nos exemplos das Figuras 5.3 a 5.5.



(a) Malha menos refinada, 4413 elementos, 2331 nós.

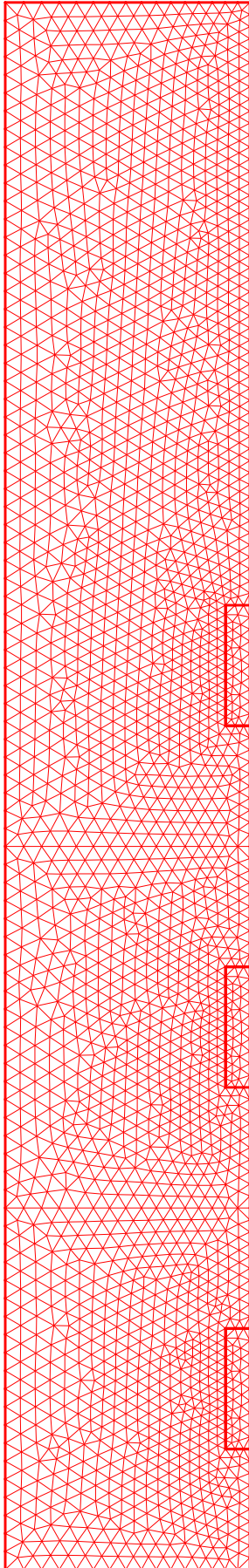


(b) Malha intermediária, 8291 elementos, 4328 nós.

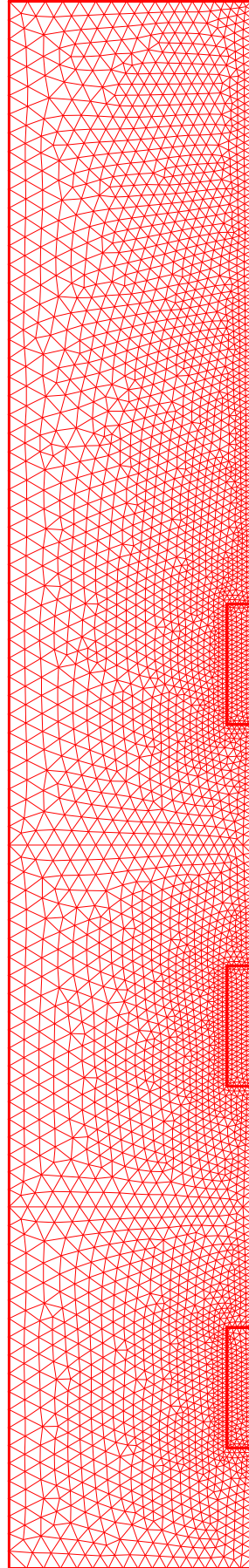


(c) Malha mais refinada, 14814 elementos, 7671 nós.

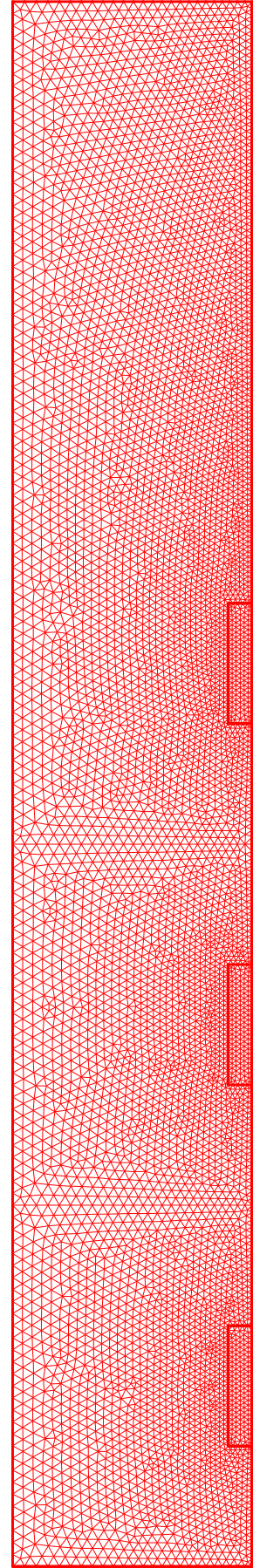
Figura 5.3 - Exemplos de malhas para geometria com altura do corpo  $H_c = 0,075$



(a) Malha menos refinada, 4685 elementos, 2468 nós.

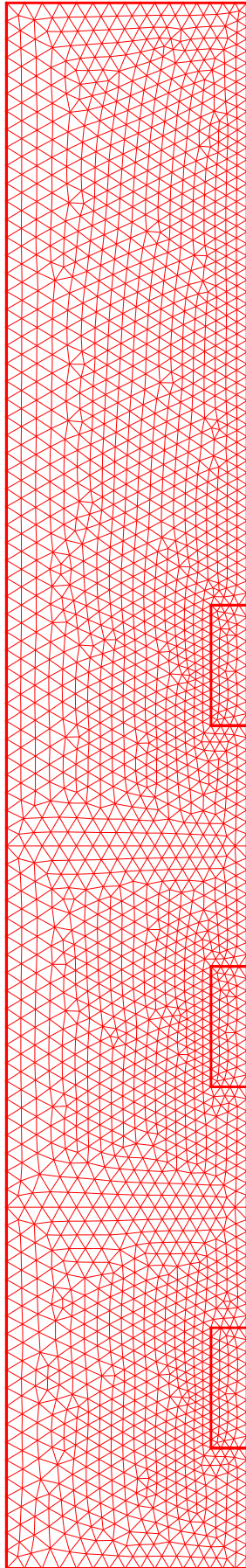


(b) Malha intermediária, 8030 elementos, 4205 nós.

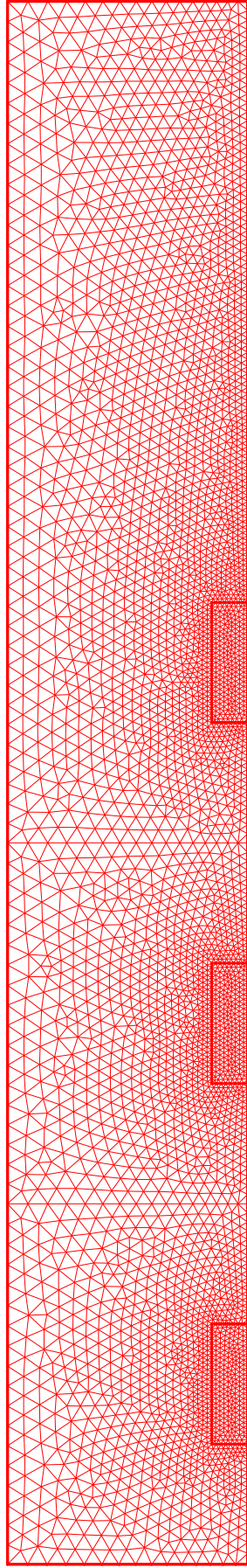


(c) Malha mais refinada, 13681 elementos, 7069 nós.

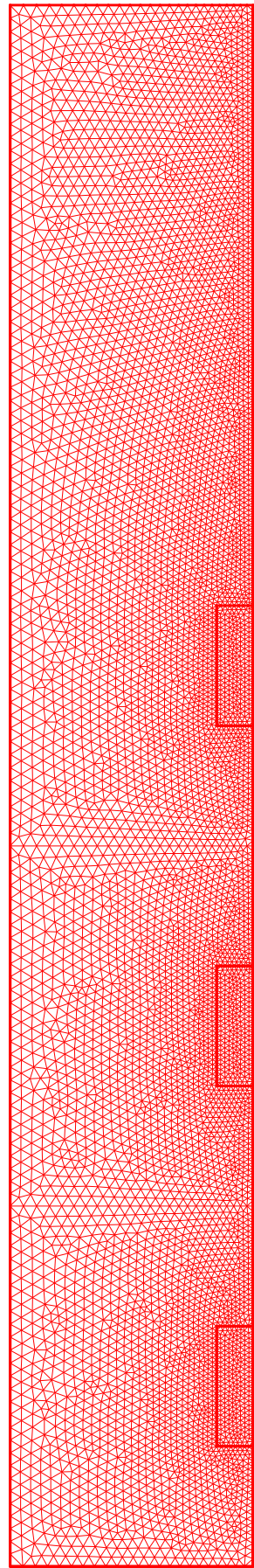
Figura 5.4 - Exemplos de malhas para a geometria com altura do corpo  $H_c = 0,100$



(a) Malha menos refinada, 4761 elementos, 2506 nós.



(b) Malha intermediária, 8387 elementos, 4370 nós.



(c) Malha mais refinada, 14184 elementos, 7326 nós.

Figura 5.5 - Malhas para geometria com altura do corpo  $H_c = 0,150$



O presente estudo de malhas visa encontrar uma malha independente que seja adequada para a continuidade das simulações, apresentando resultados precisos e com tempo de processamento razoável. Os gráficos ilustrados nas Figuras 5.6 e 5.7 apresentam, respectivamente, o número de Nusselt médio,  $Nu_c$ , na superfície dos corpos 1 e 3, versus o número de elementos, NE, das malhas consideradas no estudo realizado para a geometria com altura de corpo  $H_c=0,075$ . Por conta da proximidade entre os valores do número de Nusselt médio encontrados para os corpos 2 e 3, somente os dados do corpo 3 são apresentados. O número de Grashof utilizado no estudo teve valores  $0$ ;  $5 \times 10^4$ ;  $10^5$ ;  $3 \times 10^5$ ;  $6 \times 10^5$  e  $10^6$ . Foi utilizada a razão de difusividades  $D=5$ , o número de Prandtl  $0,7$  e o número de Reynolds  $100$ . O duto está na posição horizontal ( $\alpha=0$ ). Os resultados são apresentados para o regime permanente e mostram que, para um mesmo valor de Grashof, o número de Nusselt médio nas superfícies produzem resultados muito próximos, principalmente para as malhas com número de elementos superior a  $6000$ .

A Tabela 5.2 apresenta, para o regime permanente, os resultados numéricos dos parâmetros número de Nusselt médio na superfície dos corpos 1, 2 e 3, temperatura máxima adimensional ( $\theta_{m\acute{a}x}$ ) no corpo 3, temperatura média adimensional ( $\theta_{m\acute{e}dia}$ ) no fluido e tempo de processamento para  $20000$  iterações, considerando todas as malhas estudadas para a geometria com altura de corpo  $H_c=0,075$ . Os parâmetros considerados nas simulações são: número de Grashof  $10^5$ , razão de difusividades  $D=5$ , ângulo de inclinação  $\alpha=0$ , número de Prandtl  $0,7$  e número de Reynolds  $100$ .

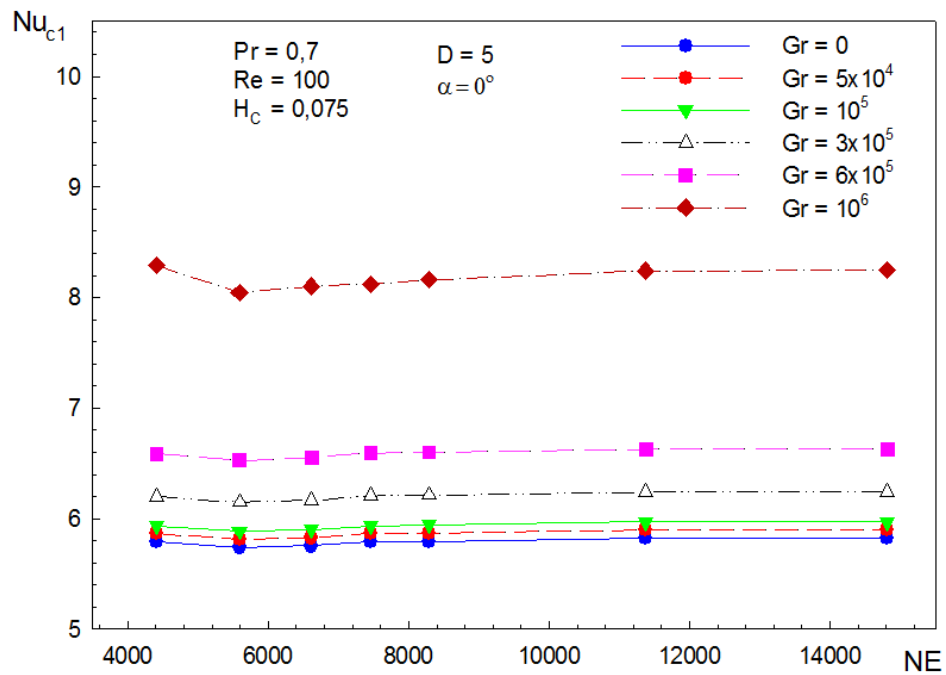


Figura 5.6 – Número de Nusselt médio na superfície do corpo 1,  $Nu_{c1}$ , versus número de elementos, NE, para geometria  $H_c = 0,075$ .

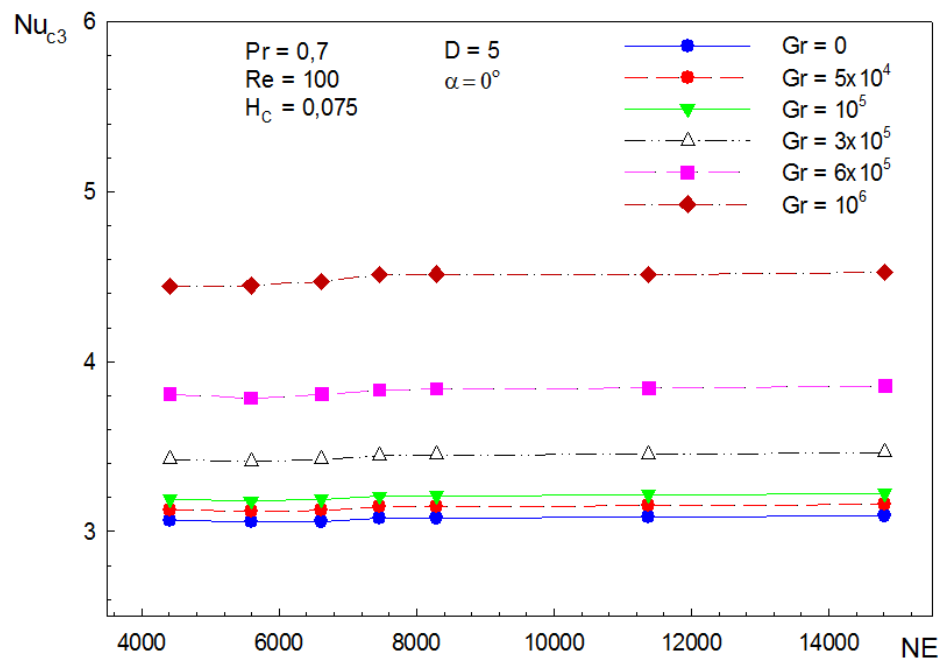


Figura 5.7 – Número de Nusselt médio na superfície do corpo 3,  $Nu_{c3}$ , versus número de elementos, NE, para geometria  $H_c = 0,075$ .

Tabela 5.2 – Resultados para as malhas estudadas considerando geometria com altura de corpo  $H_c=0,075$ .  
Parâmetros utilizados: número de Grashof  $10^5$ , razão de difusividades  $D=5$ , ângulo de inclinação  $\alpha=0$ ,  
número de Prandtl 0,7 e número de Reynolds 100.

NE	Número de Nusselt médio			$\theta$ máx corpo 3	$\theta$ média fluido	Tempo de processamento (s)
	corpo 1	corpo 2	corpo 3			
4413	5,932	3,191	3,190	0,1261	0,0558	426
5592	5,887	3,186	3,181	0,1264	0,0557	625
6618	5,899	3,185	3,189	0,1266	0,0558	923
7459	5,936	3,211	3,208	0,1270	0,0558	1682
8291	5,941	3,215	3,212	0,1270	0,0558	1640
11378	5,971	3,215	3,216	0,1270	0,0559	2241
14814	5,970	3,219	3,224	0,1271	0,0559	4219
Desvio (%) máx. em relação à malha de NE=11378	1,43	0,94	1,10	0,71	0,36	---

Observa-se na Tabela 5.2 que a malha com 11378 elementos apresenta resultados dos números de Nusselt médios para os corpos 1, 2 e 3 com pequeno desvio percentual em relação aos resultados para números de Nusselt médios apresentados para as demais malhas utilizadas. Os desvios são ainda menores quando a comparação é feita com as temperaturas máximas nos corpos 3 e médias no fluido. Sendo assim, esta malha foi escolhida para as demais simulações referentes a geometria com altura de corpo  $H_c=0,075$ , necessárias para a continuidade deste trabalho. Procedimento semelhante foi adotado por Rahman *et al.* (2010) e Aminossadati e Ghasemi (2009).

A escolha da malha com 11378 elementos para a geometria com altura de corpo  $H_c=0,075$  é também validada pelo comportamento das curvas apresentadas na Figura 5.8, que ilustra o número de Nusselt médio no corpo 1,  $Nu_{c1}$ , versus tempo adimensional,  $\tau$ , para a malhas com números de elementos 14814, 11378, 8291 e 4413. Foi considerado o duto na posição horizontal ( $\alpha=0$ ). Os demais parâmetros utilizados foram número de Grashof  $10^5$ , razão de difusividades  $D=5$ , número de Prandtl 0,7 e o número de Reynolds 100. Observa-se que o comportamento das curvas é praticamente o mesmo para as quatro malhas, com diferenças não significativas. A boa aproximação das quatro curvas confirma a adequação da malha com 11378 elementos para a continuidade dos estudos.

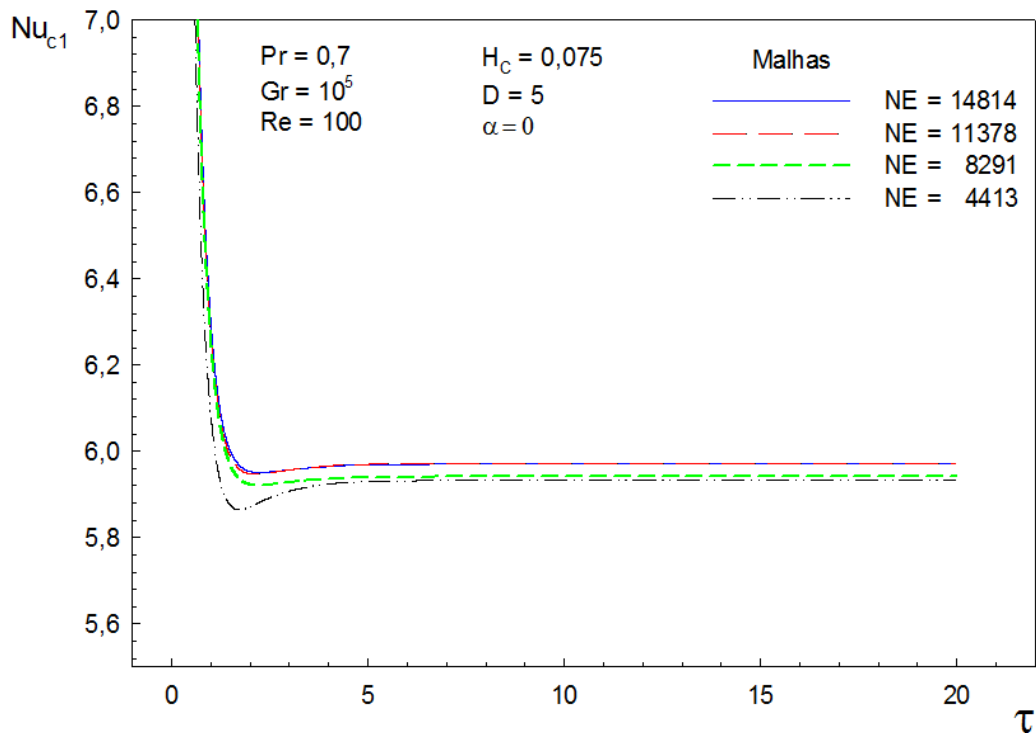


Figura 5.8 – Número de Nusselt médio na superfície do corpo 1,  $Nu_{c1}$ , versus tempo adimensional,  $\tau$ , para geometria  $H_c = 0,075$ .

Já para a geometria com altura de corpos  $H_c=0,100$ , as Figuras 5.9 e 5.10 e a Tabela 5.3 apresentam resultados de estudo feito de forma semelhante ao realizado para a geometria com altura de corpos  $H_c=0,075$ , descrito anteriormente. Os parâmetros utilizados também foram os mesmos. Da mesma forma, as Figuras 5.11 e 5.12 e a Tabela 5.4 apresentam resultados referentes a geometria com altura de corpo  $H_c=0,150$ . Como resultado, a malha com 11670 elementos foi escolhida para as demais simulações referentes a geometria com altura de corpo  $H_c=0,100$  e, a malha com 12322 elementos foi escolhida para as demais simulações referentes a geometria com altura de corpo  $H_c=0,150$ .

As escolhas das malhas com 11670 elementos para a geometria com altura de corpo  $H_c=0,100$  e 12322 elementos para a geometria com altura de corpo  $H_c=0,150$  são também validadas pelo comportamento das curvas apresentadas nas Figuras 5.13 e 5.14.

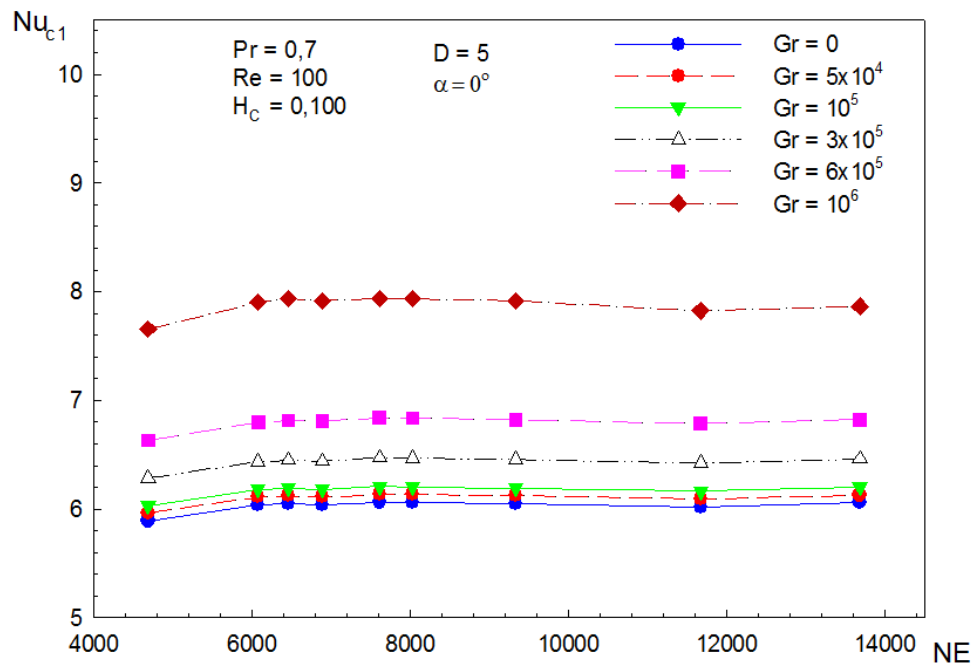


Figura 5.9 – Número de Nusselt médio na superfície do corpo 1,  $Nu_{c1}$ , versus número de elementos, NE, para geometria  $H_c = 0,100$ .

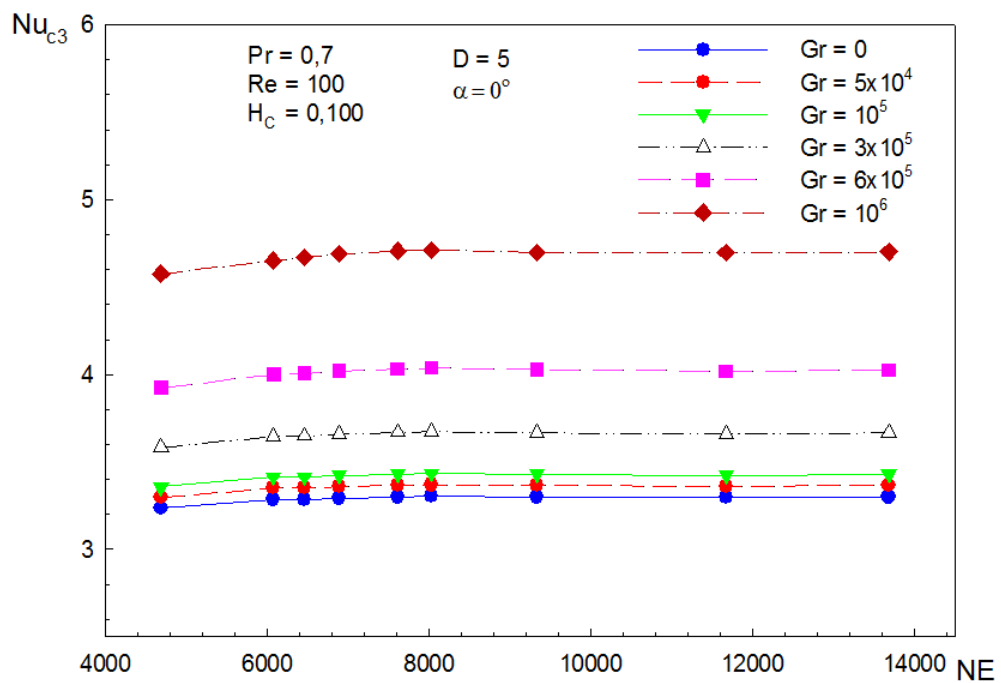


Figura 5.10 – Número de Nusselt médio na superfície do corpo 3,  $Nu_{c3}$ , versus número de elementos, NE, para geometria  $H_c = 0,100$ .

Tabela 5.3 – Resultados para as malhas estudadas considerando geometria com altura de corpo  $H_c=0,100$ .

Parâmetros utilizados: número de Grashof  $10^5$ , razão de difusividades  $D=5$ , ângulo de inclinação  $\alpha=0$ , número de Prandtl 0,7 e número de Reynolds 100.

NE	Número de Nusselt médio			$\theta$ máx corpo 3	$\theta$ média fluido	Tempo de processamento (s)
	corpo 1	corpo 2	corpo 3			
4685	6,032	3,347	3,358	0,1437	0,0581	380
6075	6,179	3,410	3,414	0,1439	0,0581	595
6457	6,190	3,413	3,414	0,1441	0,0581	761
6889	6,179	3,417	3,424	0,1446	0,0582	935
7610	6,207	3,440	3,431	0,1450	0,0582	1511
8030	6,205	3,444	3,435	0,1450	0,0582	1589
9336	6,194	3,435	3,430	0,1452	0,0582	1984
11670	6,163	3,427	3,424	0,1455	0,0582	2377
13681	6,200	3,439	3,430	0,1455	0,0583	2981
Desvio (%) máx. em relação à malha de NE=11670						
	2,17	2,39	1,97	1,25	0,17	----

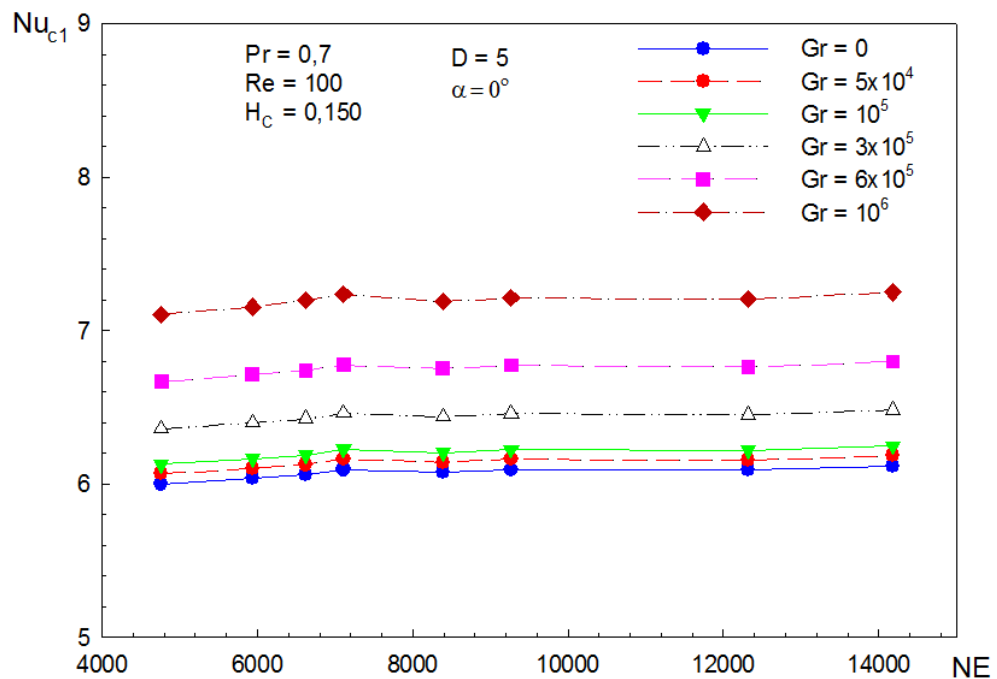


Figura 5.11 – Número de Nusselt médio na superfície do corpo 1,  $Nu_{c1}$ , versus número de elementos, NE, para geometria  $H_c = 0,150$ .

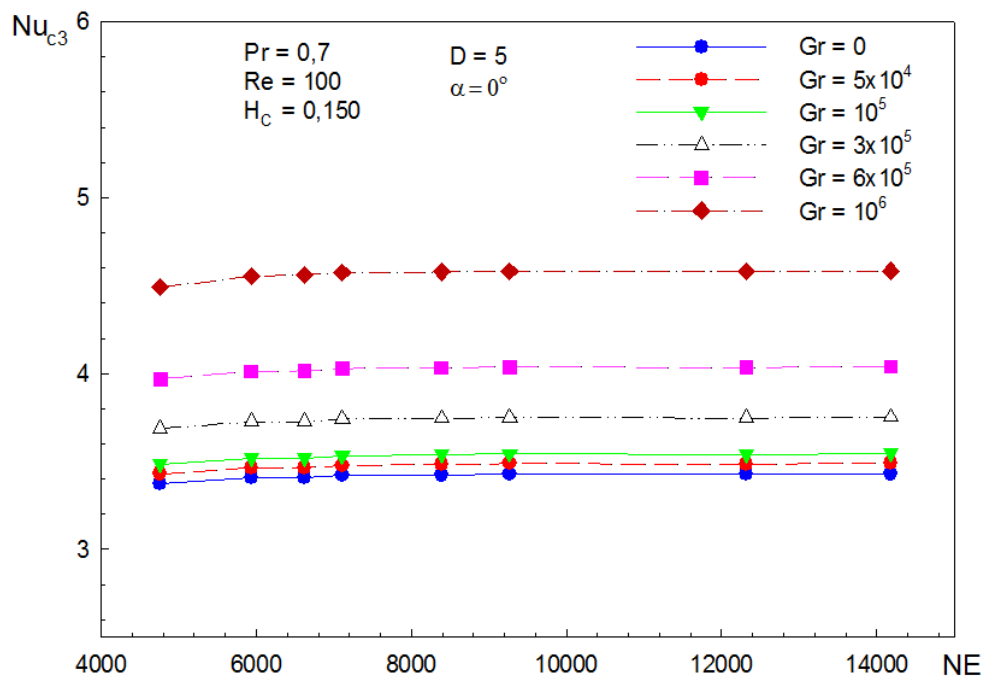


Figura 5.12 – Número de Nusselt médio na superfície do corpo 3,  $Nu_{c3}$ , versus número de elementos, NE, para geometria  $H_c = 0,150$ .

Tabela 5.4 – Resultados para as malhas estudadas considerando geometria com altura de corpo  $H_c=0,150$ .

Parâmetros utilizados: número de Grashof  $10^5$ , razão de difusividades  $D=5$ , ângulo de inclinação  $\alpha=0$ , número de Prandtl 0,7 e número de Reynolds 100.

NE	Número de Nusselt médio			$\theta$ máx corpo 3	$\theta$ média fluido	Tempo de processamento (s)
	corpo 1	corpo 2	corpo 3			
4761	6,129	3,491	3,486	0,1801	0,0635	377
5934	6,166	3,511	3,521	0,1815	0,0637	713
6621	6,191	3,520	3,521	0,1812	0,0637	787
7108	6,226	3,536	3,535	0,1818	0,0638	924
8387	6,206	3,542	3,540	0,1828	0,0638	2548
9265	6,224	3,546	3,544	0,1827	0,0638	2688
12322	6,219	3,541	3,541	0,1828	0,0639	3686
14184	6,248	3,549	3,546	0,1827	0,0639	3776
Desvio (%) máx. em relação à malha de NE=12322	1,47	1,43	1,58	1,50	0,63	---

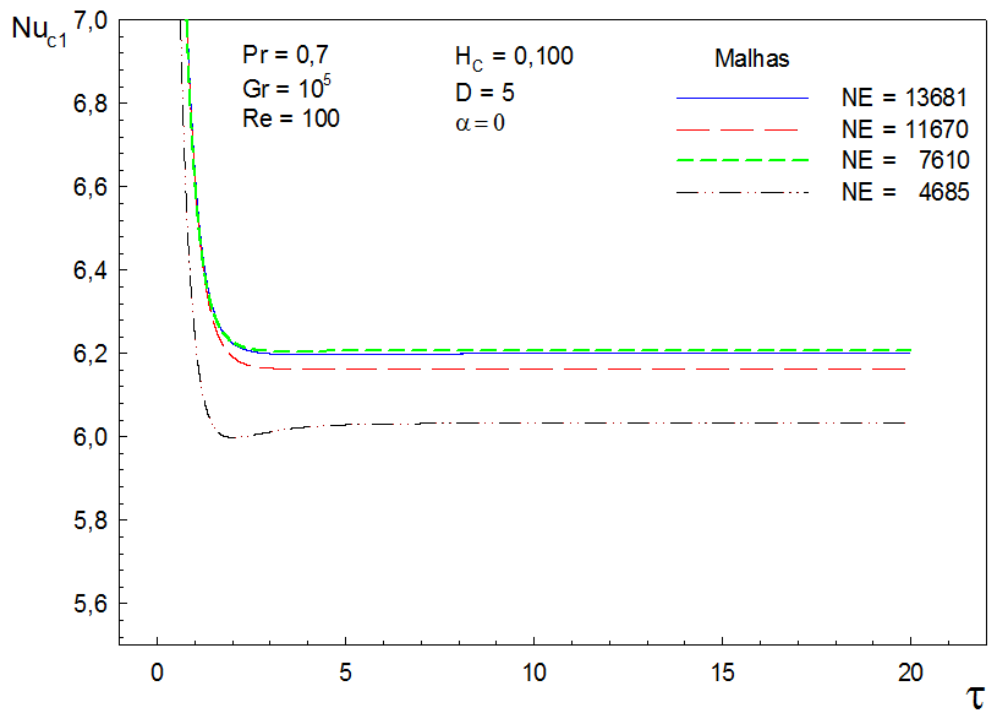


Figura 5.13 – Número de Nusselt médio na superfície do corpo 1,  $Nu_{c1}$ , versus tempo adimensional,  $\tau$ , para geometria  $H_c = 0,100$ .

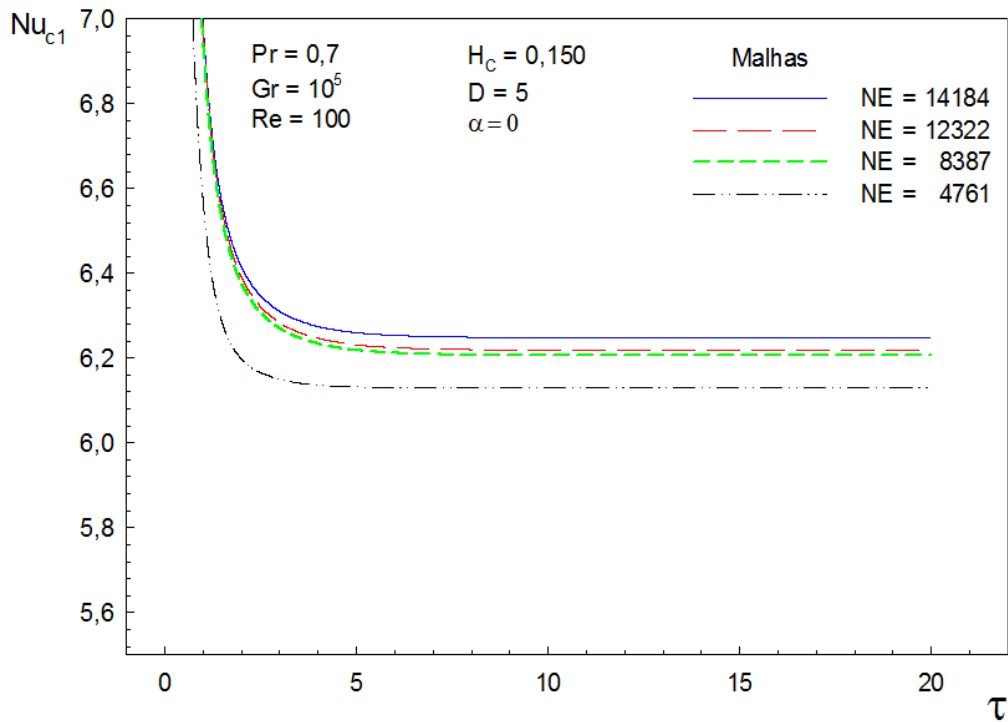


Figura 5.14 – Número de Nusselt médio na superfície do corpo 1,  $Nu_{c1}$ , versus tempo adimensional,  $\tau$ , para geometria  $H_c = 0,150$ .



Observa-se também nas Figuras 5.6 e 5.7 e Figuras 5.9 a 5.12 que o número de Nusselt médio aumenta com o aumento do número de Grashof. Isso é explicado por conta de maior participação do fenômeno de transferência de calor por convecção natural ocorrendo dentro do duto, adicionado ao fenômeno de convecção forçada.

Para todas as alturas de corpos estudadas, verifica-se que o número de Nusselt médio é maior no primeiro corpo, caracterizando maior troca de calor no entorno do mesmo. Isso se deve ao fato de que fluido em temperatura inicial baixa entra no duto e resfria primeiramente o corpo 1 e, na sequência, escoam em direção aos demais corpos com temperatura maior do que a temperatura de entrada diminuindo a troca térmica.

Analisando as Figuras 5.6, 5.9 e 5.11 que ilustram os valores do número de Nusselt médio na superfície do corpo 1 para as alturas  $H_c=0,075$ ,  $H_c=0,100$  e  $H_c=0,150$ , respectivamente, observa-se que, para um mesmo valor de Grashof, a diferença no resultado do número de Nusselt médio não apresenta diferença considerável. Observando somente o valor para a malha mais refinada de cada geometria e fixando o número de Grashof em  $10^6$  tem-se: altura do corpo  $H_c=0,075$ ,  $Nu=8,247$ ; altura do corpo  $H_c=0,100$ ,  $Nu=7,866$  e altura do corpo  $H_c=0,150$ ,  $Nu=7,250$ . Estes resultados mostram que para as três alturas estudadas, pouca influência ocorre na troca de calor por convecção. Isso ocorre por conta de que a diferença entre as alturas mínima ( $H_c=0,075$ ) e máxima ( $H_c=0,150$ ) não é significativa em relação à altura total do duto, representando uma redução de 7,5% e 15%, respectivamente, na área de passagem do escoamento.

A implicação de se utilizar uma malha mais refinada está relacionada com o tempo computacional dispendido nas simulações realizadas. A Figura 5.15 mostra o tempo computacional por iteração versus o número de elementos da malha, para as três geometrias avaliadas. Verifica-se que as malhas escolhidas para continuidade dos estudos apresentam tempos de processamento elevados, porém os mesmos são aceitáveis para os parâmetros de configuração do computador utilizado para realização das simulações, não representando um custo computacional elevado.

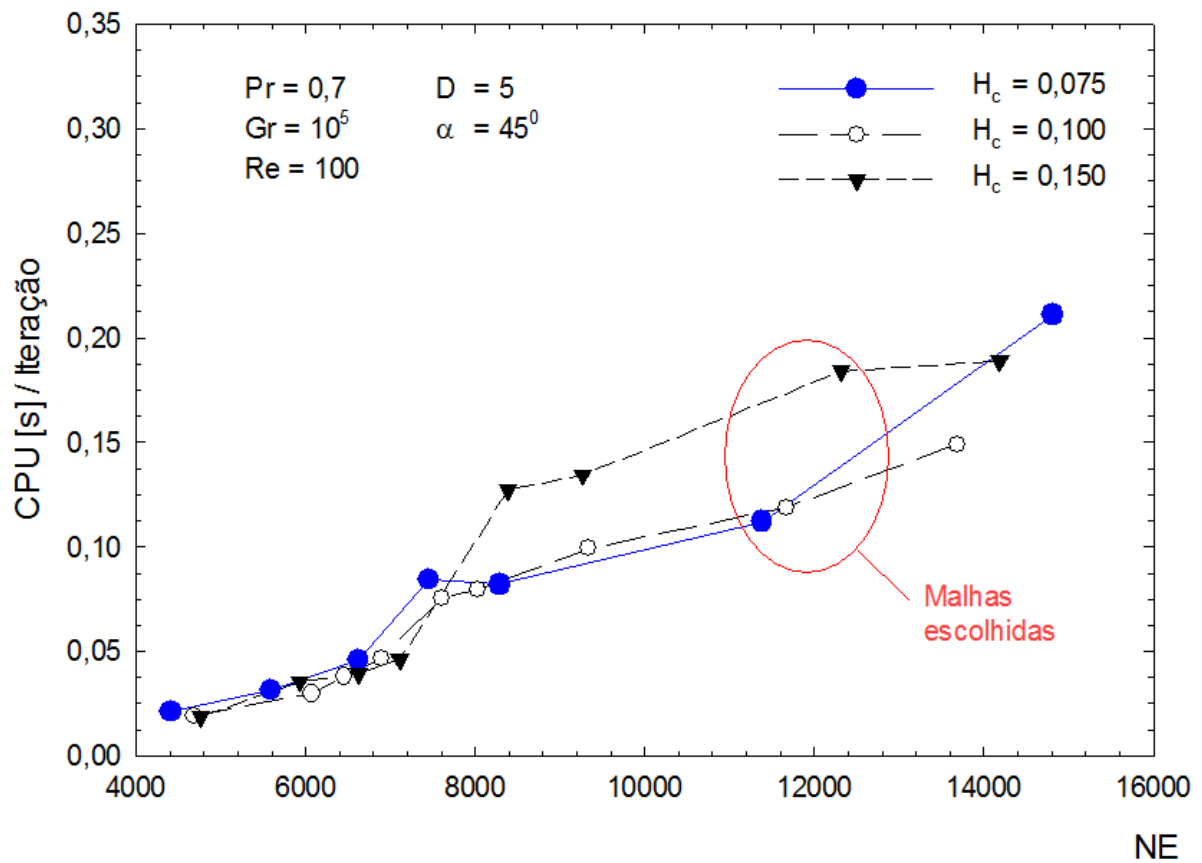


Figura 5.15 – Tempo de processamento por iteração, em segundos, versus o número de elementos, NE.

As simulações foram realizadas em um computador ACER ASPIRE V3-571-9423, com processador Intel® Core™ i7-3632QM 2.2 GHz com Turbo Boost para 3.2 GHz.

### 5.3. ESTUDO DO INCREMENTO DE TEMPO

#### ADIMENSIONAL - $\Delta\tau$

Foi realizada uma avaliação para a escolha do valor para incremento de tempo adimensional,  $\Delta\tau$ , adequado para as simulações deste estudo. O critério adotado foi conseguido por meio de comparação do comportamento temporal do número de Nusselt médio na superfície do corpo 1, da geometria de altura de corpo  $H_c=0,075$ . Os parâmetros considerados nas simulações são: número de Grashof  $10^5$ , razão de difusividades  $D=5$ , ângulo de inclinação  $\alpha=0$ , número de Prandtl 0,7 e número de Reynolds 100. A avaliação foi realizada com cinco valores distintos para o incremento de tempo adimensional, conforme ilustrado na Figura 5.16.

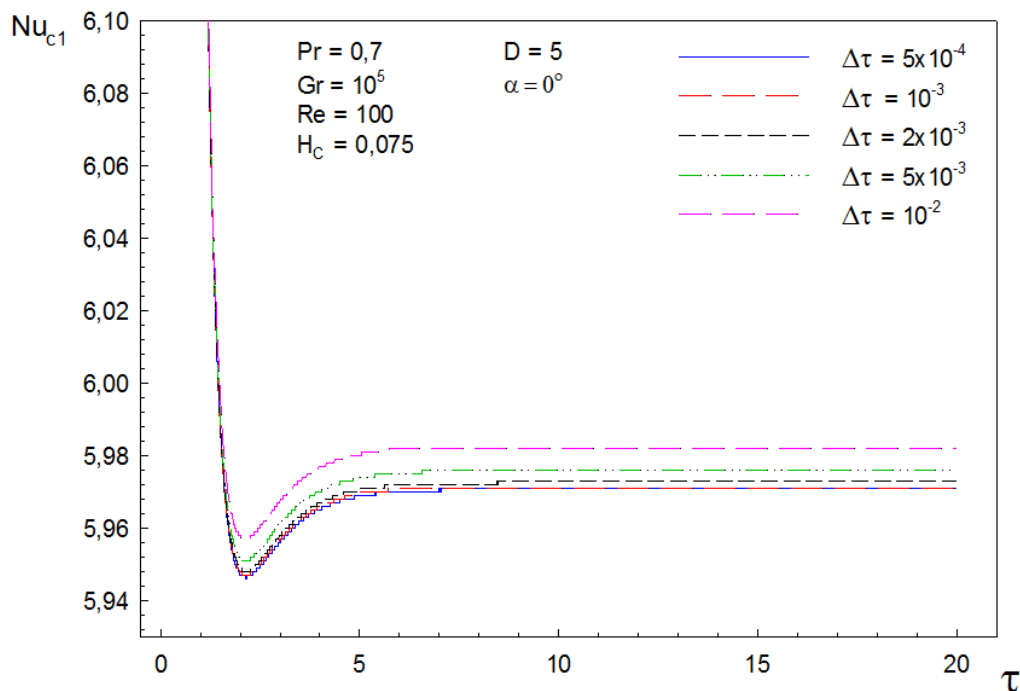


Figura 5.16 – Número de Nusselt médio na superfície do corpo 1,  $Nu_{c1}$ , versus tempo adimensional,  $\tau$ , para geometria  $H_c = 0,075$ .

Observa-se que para o incremento de tempo adimensional  $\Delta\tau = 10^{-3}$  e  $5 \times 10^{-4}$  as curvas são praticamente coincidentes. Observa-se também que estas curvas referentes aos incrementos de tempos menores ( $\Delta\tau = 10^{-3}$  e  $5 \times 10^{-4}$ ) estão bem próximas da curva para o

incremento de tempo adimensional imediatamente superior ( $\Delta\tau = 2 \times 10^{-3}$ ), ou seja, a diferença percebida entre as curvas não é significativa. Esta diferença tende a ser mais perceptiva para incrementos de tempos adimensionais maiores ( $\Delta\tau = 5 \times 10^{-3}$  e  $10^{-2}$ ). A Tabela 5.5 apresenta os resultados comparativos para as curvas da Figura 5.16, considerando regime permanente.

Tabela 5.5 – Resultados comparativos para as curvas apresentadas na Figura 5.16, regime permanente.

$\Delta\tau$	Nusselt médio - corpo 1 $Nu_{c1}$	Desvio (%) em relação a $\Delta\tau = 10^{-3}$
$5 \times 10^{-4}$	5,97081	0,009
$10^{-3}$	5,97135	---
$2 \times 10^{-3}$	5,97253	0,020
$5 \times 10^{-3}$	5,97590	0,076
$10^{-2}$	5,98247	0,186

Baseado nos resultados, o incremento de tempo adimensional  $\Delta\tau = 10^{-3}$  é adotado para as demais simulações do presente trabalho. Análise semelhante para a escolha do incremento de tempo adimensional foi realizada por Ghasemi (2005).

## 5.4. RESULTADOS DO PRESENTE TRABALHO

Neste item são mostrados os resultados do estudo numérico realizado para o problema conjugado da transferência de calor por convecção mista que ocorre no domínio do fluido,  $\Omega_f$ , e a condução de calor com geração interna de energia que ocorre no domínio do sólido,  $\Omega_s$ .

As Figuras 5.17 e 5.18 apresentam, respectivamente, o número de Nusselt médio,  $Nu_c$ , na superfície dos corpos 1 e 3, versus o número de Grashof,  $Gr$ , para as três alturas de corpos estudadas. Foi utilizado o número de Prandtl 0,7, o número de Reynolds 100, razão de difusividades  $D=5$  e o ângulo de inclinação  $\alpha=0$ . Observa-se que o número de Nusselt médio aumenta com o aumento do número de Grashof. Considerando um determinado valor de número de Grashof fixado entre 0 e  $3 \times 10^5$ , observa-se que o número de Nusselt médio é maior para a geometria com altura de corpo maior ( $H_c=0,150$ ), intermediário para altura de corpo médio ( $H_c=0,100$ ) e menor para altura de corpo menor ( $H_c=0,075$ ). Para números de Grashof  $6 \times 10^5$  e  $7,3 \times 10^5$  os valores são bem aproximados. Na Figura 5.17, para números de Grashof  $8,3 \times 10^5$  e  $10^6$  ocorre uma inversão, ou seja, a geometria com altura de corpo menor apresenta

maior valor de número de Nusselt médio. Este comportamento diferenciado para valores maiores de Grashof observado na Figura 5.17 deve-se ao fato de que para números de Grashof mais elevados, o efeito das forças de empuxo no campo do fluido se torna mais significativo. Já para a Figura 5.18, os valores continuam próximos também para número de Grashof  $10^6$ .

As Figuras 5.19 e 5.20 apresentam, respectivamente, o número de Nusselt médio,  $Nu_c$ , na superfície dos corpos 1 e 3, versus o tempo adimensional,  $\tau$ . Os parâmetros são fixados com o número de Prandtl 0,7, o número de Reynolds 100, razão de difusividades  $D=5$ , e o ângulo de inclinação  $\alpha=0$ . Os valores para número de Grashof,  $Gr$ , foram considerados  $5 \times 10^4$ ,  $10^5$ ,  $3 \times 10^5$ ,  $6 \times 10^5$  e  $10^6$ . O comportamento do número de Nusselt médio para os dois corpos é semelhante, apresentando valores elevados nos tempos iniciais, decrescendo de forma acentuada com o aumento do tempo até posterior estabilização para tempo adimensional próximo de 5, com exceção para valor de número de Grashof  $10^6$  na Figura 5.19, onde a curva apresenta um aumento gradativo pouco expressivo no número de Nusselt médio até o tempo adimensional 20. Observa-se que o número de Nusselt médio no corpo 1 é superior ao do corpo 3.

Nas Figuras 5.21 e 5.22 são apresentados o número de Nusselt médio,  $Nu_c$ , versus o tempo adimensional,  $\tau$ , para os corpos 1 e 3, respectivamente. Os parâmetros são fixados com o número de Prandtl 0,7, o número de Grashof  $10^5$ , altura dos corpos  $H_c=0,075$ , razão de difusividades  $D=5$  e o ângulo de inclinação  $\alpha=0$ . Os valores para número de Reynolds foram considerados 10, 20, 40, 100, 500 e 1000. Observa-se que o número de Nusselt médio aumenta com o aumento do número de Reynolds. Isso devido a uma maior troca de calor convectiva que ocorre entre os corpos e o fluido, por conta do aumento da velocidade do escoamento.

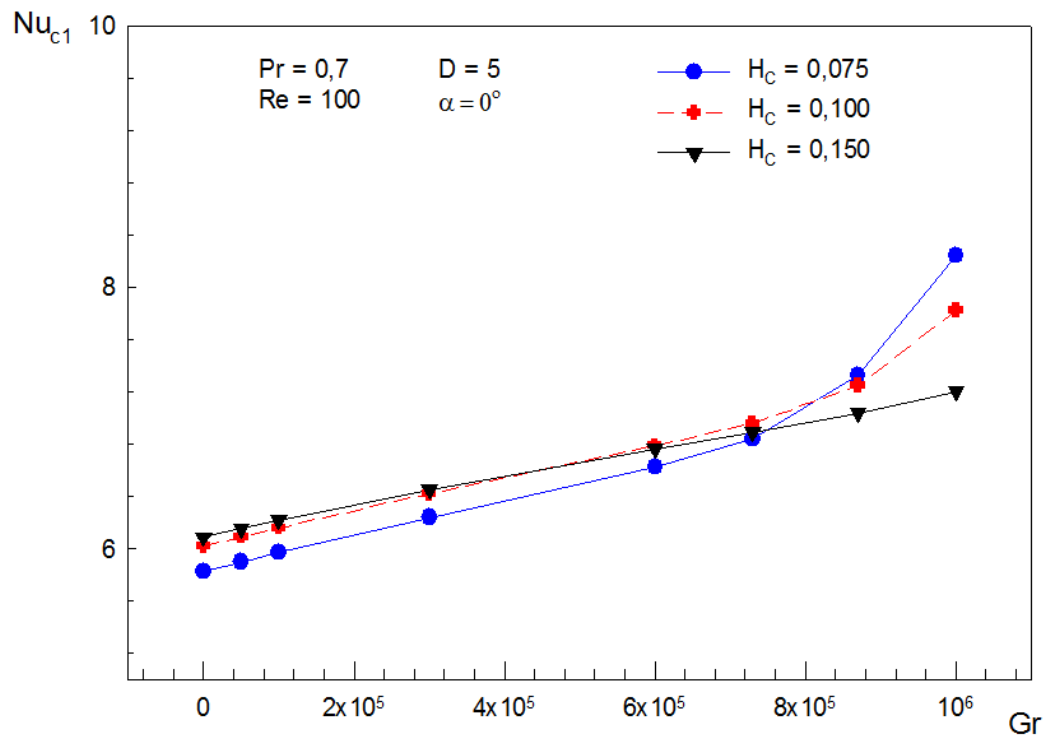


Figura 5.17 – Número de Nusselt médio no corpo 1,  $Nu_{c1}$ , versus o número de Grashof, Gr.

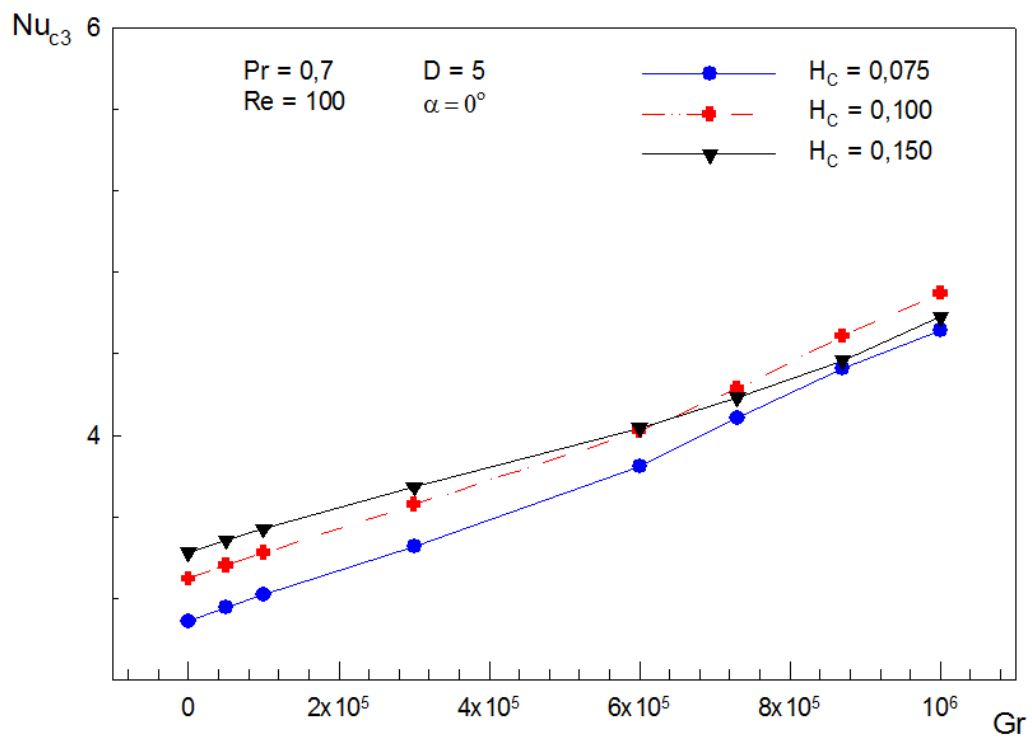


Figura 5.18 – Número de Nusselt médio no corpo 3,  $Nu_{c3}$ , versus o número de Grashof, Gr.

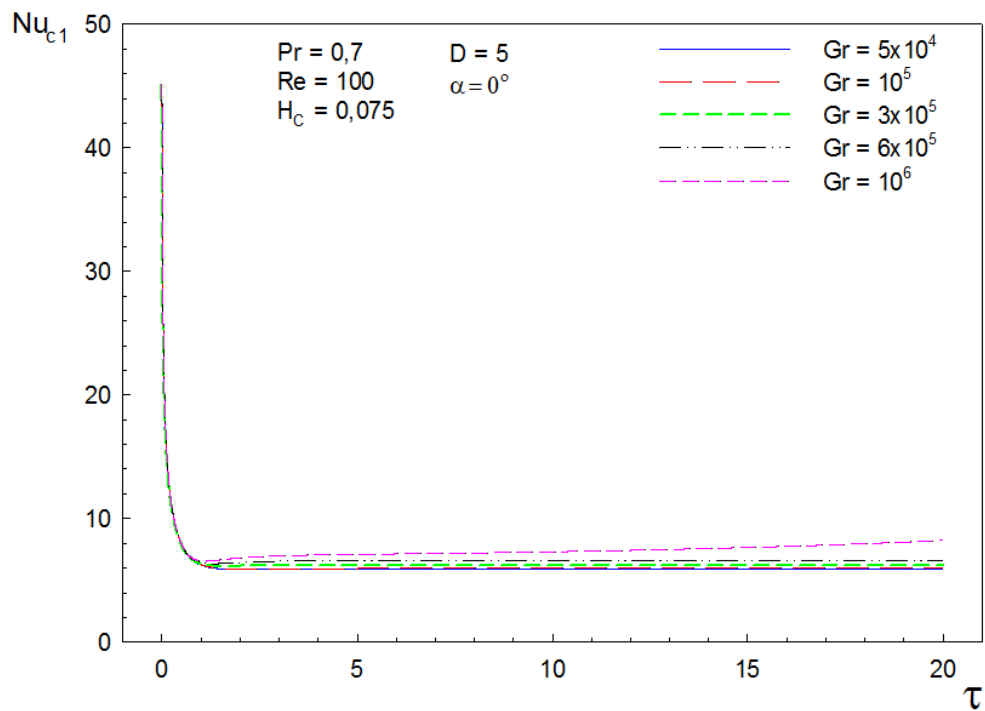


Figura 5.19 – Número de Nusselt médio na superfície do corpo 1,  $Nu_{c1}$ , versus tempo adimensional,  $\tau$ , para geometria  $H_c = 0,075$ .

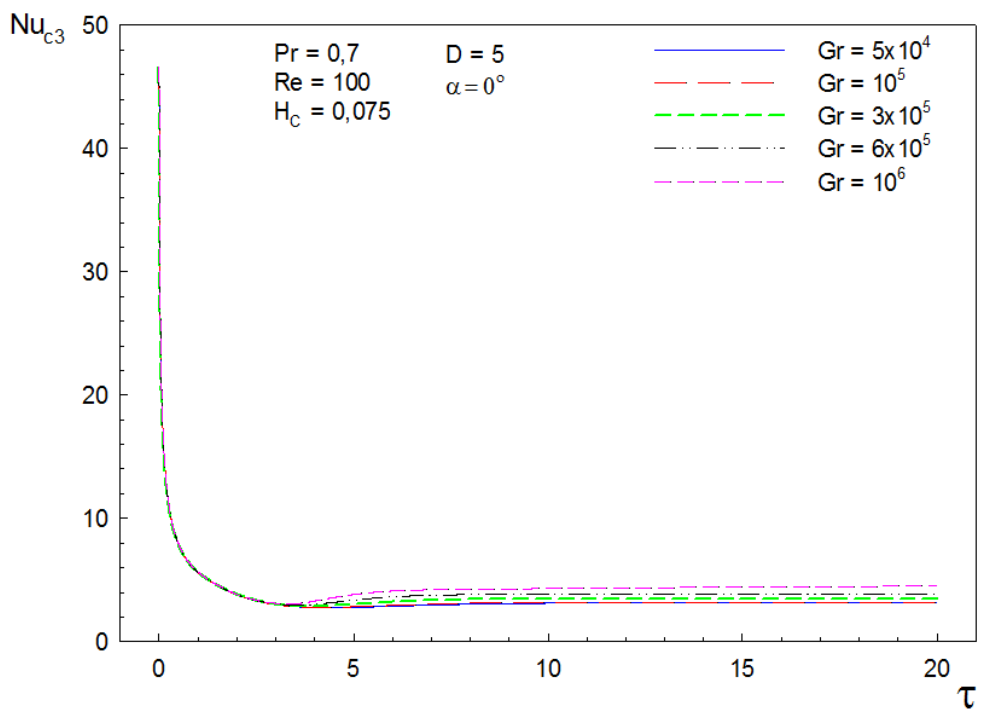


Figura 5.20 – Número de Nusselt médio na superfície do corpo 3,  $Nu_{c3}$ , versus tempo adimensional,  $\tau$ , para geometria  $H_c = 0,075$ .

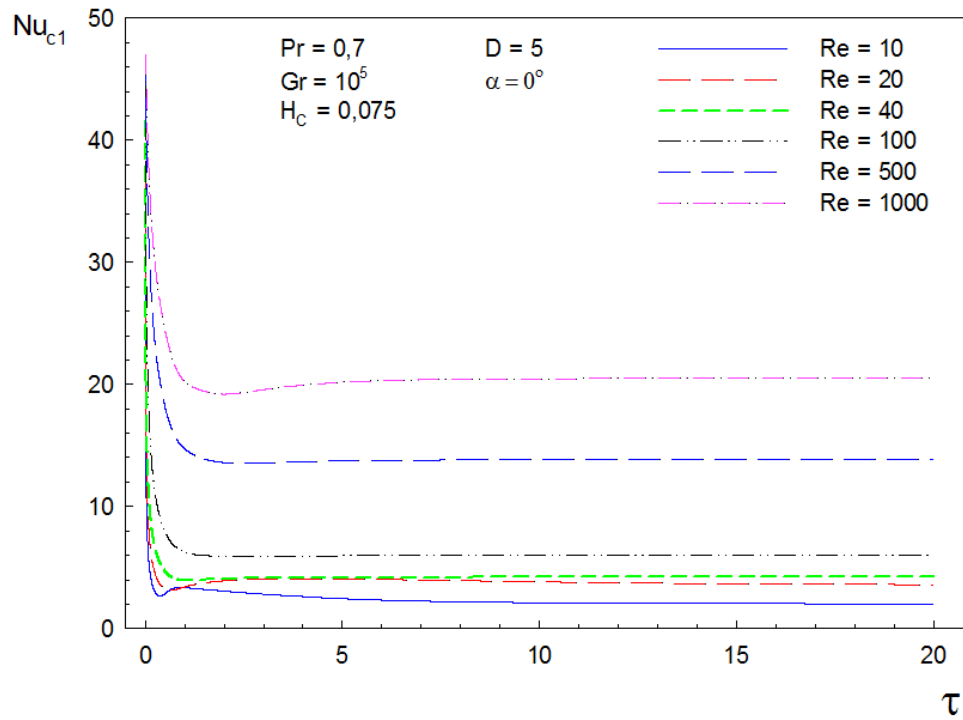


Figura 5.21 – Número de Nusselt médio na superfície do corpo 1,  $Nu_{c1}$ , versus tempo adimensional,  $\tau$ , para diferentes valores de Reynolds,  $Re$ .

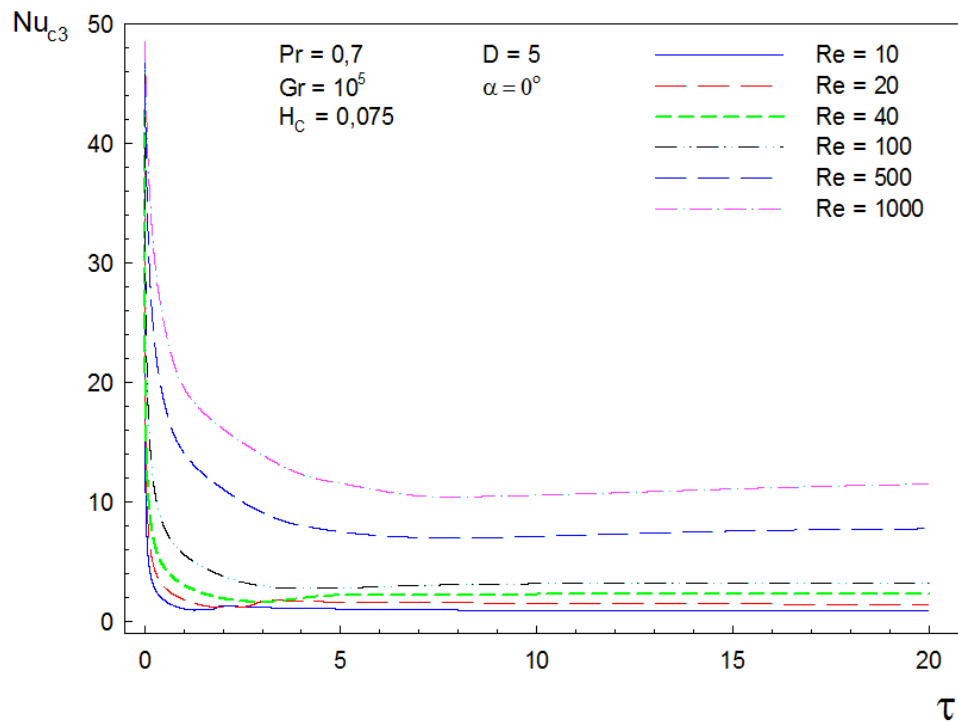


Figura 5.22 – Número de Nusselt médio na superfície do corpo 3,  $Nu_{c3}$ , versus tempo adimensional,  $\tau$ , para diferentes valores de Reynolds,  $Re$ .



A Figura 5.23 ilustra os valores do número de Nusselt médio,  $Nu_c$ , para os corpos 1, 2 e 3, versus número de Reynolds,  $Re$ . Os parâmetros fixados são os mesmos utilizados nas Figuras 5.21 e 5.22. Observa-se que, para um determinado número de Reynolds fixado, o número de Nusselt médio no corpo 1 é maior que o número de Nusselt médio para os corpos 2 e 3, sendo que os números de Nusselt médios para os corpos 2 e 3 são praticamente coincidentes para toda a faixa de Reynolds. O resultado do número de Nusselt médio maior no primeiro corpo é devido à maior troca de calor no entorno do mesmo, conforme descrito anteriormente, por conta de que o fluido resfria primeiramente no corpo 1 e, na sequência, escoia em direção aos demais corpos transportando o calor removido do primeiro corpo.

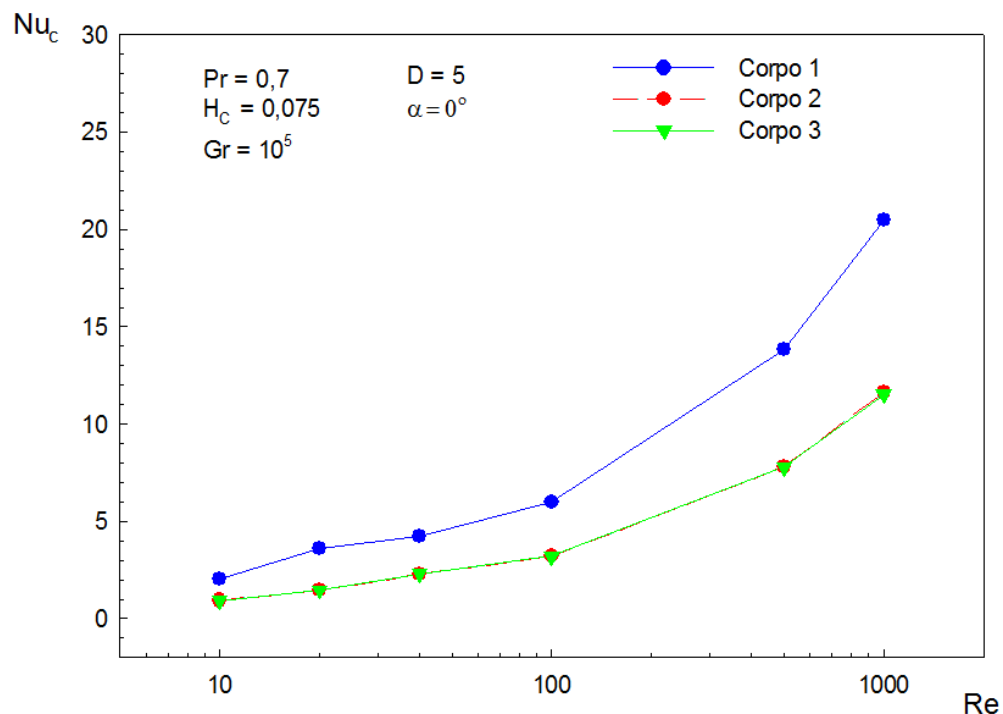


Figura 5.23 – Número de Nusselt médio na superfície dos corpos,  $Nu$ , versus número de Reynolds,  $Re$ .

As Figuras 5.24 e 5.25 ilustram o efeito das difusividades  $D = 3, 5, 10, 50$  e  $100$ . São apresentados os números de Nusselt médio,  $Nu_c$ , versus o tempo adimensional,  $\tau$ , para os corpos 1 e 3, respectivamente. Os parâmetros utilizados são número de Prandtl 0,7, número de Grashof  $10^5$ , altura de corpos  $H_c=0,075$ , número de Reynolds 100 e o ângulo de inclinação  $\alpha=0$ . Observa-se que o número de Nusselt médio aumenta com o aumento da razão de difusividades em toda faixa de tempo avaliada. Isso ocorre porque aumentando a difusividade do sólido e consequentemente a razão de difusividades  $D$ , a temperatura e os gradientes

térmicos no interior do sólido são reduzidos e se uniformizam mais rapidamente por conta da redução na resistência ao fluxo de calor. Esse efeito intensifica a transferência de calor entre a superfície do sólido e o fluido. Esse comportamento pode também ser verificado nas Figuras 5.26 e 5.27, corpos 1 e 3, respectivamente. Observa-se que essa condição referente a razão de difusividades é válida para toda a faixa de números de Grashof analisados ( $5 \times 10^4$  a  $10^6$ ).

O efeito do ângulo de inclinação do duto pode ser verificado nas Figuras 5.28 e 5.29. São apresentados os números de Nusselt médio,  $Nu_c$ , versus o tempo adimensional,  $\tau$ , para os corpos 1 e 3, respectivamente. Os parâmetros são fixados com o número de Prandtl 0,7, o número de Grashof  $10^5$ , o número de Reynolds 100, altura dos corpos  $H_c=0,075$  e a razão de difusividades  $D=5$ . Foram analisados os ângulos de inclinação  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $90^\circ$ . Para ambas figuras, os resultados mostram que o número de Nusselt médio é maior para ângulo de  $45^\circ$ , intermediário para ângulo de  $90^\circ$  e menor para ângulo  $0^\circ$ , em praticamente toda a faixa de tempo adimensional.

As Figuras 5.30 e 5.31 ilustram os números de Nusselt médios para os corpos 1 e 3, respectivamente. Os ângulos de inclinação analisados foram  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $90^\circ$ . Os parâmetros são fixados com o número de Prandtl 0,7, número de Reynolds 100, altura dos corpos  $H_c=0,150$  e razão de difusividades  $D=5$ . Para os ângulos de  $45^\circ$  e  $90^\circ$ , os resultados do número de Nusselt médio são aproximados para toda faixa de Grashof. Para o ângulo  $0^\circ$  os números de Nusselt médio são menores em relação aos ângulos de  $45^\circ$  e  $90^\circ$ . Na Figura 5.30 pode-se observar que no corpo 1, os números de Nusselt médios resultaram em valores mais próximos para Grashof na faixa de  $5 \times 10^4$  a  $10^5$  e valores mais afastados na faixa de  $3 \times 10^5$  a  $10^6$ . Já para a Figura 5.31 pode-se observar que no corpo 3, os números de Nusselt médios resultaram em valores maiores e bem aproximados para os ângulos de inclinação  $45^\circ$  e  $90^\circ$  e valores menores e mais afastados para ângulo  $0^\circ$ , em toda a faixa de Grashof analisada ( $5 \times 10^4$  a  $10^6$ ).

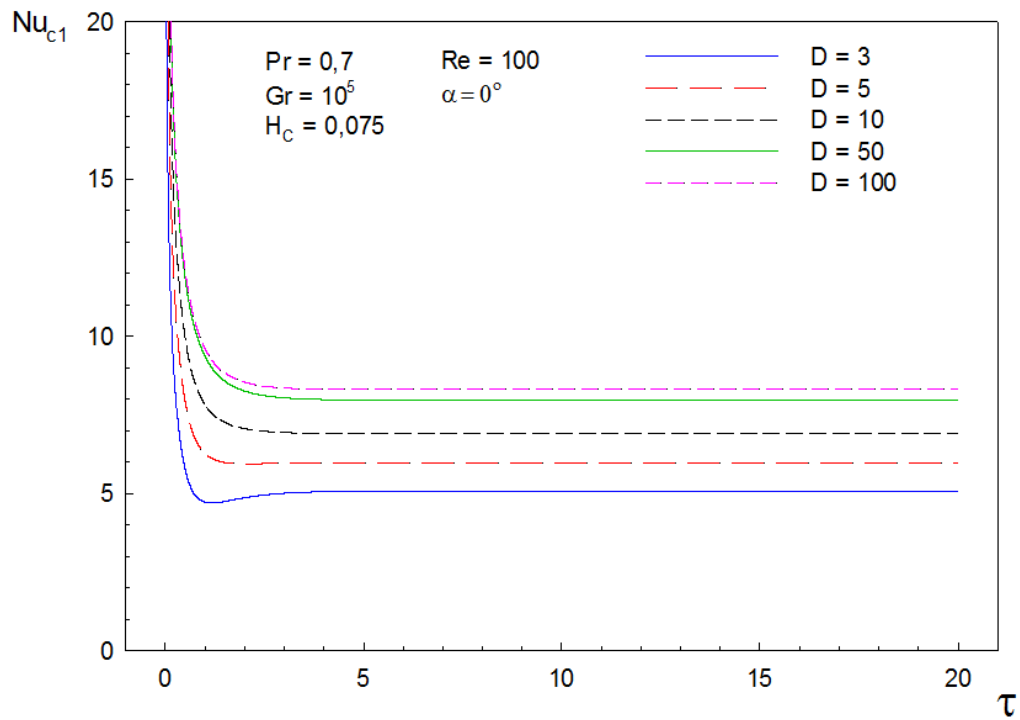


Figura 5.24 – Número de Nusselt médio na superfície do corpo 1,  $Nu_{c1}$ , versus tempo adimensional,  $\tau$ , para diferentes valores de difusividades.

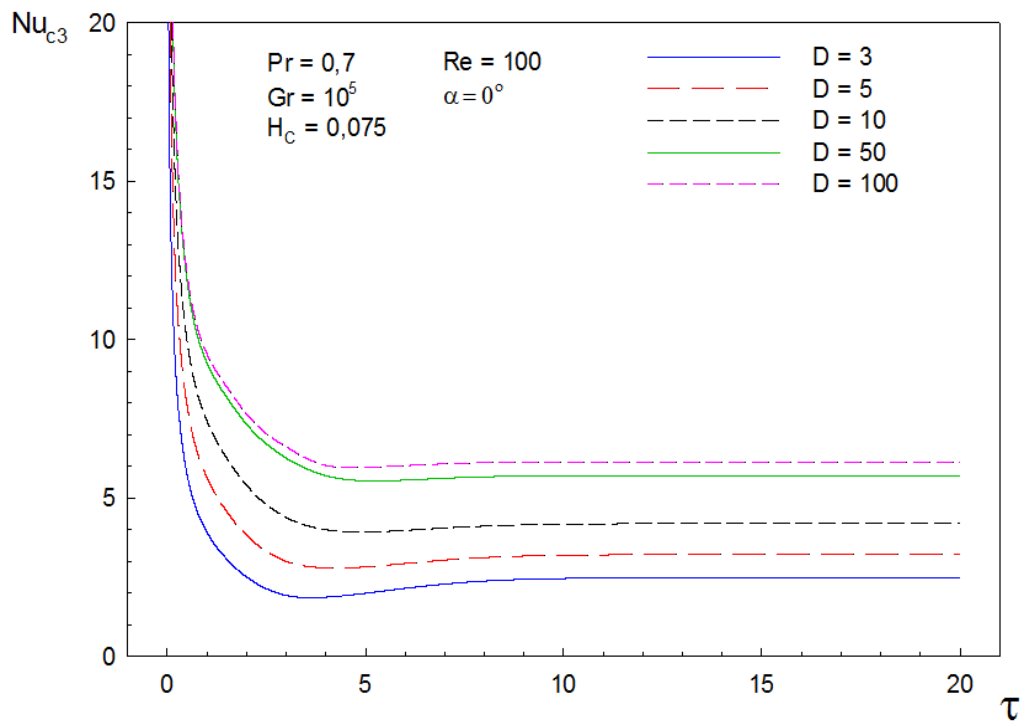


Figura 5.25 – Número de Nusselt médio na superfície do corpo 3,  $Nu_{c3}$ , versus tempo adimensional,  $\tau$ , para diferentes valores de difusividades.

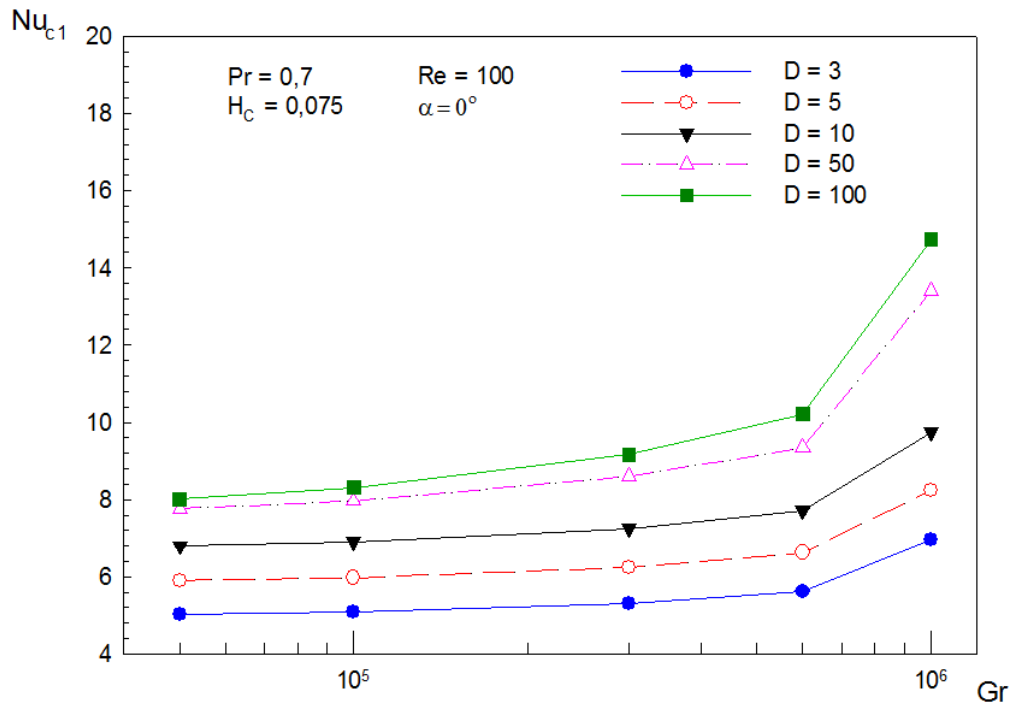


Figura 5.26 – Número de Nusselt médio na superfície do corpo 1, Nu<sub>c1</sub>, versus Grashof, Gr, para diferentes valores de difusividades.

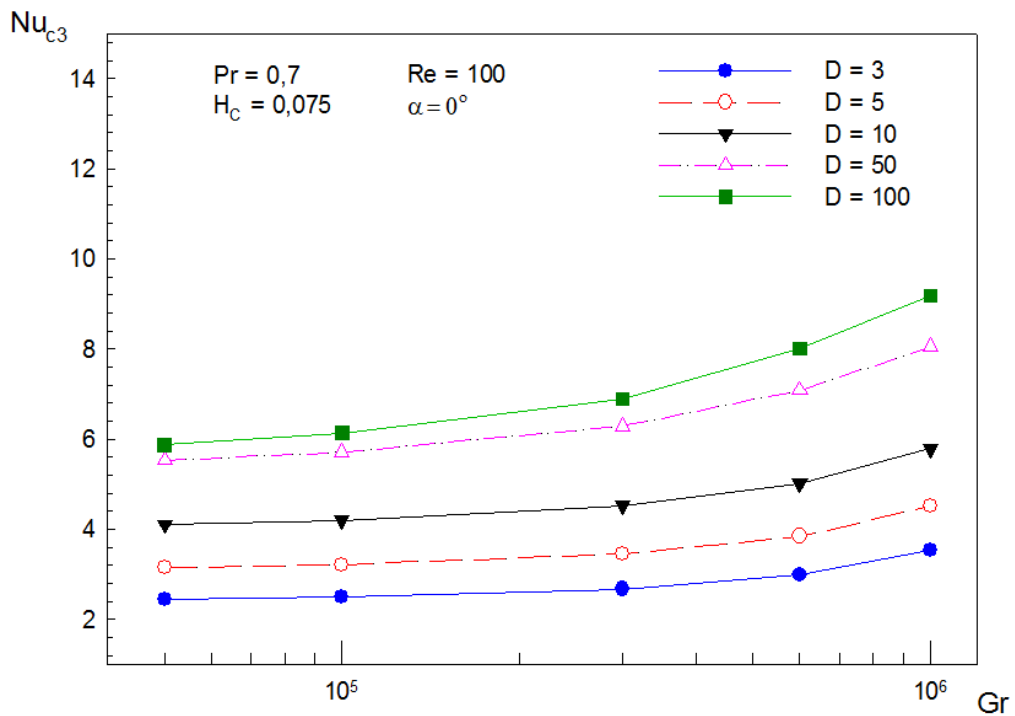


Figura 5.27 – Número de Nusselt médio na superfície do corpo 3, Nu<sub>c3</sub>, versus Grashof, Gr, para diferentes valores de difusividades.

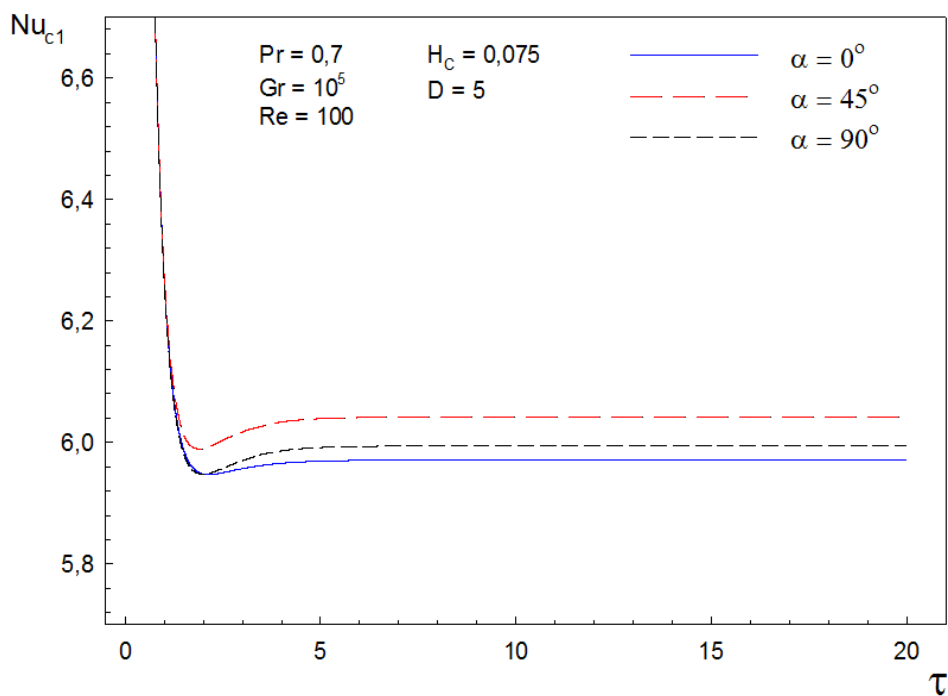


Figura 5.28 – Número de Nusselt médio na superfície do corpo 1,  $Nu_{c1}$ , versus tempo adimensional,  $\tau$ , para diferentes valores de inclinação  $\alpha$ .

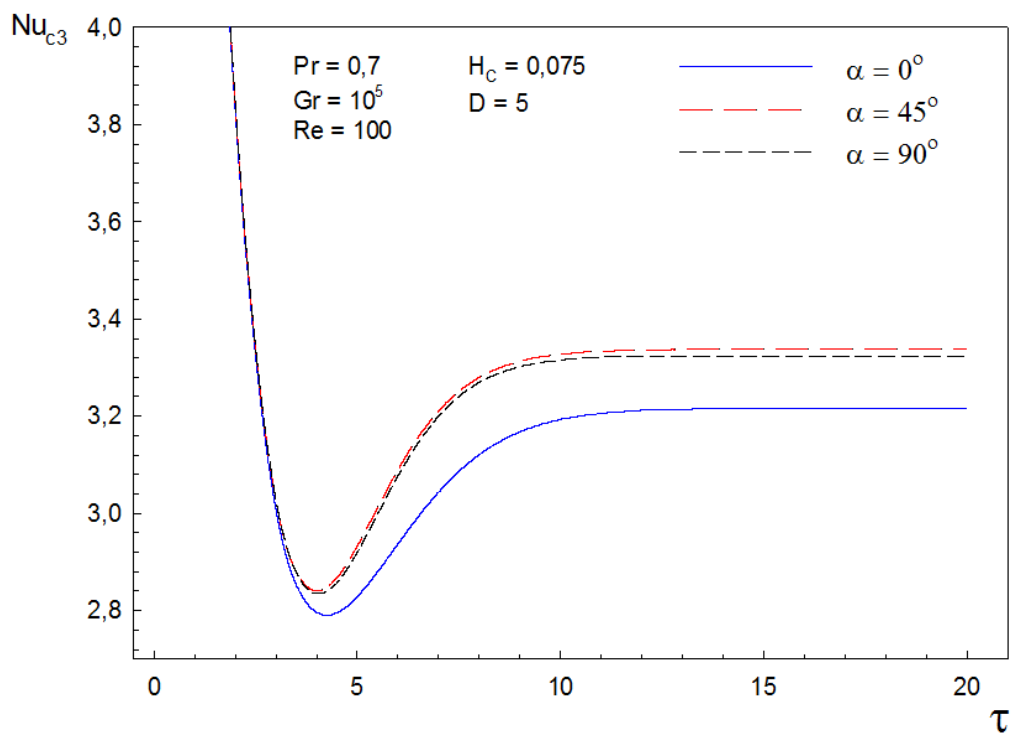


Figura 5.29 – Número de Nusselt médio na superfície do corpo 3,  $Nu_{c3}$ , versus tempo adimensional,  $\tau$ , para diferentes valores de inclinação  $\alpha$ .

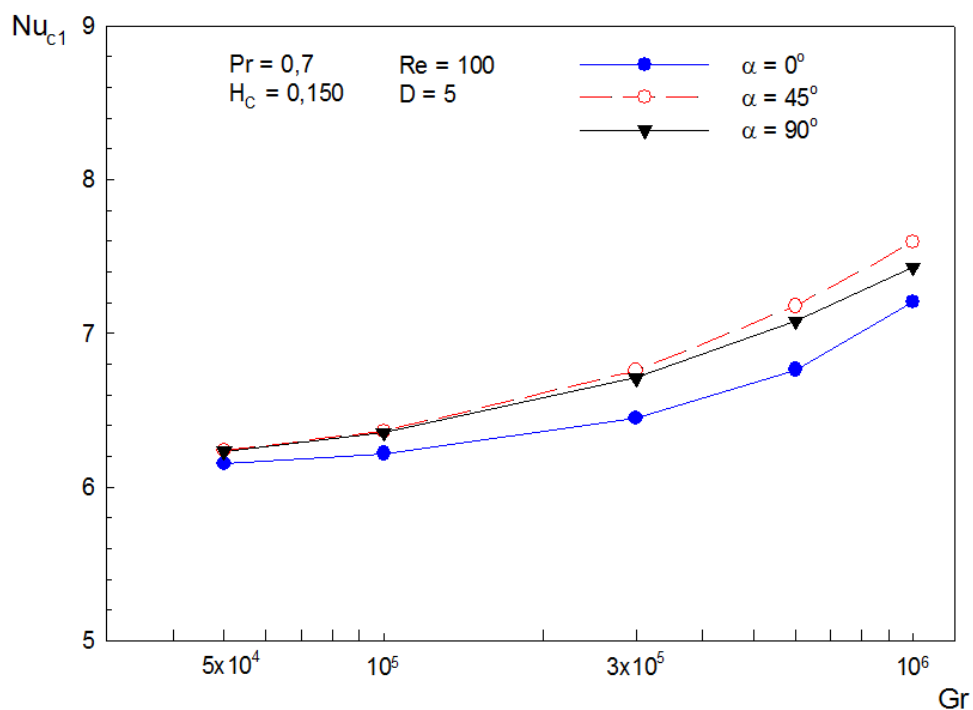


Figura 5.30 – Número de Nusselt médio na superfície do corpo 1,  $Nu_{c1}$ , versus Grashof,  $Gr$ , para diferentes valores de inclinação  $\alpha$ .

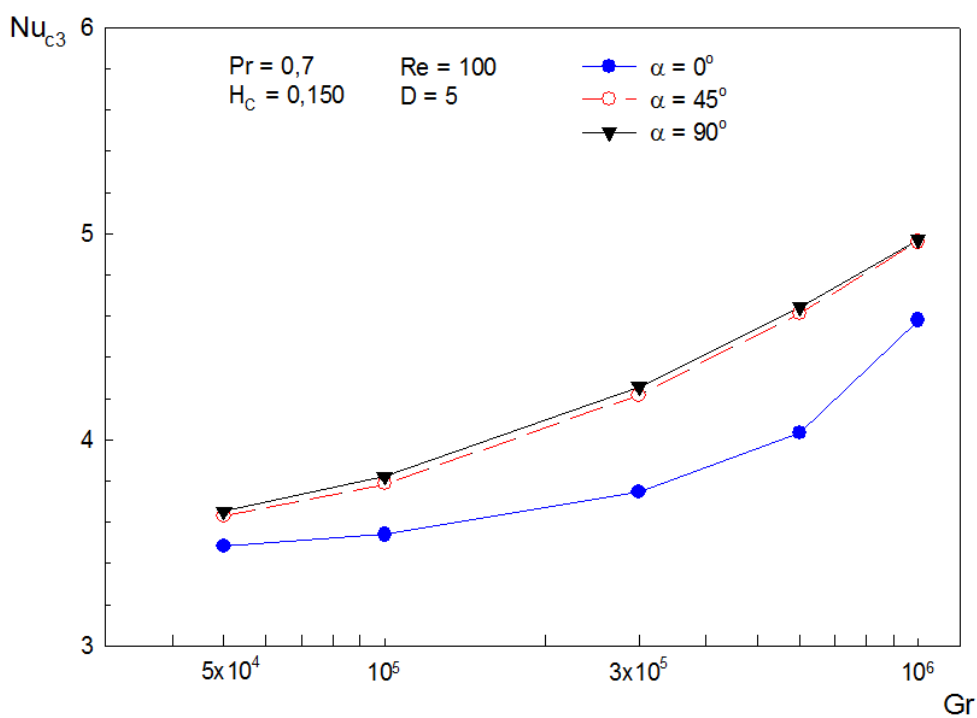


Figura 5.31 – Número de Nusselt médio na superfície do corpo 3,  $Nu_{c3}$ , versus Grashof,  $Gr$ , para diferentes valores de inclinação  $\alpha$ .

A Figura 5.32 ilustra os valores da temperatura adimensional média nos corpos 1, 2 e 3, versus tempo adimensional,  $\tau$ , para diferentes valores de número de Reynolds. Os parâmetros fixados são número de Prandtl 0,7, número de Grashof  $10^5$ , altura dos corpos  $H_c=0,150$ , razão de difusividades  $D=5$  e ângulo de inclinação  $0^\circ$ . Para todos os corpos, a temperatura diminui com o aumento do número de Reynolds e isso se deve ao fato de que uma maior velocidade do fluido contribui para uma maior troca de calor entre o fluido e os corpos geradores e, conseqüentemente, diminuição na temperatura dos corpos. Para todos os valores de Reynolds estudados, observa-se que a menor temperatura encontra-se no corpo 1, a intermediária no corpo 2 e por fim, a maior temperatura é encontrada no corpo 3, evidenciando que o calor removido do corpo 1 contribui para diminuição da troca de calor entre o fluido e o corpo 2 e assim ocorre também entre os corpos 2 e 3. Observa-se na Figura 5.32 uma diferença significativa de valores de temperatura entre  $Re = 100$  e  $Re = 500$  e, entre  $Re = 500$  e  $Re = 1000$  a diferença é menor. As mesmas conclusões podem também ser admitidas para a Figura 5.33 onde estão apresentados os valores para a temperatura adimensional máxima dos corpos.

Na Figura 5.34 são apresentadas as distribuições de temperaturas,  $\theta$ , nos corpos 1, 2 e 3, para geometria com altura de corpos  $H_c = 0,150$ . Observa-se que o valor para a temperatura máxima adimensional é 0.082 e encontra-se no corpo 3, conforme já mencionado anteriormente.

Nas Figuras 5.35 a 5.38, são apresentadas para o regime permanente as distribuições de temperatura ( $\theta$ ) e as linhas de corrente (linhas pretas) para valores de número de Reynolds 100, 300, 500 e 1000 e altura adimensional dos corpos  $H_c = 0,150$ . As escalas de temperaturas  $\theta$  apresentam valores entre o mínimo e máximo para cada caso. As Figuras 5.35, 5.36, 5.37 e 5.38 apresentam, respectivamente, resultados para número de Grashof  $5 \times 10^4$ ,  $10^5$ ,  $3 \times 10^5$  e  $10^6$ . Para todos os casos, o número de Prandtl foi fixado em 0,7, a razão de difusividade  $D = 5$ , o ângulo de inclinação  $\alpha = 0$  e o tempo adimensional  $\tau = 20$ . Observa-se que o comportamento das recirculações são afetados pelo número de Reynolds, ou seja, atrás dos corpos, as células aumentam o seu comprimento com o aumento do número de Reynolds. A situação mais desfavorável para o escoamento do fluido é observada nos resultados para número de Reynolds 100 e número de Grashof  $10^6$  da Figura 5.38, onde existe uma recirculação significativa do fluido aquecido no interior do duto e como consequência, um maior valor de temperatura nas regiões superiores do fluido. Já para maiores valores de número de Reynolds ( $Re > 100$ ), esta situação é minimizada por conta do aumento da velocidade do fluido, que dificulta a recirculação e formação de células convectivas nas

regiões acima dos corpos, favorecendo o resfriamento dos mesmos e consequente redução da temperatura. Nestes casos, observa-se células convectivas somente entre os corpos 1 e 2 e após o corpo 3.

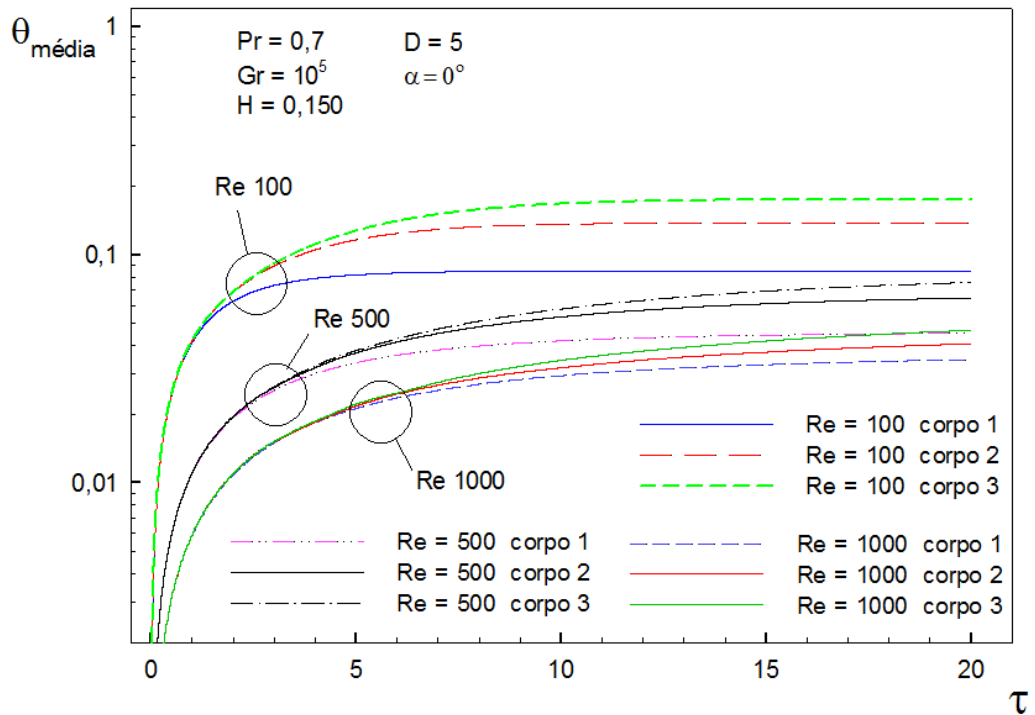


Figura 5.32 – Temperatura média,  $\theta_{\text{média}}$ , nos corpos 1, 2 e 3, versus tempo adimensional,  $\tau$ .

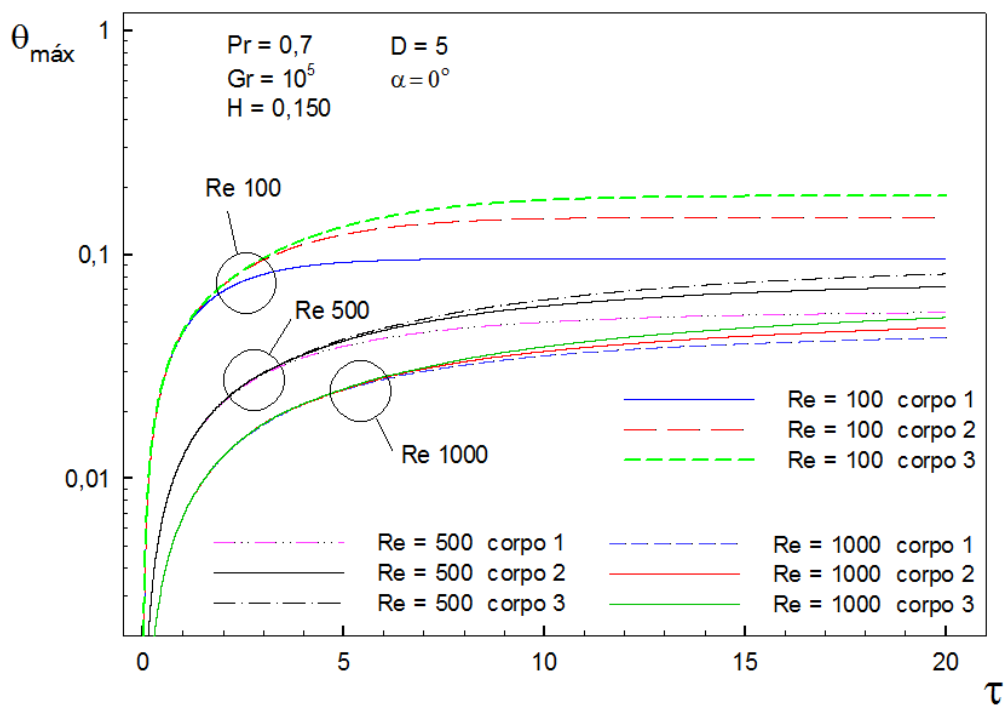
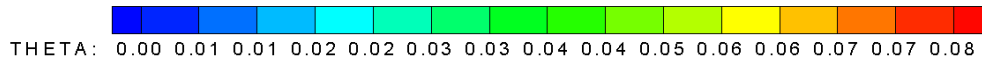
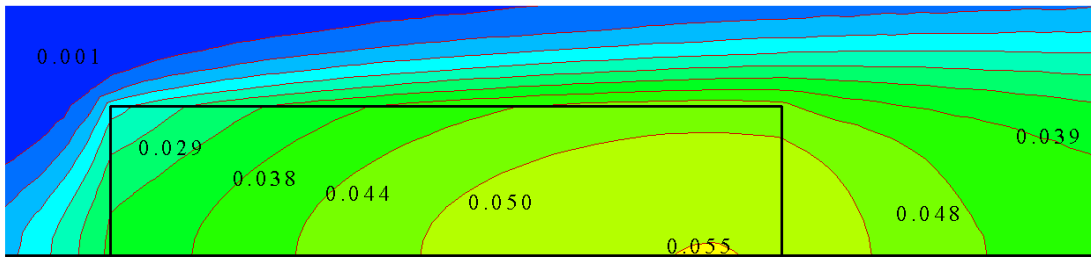
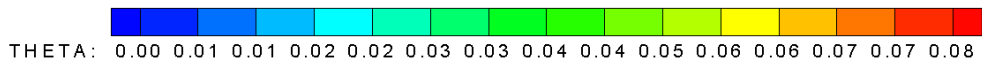
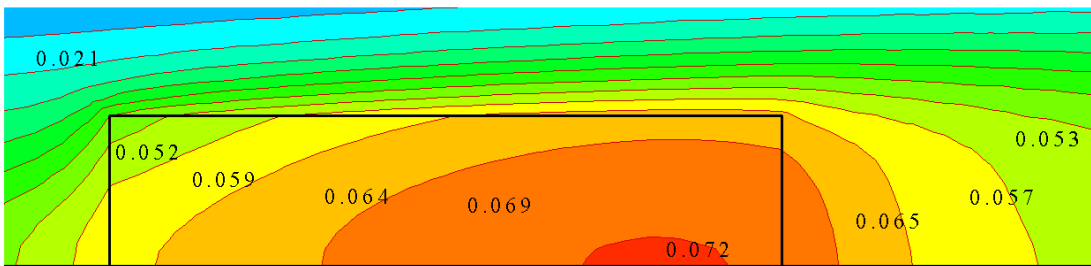


Figura 5.33 – Temperatura máxima,  $\theta_{\text{máx}}$ , nos corpos 1, 2, e 3, versus tempo adimensional,  $\tau$ .

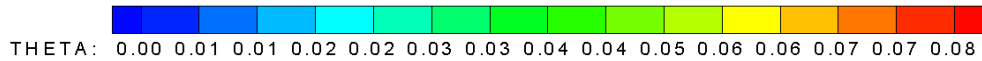
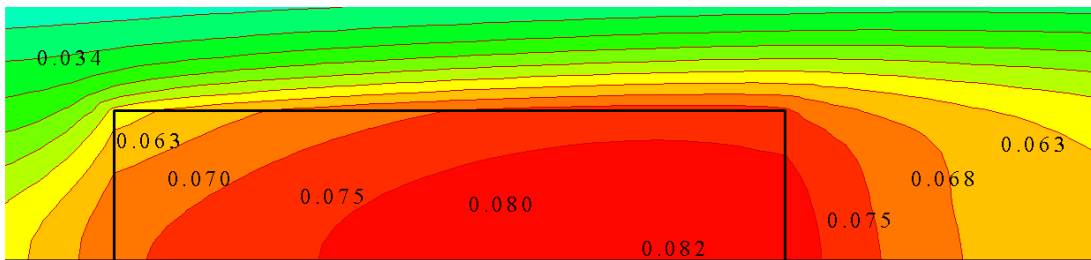




(a)

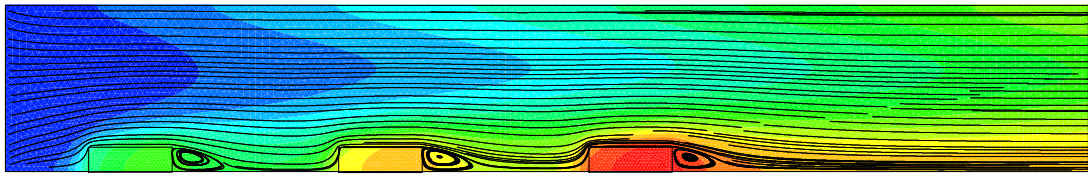


(b)



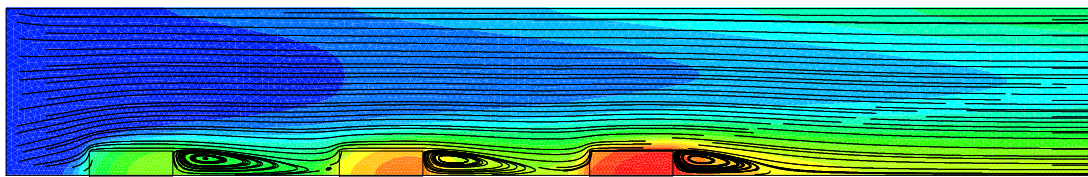
(c)

Figura 5.34 – Distribuição de temperatura,  $\theta$ , nos corpos internos: (a) corpo 1, (b) corpo 2 e (c) corpo 3. Parâmetros  $Re = 500$ ,  $Pr = 0,7$ ,  $Gr = 10^5$ ,  $D=5$ ,  $\alpha=0$  e  $H_c = 0,150$ .



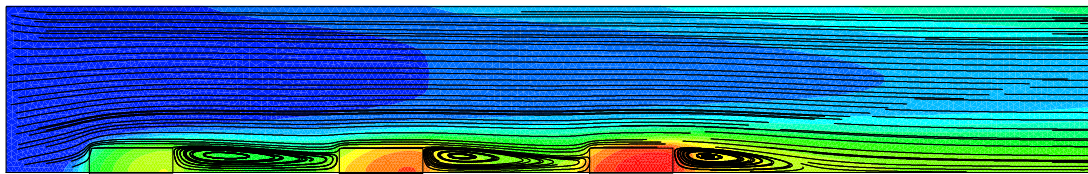
THETA: 0.00 0.01 0.03 0.04 0.05 0.06 0.08 0.09 0.10 0.11 0.13 0.14 0.15 0.16 0.18

Re = 100



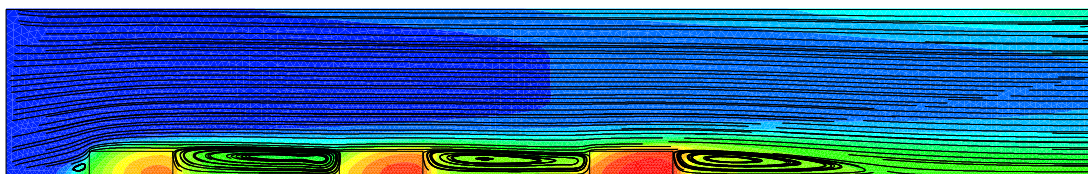
THETA: 0.00 0.01 0.01 0.02 0.03 0.04 0.04 0.05 0.06 0.07 0.07 0.08 0.09 0.10 0.10

Re = 300



THETA: 0.00 0.01 0.01 0.02 0.02 0.03 0.03 0.04 0.04 0.05 0.05 0.06 0.07 0.07 0.08

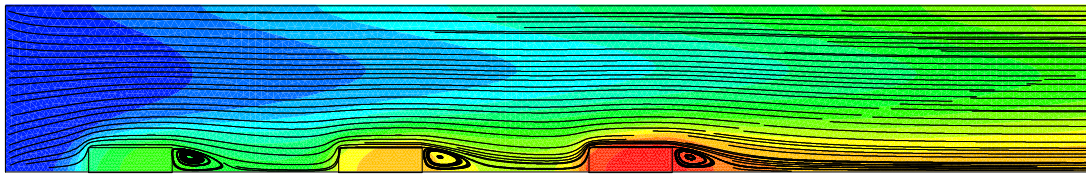
Re = 500



THETA: 0.00 0.00 0.01 0.01 0.01 0.02 0.02 0.03 0.03 0.03 0.04 0.04 0.04 0.05 0.05

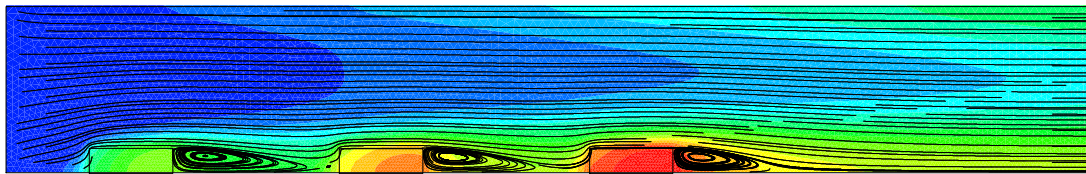
Re = 1000

Figura 5.35 - Distribuição da temperatura adimensional,  $\theta$ , e linhas de corrente,  $\psi$ , para geometria  $H_c = 0,150$ ,  $Pr = 0,7$ ;  $D = 5$ ,  $\alpha = 0$ , Grashof  $5 \times 10^4$ .



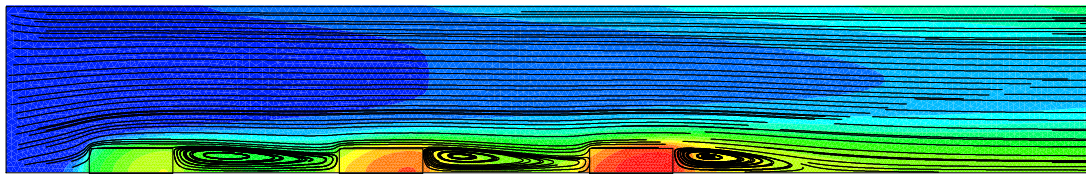
THETA: 0.00 0.01 0.02 0.04 0.05 0.06 0.07 0.09 0.10 0.11 0.12 0.13 0.15 0.16 0.17

Re = 100



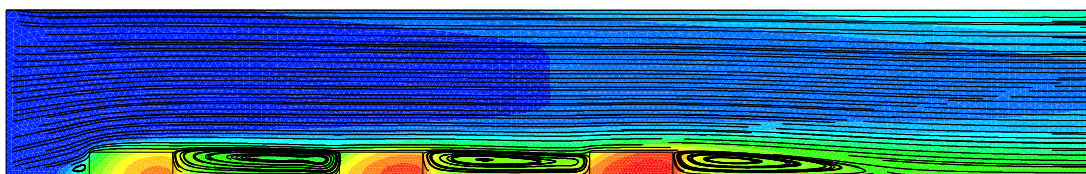
THETA: 0.00 0.01 0.01 0.02 0.03 0.04 0.04 0.05 0.06 0.07 0.07 0.08 0.09 0.09 0.10

Re = 300



THETA: 0.00 0.01 0.01 0.02 0.02 0.03 0.03 0.04 0.04 0.05 0.05 0.06 0.07 0.07 0.08

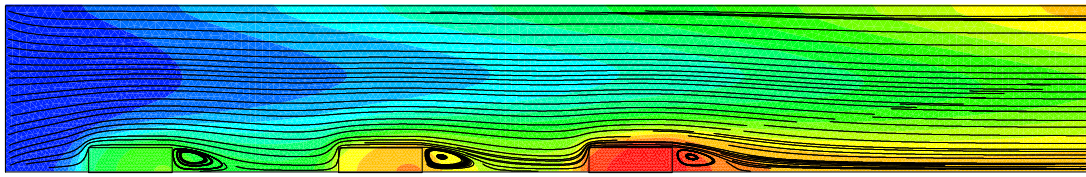
Re = 500



THETA: 0.00 0.00 0.01 0.01 0.01 0.02 0.02 0.03 0.03 0.03 0.04 0.04 0.04 0.05 0.05

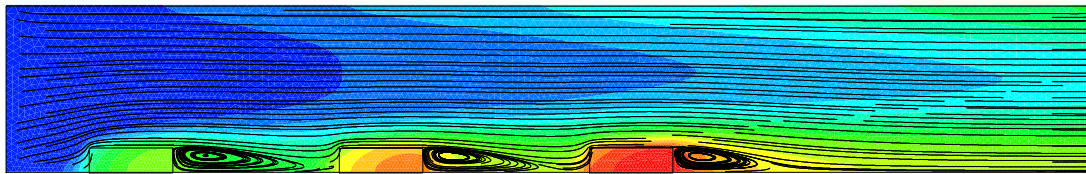
Re = 1000

Figura 5.36 - Distribuição da temperatura adimensional,  $\theta$ , e linhas de corrente,  $\psi$ , para geometria  $H_c = 0,150$ ,  $Pr = 0,7$ ;  $D = 5$ ,  $\alpha = 0$ , Grashof  $10^5$ .



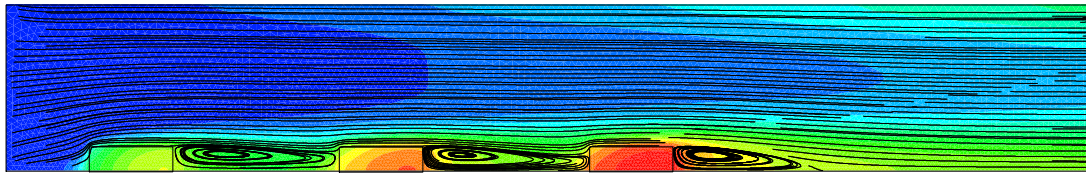
THETA: 0.00 0.01 0.02 0.03 0.05 0.06 0.07 0.08 0.09 0.10 0.12 0.13 0.14 0.15 0.16

Re = 100



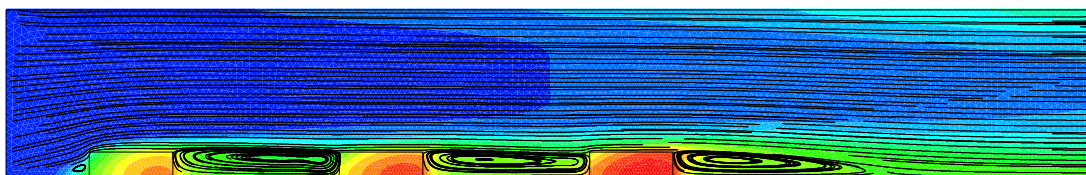
THETA: 0.00 0.01 0.01 0.02 0.03 0.04 0.04 0.05 0.06 0.07 0.07 0.08 0.09 0.09 0.10

Re = 300



THETA: 0.00 0.01 0.01 0.02 0.02 0.03 0.03 0.04 0.04 0.05 0.05 0.06 0.07 0.07 0.08

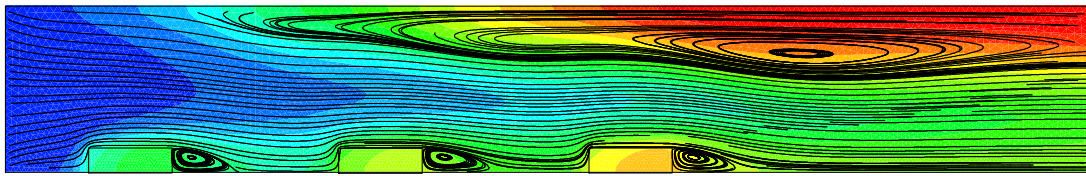
Re = 500



THETA: 0.00 0.00 0.01 0.01 0.01 0.02 0.02 0.03 0.03 0.03 0.04 0.04 0.04 0.05 0.05

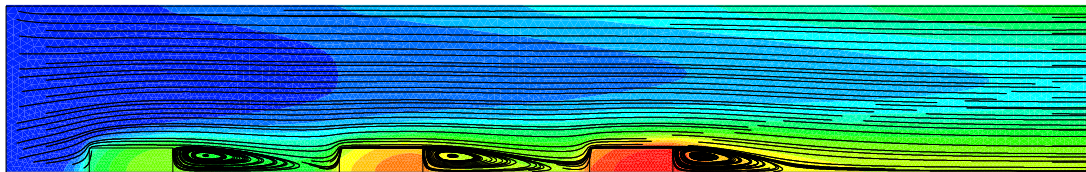
Re = 1000

Figura 5.37 - Distribuição da temperatura adimensional,  $\theta$ , e linhas de corrente,  $\psi$ , para geometria  $H_c = 0,150$ ,  $Pr = 0,7$ ;  $D = 5$ ,  $\alpha = 0$ , Grashof  $3 \times 10^5$ .



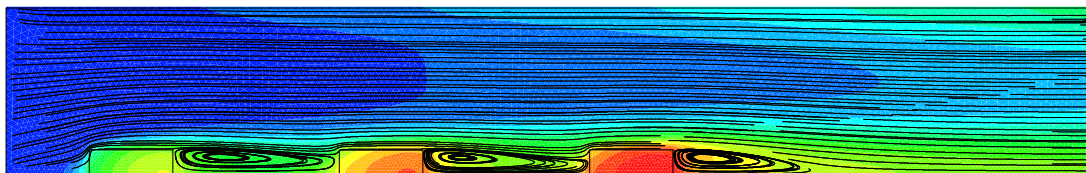
THETA: 0.00 0.01 0.02 0.04 0.05 0.06 0.07 0.09 0.10 0.11 0.12 0.13 0.15 0.16 0.17

Re = 100



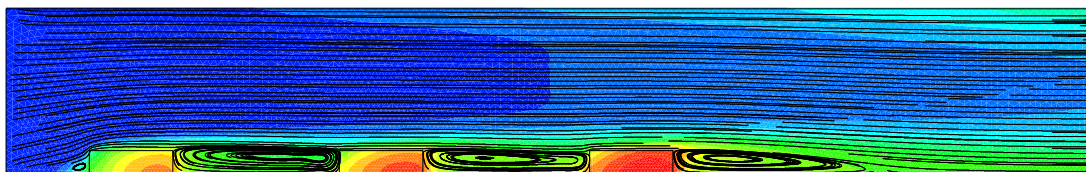
THETA: 0.00 0.01 0.01 0.02 0.03 0.04 0.04 0.05 0.06 0.06 0.07 0.08 0.09 0.09 0.10

Re = 300



THETA: 0.00 0.01 0.01 0.02 0.02 0.03 0.03 0.04 0.04 0.05 0.05 0.06 0.07 0.07 0.08

Re = 500



THETA: 0.00 0.00 0.01 0.01 0.01 0.02 0.02 0.02 0.03 0.03 0.04 0.04 0.04 0.05 0.05

Re = 1000

Figura 5.38 - Distribuição da temperatura adimensional,  $\theta$ , e linhas de corrente,  $\psi$ , para geometria  $H_c = 0,150$ ,  $Pr = 0,7$ ;  $D = 5$ ,  $\alpha = 0$ , Grashof  $10^6$ .

Na Figura 5.39 é apresentada a evolução temporal das distribuições de temperatura ( $\theta$ ) e as linhas de corrente (linhas pretas) para valores de tempos adimensionais distintos. Os parâmetros considerados são: altura adimensional dos corpos  $H_c = 0,100$ , número de Reynolds 500, número de Grashof  $10^5$ , razão de difusividades 5, ângulo de inclinação  $\alpha = 0^\circ$  e o número de Prandtl 0,7. Por conta da geração interna de energia é possível perceber o aquecimento nos corpos condutores e geradores já nos instantes iniciais e, conseqüentemente, ocorre a transferência de calor por convecção entre as superfícies dos corpos e o fluido, aumentando a temperatura adimensional dos mesmos. Com o aumento do tempo adimensional, percebe-se que o padrão das distribuições de temperaturas no fluido praticamente não se altera para tempos adimensionais  $\tau \geq 7,5$ . Com relação aos corpos sólidos, o padrão de distribuições de temperaturas em cada corpo praticamente não se altera para tempos adimensionais  $\tau \geq 17,5$ . Observa-se também na Figura 5.39, conforme já relatado anteriormente, que as menores temperaturas encontram-se no corpo 1, as intermediárias no corpo 2 e por fim, as maiores temperaturas adimensionais são encontradas no corpo 3, evidenciando que o calor removido do corpo 1 aquece o fluido, e contribui para diminuição da troca de calor entre o fluido e o corpo 2 e assim ocorre também entre os corpos 2 e 3.

Referente ao padrão de escoamento do fluido representado pelas linhas de corrente, a Figura 5.39 ilustra pouca variação no mesmo para todo o intervalo de tempo adimensional considerado, ou seja, o escoamento é laminar, praticamente isento de perturbações e completamente desenvolvido na saída. Isso ocorre por conta da maior velocidade do fluido. Observam-se pequenas células de recirculações que se formam nas regiões a jusante aos corpos. O tamanho destas células é pouco expressivo por conta da baixa altura dos corpos.

Para a Figura 5.40, o número de Reynolds é 100 e os demais parâmetros são idênticos aos da Figura 5.39. Neste caso, o padrão das distribuições de temperaturas no sólido e no fluido praticamente se mantém uniforme para tempos adimensionais  $\tau \geq 10$  e  $\tau \geq 12,5$ , respectivamente. Conforme esperado, as temperaturas são mais elevadas para este caso da Figura 5.40 em comparação com a Figura 5.39 pois as velocidades do fluido são menores por conta do menor número de Reynolds, sendo assim, menos favorável para a troca de calor.

Referente ao padrão de escoamento do fluido, as considerações para a Figura 5.40 são idênticas às da Figura 5.39 com exceção das células convectivas formadas a jusante aos corpos, onde as mesmas são quase imperceptíveis na Figura 5.40, pois para velocidades de escoamento mais baixas, a dissipação da célula é facilitada.

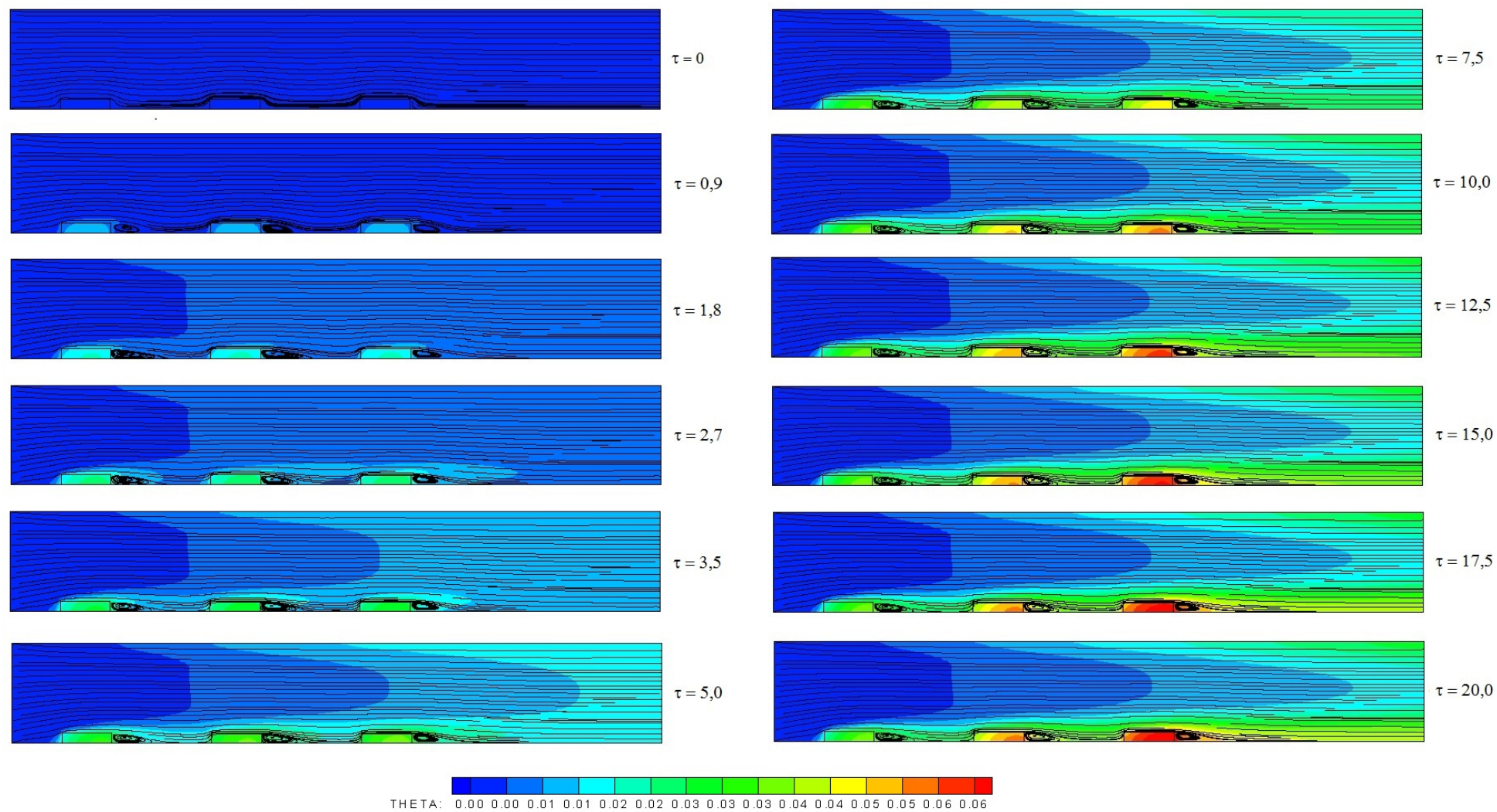


Figura 5.39 – Evolução temporal da distribuição da temperatura adimensional,  $\theta$ , e linhas de corrente,  $\psi$ , para geometria  $H_c = 0,100$ ,  $Pr = 0,7$ ;  $Re = 500$ ,  $D = 5$ ,  $\alpha = 0^0$  e Grashof  $10^5$ .

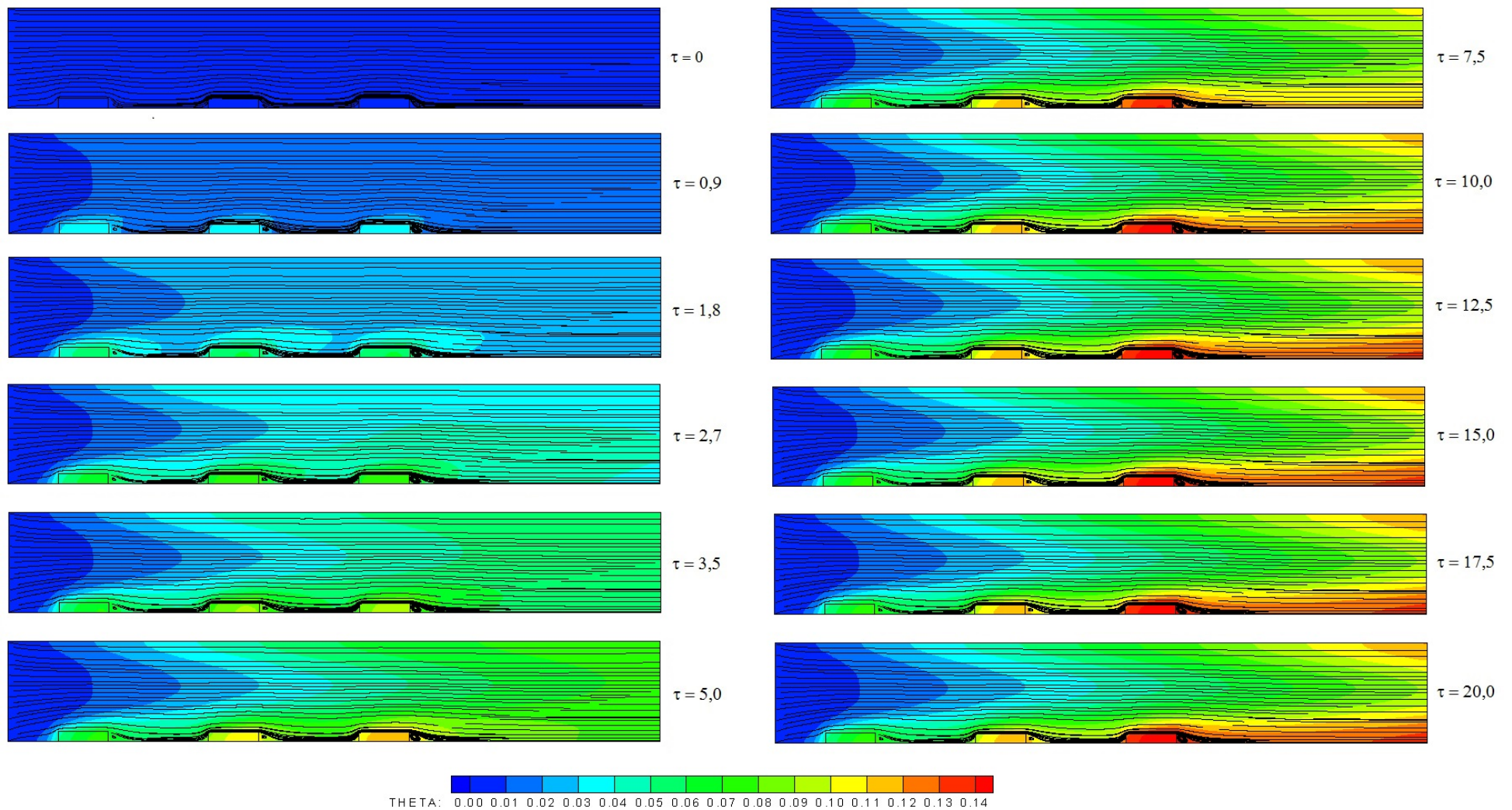


Figura 5.40 – Evolução temporal da distribuição da temperatura adimensional,  $\theta$ , e linhas de corrente,  $\psi$ , para geometria  $H_c = 0,100$ ,  $Pr = 0,7$ ;  $Re = 100$ ,  $D = 5$ ,  $\alpha = 0^0$  e Grashof  $10^5$ .



## 6. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

### 6.1. INTRODUÇÃO

No presente trabalho foi estudado o problema conjugado de transferência de calor por convecção mista do fluido no interior de um duto com presença de corpos com condução de calor e geração interna de energia.

A análise numérica utilizou o método de elementos finitos, com malha não estruturada constituída por elementos triangulares e considerou o escoamento laminar, bidimensional, transiente e permanente. Foram realizados estudos para escolha de malhas e do incremento de tempo adimensional para uso nas simulações. Foi utilizada a linguagem de programação FORTRAN nos códigos computacionais desenvolvidos e, os mesmos foram validados através de comparações com resultados de trabalhos da literatura.

O caso estudado caracteriza-se por apresentar problema conjugado da transferência de calor por convecção mista que ocorre no domínio fluido,  $\Omega_f$ , e a condução de calor com geração interna de energia que ocorre no domínio sólido,  $\Omega_s$ . A geometria analisada representa um duto de comprimento  $L$  e altura  $H$ . O fluido considerado foi o ar que entra no duto com uma velocidade constante  $u_0$ , pressão  $p_0$  e temperatura uniforme fria  $T_c$ . As superfícies horizontais do duto são isoladas termicamente sendo que, na superfície inferior são fixados três corpos de comprimento  $b$  e altura  $h_c$ , onde ocorre geração de energia térmica. Para as situações analisadas, a altura dos corpos  $h_c$  variou em três valores distintos, bem como o ângulo de inclinação do duto  $\alpha$  que teve valores  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  ou  $90^\circ$ .

Foram determinadas as distribuições de temperaturas no fluido e no sólido, as velocidades do fluido, e foram calculadas as taxas de calor transferidas entre o sólido e o fluido bem como as temperaturas médias e máximas nos corpos sólidos. Os parâmetros térmicos envolvidos no estudo foram: o número de Reynolds, o número de Grashof, a relação de difusividades entre o sólido e o fluido, a geração de energia interna homogênea nos três corpos e o número de Prandtl sendo que, destes parâmetros, somente o número de Prandtl foi considerado constante. Os parâmetros geométricos que foram variados são: a altura dos corpos e o ângulo de inclinação do duto.

## 6.2. CONCLUSÕES

A geometria do duto estudada foi variada em função das diferentes alturas de corpos e inclinação do duto. Referente à altura dos corpos, três valores foram considerados:  $H_c=0,075$ ;  $H_c=0,100$  e  $H_c=0,150$ . Para cada uma destas alturas foi definido um conjunto de malhas, variando o grau de refinamento das mesmas e, as malhas escolhidas para as simulações apresentaram independência com relação aos resultados. As Figuras 5.6 e 5.7 e as Figuras 5.9 a 5.12 que apresentam a variação do número de Nusselt médio,  $Nu_c$ , nas superfícies dos corpos, versus o número de elementos, NE, das malhas, mostram que, para um valor de número de Grashof fixado, o número de Nusselt médio na superfície do corpo produziu resultados muito próximos indicando que as malhas consideradas estavam adequadas para a continuidade dos estudos. Nestas mesmas figuras foi verificado que o número de Nusselt médio aumenta com o aumento do número de Grashof, principalmente para valores de Grashof maiores que  $10^5$ , evidenciando maior participação da convecção natural na transferência de calor. Essa situação foi verificada em cada uma das geometrias estudadas, ou seja, para as três alturas de corpos consideradas o aumento do número de Grashof resultou em maior número de Nusselt médio. O fato de o número de Nusselt médio na superfície do corpo 1 ser maior em relação aos corpos 2 e 3 evidencia maior troca de calor no entorno do mesmo sendo que, o calor removido é direcionado aos corpos 2 e 3, dificultando a troca de calor nestes. Os resultados para os corpos 2 e 3 são bem aproximados, motivo pelo qual a maioria dos gráficos apresentam somente resultados para os corpos 1 e 3.

O incremento de tempo adimensional  $\Delta\tau = 10^{-3}$  se mostrou adequado para as simulações efetuadas, pois apresentou independência nos resultados dos estudos realizados.

Nas simulações realizadas, observou-se que a diferença de altura dos corpos,  $H_c$ , não apresentou resultados com diferença significativa nos valores de número de Nusselt médio. Isso se deve à proximidade de valores entre as alturas consideradas para o estudo e também por conta da razão entre as mesmas e a altura do duto,  $H$ , ser pouco representativa, com valor máximo 0,15.

O aumento na razão de difusividades,  $D$ , entre o sólido e o fluido resultou em aumento no número de Nusselt médio. Isso ocorre porque o aumento na razão de difusividades promove a diminuição na temperatura e nos gradientes térmicos no interior do sólido,

reduzindo a resistência ao fluxo de calor e intensificando a transferência de calor entre a superfície do sólido e o fluido.

O aumento no número de Reynolds,  $Re$ , nas simulações resultou em aumento no número de Nusselt médio, evidenciando uma maior troca de calor convectiva entre os corpos e o fluido, por conta de maiores velocidades envolvidas no escoamento. Isso pode ser verificado nas Figuras 5.21 a 5.23. Como consequência desta maior troca de calor, observou-se também que as temperaturas médias e máximas nos corpos diminuem com o aumento do número de Reynolds, conforme mostrado nas Figuras 5.32 e 5.33.

O efeito do ângulo de inclinação do duto,  $\alpha$ , mostrou que o número de Nusselt médio no corpo 1 é maior para ângulo de  $45^\circ$ , intermediário para ângulo de  $90^\circ$  e menor para ângulo  $0^\circ$ , em toda a faixa de tempo adimensional, para número de Reynolds 100, conforme Figuras 5.28 a 5.31. Já para o corpo 3, a Figura 5.31 mostra que os resultados do número de Nusselt médio para ângulos  $45^\circ$  e  $90^\circ$  são bem aproximados e maiores que o resultado para ângulo  $0^\circ$ , para a faixa de número de Grashof  $5 \times 10^4$  a  $10^6$ .

As temperaturas médias e máximas nos corpos são menores para maiores valores de número de Reynolds pois, conforme já mencionado, as maiores velocidades de escoamento propiciam melhor troca de calor entre o sólido e o fluido.

O comportamento do número de Nusselt médio em função do tempo adimensional apresentou resultado semelhante para todas as simulações realizadas, ou seja, apresenta valores elevados nos tempos iniciais, decrescendo de forma acentuada com o aumento do tempo até posterior estabilização. Para todos os casos, no tempo adimensional 20 o regime permanente foi constatado.

A análise da evolução temporal das distribuições de temperatura ( $\theta$ ) e das linhas de corrente ( $\psi$ ), conforme Figuras 5.39 e 5.40, mostra que por conta da geração interna de energia é possível perceber o aquecimento nos corpos condutores e geradores já nos instantes iniciais e, conseqüentemente, ocorre a transferência de calor por convecção entre as superfícies dos corpos e o fluido, aumentando a temperatura adimensional dos mesmos. Com o aumento do tempo adimensional, percebe-se que o padrão das distribuições de temperaturas do fluido, bem como dos corpos, não se altera. Observa-se também nestas figuras que as menores temperaturas encontram-se no corpo 1, as intermediárias no corpo 2 e por fim, as maiores temperaturas adimensionais são encontradas no corpo 3. Referente ao padrão de

escoamento do fluido representado pelas linhas de corrente nas Figuras 5.39 e 5.40, observa-se que o mesmo apresenta comportamento com pouca variação com o tempo adimensional considerado, ou seja, o escoamento é laminar e praticamente isento de perturbações.

### 6.3. RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Mediante os resultados e conclusões obtidas nesta tese, sugere-se como continuidade para trabalhos futuros:

- 1) Estudar a influência das distâncias entre as fontes condutoras e geradoras de energia interna e do posicionamento das mesmas na parede do duto;
- 2) Estudar outras configurações de alturas para os corpos e duto, variando a razão de aspecto  $h_c / H$ ;
- 3) Avaliar os efeitos para geometria com corpos internos de diferentes alturas para os corpos 1, 2 e 3;
- 4) Verificar o efeito da utilização de uma razão de aspecto  $L / H$  maior e menor;
- 5) Incluir na parede inferior do duto um substrato condutor;
- 6) Avaliar com maior profundidade os efeitos da inclinação do duto para uma gama maior de valores de número de Grashof, número de Reynolds e razão de difusividades;
- 7) Estudar o problema com estabelecimento de geração interna de energia diferente em cada corpo;
- 8) Incluir o efeito da radiação nas avaliações;
- 9) Verificar o efeito da inclusão de camada de cobertura condutora nas superfícies do corpos;
- 10) Estudar o problema considerando o escoamento do fluido em regime turbulento.

# APÊNDICE A - FUNDAMENTOS DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

## A.1. INTRODUÇÃO

O método de elementos finitos é uma importante ferramenta para solução numérica de uma grande parte de problemas na Engenharia. Como aplicações podem ser citadas: cálculo de tensões e deformações em estruturas, análise de tensão em componentes automotivos, aeronáuticos e pontes, análises de fluxo de calor, escoamento de fluido, fluxo magnético entre outros problemas. Com os avanços na tecnologia de computação, complexos problemas podem ser modelados com relativa facilidade.

Para problemas que envolvem geometrias e carregamentos complexos e propriedades dos materiais não uniformes, em geral não é possível se obter uma solução matemática analítica. Nestes casos, somente é possível obter uma solução aproximada para os problemas, usando métodos numéricos.

Os problemas físicos são representados, em geral, por equações diferenciais ou sistemas de equações diferenciais. O método de elementos finitos transforma a equação diferencial ou o sistema de equações diferenciais em um sistema de equações algébricas. O método aproxima os valores das incógnitas a um número de pontos discretos do domínio. O processo de modelagem consiste em discretizar o domínio em pequenos subdomínios chamados de elementos finitos. Ao invés de resolver o problema para todo o domínio de uma só vez, as equações são formuladas para cada elemento e, então, estas são combinadas para se obter a solução em todo o domínio.

Sendo assim, o método de elementos finitos será utilizado para resolver as Equações (2.36), (2.37) e (2.38) juntamente com as condições iniciais e de contorno.

## **A.2. VANTAGENS E DESVANTAGENS DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS**

Muitas propriedades vantajosas do método de elementos finitos têm contribuído para o seu uso frequente. Algumas das principais vantagens são:

1. As propriedades dos materiais em elementos adjacentes não precisam ser as mesmas. Isso permite que o método seja aplicado a corpos compostos por diferentes materiais;
2. Fronteiras de formas irregulares podem ser aproximadas usando-se elementos com lados retos, ou usando elementos com contornos curvos;
3. Os elementos podem ter tamanhos variados. Esta propriedade permite que a malha seja expandida ou refinada, conforme haja necessidade;
4. Condições de contorno, como fluxos ou carregamentos superficiais descontínuos, não apresentam dificuldades para o método;
5. Todas as propriedades acima podem ser incorporadas a um software para a resolução de problemas de uma mesma área. Por exemplo, um software para a resolução de problemas de transferência de calor, pode analisar problemas unidimensionais, bidimensionais ou tridimensionais com geometrias complexas.

A principal desvantagem do método de elementos finitos é a necessidade de recursos computacionais específicos. Os cálculos envolvidos no método são numerosos demais para a solução manual até mesmo quando se trata de problemas muito pequenos. A tecnologia atual tem contribuído para amenizar esta desvantagem do método de elementos finitos pois foram desenvolvidos computadores de pequeno porte com custo mais acessível, que possuem capacidade suficiente para suportar grande quantidade de cálculos consumindo menor tempo computacional.

## **A.3. DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO**

O domínio é dividido em elementos triangulares e, sendo assim, cada triângulo representa um elemento do domínio. Nos vértices do triângulo existem os nós, ou seja, cada vértice do triângulo corresponde a um nó ou ponto nodal. Este nó ou ponto nodal pode pertencer a mais de um elemento, dependendo da discretização do domínio. Cada nó está

associado a um valor da grandeza  $\phi$ , sendo que  $\phi$  pode representar a temperatura adimensional,  $\theta$ , a função corrente,  $\psi$ , ou a vorticidade,  $\omega$ .

A Figura A.1 representa genericamente um domínio no plano (X, Y) discretizado, com as diferentes condições de contorno, nas superfícies  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$ .

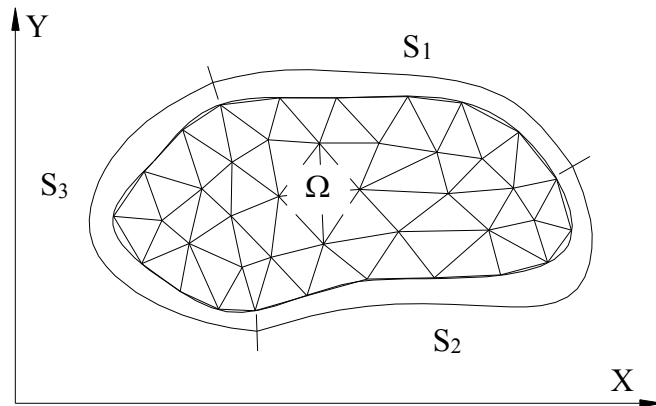


Figura A.1 – Domínio discretizado e condições de contorno generalizadas

A Figura A.2 representa, no plano (X, Y), o elemento bidimensional com os pontos nodais com numeração local  $i, j, k$  e a função de forma ou de interpolação linear. Os pontos nodais  $i, j, k$  apresentam coordenadas  $(X_i, Y_i)$ ,  $(X_j, Y_j)$  e  $(X_k, Y_k)$  e as quantidades escalares  $\phi_i$ ,  $\phi_j$  e  $\phi_k$ , respectivamente.

A distribuição da grandeza  $\phi^e$  no elemento varia linearmente, dentro de cada elemento e seu valor escalar é aproximado pela equação linear, como segue:

$$\phi = \phi^e = \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 Y . \quad (\text{A.1})$$

Para cada ponto nodal  $i, j, k$  resulta, respectivamente

$$\phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_i + \alpha_3 Y_i , \quad (\text{A.2a})$$

$$\phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 X_j + \alpha_3 Y_j , \quad (\text{A.2b})$$

$$\phi_k = \alpha_1 + \alpha_2 X_k + \alpha_3 Y_k . \quad (\text{A.2c})$$

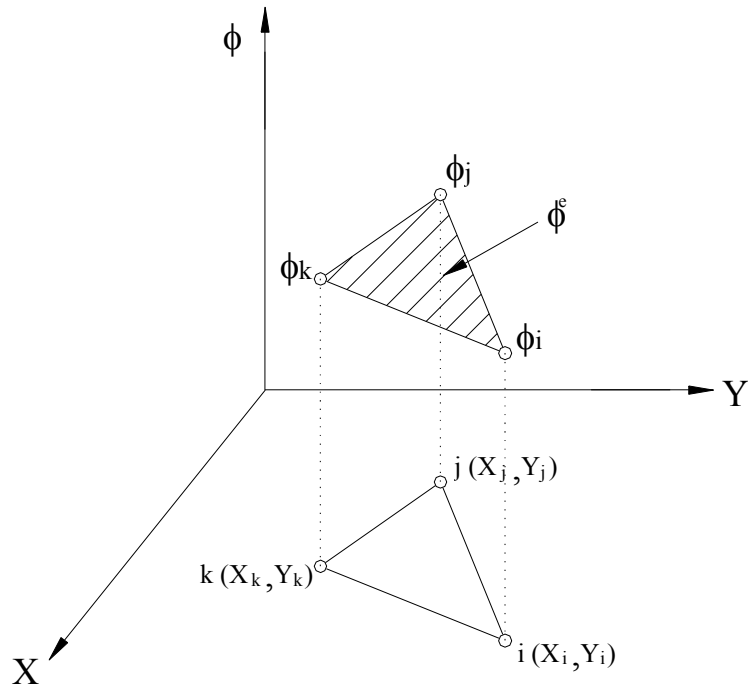


Figura A.2 – Elemento triangular e função de interpolação

Resolvendo o sistema de Equações (A.2a), (A.2b) e (A.2c), resulta:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2A} [(X_j Y_k - X_k Y_j) \phi_i + (X_k Y_i - X_i Y_k) \phi_j + (X_i Y_j - X_j Y_i) \phi_k], \quad (\text{A.3a})$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2A} [(Y_j - Y_k) \phi_i + (Y_k - Y_i) \phi_j + (Y_i - Y_j) \phi_k], \quad (\text{A.3b})$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2A} [(X_k - X_j) \phi_i + (X_i - X_k) \phi_j + (X_j - X_i) \phi_k], \quad (\text{A.3c})$$

sendo A a área do elemento triangular dada por:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix}. \quad (\text{A.4})$$



Substituindo as Equações (A.3a), (A.3b) e (A.3c) correspondentes, respectivamente, aos valores de  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  na Equação (A.2), resulta na equação do elemento:

$$\phi = \phi^e = N_i \phi_i + N_j \phi_j + N_k \phi_k , \quad (\text{A.5})$$

sendo  $N_i$ ,  $N_j$  e  $N_k$  são as funções de forma dadas a seguir:

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i X + c_i Y) , \quad (\text{A.6a})$$

$$\text{com } a_i = X_j Y_k - X_k Y_j , \quad b_i = Y_j - Y_k , \quad c_i = X_k - X_j , \quad (\text{A.6b})$$

$$N_j = \frac{1}{2A} (a_j + b_j X + c_j Y) , \quad (\text{A.6c})$$

$$\text{com } a_j = X_k Y_i - X_i Y_k , \quad b_j = Y_k - Y_i , \quad c_j = X_i - X_k , \quad (\text{A.6d})$$

$$N_k = \frac{1}{2A} (a_k + b_k X + c_k Y) , \quad (\text{A.6e})$$

$$\text{com } a_k = X_i Y_j - X_j Y_i , \quad b_k = Y_i - Y_j , \quad c_k = X_j - X_i . \quad (\text{A.6f})$$

A Equação (A.5) pode ser escrita na forma matricial:

$$\phi = \phi^e(X, Y) = [N^e] \{\phi^e\} = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{Bmatrix} , \quad (\text{A.7})$$

onde se considera que:

$$\phi^e = 0, \text{ fora do elemento,}$$

$$\phi^e = N_i \phi_i + N_j \phi_j + N_k \phi_k , \text{ dentro do elemento e no contorno do elemento.}$$

Como as funções de forma  $N_i$ ,  $N_j$  e  $N_k$  são funções lineares em relação às variáveis  $X$  e  $Y$ , os gradientes nas direções,  $X$  ou  $Y$ , serão constantes em cada elemento.

Os gradientes nas direções  $X$  e  $Y$  são, respectivamente:

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = \frac{\partial N_i}{\partial X} \phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial X} \phi_j + \frac{\partial N_k}{\partial X} \phi_k , \quad (\text{A.8a})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial Y} = \frac{\partial N_i}{\partial Y} \phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial Y} \phi_j + \frac{\partial N_k}{\partial Y} \phi_k , \quad (\text{A.8b})$$

Das Equações (A.6), resulta em:

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial X} = \frac{b_\beta}{2A} \quad (\text{com } \beta = i, j, k) \quad (\text{A.9a})$$

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial Y} = \frac{c_\beta}{2A} \quad (\text{com } \beta = i, j, k) \quad (\text{A.9b})$$

Portanto, das Equações (A.8) e (A.9), tem-se:

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = \frac{1}{2A} (b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_k \phi_k) , \quad (\text{A.10a})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial Y} = \frac{1}{2A} (c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_k \phi_k) . \quad (\text{A.10b})$$

A seguir, as equações de conservação serão desenvolvidas para obtenção geral das matrizes para os elementos, utilizando o método de elementos finitos. Após essa etapa, o programa computacional usando o método de elementos finitos será implementado para o estudo de convecção mista.

# APÊNDICE B - MÉTODO DE GALERKIN PARA A EQUAÇÃO DIFERENCIAL BIDIMENSIONAL EM REGIME NÃO PERMANENTE

## B.1. INTRODUÇÃO

Seja a equação diferencial bidimensional em regime não permanente (Segerlind, 1984):

$$\delta \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \right) + Q_\phi = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \tau}, \quad (\text{B.1})$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\phi = \phi_0(X, Y), \quad (\text{B.2})$$

$$q = \delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial X} + \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right) = \frac{\partial \phi}{\partial n}, \quad (\text{B.3})$$

onde  $\phi$  representa uma função escalar;  $\phi_0(X, Y)$  representa uma função especificada no contorno;  $q$  é fluxo de calor normal  $n$  à superfície  $S$  do contorno;  $\lambda$  é um parâmetro de valor constante e  $\tau$  é o tempo adimensional.

## B.2. MÉTODO DE GALERKIN

A Equação (B.1) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\delta \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \right) + \left( Q_\phi - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right) = 0. \quad (\text{B.4})$$

A integral residual de volume é apresentada na seguinte forma:

$$\{R^e\} = - \int_{V^e} [N^e]^T \left\{ \delta \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \right) + \left( Q_\phi^e - \lambda \frac{\partial \phi^e}{\partial \tau} \right) \right\} dV = 0. \quad (B.5)$$

A Equação (B.5) pode ser escrita como sendo:

$$\begin{aligned} \{R^e\} = & - \int_{V^e} [N^e]^T \delta \frac{\partial^2 \phi^e}{\partial X^2} dV - \int_{V^e} [N^e]^T \delta \frac{\partial^2 \phi^e}{\partial Y^2} dV \\ & - \int_{V^e} [N^e]^T \left( Q_\phi^e - \lambda \frac{\partial \phi^e}{\partial \tau} \right) dV. \end{aligned} \quad (B.6)$$

As derivadas devem ser transformadas para as formas de menor ordem, usando a derivada de produto.

Usa-se a seguinte derivada do produto:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \right) = [N^e]^T \frac{\partial^2 \phi^e}{\partial X^2} + \frac{\partial [N^e]^T}{\partial X} \frac{\partial \phi^e}{\partial X}. \quad (B.7)$$

Rearranjando a Equação (B.7), resulta:

$$[N^e]^T \frac{\partial^2 \phi^e}{\partial X^2} = \frac{\partial}{\partial X} \left( [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \right) - \frac{\partial [N^e]^T}{\partial X} \frac{\partial \phi^e}{\partial X}. \quad (B.8)$$

Para o segundo termo da Equação (B.6), segue-se o mesmo procedimento:

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left( [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right) = [N^e]^T \frac{\partial^2 \phi^e}{\partial Y^2} + \frac{\partial [N^e]^T}{\partial Y} \frac{\partial \phi^e}{\partial Y}. \quad (B.9)$$

Rearranjando a Equação (B.9), resulta:

$$[N^e]^T \frac{\partial^2 \phi^e}{\partial Y^2} = \frac{\partial}{\partial Y} \left( [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right) - \frac{\partial [N^e]^T}{\partial Y} \frac{\partial \phi^e}{\partial Y}. \quad (B.10)$$

Substituindo as Equações (B.8) e (B.10) em (B.6), resulta:

$$\{R^e\} = - \int_{V^e} \left[ \delta \frac{\partial}{\partial X} \left( [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \right) - \delta \frac{\partial [N^e]^T}{\partial X} \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \right] dV$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{V^e} \left[ \delta \frac{\partial}{\partial Y} \left( [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right) - \delta \frac{\partial [N^e]^T}{\partial Y} \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right] dV \\
& - \int_{V^e} [N^e]^T \left( Q_\phi^e - \lambda \frac{\partial \phi^e}{\partial \tau} \right) dV.
\end{aligned} \tag{B.11}$$

Rearranjando a Equação (B.11), resulta:

$$\begin{aligned}
\{R^e\} &= \int_{V^e} \left[ \delta \frac{\partial [N^e]^T}{\partial X} \frac{\partial \phi^e}{\partial X} + \delta \frac{\partial [N^e]^T}{\partial Y} \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right] dV \\
& - \int_{V^e} \left[ \delta \frac{\partial}{\partial X} \left( [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \right) + \delta \frac{\partial}{\partial Y} \left( [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right) \right] dV \\
& - \int_{V^e} [N^e]^T \left( Q_\phi^e - \lambda \frac{\partial \phi^e}{\partial \tau} \right) dV.
\end{aligned} \tag{B.12}$$

A segunda integral de volume da Equação (B.12) pode ser transformada em uma integral de superfície usando o teorema de Gauss (Olmstead, 1961), resultando:

$$\int_{A^e} \left[ \delta [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial X} + \delta [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right] dA. \tag{B.13}$$

A Equação (B.13) pode ser reduzida para a seguinte forma:

$$\int_{A^e} [N^e]^T \left( \delta \frac{\partial \phi^e}{\partial X} + \delta \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right) dA. \tag{B.14}$$

Substituindo a Equação (B.3) em (B.14), vem:

$$\int_{A^e} [N^e]^T \left( \delta \frac{\partial \phi^e}{\partial X} + \delta \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right) dA = \int_{A^e} [N^e]^T q^e dA. \tag{B.15}$$

Portanto, a integral residual completa fica na seguinte forma:

$$\{R^e\} = \int_{V^e} \left[ \delta \frac{\partial [N^e]^T}{\partial X} \frac{\partial \phi^e}{\partial X} + \delta \frac{\partial [N^e]^T}{\partial Y} \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right] dV - \int_{A^e} [N^e]^T q^e dA$$

$$-\int_{V^e} [N^e]^T \left( Q_\phi^e - \lambda \frac{\partial \phi^e}{\partial \tau} \right) dV. \quad (B.16)$$

A função escalar é definida na seguinte forma matricial:

$$\phi^e = [N^e]^T \{ \phi^e \}. \quad (B.17)$$

As derivadas  $\frac{\partial \phi^e}{\partial X}$  e  $\frac{\partial \phi^e}{\partial Y}$  na primeira integral da Equação (B.16) podem ser substituídas por:

$$\frac{\partial \phi^e}{\partial X} = \frac{\partial [N^e]^T}{\partial X} \{ \phi^e \} \text{ e } \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} = \frac{\partial [N^e]^T}{\partial Y} \{ \phi^e \}. \quad (B.18)$$

Portanto, rearranjando as Equações (B.17) e (B.18) em (B.16), resulta:

$$\begin{aligned} \{ R^e \} = & \left[ \int_{V^e} \left( \delta \frac{\partial [N^e]^T}{\partial X} \frac{\partial [N^e]}{\partial X} + \delta \frac{\partial [N^e]^T}{\partial Y} \frac{\partial [N^e]}{\partial Y} \right) dV \right] \{ \phi^e \} - \int_{A^e} [N^e]^T q^e dA \\ & - \int_{V^e} [N^e]^T Q_\phi^e dV + \int_{V^e} \lambda [N^e]^T [N^e] \frac{\partial \{ \phi^e \}}{\partial \tau} dV. \end{aligned} \quad (B.19)$$

$$\text{Definindo, } \left\{ \dot{\phi}^e \right\} = \frac{\partial \{ \phi^e \}}{\partial \tau}. \quad (B.20)$$

Da Equação (B.17),  $\phi^e$  é definida por:

$$\phi^e = [N^e]^T \{ \phi^e \}, \quad (B.21)$$

com isto, define-se a vetor  $\{ g^e \}$  como sendo:

$$\{ g^e \} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \\ \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial X} & \frac{\partial N_j^e}{\partial X} & \frac{\partial N_k^e}{\partial X} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial Y} & \frac{\partial N_j^e}{\partial Y} & \frac{\partial N_k^e}{\partial Y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{Bmatrix} = [B^e] \{ \phi^e \}. \quad (B.22)$$

Onde a matriz das derivadas das funções de forma  $[B^e]$  é dada por:

$$[B^e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial X} & \frac{\partial N_j}{\partial X} & \frac{\partial N_k}{\partial X} \\ \frac{\partial N_i}{\partial Y} & \frac{\partial N_j}{\partial Y} & \frac{\partial N_k}{\partial Y} \end{bmatrix}. \quad (B.23)$$

A matriz  $[B^e]^T$  é dada por:

$$[B^e]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial X} & \frac{\partial N_i}{\partial Y} \\ \frac{\partial N_j}{\partial X} & \frac{\partial N_j}{\partial Y} \\ \frac{\partial N_k}{\partial X} & \frac{\partial N_k}{\partial Y} \end{bmatrix}. \quad (B.24)$$

A primeira integral da Equação (B.19), com o uso das Equações (B.23) e (B.24), pode ser escrita como:

$$\left[ \int_{V^e} \left( \delta \frac{\partial [N^e]^T}{\partial X} \frac{\partial [N^e]}{\partial X} + \delta \frac{\partial [N^e]^T}{\partial Y} \frac{\partial [N^e]}{\partial Y} \right) dV \right] \{ \phi^e \} = \int_{V^e} \delta [B^e]^T [B^e] dV \{ \phi^e \}. \quad (B.25)$$

A última integral da Equação (B.19), com o uso da Equação (B.20), pode ser escrita como:

$$\int_{V^e} \lambda [N^e]^T [N^e] \left\{ \dot{\phi}^e \right\} dV = [C]^e \left\{ \dot{\phi}^e \right\}, \quad (B.26)$$

onde:

$$[C]^e = \int_{V^e} \lambda [N^e]^T [N^e] dV. \quad (B.27)$$

Substituindo as Equações (B.25) e (B.26) em (B.19), resulta:

$$\{ R^e \} = \left[ \int_{V^e} \delta [B^e]^T [B^e] dV \right] \{ \phi^e \} - \int_{A^e} [N^e]^T q^e dA$$

$$-\int_{V^e} [N^e]^T Q_\phi^e dV + [C]^e \left\{ \dot{\phi}^e \right\} = 0 . \quad (B.28)$$

Onde:

$$[C]^e = \int_{V^e} \lambda [N^e]^T [N^e] dV , \quad (B.29)$$

$$[K]^e = \int_{V^e} \delta [B^e]^T [B^e] dV , \quad (B.30)$$

$$\{F\}^e = \int_{A^e} -[N^e]^T q^e dA , \quad (B.31)$$

$$\{E\}^e = \int_{V^e} -[N^e]^T Q_\phi^e dV . \quad (B.32)$$

Fazendo a minimização de  $\{R^e\}$ , tem-se:

$$\{R\} = \sum_{e=1}^E \{R^e\} = 0 . \quad (B.33)$$

Logo, substituindo (B.28) em (B.33), resulta:

$$\begin{aligned} \{R\} = & \sum_{e=1}^E \left[ \int_{V^e} \delta [B^e]^T [B^e] dV \right] \{ \phi^e \} + \sum_{e=1}^E \left[ \int_{A^e} -[N^e]^T q^e dA \right] \\ & + \sum_{e=1}^E \left[ \int_{V^e} -[N^e]^T Q_\phi^e dV \right] + \sum_{e=1}^E [C]^e \left\{ \dot{\phi}^e \right\} = 0 . \end{aligned} \quad (B.34)$$

A Equação (B.34) pode ser escrita na seguinte forma condensada:

$$\{R\} = [C] \left\{ \dot{\phi} \right\} + [K] \{ \phi \} + \{E\} + \{F\} = 0 , \quad (B.35)$$

onde:

$$[C] = \sum_{e=1}^E [C]^e = \sum_{e=1}^E \left[ \int_{V^e} \lambda [N^e]^T [N^e] dV \right] , \quad (B.36)$$



$$[K] = \sum_{e=1}^E [K]^e = \sum_{e=1}^E \left[ \int_{V^e} \delta [B^e]^T [B^e] dV \right], \quad (B.37)$$

$$\{E\} = \sum_{e=1}^E \{E\}^e = \sum_{e=1}^E \left[ \int_{V^e} -[N^e]^T Q_\phi^e dV \right], \quad (B.38)$$

$$\{F\} = \sum_{e=1}^E \{F\}^e = \sum_{e=1}^E \left[ \int_{A^e} -[N^e]^T q^e dA \right]. \quad (B.39)$$

### B.3. APROXIMAÇÃO DOS TERMOS $\left\{ \dot{\phi} \right\} \mathbf{E} \left\{ \phi \right\}$

O termo  $\left\{ \dot{\phi} \right\}$  na Equação (B.35) será aproximado usando diferenças finitas para frente, na seguinte forma:

$$\left\{ \dot{\phi} \right\} = \frac{1}{\Delta\tau} (\left\{ \phi \right\}_{N+1} - \left\{ \phi \right\}_N), \quad (B.40)$$

onde:

$\left\{ \phi \right\}_{N+1}$  é a distribuição de  $\phi$  obtida no tempo  $\tau_{N+1}$  ;

$\left\{ \phi \right\}_N$  é a distribuição de  $\phi$  obtida no tempo  $\tau_N$  ;

$\Delta\tau$  é o incremento de tempo dado por  $\Delta\tau = \tau_{N+1} - \tau_N$ .

O termo  $\left\{ \phi \right\}$  na Equação (B.35) será avaliado no tempo  $\tau_{N+1}$ , isto é:

$$\left\{ \phi \right\} = \left\{ \phi \right\}_{N+1}. \quad (B.41)$$

Substituindo (B.40) e (B.41) em (B.35), vem:

$$\left[ [K] + \frac{1}{\Delta\tau} [C] \right] \left\{ \phi \right\}_{N+1} = \frac{1}{\Delta\tau} [C] \left\{ \phi \right\}_N - \{E\} - \{F\}, \quad (B.42)$$

definindo:

$$\{\mathbf{R}\} = \{\mathbf{E}\} + \{\mathbf{F}\}. \quad (\text{B.43})$$

De (B.42) e (B.43), vem:

$$\left[ [\mathbf{K}] + \frac{1}{\Delta\tau} [\mathbf{C}] \right] \{\phi\}_{N+1} = \frac{1}{\Delta\tau} [\mathbf{C}] \{\phi\}_N - \{\mathbf{R}\}. \quad (\text{B.44})$$

## APÊNDICE C - CÁLCULO DOS NÚMEROS DE NUSSELT LOCAL E MÉDIO

### C.1. INTRODUÇÃO

Na Figura C.1 é apresentada a geometria dimensional simplificada do duto onde o ar escoa em torno de um corpo sólido com geração volumétrica constante  $q'''$ .

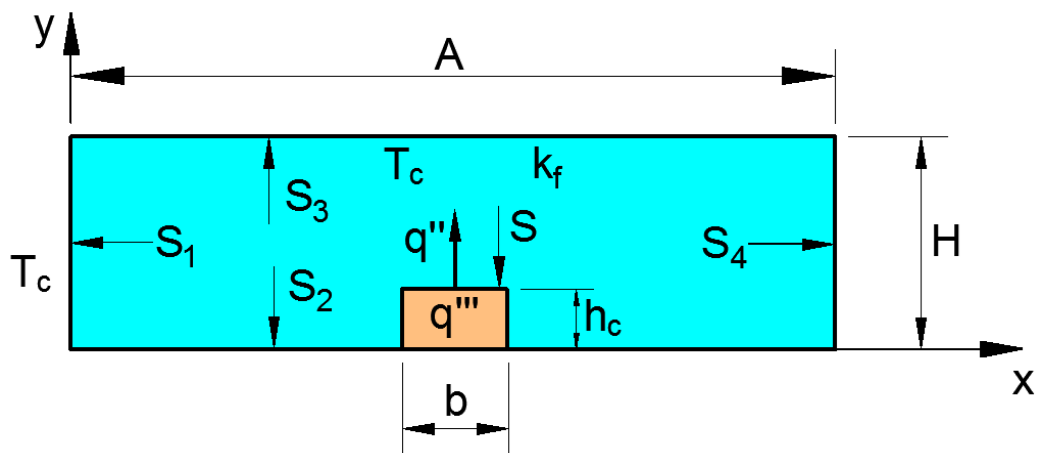


Figura C.1 - Geometria dimensional do duto.

### C.2. EQUAÇÃO DO NÚMERO DE NUSSELT LOCAL

Da lei do resfriamento de Newton tem-se

$$q'' = h_L(T - T_c). \quad (C.1)$$

sendo  $q''$  o fluxo de calor na interface sólido-fluido,  $h_L$  o coeficiente local de convecção e  $T_c$  a temperatura de entrada do fluido no duto.

Da lei de Fourier tem-se:

$$q'' = -k_f \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_s. \quad (C.2)$$

sendo  $k_f$  a condutividade térmica do fluido e  $\partial T/\partial n$  o gradiente de temperatura na superfície  $s$ , que representa a interface sólido - fluido.

A temperatura adimensional é definida a como:

$$\theta = \frac{T - T_c}{\Delta T}. \quad (C.3)$$

Sendo  $\Delta T$  a diferença de temperatura de referência definida por:

$$\Delta T = \frac{q''' H^2}{k_f}. \quad (C.4)$$

Na Equação (C.4)  $q'''$  é a taxa de geração volumétrica constante no sólido e  $H$  é altura do duto.

Das Equações (C.1), (C.2) e (C.3) vem:

$$q'' = h_L \theta \Delta T = -k_f \Delta T \left. \frac{\partial \theta}{\partial n} \right|_s. \quad (C.5)$$

Na Equação (C.5)  $n$  é a coordenada dimensional na direção normal a superfície do corpo; e a coordenada adimensional na direção normal a superfície do corpo é dada por:

$$\bar{n} = \frac{n}{H}. \quad (C.6)$$

Das Equações (C.5) e (C.6) vem que

$$q'' = h_L \theta \Delta T = -\frac{k_f \Delta T}{H} \left. \frac{\partial \theta}{\partial \bar{n}} \right|_s. \quad (C.7)$$

Da Equação (C.7) o coeficiente de convecção local pode ser obtido como:

$$h_L = -\frac{k_f}{H \theta} \left. \frac{\partial \theta}{\partial \bar{n}} \right|_s. \quad (C.8)$$

O número de Nusselt local para a superfície do corpo sólido é dado por:

$$\text{Nu}_L = \frac{h_L H}{k_f}. \quad (\text{C.9})$$

Das Equações (C.8) e (C.9), resulta:

$$\text{Nu}_L = -\frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{n}} \Big|_s. \quad (\text{C.10})$$

sendo  $\theta$  a temperatura local e  $\partial \theta / \partial \bar{n}$  o gradiente local de temperatura, ambos sobre a superfície,  $s$ , do corpo sólido.

### C.3. EQUAÇÃO DO NÚMERO DE NUSSELT MÉDIO

O número de Nusselt médio para a superfície do corpo,  $s$ , é calculado usando o teorema do valor médio dado por:

$$\text{Nu}_c = \frac{1}{L_c} \int_0^{L_c} \text{Nu}_L|_s \, dS = \frac{1}{L_c} \int_0^{L_c} \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{n}} \Big|_s \, dS. \quad (\text{C.11})$$

sendo  $L_c$  o comprimento adimensional da linha que delimita o corpo sólido e o fluido. O comprimento adimensional  $L_c$  é dado por:

$$L_c = \frac{(b + 2h_c)}{H} = \frac{b}{H} + 2 \frac{h_c}{H} = B + 2H_c. \quad (\text{C.12})$$

Na Equação (C.12),  $B$  e  $H_c$  são, respectivamente, o comprimento adimensional e a altura adimensional do corpo.

# APÊNDICE D - MÉTODO MATRICIAL PARA O CÁLCULO DA VORTICIDADE NO CONTORNO

## D.1 – INTRODUÇÃO

No caso de problemas onde a geometria é complexa ou a malha não é uniforme, existe grande dificuldade para calcular a vorticidade no contorno dada pela Equação (2.32).

Mostra-se no item D.2 seguinte, uma maneira alternativa de se calcular a vorticidade no contorno.

## D.2 – CÁLCULO DA VORTICIDADE NO CONTORNO

Apresenta-se a seguir, o desenvolvimento teórico para se calcular a vorticidade nos pontos nodais do contorno.

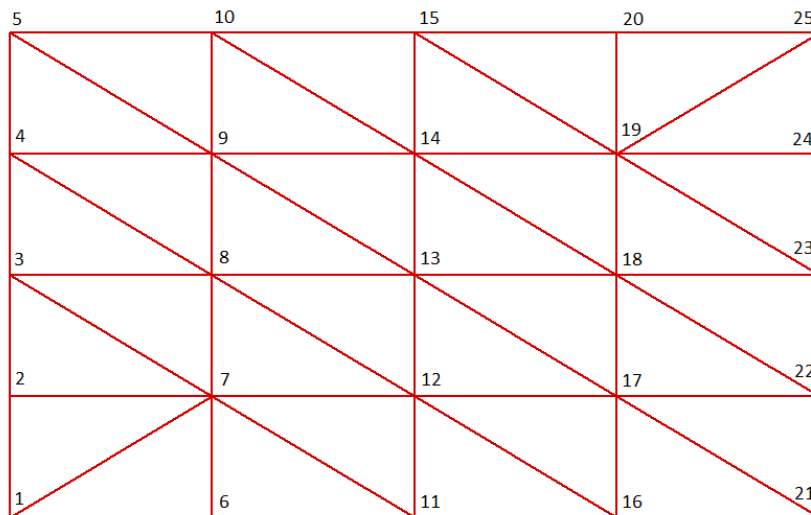


Figura D.1 – Pontos nodais internos e do contorno.

A Figura D.1 mostra uma geometria bidimensional simples e ilustrativa com a numeração de todos os pontos nodais.

Os pontos nodais com numeração: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 15, 16, 20, 21, 22, 23, 24 e 25 fazem parte do contorno e os pontos nodais 7, 8, 9, 12, 13, 14, 17, 18 e 19 são pontos internos.

O sistema matricial do elemento para a função corrente  $\psi$  é dado pela Equação (3.61), como sendo:

$$[K_{\psi}]^e \{\psi^e\} = -\{R_{\psi}\}^e . \quad (D.1)$$

O vetor  $\{R_{\psi}\}^e$  pode ser obtido das Equações (3.61) e (3.62) como:

$$\{R_{\psi}\}^e = -\frac{A}{12} \begin{Bmatrix} (2\omega_i + \omega_j + \omega_k) \\ (\omega_i + 2\omega_j + \omega_k) \\ (\omega_i + \omega_j + 2\omega_k) \end{Bmatrix} = -\frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{Bmatrix} . \quad (D.2)$$

Mas, da Equação (3.67), tem-se:

$$[C]^e = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \quad (D.3)$$

Assim, das Equações (D.2) e (D.3), vem que:

$$\{R_{\psi}^e\} = -[C^e] \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{Bmatrix} = -[C^e] \{\omega^e\} . \quad (D.4)$$

Substituindo (D.4) na Equação (D.1), vem:

$$[K_{\psi}^e] \{\psi^e\} = [C^e] \{\omega^e\} . \quad (D.5)$$

Definindo o vetor  $\{B^e\}$  como:

$$\{B^e\} = [K_{\psi}^e] \{\psi^e\} . \quad (D.6)$$

Assim, das Equações (D.5) e (D.6), vem que:

$$[C^e] \{\omega^e\} = \{B^e\} . \quad (D.7)$$

A partir da Equação (D.7) para o elemento, obtém-se a seguinte equação na forma global.

$$[C]\{\omega\}=\{B\} . \quad (D.8)$$

Note que o vetor  $\{B\}$  depende da função corrente que é considerada conhecida. Aplicando a condição de contorno de vorticidade conhecida nos pontos internos, a Equação (D.8) é modificada, podendo ser escrita como:

$$[C']\{\omega\}=\{B'\} . \quad (D.9)$$

Resolvendo o sistema dado pela Equação (D.9), obtém-se a distribuição das vorticidades no contorno  $\omega_M$ .

Pode ser observado que neste método de cálculo, a vorticidade nos pontos nodais do contorno, pode ser obtida quando se conhece a função corrente em todos os pontos nodais do domínio e a vorticidade nos pontos nodais interiores.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALVES, A. A., ALTEMANI, C. A. C., (2010)**, “Thermal Design of a Protruding Heater in Laminar Channel Flow”, *Proceedings of the 14th International Heat Transfer Conference*, Washington, DC, USA.
- ALVES, A. A., ALTEMANI, C. A. C., (2011)**, “Conjugate Cooling of a Discrete Heater in Laminar Channel Flow”, *J. Braz. Soc. Mech. Sci. & Eng.*, Vol. 33, pp. 278-286.
- AMINOSSADATI, S. M., GHASEMI, B., (2009)**, “A Numerical Study of Mixed Convection in a Horizontal Channel with a Discrete Heat Source in an Open Cavity”, *European Journal of Mechanics B/Fluids*, Vol. 28, pp. 590-598.
- ARMALY, B. F., DURST, F., PEREIRA, J. C. F., SCHONUNG, B., (1983)**, “Experimental and Theoretical Investigation of Backward-Facing Step Flow”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 127, pp. 473-496.
- BOUTINA, L., BESSAIH, R., (2011)**, “Numerical Simulation of Mixed Convection Air-cooling of Electronic Components Mounted in an Inclined Channel”, *Applied Thermal Engineering*, Vol. 31, pp. 2052-2062.
- BRITO, F. B., (1999)**, “*Simulação Numérica da Transferência de Calor e do escoamento de Fluidos*”, Dissertação de Mestrado, Escola Federal de Engenharia de Itajubá, M. G., 162 p.
- CELIK, I. B., GHIA, U., ROACHE, P. J., FREITAS, C. J., COLEMAN, H., RAAD, P. E., (2008)**, “Procedure for Estimation and Reporting of Uncertainty Due to Discretization in CFD Applications”, *ASME Journal of Fluids Engineering*, Vol. 130, Issue 7, pp. 078001.1-078001.4 [DOI: 10.1115/1.2960953].

- COMINI, G., MANZAM, M., CORTELLA, G., (1997)**, “*Open Boundary Conditions for the Streamfunction – Vorticity Formulation of Unsteady Laminar Convection*”, Numerical Heat Transfer, Part B, Vol. 31, pp. 217-234.
- DENG, Q. H., TANG, G. F., LI, Y., HA, M. Y., (2002)**, “Interaction Between Discrete Heat Sources in Horizontal Natural Convection Enclosures”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 45, pp. 5117-5132.
- FIGUEREDO, J. R., GANZAROLLI, M. M., ALMEIDA, P. I. F., (1986)**, “Convecção Natural em Cavidades Retangulares – Solução Numérica”, *II Congresso Latino-Americano de Transferência de Calor e Matéria*, São Paulo, pp. 62-73.
- GARTLING, D. K., (1990)**, “A Test Problem for Outflow Boundary Conditions – Flow over a Backward-Facing Step”, *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, Vol. 11, pp. 953-967.
- GHASEMI, B., (2005)**, “*Mixed Convection in a Rectangular Cavity with a Pulsating Heated Electronic Component*”, Numerical Heat Transfer, Part A, Vol. 47, pp. 505-521.
- GHASEMI, B., AMINOSSADATI, S. M., (2008)**, “Numerical Simulation of Mixed Convection in a Rectangular Enclosure with Different Numbers and Arrangements of Discrete Heat Sources”, *The Arabian Journal for Science and Engineering*, Vol. 33, pp. 189-208.
- GUIMARÃES, P. M., MENON, G. J., (2011)**, “A Mixed Convection Study in Inclined Channels with Discrete Heat Sources”, *Convection and Conduction Heat Transfer, Dr. Amimul Ahsan (Ed.)*, ISBN: 978-953-307-582-2, InTech, Disponível em: <<http://www.intechopen.com/books/convection-and-conduction-heattransfer/a-mixed-convection-study-in-inclined-channels-with-discrete-heat-sources>>. Acesso em: 20 jul 2015.

- GUIMARÃES, P. M., (2007)**, “*Análise da Transferência de Calor por Convecção Mista Utilizando o Método de Elementos Finitos com a Técnica de Petrov-Galerkin*”, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Engenharia de Itajubá, M.G., 234 p.
- HAMOUCHE, A., BESSAIH, R., (2009)**, “Mixed Convection Air Cooling of Protruding Heat Sources Mounted in a Horizontal Channel”, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 36, pp. 841-849.
- ISLAM, M. T., SAHA, S., MAMUN, M. A. H., FERROZ, C. M., (2006)**, “Computational Analysis of Mixed Convection Heat Transfer in a Ventilated Enclosure”, *Proceedings of the 3rd BSME-ASME International Conference on Thermal Engineering*, Dhaka, Bangladesh.
- JAIKRISMA, C. R., RATHAN R. B., ASWATHA, SEETHARAMU, K. N., (2010)**, “Effect of Discrete Heat Sources on Natural Convection in a Square Cavity”, *Proceedings of the 37th National & 4th International Conference on Fluid Mechanics and Fluid Power*, Madras, Chennai, India.
- KIM, J., MOIN, P., (1985)**, “Application of a Fractional-Step Method to Incompressible Navier-Stokes Equations”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 59, pp. 308-323.
- KUROKAWA, F. Y., ZAPAROLI, E. L., ANDRADE C. R., (2005)**, “Conjugate Natural Convection Applied to the Electronic Component Cooling”, *Proceedings of the 18th International Congress of Mechanical Engineering*, Ouro Preto, MG, pp. 1-8.
- KUZNETSOV, G. V., SHEREMET, M. A., (2011)**, “Conjugate Natural Convection in an Enclosure with a Heat Source of Constant Heat Transfer Rate”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 54, pp. 260-268.
- LEE, T., MATEESCU, D., (1998)**, “Experimental and Numerical Investigation of 2-D Backward-Facing Step Flow”, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 12, pp. 703-716.

- MANCA, O., NARDINI, S., KHANAFER, K., VAFAI, K., (2003)**, “Effect of Heated Wall Position on Mixed Convection in a Channel with an Open Cavity”, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications: An International Journal of Computation and Methodology*, Vol. 43, pp. 259-282.
- OLIVEIRA, M., (2005)**, “*Estudo da Convecção Forçada, Natural e Mista em escoamentos Laminares e Turbulentos Utilizando o Método de Volumes Finitos*”, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Engenharia de Itajubá, M.G., 144 p.
- OLMSTEAD, J. M. H., (1961)**, “*Advanced Calculus*”, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 706 p.
- PATANKAR, S. V., (1980)**, “*Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*”, Hemisphere Publishing Corporation, New York, 197p.
- PINTO, R. J., (2007)**, “*Análise Numérica da Convecção Natural em Cavidade Quadrada com Corpos Internos, Utilizando o Método de Elementos Finitos*”, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Engenharia de Itajubá, M.G., 124 p.
- PREMACHANDRAN, B., BALAJI, C., (2006)**, “Conjugate Mixed Convection with Surface Radiation from Horizontal Channel with Protruding Heat Sources”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 49, pp. 3568-3582.
- RAHMAN, M. M., ALIM, M. A., SAHA, S., (2009)**, “Mixed Convection in a Square Cavity with a Heat-Conducting Horizontal Square Cylinder”, *Suranaree Journal of Science and Technology*, Vol. 17, N° 2, pp. 139-153.
- RAMADHYANI, S., MOFFAT D. F., INCROPERA, F. P., (1985)**, “Conjugate Heat Transfer from Small Isothermal Heat Sources Embedded in a Large Substrate”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 28, pp. 1945-1952.
- SEGERLIND, L. J., (1984)**, “*Applied Finite Element Analysis*”, John Wiley & Sons Inc., 2<sup>a</sup> ed., New York, 448 p.

**SOUZA, J. J., (2006)**, “*Simulação Numérica da Transferência de Calor por Convecção Forçada, Natural e Mista numa Cavidade Retangular*”, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Engenharia de Itajubá, M.G.,165 p.

**SUGAVANAM, R., ORTEGA, A., CHOI, C. Y., (1995)**, “A Numerical Investigation of Conjugate Heat Transfer from a Flush Heat Source on a Conductive Board in Laminar Channel Flow”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 38, pp. 2969-2984.

**TAY, A. O., DAVIS, G. V., (1971)**, “Application of Finite Element Method to Convection Heat Transfer Between Parallel Planes”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 14, Issue 8, pp. 1057-1069 [DOI: 10.1016/0017-9310(71)90204-3].

**WONG, H. H., RAITHBY, G. D., (1979)**, “*Improved Finite – Difference Methods Based on a Critical Evaluation of the Approximation Errors*”, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 2, pp. 139-163.

**YOUNG, T. J., VAFAI, K., (1998)**, “Convective Flow and Heat Transfer in a Channel Containing Multiple Heated Obstacles”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 41, pp. 3279-3298.

**ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L., (2000)**, “*The Finite Element Method – Volume 1: The Basis*”, Butterworth-Heinemann, 5<sup>th</sup> ed., Oxford, 689 p.