

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

Delineamento de Experimento de Mistura na
Otimização de Portfólios de Geração de Energia Elétrica

André Rodrigues Monticeli

Itajubá, dezembro de 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

André Rodrigues Monticeli

**Delineamento de Experimento de Mistura na Otimização
de Portfólios de Geração de Energia Elétrica**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção como requisito parcial à obtenção do título de *Doutor em Ciências em Engenharia de Produção*.

Área de Concentração: Engenharia de Produção

Orientador: Prof. Antônio Carlos Zambroni de Souza, Dr.
Co-Orientador: Prof. Pedro Paulo Balestrassi, Dr.

Dezembro de 2016
Itajubá

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

André Rodrigues Monticeli

Delineamento de Experimento de Mistura na
Otimização de Portfólios de Geração de Energia Elétrica

Tese aprovada por banca examinadora em 02 de dezembro de 2016, conferindo ao autor o título de *Doutor em Ciências em Engenharia de Produção*.

Banca Examinadora:

Prof. Antônio Carlos Zambroni de Souza (Orientador)

Prof. Pedro Paulo Balestrassi (Co-Orientador)

Prof. Paulo César Mappa

Prof. Ronã Rinston Amaury Mendes

Prof. Anderson Paulo de Paiva

Prof. Rafael Coradi Leme

Itajubá
2016

AGRADECIMENTO

Expresso estima e agradecimento a todos aqueles que contribuíram com o sucesso deste estudo.

Aos professores Antônio Carlos Zambroni de Souza e Pedro Paulo Balestrassi, orientadores deste estudo, por sua dedicação extraordinária, ensinamento, compreensão, amizade e pelo inestimável incentivo recebido.

Ao professor Carlos Melo, coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, pelo apoio e ajuda sempre que solicitado.

Aos meus pais Célio e Celeste pelo apoio dado e pelo incentivo em todas as horas desta caminhada.

À Larissa Batistão pelo incentivo, auxílio e paciência em todos os momentos deste estudo.

Aos meus colegas de trabalho do CEFET-MG pela paciência, apoio e incentivo.

A todas as pessoas que, direta e indiretamente, contribuíram para a execução deste estudo.

E agradeço, sobretudo, a Deus por ter me dado a oportunidade de realizar este estudo.

RESUMO

Planejamento energético tem sido o foco de muitos estudos hoje em dia. Uma preocupação com a introdução de energias renováveis nos portfólios elétricos tem se tornado cada vez mais crescente. Encontrar um portfólio de geração de energia elétrica para este setor é de suma importância. Então, este trabalho teve como objetivo a otimização de portfólio de geração de energia elétrica. Para isto, apresentou-se dois métodos utilizando Projeto de Experimentos de Misturas (*Mixture Design of Experiments* - MDE) como estratégias para a construção de modelos não lineares de risco e custo na otimização destes portfólios. Estes métodos utilizam conceitos de Janelas Móveis e Réplicas em MDE para tratar as séries temporais. O índice de entropia de Shannon foi utilizado para melhorar a diversificação do portfólio. O método *desirability* foi utilizado para minimizar o custo e o risco e maximizar o índice de entropia. Utilizou-se estes métodos para encontrar o portfólio ótimo para o estado da Califórnia e para um cenário brasileiro. Os resultados mostram que esta metodologia facilita a tomada de decisões, pois por estes métodos, obtém-se um portfólio ótimo, em vez de uma combinação de portfólios ótimos, que gera uma fronteira de pareto. Também, com a utilização de janelas móveis e réplicas, o esforço computacional é reduzido, tornando o processo mais simples.

ABSTRACT

Energy planning has been the focus of many studies today. Concerns about the introduction of renewable energy into the electric portfolios have become increasingly increasing. Finding a portfolio of electric power generation for this sector is of paramount importance. So, this work aimed at the optimization of electric energy generation portfolio. For this, two methods were proposed using Mixture Design of Experiments (MDE) as a strategy for the construction of non-linear models of risk and cost optimization in these portfolios. This methods use concepts of Moving Windows and Replicas in MDE to deal with time series. The Shannon entropy index was used to deal with a better portfolio diversification. The desirability method was used to minimize cost and risk and to maximize the entropy index. These methods were used to find the optimal portfolio for the state of California and for a Brazilian scenario. The results show that this methodology facilitates the decision making, because by these methods, an optimal portfolio is obtained, instead of a combination of optimal portfolios, that generates a pareto border. Also, with the use of moving windows and replicas, the computational effort is reduced, making the process simpler.

Lista de Figuras

Figura 2.1: Usina Hidrelétrica de Camargos	5
Figura 2.2: Componentes de uma usina hidrelétrica	5
Figura 2.3: Parque Eólico de Osório-RS	6
Figura 2.4: Usina termelétrica – composição	7
Figura 3.1: Série temporal do preço do óleo diesel	12
Figura 3.2: Exemplo de uma série estritamente estacionária	14
Figura 3.3: Diagrama de dispersão das vendas de produtos farmacêuticos com $k = 1$	15
Figura 3.4: Diagrama de dispersão de leituras de viscosidade química com $k = 1$	15
Figura 3.5: Representação da função de autocorrelação por gráfico	17
Figura 3.6: Exemplo de ruído branco	22
Figura 3.7: ACF do ruído branco	22
Figura 3.8: ACF da série estacionária do Exemplo 3.1	26
Figura 3.9: Preço anual do gás natural	27
Figura 3.10: Autocorrelação do preço anual do gás natural	27
Figura 3.11: Janelas móveis do Exemplo 3.2	27
Figura 4.12: Exemplo de uma fronteira de pareto	34
Figura 4.2: Comparação entre o VaR e o CVaR de uma distribuição de probabilidade	37
Figura 5.13: Sistema de coordenadas simplex com três componentes	43
Figura 5.2: Superfície de resposta para misturas de três componentes e o sistema de coordenadas triangulares	44
Figura 5.3: Projeção da região de superfície de resposta no sistema triangular de coordenadas	45
Figura 5.4: Sub-região do simplex original redefinido como um L-pseudocomponente para w'_1, w'_2 e w'_3	51
Figura 5.5: U-pseudocomponentes simplex	53
Figura 5.6: Simplex com pseudocomponentes dentro do simplex original	54
Figura 5.7: Definição do alvo para a <i>desirability</i> (CORNELL, 2002)	56
Figura 5.8: Definição da maximização e/ou minimização para a <i>desirability</i>	57
Figura 5.9: Determinação do peso e da importância na função <i>desirability</i>	57
Figura 5.10: Três réplicas em MDE	58
Figura 6.1: Método de otimização de portfólio pelo método MDE-JMR	61
Figura 6.2: Método de otimização de portfólio pelo método MDE-R	63

Figura 6.3: Séries temporais estacionárias geradas aleatoriamente – Série A.....	63
Figura 6.4: Séries temporais estacionárias geradas aleatoriamente – Série B	64
Figura 6.5: Séries temporais estacionárias geradas aleatoriamente – Série C	64
Figura 6.6: Função de autocorrelação (ACF) da Série A	64
Figura 6.7: Função de autocorrelação (ACF) da Série B	65
Figura 6.8: Função de autocorrelação (ACF) da Série C	65
Figura 6.9: Ajuste do modelo para o MDE	67
Figura 6.10: Portfólio ótimo obtido pelo método MDE-JMR	69
Figura 6.11: Fronteira de pareto	69
Figura 6.12: (a) Representação gráfica da série A; (b) Representação gráfica da série B; (c) Representação gráfica da série C.	70
Figura 6.13: Série A transformada por 1 diferenciação	71
Figura 6.14: Autocorrelação da série transformada A	71
Figura 6.15: Autocorrelação da série B	71
Figura 6.16: Autocorrelação da série C	72
Figura 6.17: Portfólio ótimo obtido pelo método MDE-JMR	73
Figura 6.18: Fronteira de pareto	73
Figura 6.19: (a) Representação gráfica da série 1; (b) Representação gráfica da série 2; (c) Representação gráfica da série 3; (d) Representação gráfica da série 4 ..	74
Figura 6.20: Arranjo de mistura para 4 séries temporais	76
Figura 6.21: Ajuste do modelo para o MDE	77
Figura 6.22: Portfólio ótimo obtido pela metodologia proposta	78
Figura 6.23: Fronteira de pareto pelo MVP	79
Figura 6.24: Portfólio ótimo obtido pelo método MDE-R	80
Figura 6.25: Fronteira de pareto pelo MVP	80
Figura 6.26: Autocorrelação da série A	81
Figura 6.27: Autocorrelação da série B	82
Figura 6.28: Autocorrelação da série C	82
Figura 6.29: Portfólio ótimo obtido pelo método MDE-JMR	83
Figura 6.30: Portfólio ótimo obtido pelo método MDE-R	84
Figura 7.1: (a) Custo do gás natural; (b) custo do carvão	90
Figura 7.2: Autocorrelação da série do custo de gás natural, transformada com uma diferenciação	91

Figura 7.314: Autocorrelação da série do custo de carvão, transformada com uma diferenciação	92
Figura 7.4: Arranjo de mistura com as 5 fontes de energia	92
Figura 7.5: Portfólio ótimo	94
Figura 7.6: Fronteira de pareto	95
Figura 7.7: (a) Custo do óleo combustível; (b) custo do gás natural; (c) custo do carvão mineral; (d) custo do urânio; (e) custo do bagaço de cana-de-açúcar	96
Figura 7.8: (a) Série transformada do custo do óleo combustível; (b) Série transformada do custo do gás natural; (c) Série transformada do custo do carvão mineral; (d) Série transformada do custo do urânio; (e) Série transformada do custo do bagaço de cana-de-açúcar	97
Figura 7.9: Portfólio ótimo obtido pela metodologia proposta	101
Figura 7.10: Portfólio com um aumento de investimento em Gás Natural	101
Figura 7.11: Fronteira de de pareto	102

Lista de Tabelas

Tabela 3.1: Série temporal estacionária	25
Tabela 3.2: Média e variância de cada réplica	26
Tabela 5.1: Quilometragem média para cada um dos cinco experimentos	42
Tabela 5.2: Associação da variável resposta com cada ponto do <i>simplex-lattice</i> de três componentes	48
Tabela 6.1: MDE com 3 componentes e 4 réplicas no Minitab	66
Tabela 6.2: Sumário estatístico do Retorno, do Risco e da Entropia	68
Tabela 6.3: Valores para a função <i>desirability</i>	68
Tabela 6.4: Portfólio ótimo	68
Tabela 6.5: Resumo da função <i>desirability</i>	68
Tabela 6.6: Resumo da função <i>desirability</i>	72
Tabela 6.7: Modelos das séries temporais e AIC	74
Tabela 6.8: Previsão para o retorno de cada série	75
Tabela 6.9: Previsão para o risco de cada série	75
Tabela 6.10: MDE com 4 componentes e 5 réplicas no Minitab	76
Tabela 6.11: Sumário estatístico da Média, Variância e Entropia	78
Tabela 6.12: Valores para a função <i>desirability</i>	78
Tabela 6.13: Portfólio ótimo	78
Tabela 6.14: Portfólio ótimo obtido pelo MDE-R	79
Tabela 6.15: Comparação do portfólio ótimo obtido por MDE-JMR e MDE-R	81
Tabela 6.16: Resumo da função <i>desirability</i>	83
Tabela 6.17: Modelo utilizado para previsão nas séries	83
Tabela 6.18: Previsão para o retorno de cada série	84
Tabela 6.19: Previsão para o risco de cada série	84
Tabela 6.20: Comparação do portfólio ótimo obtido por MDE-JMR e MDE-R	84
Tabela 7.1: Custo fixo de investimento e O&M fix e custo da O&M var	89
Tabela 7.2: Percentual do risco para as fontes de energia	90
Tabela 7.3: Risco do custo de investimento e de operação e manutenção fixo e variável ..	90
Tabela 7.4: Correlação entre fontes de energia diferentes	91
Tabela 7.5: MDE com 5 componentes e 13 réplicas	93
Tabela 7.6: Parâmetros para a função <i>desirability</i>	94
Tabela 7.7: Portfólio ótimo obtido pela função <i>desirability</i>	94

Tabela 7.8: Custo fixo de investimento e O&M fix e custo da O&M var	95
Tabela 7.9: Risco de cada geradora de energia elétrica.....	97
Tabela 7.10: Modelos escolhidos para as séries temporais do custo de combustível	98
Tabela 7.11: Correlação entre fontes de energia diferentes	98
Tabela 7.12: Previsão para o retorno de cada série	98
Tabela 7.13: Previsão para o risco de cada série	99
Tabela 7.14: Parâmetros para a função <i>desirability</i>	99
Tabela 7.15: MDE com 8 componentes e 4 réplicas no Minitab	100
Tabela 7.16: Portfólio ótimo	100

SUMÁRIO

Agradecimentos	iii
Resumo	iv
Abstract	v
Lista de Figuras	vi
Lista de Tabelas	ix
Sumário	xi
1. INTRODUÇÃO	1
1.1. Descrição do problema	1
1.2. Objetivos e justificativas da pesquisa	2
1.3. Metodologia da pesquisa	3
1.4. Estrutura do trabalho	3
2. PLANEJAMENTO DE GERAÇÃO DE ENERGIA ELÉTRICA	4
2.1. Fontes de geração de energia elétrica	4
2.1.1 Hídrica	4
2.1.2 Eólica	6
2.1.3 Usinas termelétricas	7
2.1.4 Usinas fotovoltaicas	8
2.2. Portfólio de geração de energia elétrica	9
3. SÉRIES TEMPORAIS	11
3.1. Considerações iniciais.....	11
3.2. Caracterização das séries temporais	13
3.2.1 Estacionariedade	13

3.2.2	Funções de autocovariância e autocorrelação	14
3.2.3	Tendência.....	18
3.2.4	Sazonalidade	19
3.2.5	Função autocorrelação parcial (PACF)	20
3.2.6	Modelo autorregressivos e médias móveis – ARMA.....	21
3.2.7	Modelo autorregressivos integrados médias móveis – ARIMA	21
3.2.8	Modelo ruído branco	21
3.2.9	Testes Q de Ljung-Box.....	22
3.2.10	Volatilidade	23
3.2.11	Os modelos ARCH e GARCH	23
3.2.12	Critério de Informação de Akaike – AIC	24
3.3	Janelas móveis	24
4.	OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIO.....	29
4.1.	Conceitos fundamentais.....	29
4.2.	Média-Variância de Markowitz – MVP	30
4.3.	Fronteira de Pareto	33
4.4.	Otimização da média-variância	34
4.5.	Valor em Risco (<i>Value-at-Risk</i>) – VaR	35
4.6.	Valor em Risco Condicional (<i>Conditional Value at Risk</i>) – CVaR	36
4.7.	Entropia de Shannon	38
5.	OTIMIZAÇÃO UTILIZANDO PROJETO DE EXPERIMENTOS DE MISTURAS.....	41
5.1.	Projeto de experimentos de misturas – MDE	41
5.1.1	Problema original de mistura.....	42
5.2.	Metodologia de superfície de resposta	44
5.3.	<i>Simplex Lattice</i>	46
5.3.1	Determinação dos coeficientes do polinômio.....	47

5.3.2	Análise do modelo	48
5.4.	<i>Simplex Centroid Design</i>	49
5.5.	<i>Extreme Vertice</i>	50
5.6.	Otimização pelo MDE	54
5.6.1	Método <i>Desirability</i>	55
5.7.	Réplicas em MDE	58
6.	OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIO POR PROJETO DE EXPERIMENTO DE MISTURA	60
6.1.	Método MDE-JMR: otimização de portfólio pelo MDE com janelas móveis e réplicas sem fazer previsão.....	60
6.1.1	Etapas da otimização de portfólio pelo método MDE-JMR	60
6.2.	Método MDE-R: otimização de portfólio pelo MDE com réplicas ...	62
6.2.1	Etapas da otimização de portfólio pelo método MDE-R.....	62
6.3.	Testes dos métodos	63
6.3.1	Teste 1	63
6.3.2	Teste 2	70
6.3.3	Teste 3	73
6.3.4	Teste 4	79
6.3.5	Teste 5	81
7.	OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIO DE GERAÇÃO DE ENERGIA ELÉTRICA	86
7.1.	Modelagem matemática do custo e risco.....	86
7.2.	Otimização de portfólio de geração de energia elétrica utilizando MDE, réplicas e janelas móveis.....	88
7.2.1	Cenário da geração de energia elétrica do estado da Califórnia	89
7.2.2	Otimização do portfólio utilizando MDE	91
7.3.	Otimização de portfólio de geração de energia elétrica utilizando	

MDE e réplicas com previsão	95
7.3.1 Cenário da geração de energia elétrica brasileira	95
7.3.2 Otimização do portfólio utilizando MDE	98
8. CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS	103
9. REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA	105

Capítulo 1

Introdução

1.1 Descrição do problema

Hoje em dia, há uma preocupação com a introdução de energias renováveis nos portfólios elétricos. Deseja-se que estes portfólios tenham um baixo custo e risco. Além disso, ter um bom planejamento energético para uma região ou um país é de suma importância para a população. No Brasil, mais de 90% da energia elétrica é produzida por hidrelétricas. No ano de 2015, houve uma crise no setor, pois a ausência de chuvas afetou a oferta de energia pelas hidrelétricas. Assim, para atender à demanda, utilizou-se de outras fontes de energia existentes, aumentando então o custo. Com isto, torna-se imprescindível um bom portfólio de geração de energia elétrica (ENERGIA INTELIGENTE).

A análise de portfólio é amplamente utilizada por investidores financeiros para encontrar combinações que produzam resultados eficientes sob várias condições econômicas. Um portfólio eficiente é uma combinação que maximiza o retorno esperado, minimizando o risco (AWERBUCH E BERGER, 2003). Estudos sobre esse tema tem sido alvo de inúmeras pesquisas desde a década de 1950. O início dos estudos sobre portfólio se deu a partir da teoria de Média-Variância de Markowitz (1952). Teoria essa que possibilita a criação de portfólios com a mínima variância e o máximo retorno esperado. Em sua abordagem, o problema é formulado como um problema de otimização que envolve dois critérios: a recompensa de um portfólio, que é medido pela média e deve ser maximizado, e o risco do portfólio, que é medida pela variação do retorno, que deve ser minimizado. Na presença destes dois critérios, não existe uma única solução ótima, mas um conjunto de portfólios ótimos, os chamados portfólios eficientes, que se alternam entre risco e retorno. Huang (2008) denomina o gráfico que forma esse conjunto de possibilidades de fronteira eficiente do portfólio.

Um investidor, ao selecionar um portfólio, deseja diversificar seus investimentos de tal forma que, pela combinação de diferentes ativos, consiga diluir seu risco, com certo impacto também na diminuição do retorno. A vantagem em diversificar os investimentos é diminuir a exposição de perdas, visto que a aplicação em um único ativo, ou em um portfólio pouco diversificado, leva a um grande risco ou a um portfólio pouco rentável.

Pode-se utilizar a teoria de portfólios para diversificar a geração de energia elétrica, minimizando o custo e o risco, levando em consideração cada fonte de energia disponível. Delarue *et al.* (2011) fez uma modelagem do custo e risco para geração de energia elétrica e mostra, pela teoria de Média-Variância de Markowitz (MVP), que é possível construir uma fronteira eficiente.

A partir do estudo feito por Delarue *et al.* (2011), propõe-se neste trabalho, encontrar um portfólio ótimo através de Delineamento de Experimentos de Mistura (*Mixture Design of Experiments* - MDE) com réplicas e janelas móveis, para a geração de energia elétrica.

1.2 Objetivos e justificativas da pesquisa

O objetivo principal deste trabalho é obter um portfólio eficiente para a geração de energia elétrica com fontes alternativas. Esta metodologia utiliza Projeto de Experimentos de Mistura como estratégia para a construção de modelos não lineares de risco e retorno na otimização de portfólio de geração de energia elétrica.

Este trabalho também busca contribuir com as seguintes proposições:

- a) utilizar janelas móveis e réplicas computacionais em MDE para tratar da sazonalidade e volatilidade de séries temporais;
- b) utilizar réplicas em MDE para tornar os modelos de risco, custo e retorno mais precisos, para a tomada de decisão, quando se utiliza previsões;
- c) melhorar a diversificação do portfólio através do índice de entropia de Shannon;
- d) utilizar as funções *desirability* para otimizar várias variáveis, obtendo um menor custo e risco;

Segundo Awerbuch e Berger (2003), o risco de aumentos de custo inesperados de energia elétrica pode também ser incluído na segurança energética, pois essa segurança é reduzida em países (e empresas individuais) que possuem portfólios ineficientes, ou seja, que são expostos a custos e riscos elevados.

Técnicas para encontrar um portfólio ótimo e bem diversificado de geração de energia elétrica podem contribuir para a minimização do risco do preço da energia para a sociedade. Uma boa técnica para obtenção de um portfólio rentável, segundo Mendes (2012), deve incluir uma abordagem multiobjetiva convexa de fácil processamento; incorporar um modelo de séries temporais capaz de detectar a volatilidade e sazonalidade; promover a diversificação do portfólio; incorporar métricas de aversão ao risco e reduzir o número de iterações. Para Oliveira *et al.* (2011), estes requisitos devem ser alcançados representando o retorno e risco pelas superfícies de resposta obtida através do MDE, juntamente com a função *desirability*.

1.3 Metodologia da pesquisa

A primeira parte da pesquisa consiste de uma revisão bibliográfica com o objetivo de adequar a otimização de portfólios através do MDE na área de geração de energia elétrica. A segunda parte da pesquisa terá uma abordagem quantitativa de natureza aplicada utilizando o método de Modelagem e Simulação Estocástica, visto que serão utilizadas técnicas matemáticas para criar e experimentar um sistema, ou parte dele, buscando a melhoria de suas respostas. Quanto aos objetivos, a pesquisa se classifica como axiomática quantitativa, pois se deseja analisar as informações obtidas numericamente, além de utilizar técnicas estatísticas.

1.4 Estrutura do trabalho

Esta pesquisa está organizada da seguinte forma: no Capítulo 2, será apresentada uma pesquisa bibliográfica sobre portfólios de geração de energia elétrica encontrada na literatura. O Capítulo 3 trata da caracterização das séries temporais tais como, *lag*, janelas móveis, heterocedasticidade, sazonalidade e volatilidade. No Capítulo 4, será abordada a otimização de portfólio pela teoria de média-variância de Markowitz. Também será apresentado o índice de entropia que pode ser utilizado como uma estratégia para diversificação do portfólio. O Capítulo 5 aborda a otimização de múltiplas respostas utilizando a MDE, além do emprego da função *Desirability* e Réplicas em MDE. Estratégias para determinar os melhores parâmetros para a função *desirability* serão estudadas neste capítulo. No Capítulo 6, serão feitos alguns testes numéricos de séries geradas com o intuito de analisar os métodos propostos. No Capítulo 7, duas aplicações dos métodos propostos serão apresentados: na geração de energia elétrica para o estado da Califórnia e na geração de energia elétrica para um cenário brasileiro. Finalmente, no Capítulo 8, serão apresentadas algumas considerações finais e trabalhos futuros.

Capítulo 2

Planejamento de geração de energia elétrica

Um planejamento para o setor de energia elétrica abrange geração, transmissão e sistemas de distribuição. A transmissão de energia elétrica é o processo de transportar energia que é realizado por linhas de transmissão de alta potência que conecta uma usina ao consumidor. A transmissão de energia é dividida em duas faixas: a transmissão propriamente dita, para potências mais elevadas e ligando grandes centros, e a distribuição, usada dentro de centros urbanos, por exemplo (ABRAEDEE). O foco deste trabalho será exclusivamente na geração, assumindo que todo o equipamento para transmissão e distribuição está disponível e não há restrições em ser utilizado.

A geração de energia elétrica se dá por diferentes tecnologias. As principais aproveitam o movimento rotatório para gerar corrente alternada em um gerador: são as turbinas hidrelétricas, eólicas, a gás, a diesel, a carvão, nuclear e biomassa. Há também aquelas que geram energia por reações químicas e por células fotovoltaicas, ou seja, não necessitam de um sistema de geração giratórios.

2.1 Fontes de geração de energia elétrica

Com relação às fontes de energia elétrica, pode-se classificá-la em fontes renováveis e não renováveis. As fontes renováveis são aquelas em que a utilização e o uso é renovável e pode-se manter e ser aproveitado ao longo do tempo sem a possibilidade de esgotamento dessa mesma fonte, como por exemplo, a energia hídrica, eólica, biomassa e a solar fotovoltaica. Já as fontes não renováveis têm recursos teoricamente limitados, sendo que esse limite depende dos recursos existentes em nosso planeta, como é o exemplo do carvão, gás natural, óleo diesel e urânio (CCEE). A seguir, apresenta-se algumas destas fontes de energia.

2.1.1 Hídrica

A energia elétrica de origem hidráulica está entre as mais utilizadas em todo o mundo (PNE-2030). Ela é produzida a partir do aproveitamento do potencial hidráulico de um curso d'água, combinando a utilização da vazão do rio, quantidade de água disponível em um determinado período de tempo, com os seus desníveis, sejam os naturalmente formados, como

as quedas d'águas, sejam criados com a construção de barragens. Na Figura 2.1, tem-se a Usina de Camargos localizada no município de Itutinga-MG.



Figura 2.1: Usina Hidrelétrica de Camargos.
Fonte: CEMIG

Uma usina hidrelétrica é composta, basicamente, de barragem, sistemas de captação e adução de água, casa de força e vertedouros. Cada uma dessas partes demanda obras e instalações para que tenha um funcionamento conjunto. Na Figura 2.2, tem-se os componentes de uma usina hidrelétrica (ANEEL).

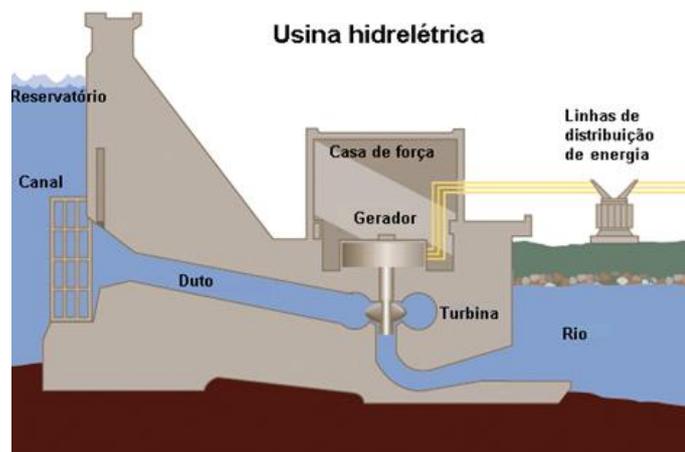


Figura 2.2: Componentes de uma usina hidrelétrica.
Fonte: fontesdeenergiacapuerj.blogspot.com.br

De acordo com o PNE-2030 e Awerbuch e Berger (2003), os custos de investimento para a instalação de uma usina hidrelétrica são gastos com a aquisição de terreno e benfeitorias para formação do reservatório, vila residencial, relocações de populações, compreendendo indenizações, recomposição ou relocação da infraestrutura regional, programas físico-bióticos referentes a compensação por danos aos ecossistemas atingidos;

com relação às obras civis, podemos citar execução de benfeitorias na área da usina, construção da casa de força, execução do desvio do rio, construção da barragem, vertedouro e estradas de acesso; e aquisição de equipamentos. Já os custos operacionais são constituídos por custos fixos e variáveis de manutenção e operação. Pode-se considerar como custos de operação e manutenção os gastos com pessoal, material de consumo e equipamentos necessários à operação normal da usina e do sistema de transmissão associados.

As usinas hidrelétricas são consideradas energias limpas e renováveis, pois não há queima e resíduos, ou seja, não há emissão de Gás Carbônico (CO₂), porém, há impacto ambiental, em função do alagamento de grandes áreas, pois construir uma barragem pode implicar em impactos que envolvem remover povoados, desalojar pessoas, alterar ou extinguir ecossistemas, além de outros (PNE-2030).

2.1.2 Eólicas

A geração de energia elétrica a partir dos ventos ocorre pelo contato deste com as pás do cata-vento, dando origem às forças de sustentação e de arrasto, que transferem energia ao rotor do aerogerador. Neles, a força do vento é captada por hélices ligadas a uma turbina que aciona um gerador elétrico. É uma energia abundante, renovável e limpa (WINDPOWER).



Figura 2.3: Parque Eólico de Osório-RS.

Fonte: www.osorio.rs.gov.br

Recentes desenvolvimentos tecnológicos (sistemas avançados de transmissão, melhor aerodinâmica, estratégias de controle e operação das turbinas etc.) têm reduzido custos e melhorado o desempenho e a confiabilidade dos equipamentos. O custo dos equipamentos, que era um dos principais entraves ao aproveitamento comercial da energia eólica, reduziu-se significativamente nas últimas duas décadas. É uma tecnologia que está em ascensão em diversos lugares do mundo. A estimativa é que na Dinamarca, a energia eólica que hoje

representa 18% de toda a eletricidade gerada, aumente essa parcela para 50% até 2030. Na Alemanha, cerca de 25% do parque de energia elétrica instalado é de origem eólica. Na Espanha, na região de Navarra, essa parcela é de 23%. Estima-se que, até 2020 o mundo terá 12% da energia gerada pelo vento (Wind Force, 2003). Alemanha, EUA, Espanha e Dinamarca são responsáveis por quase 80% da capacidade instalada no mundo (WINDPOWER MONTHLY NEWS MAGAZINE). No Brasil, a geração de energia eólica corresponde a apenas 2,1% da eletricidade gerada (Anuário Estatístico de Energia Elétrica, 2015).

2.1.3 Usinas termelétricas

Usinas termelétricas produzem energia a partir da queima de combustível. Estes combustíveis podem ser: carvão natural, óleo combustível, óleo diesel, gás natural, urânio, biomassa, geotérmica, entre outros. O processo de geração de eletricidade consiste em transformar a água presente em tubos localizados nas paredes de caldeiras instaladas nestas usinas em vapor. Esse vapor é utilizado para mover as pás da turbina de um gerador elétrico (PNE-2030). Na Figura 2.4, tem-se os componentes de uma usina termelétrica.

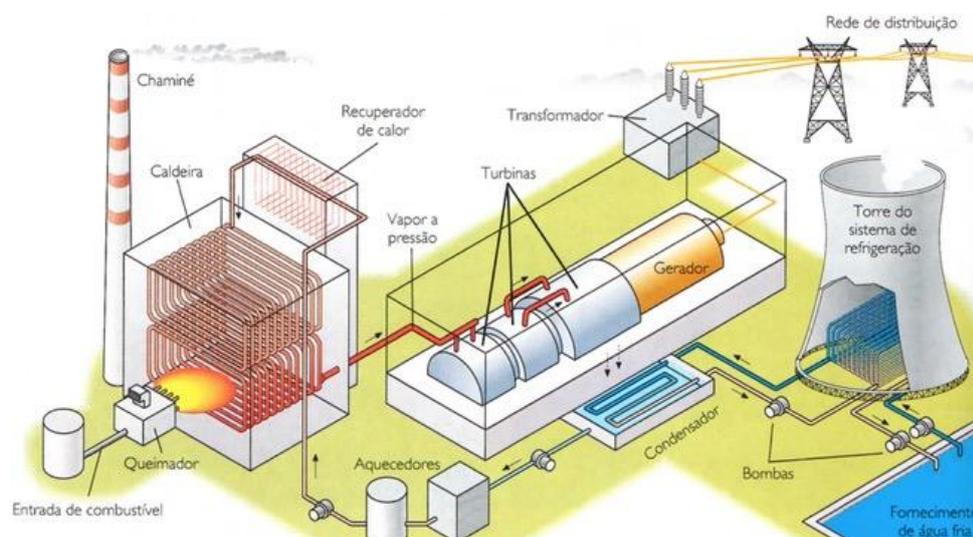


Figura 2.4: Usina termelétrica – composição.

Os custos para implantar uma usina termelétrica, conforme Awerbuch e Berger (2003) e o PNE-2030, são custos para aquisição de equipamentos e de construção civil. Também podemos citar os custos de manutenção para operar estas usinas, que são custos com operadores e manutenção nos equipamentos, custos com mão-de-obra e de pessoal da administração. Além disto, tem-se os custos com o combustível, que, dependendo do combustível, pode deixar a termelétrica com um alto custo de operação.

Pode-se destacar alguns impactos ambientais da operação de centrais termelétricas, pois as usinas utilizam produtos químicos que são potencialmente poluidores e nocivos ao meio ambiente, além de demandar água para refrigeração do ciclo. Estas usinas também emitem Gás Carbônico (CO_2), óxido de nitrogênio (NO_x) além de outras substâncias, que mesmo sendo em menor escala, somam a estas e afetam o meio atmosférico. Também tem-se o risco de radiação nas usinas nucleares.

2.1.4 Usinas fotovoltaicas

As usinas fotovoltaicas são capazes de gerar energia elétrica através das células fotovoltaicas. O material geralmente utilizado nas células é o silício. Todas as células fotovoltaicas têm, no mínimo, duas camadas semicondutoras, uma positiva e outra negativa. Quando a luz solar é absorvida pela célula fotovoltaica, a energia dos fótons da luz é transferida para os elétrons que então ganham a capacidade de se movimentar. Este movimento dos elétrons que gera a corrente elétrica. Quanto maior a intensidade da luz do sol, maior será o fluxo de eletricidade. Porém, um sistema fotovoltaico não precisa do brilho do sol para operar. Mesmo em dias nublados ele também gera eletricidade, entretanto, a densidade das nuvens influencia a quantidade de energia gerada (IMHOFF, 2007).

Segundo dados da Neosolar Energia (2016), os sistemas fotovoltaicos podem ser divididos em sistemas isolados e sistemas conectados à rede. Os sistemas isolados são aqueles que geralmente utilizam bateria para armazenar a energia. Eles não se integram a rede elétrica. Já os sistemas conectados à rede servem como qualquer outra forma de geração de energia, e neste caso, não utilizam sistemas de armazenamento.

A geração de energia elétrica por meio de usinas fotovoltaicas é bastante viável ao meio ambiente, pois favorece o aproveitamento solar para a produção de energia e não modifica o equilíbrio térmico da Terra. Além disso, utilizam sistemas que não emitem gases de efeito estufa ou gases ácidos, além de não utilizar combustível. Por outro lado, segundo PNE-2030, estas usinas podem causar impactos no meio ambiente como a perda de habitat devido ao uso da terra, entre outros.

Um dos fatores que impossibilita a utilização da energia solar fotovoltaica em larga escala é o alto custo das células fotovoltaicas. Atualmente, esse tipo de sistema fotovoltaico vem sendo utilizado em instalações remotas, viabilizando projetos sociais, de irrigação e comunicação (PNE-2030).

2.2 Portfólio de geração de energia elétrica

Quando se deseja fazer um planejamento de geração, o principal objetivo é atender às necessidades de energia elétrica dos clientes com um baixo custo, com um grau aceitável de segurança, confiabilidade e qualidade. Conforme Joode e Boots (2005), para atingir esse objetivo, o planejamento de recursos de energia elétrica envolve a determinação de "o quê, onde, quando e quanto" devem-se utilizar para uma nova capacidade de geração no sistema que envolvem a construção de novas usinas e a ampliação de usinas existentes.

Hoje em dia, quando se está fazendo um planejamento de geração de energia elétrica, tem-se buscado o aumento da participação de fontes de energia renovável nos portfólios elétricos, principalmente pensando na diminuição do CO₂. Além disso, muitos estudos têm mostrado que a dependência de combustíveis fósseis aumenta os riscos de deficiência no suprimento e que um portfólio de geração de energia elétrica bom, deve incorporar parcelas de energias renováveis, como a eólica, solar, geotérmica, entre outras (RODEHORST, 2007; DELAQUIL *et al.*, 2005; AWERBUCH e BERGER, 2003).

Esforços para diversificar portfólio de geração de energia elétrica têm recebido maior atenção por parte dos formuladores de políticas estaduais e federais (RODEHORST, 2007). Vários estudos estão sendo conduzidos para encontrar um portfólio de fontes de geração eficiente para países, estados e regiões do mundo que tendem a essas políticas.

A primeira aplicação de portfólio eficiente no setor geração de energia, nos EUA, remonta a 1976 (BAR-LEV e KATZ, 1976). Uma das primeiras contribuições, considerando o setor de energia elétrica liberalizados da União Européia, foi de Awerbuch e Berger (2003). Outros estudos como o de Madlener *et al.* (2009) e de Roques *et al.* (2008), apresentam uma análise de portfólio de geração de energia elétrica, realizada em outros países e regiões, utilizando o valor presente líquido para o custo, como critério de seleção do portfólio. No que se refere ao risco do portfólio, além de utilizar a variância, também foram propostos o conceito de *Conditional Value-at-Risk* (CVaR) (SZOLGAYOVÁ, 2010).

Rodehorst (2007) em seu trabalho aplicou a teoria moderna de portfólio, que será apresentada no Capítulo 4, para avaliar a diversificação de portfólio de geração de energia elétrica de menor custo para o Norte da Califórnia. Os resultados apresentados por Rodehorst (2007) indicam redução de custos e riscos quando se diversifica o portfólio. Além disso, mostrou-se que a característica de custo e risco da eólica e da biomassa produziram efeitos positivos no portfólio, ou seja, o aumento da geração elétrica por fontes renováveis reduz o custo e o risco do portfólio. Para otimizar o portfólio, Rodehorst (2007) utilizou um método

de cálculo padrão para o custo de cada tecnologia, e para o risco, utilizou-se a variação ano por ano, medido em desvio padrão da taxa de variação anual do fluxo de custos.

Os estudos anteriores referidos dizem respeito à abordagem clássica de Markowitz para a seleção de portfólios de geração de energia elétrica, que é uma metodologia estática em que apenas é considerado um único período de investimento e não se prevê o reequilíbrio da carteira.

Neste trabalho, utiliza-se da teoria de Markowitz em uma nova abordagem para a obtenção de um portfólio ótimo para a geração de energia elétrica, em que se deseja minimizar o custo e o risco. Leva-se em consideração a série histórica dos preços dos combustíveis, para aquelas fontes de energia que o utilizam, e os valores presentes para o custo de instalação, operação e manutenção das usinas geradoras de eletricidade. Para tal, faz-se necessário a análise da série temporal destes preços. Sendo assim, no Capítulo 3 será apresentado alguns conceitos importantes a respeito de séries temporais e de como caracterizá-las. Após a análise e o tratamento das séries temporais, utiliza-se destes resultados na otimização de portfólio, cujos conceitos serão abordados no Capítulo 4.

Capítulo 3

Séries temporais

Neste capítulo, serão apresentados alguns conceitos importantes sobre séries temporais que serão utilizados ao longo deste trabalho. Inicialmente, serão estabelecidas algumas definições de séries temporais, como séries contínuas, discretas e os objetivos em se estudar séries temporais. Em seguida, será abordada a caracterização de séries temporais, ou seja, estacionariedade, autocorrelação, ruídos brancos, volatilidade, sazonalidade, modelos autorregressivos de média móvel e modelo GARCH. Alguns testes para classificação das séries também serão abordados neste capítulo.

3.1 Considerações iniciais

Uma **série temporal**, segundo Brockwell e Davis (2002), é uma coleção de observações feita sequencialmente ao longo do tempo. Na Figura 3.1, tem-se uma série temporal do preço anual do óleo diesel nos anos de 1861 até 2012. Nesta série, o tempo é dado por ano. O tempo pode ser substituído por outra variável, como espaço, profundidade, entre outras. Dados de séries temporais surgem em várias situações: na economia, como os preços diários de ações, as taxas mensais de desemprego; na medicina, tem-se o eletrocardiograma; na meteorologia, a precipitação pluviométrica, a temperatura diária; e na indústria, tem-se como exemplo a quantidade mensal produzida, a quantidade de acidentes semanais, entre outras.

Dependendo da natureza do tempo T e da série temporal y_t , a série poderá ser classificada como se segue, baseada em Montgomery *et al.* (2008):

- i) **Contínua:** quando as observações são feitas continuamente no tempo $T = \{t: t_1 < t < t_2\}$. Um exemplo de séries contínuas é a medição durante dois minutos de um eletrocardiograma.
- ii) **Discreta:** quando as observações são feitas em tempos específicos $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, ou seja, T é um conjunto finito de pontos. Um exemplo de série discreta é o valor de exportações mensais de 2000 a 2014.

Note que estes termos não se referem à variável observada y , esta pode assumir valores contínuos ou discretos. Às vezes a variável y é discreta, como por exemplo a população, mas, para efeito de análise estatística, pode ser considerada contínua.

- iii) **Multivariada:** Neste caso, se n variáveis são observadas ao mesmo tempo, denota-se por $\{Y_{1t}, Y_{2t}, \dots, Y_{nt}; t \in T\}$, assim, tem-se várias séries temporais correlacionadas que devem ser analisadas conjuntamente, ou seja, em cada tempo tem-se um vetor de observações. Um exemplo de séries multivariadas são vendas, Y_{1t} , e gastos com propaganda, Y_{2t} , semanais de um certo produto.

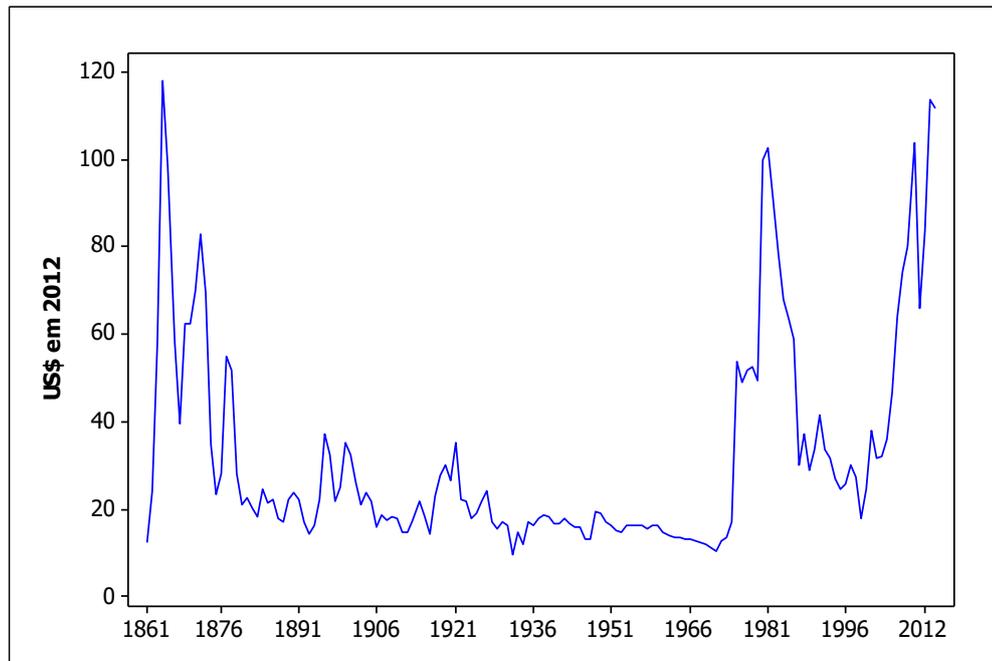


Figura 3.1: Série temporal do preço do óleo diesel.
Fonte: Montgomery *et al.* (2008)

Quando se estuda séries temporais, geralmente o que se deseja é entender o mecanismo do sistema gerador da série temporal e/ou, entendendo seu comportamento, fazer previsões futuras.

Segundo Ehlers (2009), os principais objetivos em se estudar séries temporais são:

- Descrição: descrever as propriedades da série, ou seja, a tendência, existência de variação sazonal ou cíclica, *outliers*, mudança no padrão da tendência ou da sazonalidade.
- Explicação: usar a variação em uma série para explicar a variação em outra.
- Predição: fazer previsões futuras com base em valores passados.
- Controle: os valores da série temporal medem a qualidade de um processo de manufatura e o objetivo é o controle do processo.

A descrição do comportamento da série e a predição são os objetivos a serem observados neste trabalho. Algumas ferramentas úteis para estudar o comportamento de uma série temporal são: a construção de gráficos da série, construção de histogramas e diagramas

de dispersão, obtenção de estatísticas descritivas simples, verificação de tendências, ciclos e variações sazonais, entre outras. E para predição, métodos como ARMA, ARIMA, ARCH e GARCH são excelentes para fazer previsões de valores futuros a partir de valores passados.

Quando se deseja fazer previsões de valores futuros em séries temporais, procura-se obter um modelo matemático que descreva o sistema de maneira parcimoniosa. Segundo Pereira (1984), este modelo deve ser simples e com o menor número possível de parâmetros, além disso, cada parâmetro deve ser parametrizado de tal forma que facilite sua interpretação.

O objetivo da análise da série temporal é identificar as propriedades da série e caracterizar seu comportamento, identificando ou sugerindo um modelo adequado. Essa caracterização se baseia em conceitos como estacionariedade, autocorrelação, ruídos brancos, tendência, sazonalidade, volatilidade e modelos autorregressivos de média móvel (ARMA) (FRANCQ e ZAKOIAN, 2010).

3.2 Caracterização das séries temporais

As séries temporais são geralmente compostas por algumas características, ou elementos básicos: tendência, variações cíclicas, variações sazonais e variações irregulares. Esses padrões podem ser estudados e analisados individualmente. É imprescindível para se fazer previsões, ou para descrever o comportamento da série, analisar estas características. Antes de abordar estes elementos básicos, serão apresentados outros conceitos que são utilizados na caracterização das séries.

3.2.1 Estacionariedade

Uma série temporal é **estacionária** quando ela se desenvolve no tempo de modo que não há mudanças sistemáticas na média e na variância (MONTGOMERY *et al.*, 2008). Pereira (1984) apresenta duas formas de estacionariedade: estrita e fraca.

Segundo Montgomery *et al.* (2008), uma série temporal é dita **estritamente estacionária** se as suas propriedades não são afetadas por uma alteração no tempo. Em outras palavras, as características da série permanecem constantes e os seus dados flutuam ao redor de uma média constante, ou ainda, a média e a variância são constantes. Na Figura 3.2, tem-se um exemplo de uma série temporal estritamente estacionária.

Uma série é dita **fracamente estacionária** quando satisfaz as seguintes condições:

- (i) Média for constante,
- (ii) Variância for finita e constante,
- (iii) Covariância é função somente de $|t_i - t_j|$.

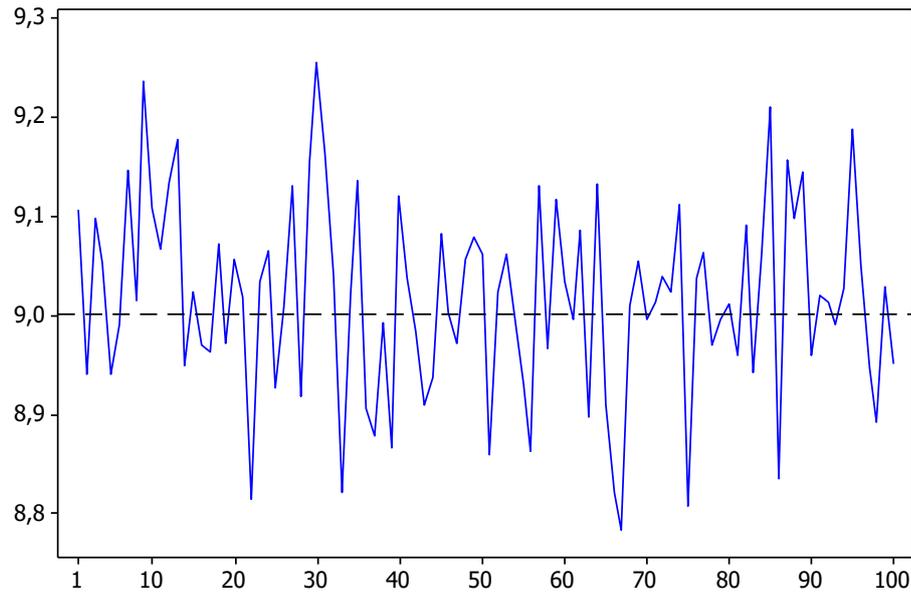


Figura 3.2: Exemplo de uma série estritamente estacionária.

A estacionariedade da série implica em uma média constante definida da maneira usual como (3.1) para séries contínuas, e (3.2) para séries discretas,

$$\mu_y = E(y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y) dy, \quad (3.1)$$

$$\hat{\mu}_y = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t, \quad (3.2)$$

e a variância constante definida como (3.3) para séries contínuas e (3.4) para séries discretas.

$$\sigma_y^2 = Var(y) = \int_{-\infty}^{\infty} (y - \mu_y)^2 f(y) dy, \quad (3.3)$$

$$\hat{\sigma}_y^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{\mu}_y)^2. \quad (3.4)$$

Também envolve conceitos de covariância e correlação. Estes conceitos serão abordados na próxima seção.

3.2.2 Funções de autocovariância e autocorrelação

Nesta seção, define-se covariância e correlação dos dados de uma série temporal, e em seguida, as funções de autocovariância e autocorrelação. Estas definições baseiam-se em Montgomery *et al.* (2008).

Seja uma série temporal estacionária, Y . Logo, uma distribuição de probabilidade de quaisquer observações, y_t e y_{t+k} da série Y é a mesma para todos os períodos de tempo t e

$t + k$, que são separados pelo mesmo intervalo k . Uma informação a respeito da série temporal pode ser obtida através da representação gráfica de um diagrama de dispersão de todos os pares de dados y_t, y_{t+k} , que são separados pelo mesmo intervalo k . O intervalo k é chamado de **lag**. As Figura 3.3 e Figura 3.4 exemplificam o diagrama de dispersão.

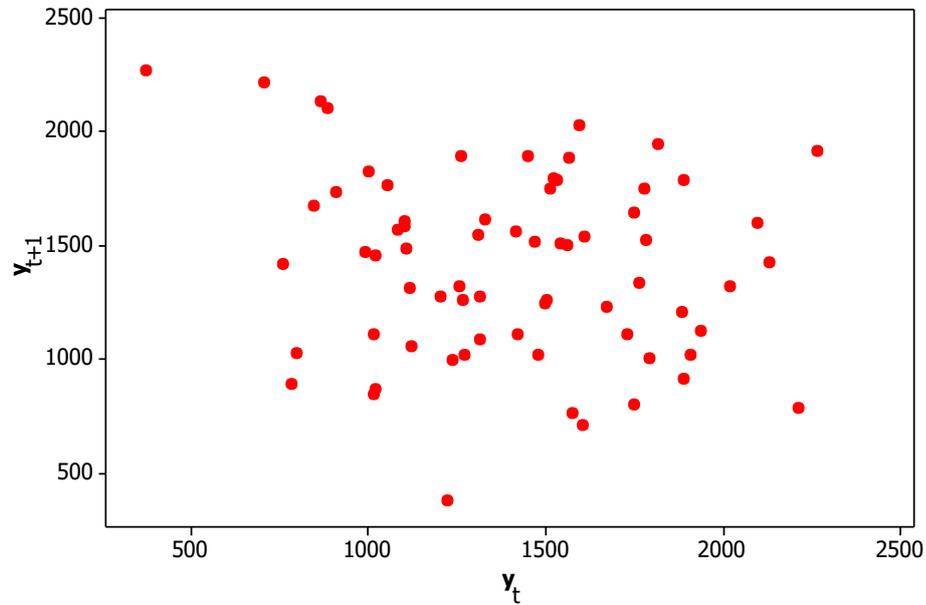


Figura 3.3: Diagrama de dispersão das vendas de produtos farmacêuticos com $k = 1$.

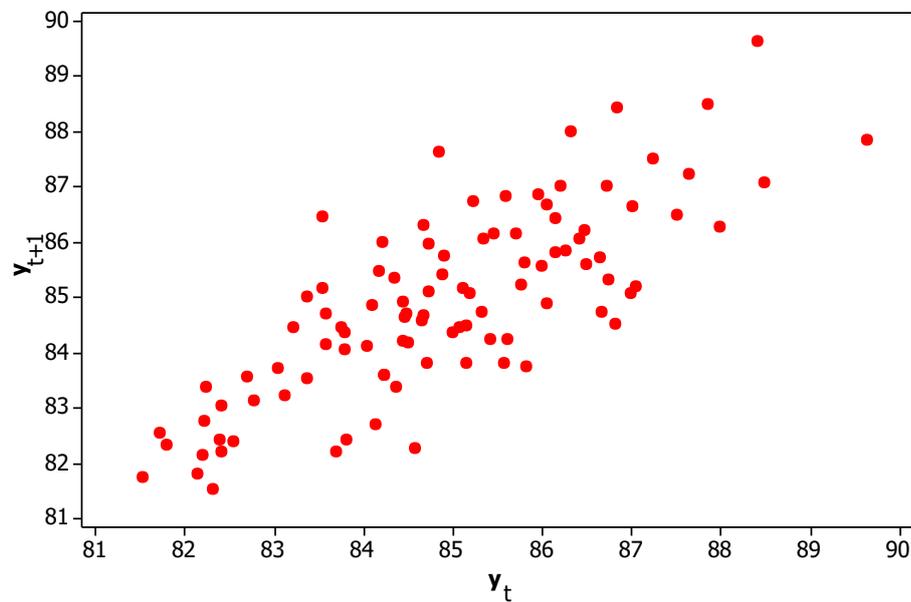


Figura 3.4: Diagrama de dispersão de leituras de viscosidade química com $k = 1$.

Na Figura 3.3, observa-se que os dados estão pouco correlacionados, ou seja, o valor de y no período atual não fornece qualquer informação sobre o valor de y que será observado em um próximo período. Já na Figura 3.4, observa-se que os dados estão positivamente

correlacionados. Isto é, um pequeno valor de y tende a possuir um pequeno valor em um próximo período, e um valor grande de y tende a ser seguido imediatamente por outro valor grande.

A covariância entre y_t e seu valor em outro período de tempo, y_{t+k} , é chamado de **autocovariância** de lag k , denotado por γ_k , e definido por

$$\gamma_k = Cov(y_t, y_{t+k}) = E[(y_t - \mu)(y_{t+k} - \mu)]. \quad (3.5)$$

A coleção de valores de γ_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ é chamado de **função de autocovariância**. Para $k = 0$, a autocovariância é a própria variância da série temporal, isto é, $\gamma_0 = \sigma_y^2$.

O coeficiente de **autocorrelação** com lag k , denotado por ρ_k , é definido por

$$\rho_k = \frac{E[(y_t - \mu)(y_{t+k} - \mu)]}{\sqrt{E[(y_t - \mu)^2]E[(y_{t+k} - \mu)^2]}} = \frac{Cov(y_t, y_{t+k})}{\sqrt{Var(y_t)}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}. \quad (3.6)$$

A **função de autocorrelação (ACF)** é definida como sendo a coleção dos valores de ρ_k , para $k = 0, 1, 2, \dots, K$, onde K é definido pela Equação (3.9). Note que, por definição, $\rho_0 = 1$, além disso, tem-se que $\rho_k = \rho_{-k}$, ou seja, a função de autocorrelação é simétrica em torno do zero, sendo assim, é necessário calcular os valores de ACF somente da parte positiva ou da parte negativa.

Para se estimar os valores da função de autocovariância e autocorrelação, a partir de uma série temporal, utiliza-se (3.7) e (3.8), respectivamente.

$$c_k = \hat{\gamma}_k = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-k} (y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, K \quad (3.7)$$

$$r_k = \hat{\rho}_k = \frac{c_k}{c_0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K \quad (3.8)$$

onde T é o número de dados observados na série temporal.

Montgomery *et al.* (2008) apresentam uma estratégia para se determinar o valor do lag, ou seja, o valor de k , de forma que seja um lag suficiente para se ter uma estimativa confiável da ACF. Essa estratégia é dada por (3.9).

$$K = \frac{T}{4} \quad (3.9)$$

onde T é o número total de dados observados na série temporal.

A variância e o desvio padrão do coeficiente de autocorrelação, segundo Montgomery *et al.* (2008), são determinados por (3.10) e (3.11), respectivamente.

$$\text{Var}(r_k) \cong \frac{1}{T}. \quad (3.10)$$

$$\text{se}(r_k) \cong \frac{1}{\sqrt{T}}. \quad (3.11)$$

Pode-se representar os valores da ACF em um gráfico. Na Figura 3.5, tem-se o exemplo de uma representação de correlações por meio de um gráfico. Para a interpretação deste gráfico, considere a hipótese de que todos os coeficientes de correlação são iguais à zero, ou seja, não existe correlação, ou ainda, $r_k = 0$, portanto, todos os pontos que representam os coeficientes de correlação devem ficar dentro das linhas limite superior e inferior (linhas em vermelho na Figura 3.5). Utiliza-se o teste Q de Ljung-Box (LBQ), que está descrito na seção 3.2.9, para testar a hipótese de que a autocorrelação é nula. Um outro teste também utilizado é o teste t .

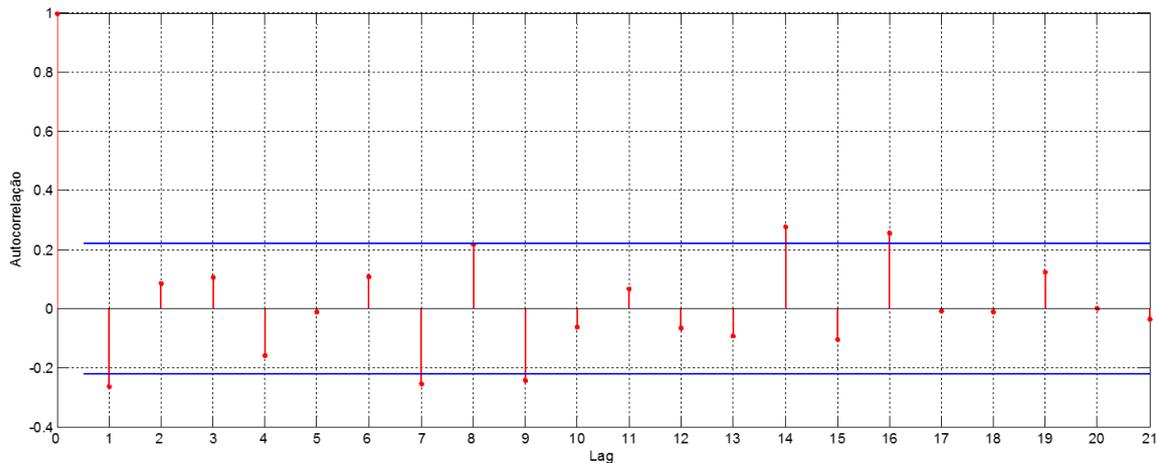


Figura 3.5: Representação da função de autocorrelação por gráfico.

Assim, observando a Figura 3.5, nota-se que os valores de *lag* 1, 7 e 14 se encontram fora das duas linhas limites, isto significa que têm dependência linear significativa ao nível de 5%, ou seja, um pequeno valor de y tende a possuir um pequeno valor em um próximo período, e um valor grande de y tende a ser seguido imediatamente por outro valor grande.

Até o momento, tratou-se somente de séries temporais estacionárias, ou fracamente estacionárias. Geralmente, uma série temporal apresenta várias outras características como tendência, sazonalidade, volatilidade.

3.2.3 Tendência

Uma série temporal que possui **tendência** é uma série temporal não estacionária (MONTGOMERY *et al.*, 2008). De maneira global, uma série pode ter tendência de crescimento ou decréscimo seguindo alguns padrões: crescimento linear; crescimento exponencial; crescimento amortecido (EHLERS, 2009).

A série pode ser modelada utilizando um modelo de regressão que descreva o componente de tendência para os dados e, subtraindo-o da série original, deixando um conjunto de resíduos que são livres de tendência. Os modelos de tendência que são considerados tendência linear, possuem uma média de y_t cujo valor esperado é dado pela equação (3.12).

$$E(y_t) = \beta_0 + \beta_1 t \quad (3.12)$$

ou como uma função quadrática em relação ao tempo, dada pela equação (3.13),

$$E(y_t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 \quad (3.13)$$

ou ainda como uma função exponencial em relação ao tempo, dada pela equação (3.14)

$$E(y_t) = \beta_0 e^{\beta_1 t}. \quad (3.14)$$

Os coeficientes das equações (3.12), (3.13) e (3.14) são estimados pelo Método dos Mínimos Quadrados¹.

Outra abordagem para remover a tendência em séries temporais é a **diferenciação** dos dados, conforme a equação (3.15)

$$x_t = y_t - y_{t-1} = \nabla y_t \quad (3.15)$$

onde ∇y_t é a diferença. Outra forma de escrever a diferença é em termos de um operador definido por $B y_t = y_{t-1}$, então tem-se,

$$x_t = (1 - B)y_t = \nabla y_t = y_t - y_{t-1} \quad (3.16)$$

com $\nabla = (1 - B)$. A diferenciação pode ser realizada várias vezes, se necessário, até a tendência da série for removida. A segunda diferença é dada por (3.17),

¹ O Método dos Mínimos Quadrados é uma técnica de otimização matemática que procura encontrar o melhor ajuste para um conjunto de dados tentando minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre o valor estimado e os dados observados. Mais informações podem ser obtidas em Fremming e Gonçalves (2007).

$$x_t = \nabla^2 y_t = \nabla(\nabla y_t) = (1 - B)^2 y_t = (1 - 2B + B^2) y_t = y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2}. \quad (3.17)$$

Assim, pode-se definir a diferença como (3.18), onde d é o número de vezes que se faz a diferenciação.

$$\begin{aligned} B^d y_{t-d} \\ \nabla^d = (1 - B)^d. \end{aligned} \quad (3.18)$$

A diferenciação tem duas vantagens: não necessita da estimativa de todos os parâmetros, e por isso é uma abordagem mais simples e, os ajustes do modelo assumem que a tendência é fixa ao longo da série temporal. A primeira diferença é responsável pelos impactos da mudança da média da série, a segunda diferença é responsável por mudanças na inclinação da série e assim por diante. Normalmente, uma ou duas diferenças são suficientes para remover tendências (MONTGOMERY *et al.*, 2008).

3.2.4 Sazonalidade

Algumas séries temporais possuem um comportamento que tende a se repetir a cada p períodos de tempo. Por exemplo, a temperatura mensal geralmente terá um aumento no verão e uma queda no inverno ao longo de vários anos. Outro exemplo é a venda mensal de brinquedos. É natural esperar um aumento no mês de outubro e outro no mês de dezembro. Esse padrão provavelmente se repetirá ao longo dos anos. Ehlers (2009) apresenta alguns modelos de sazonalidade: Sazonalidade determinística; Funções trigonométricas; Sazonalidade estocástica (Variável endógena com defasagem sazonal no modelo e modelo ARMA sazonal).

A sazonalidade também pode ser tratada pela diferenciação, mas para isso é preciso definir o *lag* d de diferenciação sazonal. O *lag* d seria o período de tempo de repetição da série, e pode ser determinado pela ACF.

A diferenciação sazonal é definida pela equação (3.19).

$$\nabla_d y_t = (1 - B^d) y_t = y_t - y_{t-d} \quad (3.19)$$

Uma série temporal pode ter tendência e sazonalidade ao mesmo tempo. Neste caso, pode-se usar a diferenciação para eliminar a sazonalidade e, em seguida, a diferenciação, uma ou mais vezes, para se remover a tendência (MONTGOMERY *et al.*, 2008).

Após tratar a tendência e a sazonalidade, ou seja, transformar a série em fracamente estacionária, pode-se modelá-la utilizando os modelos Autorregressivos e Médias Móveis (*ARMA*) e os modelos *GARCH*. Para isso, precisa-se definir a Função Autocorrelação Parcial.

3.2.5 Função autocorrelação parcial (PACF)

Considere três variáveis aleatórias X, Y e Z , e o modelo de regressão linear simples de X em Z e Y em Z como (3.20).

$$\hat{X} = a_1 + b_1 Z \text{ onde } b_1 = \frac{Cov(Z,X)}{Var(Z)}, \quad \hat{Y} = a_2 + b_2 Z \text{ onde } b_2 = \frac{Cov(Z,Y)}{Var(Z)} \quad (3.20)$$

Os erros podem ser obtidos por (3.21).

$$X^* = X - \hat{X} = X - (a_1 + b_1 Z), \quad Y^* = Y - \hat{Y} = Y - (a_2 + b_2 Z) \quad (3.21)$$

A **correlação parcial** entre X e Y depois de ajustar para Z é definido como a correlação entre X^* e Y^* , ou seja, $corr(X^*, Y^*) = corr(X - \hat{X}, Y - \hat{Y})$. Em outras palavras, a correlação parcial pode ser vista como a correlação entre duas variáveis após o ajuste feito para um fator comum que as afetam.

Seguindo esta definição, a **função de autocorrelação parcial (PACF)** entre y_t e y_{t-k} é a autocorrelação entre y_t e y_{t-k} após o ajuste para $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-k+1}$. Segue abaixo uma definição mais formal, baseada em Montgomery *et al.* (2008).

Considere um modelo estacionário de série temporal $\{y_t\}$. Em seguida, para um k fixo, as equações de Yule-Walker são:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_{1k} + \phi_{2k}\rho_1 + \dots + \phi_{kk}\rho_{(k-1)} \\ \rho_2 &= \phi_{2k}\rho_1 + \phi_{2k} + \dots + \phi_{kk}\rho_{(k-2)} \\ &\vdots \\ \rho_k &= \phi_{1k}\rho_{(k-1)} + \phi_{2k}\rho_{(k-2)} + \dots + \phi_{kk} \end{aligned} \quad (3.22)$$

e sua forma matricial é

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_3 & \dots & \rho_{k-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{1k} \\ \phi_{2k} \\ \phi_{3k} \\ \vdots \\ \phi_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \vdots \\ \rho_k \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

As autocorrelações parciais de lag k , são dadas pelos valores de ϕ_{kk} .

3.2.6 Modelo autorregressivos e médias móveis - $ARMA(p, q)$

O modelo autorregressivos médias móveis ($ARMA$) é a combinação dos modelos autorregressivos (AR) e médias móveis (MA). Esse processo forma uma classe de modelos mais simples para se descrever os dados de séries temporais. O modelo $ARMA(p, q)$ é dado por (3.24).

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \dots + \alpha_p y_{t-p} + \epsilon_t + \beta_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \beta_q \epsilon_{t-q} \quad (3.24)$$

onde ϵ_t é um processo aleatório com média zero e variância constante. Note que, quando temos $q = 0$, obtém-se o modelo AR e, quando $p = 0$, o modelo MA .

Segundo Box e Jenkins (1976), em um processo $ARMA(p, q)$ estacionário, a função de autocorrelação (ACF) tem um decaimento exponencial ou oscilatório após a defasagem q , enquanto que a autocorrelação parcial (PACF) tem o mesmo comportamento após a defasagem p .

3.2.7 Modelo autorregressivos integrado médias móveis - $ARIMA(p, d, q)$

Segundo Markridakis *et al.* (1998), se uma série temporal for não estacionária, pode-se tratar a tendência ou o comportamento sazonal tomando-se uma ou mais diferenças, conforme visto nas seções 3.2.3 e 3.2.4. Seja um modelo $ARMA(p, q)$ no qual y_t é uma série não estacionária, substituindo-o pela sua d -ésima diferença $\nabla^d y_t$, tem-se a série transformada $x_t = \nabla^d y_t = (1 - B)^d y_t$. O processo autorregressivo integrado médias móveis, denotado por $ARIMA(p, d, q)$ é dado por:

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \dots + \alpha_p x_{t-p} + \epsilon_t + \beta_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \beta_q \epsilon_{t-q}. \quad (3.25)$$

3.2.8 Modelo ruído branco

O modelo mais simples de uma série temporal é aquele em que a série não tem tendência e nem componente sazonal, além disso, as variáveis, y_t , são independentes e identicamente distribuídas (idd) e com média zero e variância σ_y^2 . A essa série dá-se o nome de ruído branco (SHUMWAY e STOFFER, 2011). Na Figura 3.6, tem-se um exemplo de ruído branco. Analisando a figura, observa-se que a série possui média zero e a variância é constante. Uma maneira de verificar que os dados são idd é pela ACF. Como se pode ver na Figura 3.7, não há autocorrelação significativa, portando, pode-se dizer que a série é idd.

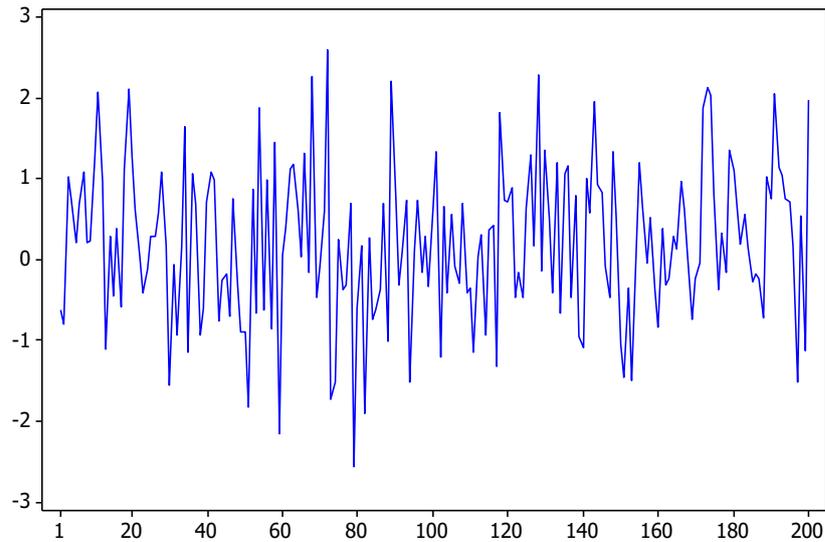


Figura 3.6: Exemplo de ruído branco.

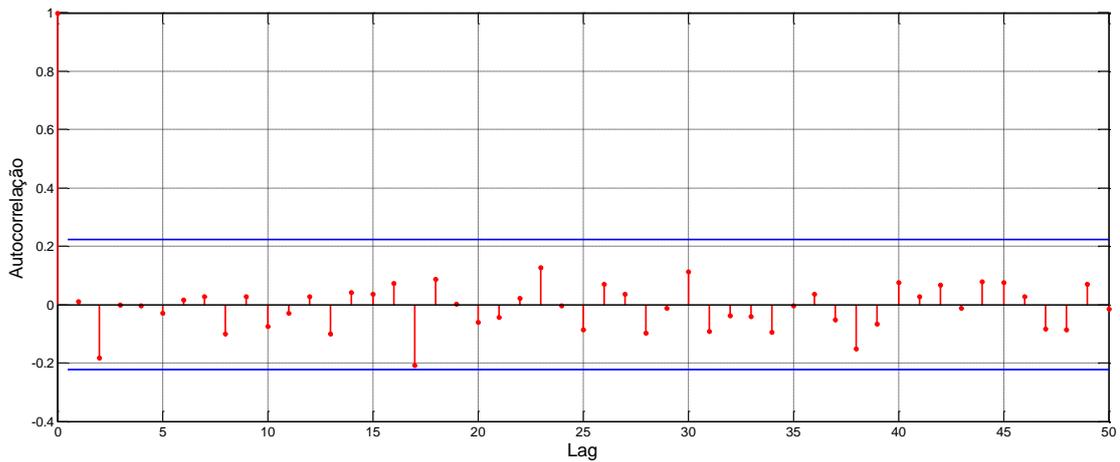


Figura 3.7: ACF do ruído branco.

Pode-se também utilizar alguns testes para identificar se os dados da série são iid. Um teste bastante utilizado para isto é o chamado Teste Q de Ljung-Box.

3.2.9 Testes Q de Ljung-Box

Ljung e Box (1978) apresentaram o teste Q. Este teste possibilita verificar se os dados de uma série temporal são independentes e identicamente distribuídos (iid). As hipóteses do teste são:

$$H_0 = \text{“os dados são iid”}$$

$$H_1 = \text{“os dados não são iid”}$$

O valor de Q é calculado pela expressão (3.26).

$$Q(k) = n(n+2) \sum_{k=1}^h \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k} \quad (3.26)$$

O valor de $Q(k)$ terá uma distribuição χ^2 com $(k - p - q)$ graus de liberdade, onde k é o número de defasagens tomadas, p e q são as ordens do modelo ajustado, n é o tamanho da amostra, $\hat{\rho}_k$ é a autocorrelação da amostra de lag k e h é o número de lag que estão sendo testados. Portanto, rejeita-se a hipótese nula se $Q > \chi_{1-\alpha, k-p-q}^2$ com nível de significância α .

3.2.10 Volatilidade

Segundo Ehlers (2009), em muitas situações práticas é importante analisar a variância condicional da série, além da média. Esta variância condicional é também chamada de volatilidade.

Tsay (2005) apresenta algumas características da volatilidade que são comuns em retornos de ativos: a volatilidade pode ser elevada em determinados períodos de tempo e baixa em outros períodos; a volatilidade evolui ao longo do tempo de forma contínua, isto é, saltos de volatilidade são raros; a volatilidade não diverge para o infinito, isto é, a volatilidade varia dentro de algum intervalo fixo. Ainda segundo Tsay (2005), estas propriedades desempenham um importante fator no desenvolvimento de modelos de volatilidade. Alguns modelos foram propostos especificamente para corrigir alguns pontos fracos, visto que muitas vezes se torna difícil de capturar as características mencionadas. Por exemplo, os modelos ARCH e GARCH tratam da volatilidade de séries temporais.

3.2.11 Os modelos ARCH e GARCH

Baseado em Bollerslev (1986), Montgomery *et al.* (2008) e Pham e Yang (2010), será apresentado os modelos ARCH e GARCH.

Considere o modelo $AR(p)$ definido por (3.27).

$$y_t = \delta + \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + e_t \quad (3.27)$$

onde e_t é não correlacionado, possui média zero e a variância não é constante. Como a variância de e_t não é constante, pode-se modelar e_t^2 como um $AR(m)$. Ou seja,

$$e_t^2 = \xi_0 + \xi_1 e_{t-1}^2 + \xi_2 e_{t-2}^2 + \dots + \xi_m e_{t-m}^2 + a_t \quad (3.28)$$

onde a_t é um ruído branco. Nesta notação, e_t é um processo **autorregressivo condicional heteroscedástico** de ordem m , denotado por $ARCH(m)$.

Vale ressaltar que, quando uma série temporal possui variância constante, se diz que a série é **homocedástica**, quando a variância não for constante, diz-se que a série é **heteroscedástica**.

Para generalizar o modelo *ARCH*, suponha que o erro possa ser representado por

$$e_t = \sqrt{v_t} w_t \quad (3.29)$$

onde w_t é iid com média zero e variância igual a um, e $v_t = \xi_0 + \xi_1 e_{t-1}^2 + \xi_2 e_{t-2}^2 + \dots + \xi_m e_{t-m}^2$. Então, a variância condicional de e_t é v_t . Pode-se argumentar que a variância condicional atual deve também depender das variâncias condicionais anteriores. Assim,

$$v_t = \xi_0 + \zeta_1 v_{t-1} + \zeta_2 v_{t-2} + \dots + \zeta_k v_{t-k} + \xi_1 e_{t-1}^2 + \xi_2 e_{t-2}^2 + \dots + \xi_m e_{t-m}^2 \quad (3.30)$$

Na notação (3.30), o erro e_t é chamado um processo **autorregressivo condicional heteroscedástico generalizado** de ordens k e m , denotado por *GARCH*(k, m).

Nesta tese, utiliza-se o modelo *ARMA*(p, q) para tratar a média das séries e o modelo *GARCH*(k, m) para tratar a variância (volatilidade). Assim, utiliza-se o modelo *ARMA*(p, q) – *GARCH*(k, m).

Para verificar o melhor modelo que capta o comportamento da série, pode-se utilizar o Critério de Informação de Akaike (AIC).

3.2.12 Critério de Informação de Akaike - AIC

Akaike (1973) sugeriu uma função de probabilidade para selecionar o melhor modelo que se ajusta ao comportamento das séries temporais. O modelo matemático para o AIC é

$$AIC = 2k - 2\ln(H) \quad (3.31)$$

onde H e k são os valores da função de probabilidade e o número de parâmetros livres, respectivamente. Os modelos com valores de AIC menores são geralmente mais preferidos (LIU *et al.*, 2011).

Outra maneira de se tratar das características das séries temporais, ou seja, da tendência, da sazonalidade e da volatilidade, são os conceitos de janelas móveis e réplicas.

3.3 Janelas móveis

Dado uma série temporal, definem-se **janelas móveis** todos os subconjuntos de dados possíveis de tamanho L . O tamanho L da janela é dado pelo *lag* da ACF, conforme equação

(3.9). A finalidade de se utilizar janelas móveis é analisar as propriedades como média e variância, ao longo de uma série temporal. A vantagem é que não há necessidade de modelar a série utilizando $ARMA(p, q) - GARCH(k, m)$, ou ainda, de se fazer previsões nas séries.

Seja uma série temporal estacionária. Então, é válida a relação (3.32).

$$\begin{aligned}\mu_t - \sigma_t &\leq \mu_p \leq \mu_t + \sigma_t \\ \sigma_t^2 - \sigma_t &\leq \sigma_p^2 \leq \sigma_t^2 + \sigma_t\end{aligned}\quad (3.32)$$

sendo μ_t , σ_t e σ_t^2 a média, desvio padrão e variância da série total e μ_p e σ_p^2 a média e a variância da janela móvel. É importante que a janela móvel percorra toda a série temporal para melhor analisá-la. O tamanho do passo do movimento da janela para percorrer toda a série é dado pelo *lag* da ACF com significância de 5%.

Para ilustrar o conceito de janelas móveis, será apresentado dois exemplos um com uma série temporal estacionária e o outro de preços anuais do combustível gás natural.

Exemplo 3.1

Considere a série temporal estacionária apresentada na Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Série temporal estacionária.

1	7,264785	11	8,562359	21	8,019794	31	8,230827
2	9,014404	12	8,943438	22	8,287314	32	7,483158
3	8,12776	13	7,495875	23	7,54165	33	8,393348
4	7,915733	14	7,368593	24	8,529485	34	8,055992
5	8,108477	15	8,003123	25	8,258716	35	8,41702
6	8,234438	16	7,743594	26	8,353588	36	8,245693
7	7,586903	17	7,742152	27	7,871542	37	7,857336
8	7,34052	18	7,127794	28	8,051294	38	8,60472
9	8,178377	19	7,469713	29	7,348034	39	8,110176
10	8,27091	20	7,914788	30	7,214513	40	7,917738

A média, o desvio padrão e a variância da série são respectivamente,

$$\mu_t = 7,980142 ; \quad \sigma_t = 0,462416 ; \quad \sigma_t^2 = 0,213828. \quad (3.33)$$

A série tem 40 dados, logo o tamanho da janela móvel será $L = 10$. Como na série não há ACF significativa, conforme pode ser observado na Figura 3.8, o passo da janela será 10. Sendo assim, necessita-se de 4 janelas móveis para percorrer toda a série.

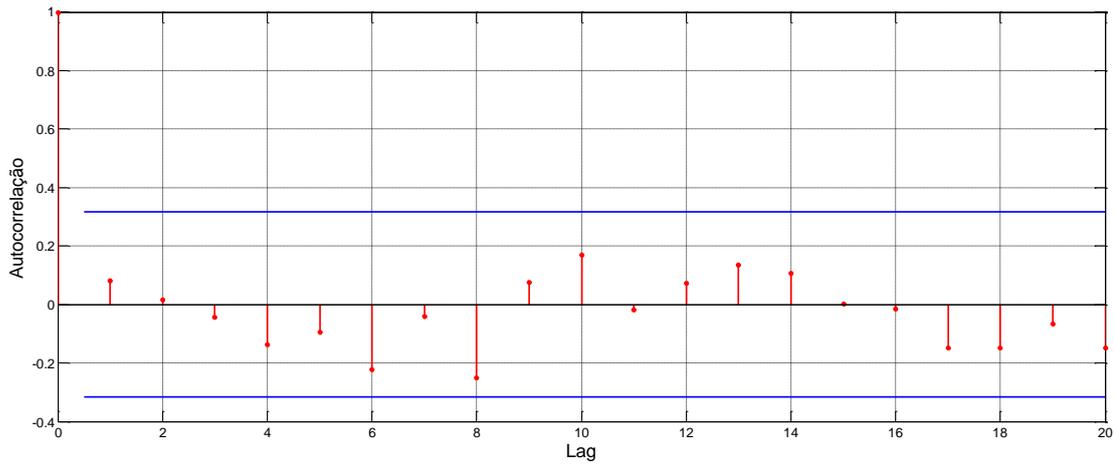


Figura 3.8: ACF da série estacionária do Exemplo 3.1.

Como a série é estacionária, a relação (3.32) é satisfeita, então tem-se,

$$\begin{aligned} \mu_t - \sigma_t &= 7,517726 < \mu_p < \mu_t + \sigma_t = 8,442557 \\ \sigma_t^2 - \sigma_t &= -0,24859 < \sigma_p^2 < \sigma_t^2 + \sigma_t = 0,676244 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Os valores da média, μ_p , e da variância, σ_p^2 , para cada janela móvel estão indicados na Tabela 3.2.

Tabela 3.2: Média e variância de cada réplica.

Réplica	μ_p	σ_p^2
R1	8,004231	0,263367
R2	7,837143	0,308374
R3	7,947593	0,199895
R4	8,131601	0,104921

Exemplo 3.2

Considere os preços anuais do gás natural, conforme apresentado na Figura 3.9.

São 31 observações, sendo assim, o tamanho da janela móvel é dado pela equação (3.35), e o tamanho do passo do movimento da janela é 2, conforme se pode observar pela ACF que está apresentada na Figura 3.10.

$$L = \frac{T}{4} = \frac{31}{4} \cong 8 \quad (3.35)$$

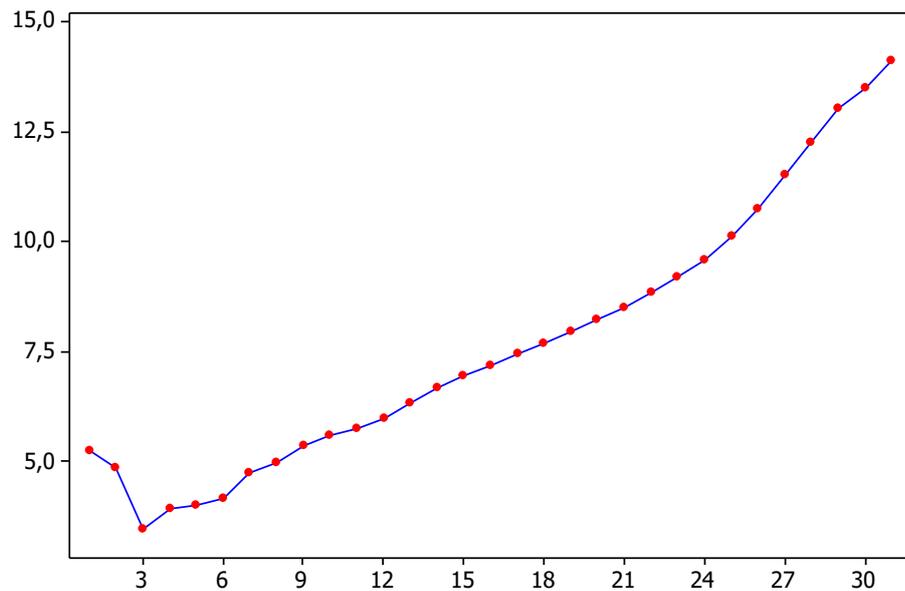


Figura 3.9: Preço anual do gás natural.

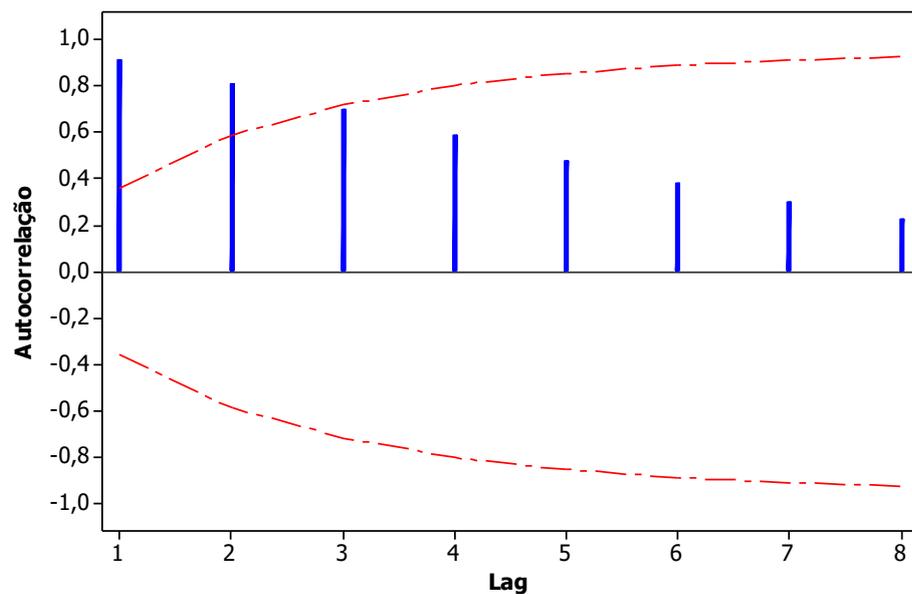


Figura 3.10: Autocorrelação do preço anual do gás natural.

Assim, serão necessárias 13 janelas móveis para percorrer todas as observações da série. Na Figura 3.11 tem-se a ideia das 13 janelas móveis percorrendo toda série.

Para cada janela móvel tem-se a média e a variância. Percorrendo toda a série temporal, a tendência, a sazonalidade e a volatilidade serão analisadas. Esta metodologia pode ser utilizada para se trabalhar com séries temporais, possibilitando analisá-las sem fazer previsões.

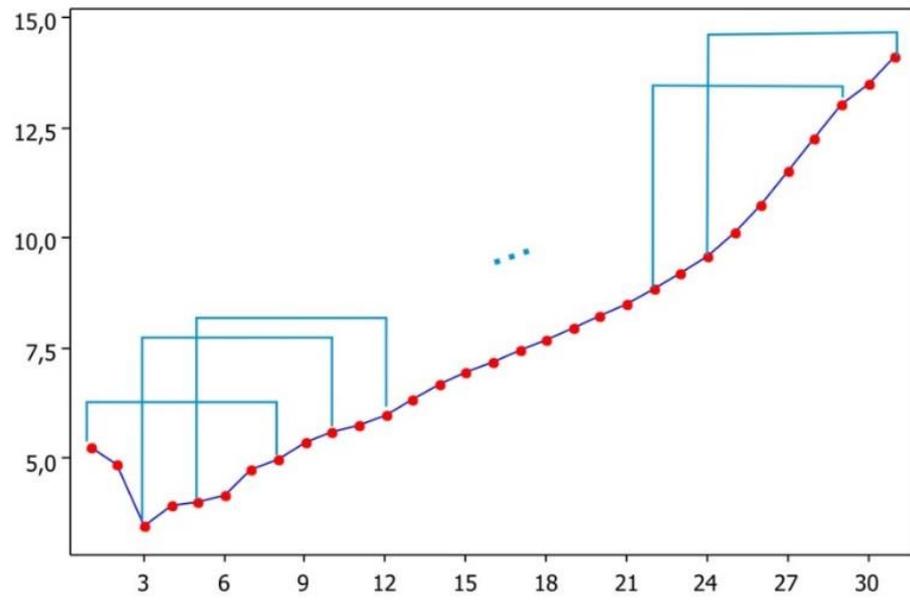


Figura 3.11: Janelas móveis do Exemplo 3.2.

Capítulo 4

Otimização de portfólio

A teoria clássica de portfólio consiste em determinar uma combinação que apresenta o maior retorno esperado para um menor risco. A essa combinação dá-se o nome de **portfólio ótimo**. Existem três dimensões a serem consideradas em problemas de portfólio: o retorno esperado de cada ativo que compõe o portfólio, μ_i ($i = 1, \dots, n$), o risco que cada ativo traz ao portfólio e a quantidade investida em cada ativo (OLIVEIRA, 2009).

Harry Markowitz apresentou um modelo chamado Média-Variância (MVP) que possibilita a criação de portfólios com a mínima variância, e o máximo retorno esperado. Em sua abordagem, o problema é formulado como um problema de otimização que envolve dois critérios: a recompensa de um portfólio, que é medido pela média e deve ser maximizada, e o risco do portfólio (medida pela variação do retorno), que deve ser minimizado. Na presença destes dois critérios não existe uma única solução ótima, mas um conjunto de portfólios ótimos, os chamados portfólios eficientes.

Neste capítulo, será apresentada a teoria clássica de Média-Variância de Markowitz. Para isso, alguns conceitos fundamentais são abordados. Em seguida, definem-se fronteira eficiente e algumas métricas para o risco de um portfólio, como o VaR e o CVaR. Procurando solucionar o problema da diversificação de portfólio, o índice de entropia de Shannon será abordado ao final do capítulo.

4.1 Conceitos fundamentais

Antes das formulações clássicas de média-variância de Markowitz serem abordadas, é necessário a apresentação de alguns conceitos fundamentais.

Pode-se definir **investimento** como o comprometimento atual do dinheiro por um período de tempo, a fim de se obter pagamentos futuros que irão compensar o investidor. São características fundamentais no investimento, a taxa de inflação esperada durante o período de tempo e a incerteza dos pagamentos futuros (REILLY e BROW, 2010). O investidor pode ser um indivíduo, um governo, um fundo de pensão ou uma corporação.

Já o **portfólio** é formado por um grupo de ativos, ou seja, bens que pertencem a um investidor. Um portfólio de investimentos é medido como a média ponderada para os investimentos individuais de cada ativo que compõe o portfólio (REILLY e BROW, 2010).

Outro conceito importante é a **diversificação**. Segundo Fabozzi *et al.* (2007), a diversificação é definida como a maneira com que o investidor aloca seus investimentos nos diversos ativos, contribuindo para a redução dos riscos.

Na formação de um portfólio, a diversificação tem um papel importante, pois se pode incluir vários ativos, com maior e menor risco e retorno, reduzindo o risco geral do portfólio, provocado por um retorno baixo de um único ativo.

O **risco** é considerado como a possibilidade de que algum acontecimento desfavorável venha a ocorrer. Em um investimento, ele está diretamente ligado à probabilidade de se ganhar menos que o esperado. Já o **retorno** é definido como o total de ganhos ou perdas ocorridas após um dado período de tempo (REILLY e BROW, 2010).

4.2 Média-Variância de Markowitz – MVP

A teoria de Markowitz (1952) (*Mean-Variance Portfolio – MVP*) mudou toda a sistemática de análise de investimentos existente até então. Ele observou que tratar conjuntamente o risco e o retorno dos ativos em um portfólio é mais importante do que tratar separadamente. Essa teoria foi inicialmente concebida no contexto de portfólios financeiros, onde $E(\mu_c)$ é o retorno esperado, e $\sigma^2(\mu_c)$ o risco total. Seu princípio fundamental parte de que, para o investidor, o retorno esperado e a volatilidade dos retornos são aspectos cruciais na obtenção do portfólio ótimo. Segundo Awerbuch e Berger (2003), a ideia é que enquanto os investimentos são imprevisíveis e arriscados, a correlação ou a covariância dos retornos dos ativos individuais podem ser usadas para ajudar a proteger o portfólio, criando assim altos retornos com pouco ou nenhum risco adicional.

Considerando um período de tempo T , a sequência de retornos para o ativo i é dada por $r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{iT}$, com $i = 1, 2, \dots, n$ e o retorno esperado do ativo i é dado por:

$$\mu_i = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T r_{ik} \quad (4.1)$$

Segundo a teoria de Markowitz, o retorno esperado é a média ponderada dos retornos esperados individuais dos títulos, denotado por $E(\mu_c)$. A média da distribuição de probabilidade do retorno, ou o retorno esperado, é uma indicação da esperada rentabilidade. Assim, o retorno do portfólio, denotado por μ_c , é dado por

$$\mu_c = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i \quad (4.2)$$

onde w_i ($i = 1, \dots, n$) são as proporções de investimentos.

Já o retorno esperado é calculado por (4.3)

$$E(\mu_c) = \sum_{i=1}^n w_i E(\mu_i). \quad (4.3)$$

O retorno segue uma distribuição de probabilidade cujo termo variância indica quão dispersos estão os possíveis resultados em torno da média: quanto maior a variância, mais incerto será o resultado. Portanto, a variância da distribuição pode ser usada como uma indicação do risco envolvido no investimento (OLIVEIRA *et al.*, 2011).

Segundo Huang (2008), a variância para um portfólio é o primeiro tipo de definição matemática para o risco, e foi inicializada por Markowitz. A variância pode ser escrita como o valor esperado da combinação linear e envolve um termo de covariância σ_{ij} que mede quanto os retornos de dois ativos estão correlacionados entre si, de acordo com a abordagem do portfólio de média-variância, que estabelece a melhor estratégia para minimizar o risco e maximizar o retorno (BRADRI *et al.*, 2008).

A variância do i -ésimo ativo, σ_i^2 , e a covariância do i -ésimo e j -ésimo ativos, σ_{ij} , é calculado pelas equações (4.4) e (4.5) respectivamente, conforme Liu *et al.* (2005).

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T (r_{ik} - \mu_i)^2 \quad (4.4)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T (r_{ik} - \mu_i)(r_{jk} - \mu_j) \quad (4.5)$$

Pode-se construir uma matriz de covariância de n -ésima ordem, como se observa em (4.6),

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \dots & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

onde σ_{ij} denota a covariância entre o ativo i e o ativo j de modo que

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \sigma_i^2, & \text{para } i = j \\ \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j, & \text{para } i \neq j \end{cases} \quad (4.7)$$

e ρ_{ij} é a correlação entre o ativo i e o ativo j .

Assim, o risco do portfólio é dado por (4.8)

$$\sigma^2(\mu_c) = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i \neq j} \sum w_i w_j \sigma_{ij}. \quad (4.8)$$

De uma maneira geral, o investidor deseja que o retorno seja máximo e o risco mínimo. O modelo de média-variância de Markowitz foi aplicado primeiramente para determinar as proporções a serem investidas em determinados ativos. Matematicamente, esta expectativa pode ser expressa através do seguinte modelo de programação multiobjetivo, apresentado por Liu *et al.* (2005).

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \mu_c = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i \\ \text{Min} \quad & \sigma^2(\mu_c) = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n w_i w_j \sigma_{ij} \\ \text{Sujeito a:} \quad & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\ & w_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde n é o número de ativos incluídos no portfólio.

Um portfólio com o máximo retorno esperado não é necessariamente o de variância mínima. O investidor pode obter o máximo retorno esperado, a partir de uma variância dada, ou reduzir a variância, a partir de um retorno esperado (MARKOWITZ, 1952). Markowitz definiu o modelo que minimiza o risco do investimento para um determinado retorno esperado R , cujo problema é descrito em (4.10).

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sigma^2(\mu_c) = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n w_i w_j \sigma_{ij} \\ \text{Sujeito a:} \quad & \mu_c = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i \geq R \\ & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\ & w_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde w_i são os pesos a serem investidos em cada ativo, σ^2 é o risco do portfólio e R é o máximo retorno dado pelo investidor.

A diferença entre o problema descrito em (4.9) e (4.10) é que para a primeira, resolve-se um problema de otimização multiobjetivo, já para a segunda, o problema de otimização é mais simples, onde coloca-se na restrição do problema um limite para o retorno, que seria o retorno dado, e para este limite máximo do retorno, minimiza-se o risco.

Na otimização de portfólio, o que se deseja é encontrar uma combinação ótima para o retorno e o menor.

O problema de otimização restrita multiobjetivo pode ser resolvido utilizando a formulação apresentada por Anagnostopoulos e Mamanis (2010), que será apresentada na seção 4.4. Antes da apresentação desta formulação, é necessário definir o que é uma fronteira de Pareto.

4.3 Fronteira de Pareto

Uma fronteira de Pareto pode ser conceituada observando que, dado um conjunto de ações, é possível ter diferentes combinações formando novos portfólios. Para isso, considere em um plano cartesiano, onde x representa o risco e y o retorno esperado, o conjunto de todos os portfólios eficientes. Este conjunto forma a fronteira de Pareto. Cada portfólio contido na fronteira é obtido solucionando o problema (4.10) para diferentes retornos. Em outras palavras, a fronteira de Pareto pode ser descrita como o melhor conjunto possível de portfólios que têm o menor risco para um dado retorno. Sendo assim, o investidor poderia se concentrar na seleção de um portfólio na fronteira e poderia ignorar os demais (HUANG, 2008).

Problemas de otimização de portfólio são problemas multi-objetivos, que geralmente não possuem uma única solução ótima. Para se comparar soluções diferentes, usa-se a noção de dominância, já que problemas de otimização são escritos na forma padrão de $\min f(x)$.

Diz-se que uma solução x_1 domina uma outra solução x_2 se:

$$\begin{aligned} \forall i : f_i(x_1) &\leq f_i(x_2); \\ \exists i : f_i(x_1) &< f_i(x_2). \end{aligned} \tag{4.11}$$

No caso de aplicações financeiras, diz-se que um portfólio, τ_1 , domina outro, τ_2 , se τ_1 possui risco menor e retorno maior que τ_2 , podendo haver igualdade em uma das duas medidas.

Assim, a fronteira de Pareto é a curva em \mathbb{R}^2 que representa o conjunto de pontos não dominados, ou ainda, é a curva que contém as melhores possibilidades de combinações entre risco e retorno. Na Figura 4.1 tem-se um exemplo de fronteira de Pareto.

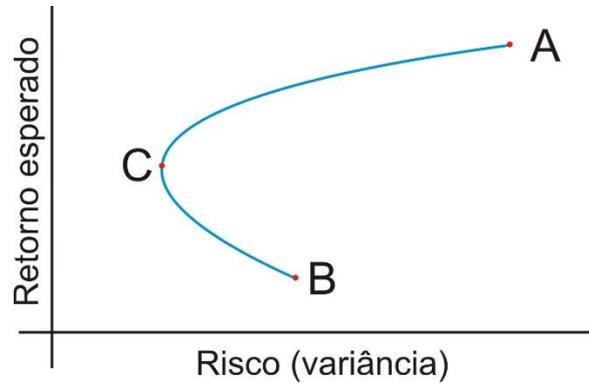


Figura 4.1: Exemplo de uma fronteira de Pareto.

A interpretação gráfica da fronteira, baseada em Awerbuch e Berger (2003) e Soares (2011), segue:

- No ponto A, tem-se um portfólio com o maior retorno, mas também com o maior risco.
- O portfólio localizado no ponto C tem o menor risco. A esse portfólio dá-se o nome de portfólio de variância mínima global.

Em resumo, a curva da fronteira de Pareto contém os portfólios com menor nível de risco e maior nível de retorno. Dentro desta curva, pode-se encontrar diferentes perfis de risco e retorno, os quais devem se adequar ao perfil do investidor. A curva representa os melhores portfólios para diferentes perfis de risco.

4.4 Otimização da média-variância

Outra abordagem do problema de otimização restrita multiobjetivo é a formulação apresentada por Anagnostopoulos e Mamanis (2010), que utiliza a soma ponderada. Nesta abordagem, um parâmetro λ , que é um coeficiente de compensação, é utilizado para priorizar o valor esperado do retorno ou do risco. A formulação é apresentada em (4.12).

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & F(w) = \lambda \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} - (1 - \lambda) \sum_{i=1}^n w_i \mu_i \\
 \text{Sujeito a:} \quad & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
 & w_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

onde μ_i é o retorno esperado de cada ativo, σ_{ij} é a variância/covariância entre os ativos que compõe o portfólio e w_i são as proporções de investimento.

Ao variar o valor de λ e resolvendo uma sequência de problemas de programação quadrática (para cada λ), obtêm-se portfólios eficientes de variância mínima ($\lambda = 1$) e de retorno máximo ($\lambda = 0$) (ANAGNOSTOPOULOS e MAMANIS, 2010). Assim, é possível obter uma fronteira eficiente do portfólio, que contém todos os portfólios ótimos (HUANG, 2008).

O modelo média-variância de Markowitz permitiu que vários investidores utilizassem os conceitos de risco e retorno de forma combinada na avaliação de investimentos. Várias críticas a respeito do modelo de Markowitz foram feitas. Uma crítica é de que o modelo MVP penaliza os desvios positivos e negativos em relação à média, assim, a variância pode não ser a mais adequada para medir o risco de um portfólio (OLIVEIRA *et al.*, 2011).

Vale ressaltar que o próprio Markowitz reconheceu que o uso da semivariância como medida de risco é mais adequada que o uso da variância. Na semivariância, deseja-se reduzir perdas, já na variância, procura eliminar tanto os desvios negativos quanto os positivos. A justificativa em se utilizar a variância como medida de risco se deve ao menor custo computacional.

Na seção seguinte será apresentada duas abordagens para a mensuração do risco: *Value-at-Risk* (VaR) e o *Conditional Value at Risk* (CVaR).

4.5 Valor em Risco (*Value-at-Risk* - VaR)

Essa metodologia foi desenvolvida pelo banco americano JP Morgan, que engloba a perda potencial de um investimento. O VaR é a quantidade máxima de dinheiro que pode ser perdido em uma carteira ao longo de um determinado período de tempo, com um determinado nível de confiança (MARIMOUTOU *et al.* 2009). Segundo Lai *et al.* (2006), essa métrica descreve a perda que pode ocorrer ao longo de determinado período de tempo em um determinado nível de confiança, devido à exposição ao risco de mercado.

O VaR leva em conta, não só o risco individual de cada ativo, expresso estatisticamente pela variância dos retornos, mas também as relações entre os diversos ativos dadas pelas correlações (OLIVEIRA *et al.*, 2011). De acordo com Hongling (2008), o primeiro passo para a mensuração do VaR é a escolha de dois fatores quantitativos: o horizonte de tempo e o nível de confiança.

Assim, em um horizonte de tempo qualquer, a função $f(x, y)$ traz x representando o retorno do portfólio e y o seu risco (OLIVEIRA *et al.*, 2011). Pode-se definir a função de densidade de probabilidade de y como sendo $p(y)$. Logo, o retorno do portfólio, $f(x, y)$, é também uma variável aleatória, induzida pela distribuição de $y, p(y)$. Se for escolhido um dado portfólio x , a probabilidade de a perda exceder um valor v é dada pela função de distribuição cumulativa:

$$\psi(x, v) = \int_{f(x,y) \leq v} p(y) dy = 1 - \beta \quad (4.13)$$

O valor v é chamado VaR_β . Em outras palavras, um nível de perda que só é superado por $(1 - \beta)\%$ dos casos observados.

Em geral, segundo Artzner *et al.* (1999), uma medida de risco é dita coerente se satisfizer as seguintes propriedades:

Seja $\rho: V \rightarrow R$,

1. **monotonicidade:** para todo $X, Y \in V$ e $X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$
2. **invariância por translação:** para todo $X \in V$ e todo real α , $\Rightarrow \rho(X + \alpha) = \rho(X) - \alpha$
3. **positividade homogênea:** para todo $\lambda \geq 0$ e todo $X \in V$, $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$
4. **subaditividade:** para todo $X, Y \in V \Rightarrow \rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.

Artzner *et al.* (1999) demonstra que a metodologia VaR só não satisfaz a propriedade 4. Sendo assim, não pode ser considerada uma medida de risco coerente. Além disso, quando se deseja otimizar um portfólio, se utilizar o VaR como função objetivo a ser minimizada, o processo se torna difícil pois o VaR é uma função não convexa, não diferenciável em alguns pontos, e que apresenta múltiplos extremos locais (ARTZNER *et al.*, 1999). Por estes motivos, utilizando a métrica VaR pode-se determinar a métrica Valor em Risco Condicional (*Conditional Value at Risk - CVaR*), que informa a perda média considerando todos os momentos em que o retorno é inferior ao VaR. Além disso, Artzner *et al.* (1999) mostra que todas as quatro propriedades são satisfeitas pelo CvaR.

4.6 Valor em Risco Condicional (Conditional Value at Risk - CVaR)

O CVaR a nível de confiança $\beta\%$ é definido como o valor esperado condicional das perdas de um portfólio, dado que as perdas a serem contabilizadas são as maiores ou iguais ao

VaR. Por exemplo, para $\beta = 95\%$, o CVaR é dado pela média das 5% maiores perdas (DANIELSSON, 2011). Segundo Doud (1998) e Rockafellar (2002), CVaR pode ser considerado como o valor esperado das perdas de um portfólio, dado que as perdas a serem contabilizadas são maiores ou iguais ao VaR. Utiliza-se a mesma equação que definiu o VaR, $f(x, y)$, se o $v_\beta(x)$ representa o VaR do investimento x , então o CVaR do investimento a um nível de confiança β , com $\theta_\alpha(x)$ representando a perda esperada, então

$$\theta_\beta(x) = E[f(x, y) | f(x, y) \geq v_\beta(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) P[y / f(x, y)] \geq v_\beta(x) dy \quad (4.14)$$

Sendo:

$$P[y / f(x, y)] = \begin{cases} \frac{P(y)}{P[f(x, y) \geq v_\beta(x)]} & \text{se } f(x, y) \leq v_\beta(x) \\ 0 & \text{se } f(x, y) > v_\beta(x) \end{cases} \quad (4.15)$$

Onde o termo $P[f(x, y) \geq v_\beta(x)]$ indica a probabilidade de perda ser maior que o VaR a um determinado grau de confiança β , em termos absolutos. Assim:

$$P[f(x, y) \geq v_\beta(x)] = 1 - \beta. \quad (4.16)$$

Portanto, o CVaR a um nível de confiança $\beta\%$ é dado por:

$$\theta_\beta(x) = \frac{1}{1 - \beta} \int_{f(x, y) \geq v_\beta(x)} f(x, y) P(y) dy \quad (4.17)$$

Enquanto o VaR indica que, com probabilidade de $\beta\%$, as perdas do portfólio (representadas pela variável aleatória x) não excederão uma quantia $VaR(x, \beta)$, o CVaR indica que, considerando-se que o pior evento, cuja probabilidade de ocorrer é $(1 - \beta\%)$, ocorreu, a perda média da carteira esperada de $CVaR(x, \beta)$ (URYASEV, 2000).

A Figura 4.2 apresenta uma comparação entre o VaR e o CVaR.

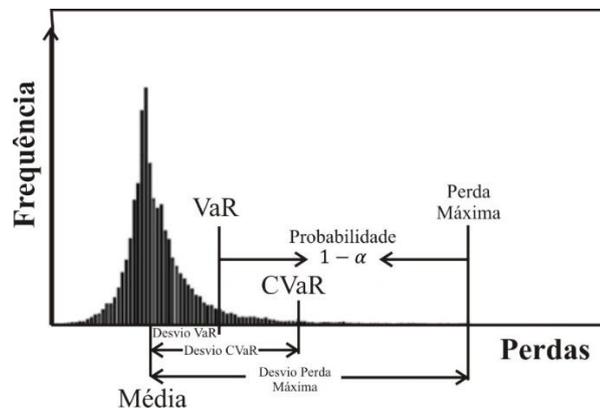


Figura 4.2: Comparação entre o VaR e o CVaR de uma distribuição de probabilidade.
Fonte: Uryasev (2000)

Embora a escolha da medida de risco seja um assunto em grande ebulição, com defensores arraigados para os vários modelos existentes, será utilizado, neste trabalho, a medida clássica, ou seja, a variância, que ainda conta com um grande número de adeptos.

Segundo Jana e Mazumder (2007), no MVP um investidor deve sempre escolher um portfólio eficiente. O principal problema no portfólio ideal pelo MVP é que as carteiras são, muitas vezes, extremamente concentradas em alguns ativos, o que é uma contradição com a noção de diversificação. Portanto, buscando um critério para obter a diversificação, utiliza-se a entropia como medida de divergência de portfólios de ativos. Costuma-se resolver o problema MVP, e em seguida, aplicar a medida de entropia para inferir quanto o portfólio é diversificado.

4.7 Entropia de Shannon

Diversificar um portfólio é evitar colocar muito peso em apenas alguns ativos, pois assim poderia aumentar o risco. Adicionar uma restrição de limite superior nos pesos dos ativos é, provavelmente, a maneira mais comum e mais simples para controlar a diversidade de um portfólio. Também se pode diversificar um portfólio impondo uma restrição de limite inferior aos pesos. Porém, na prática, investidores são, muitas vezes, limitados por lei a impor tal restrição (LIN, 2013). Uma estratégia que está sendo muito utilizada para essa diversificação é a utilização da entropia de Shannon. Nesta seção, será apresentado esse índice conforme se encontra na literatura.

Considere o retorno esperado μ_c de um portfólio com n ativos, a variância σ^2 e a covariância σ_{ij} . Encontrar um portfólio ótimo é resolver o problema (4.12), ou seja, minimizar a função objetivo $F(\mathbf{w})$, sujeito às restrições (4.18) e (4.19).

$$0 \leq w_i \leq 1, \quad \text{para } i = 1 \text{ até } n \quad (4.18)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (4.19)$$

Adicionando um limite superior nos pesos de cada ativo evita portfólios concentrados. Este limite é dado por (4.20).

$$\max(w_i) \leq U_{w_i}, \quad \text{para } i = 1 \text{ até } n \quad (4.20)$$

Pode-se observar que $U_{w_i} \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$.

Impor um limite inferior aos pesos de cada ativo também pode evitar portfólios concentrados. Este limite é dado por (4.21).

$$\min(w_i) \geq L_{w_i}, \quad \text{for } i = 1 \text{ to } n \quad (4.21)$$

Pode-se observar que $L_{w_i} \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$.

A restrição de entropia adiciona um limite inferior na entropia para o portfólio. Shannon (1948) define entropia de um conjunto discreto de probabilidades p_1, p_2, \dots, p_n como:

$$H = - \sum_{i=1}^n p_i(x) \log p_i(x) \quad (4.22)$$

De uma maneira análoga, Shannon (1948) define a entropia de uma distribuição contínua com a distribuição da função densidade $p(x)$ por:

$$H = - \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log p(x) dt \quad (4.23)$$

Como em um portfólio, os pesos, w_i , são proporções, então $p(w_i)$ é uma distribuição de probabilidade discreta. Assim, da equação (4.22) tem-se,

$$H = - \sum_{i=1}^n p_i(x) \log p_i(x) = - \sum_{i=1}^n w_i \log w_i \quad (4.24)$$

onde x_i são os pesos ou proporções escolhidos para cada ativo i .

Com a definição de entropia, tem-se que, em um cenário menos diversificado, $w_i = 1$, para algum i , e os outros pesos iguais a zero. Assim, o menor valor de $H = -1 \cdot \log 1 = 0$. Por outro lado, em cenários mais diversificados onde $w_i = \frac{1}{n}$ para todo i , o valor da entropia atinge seu máximo em $H = -n \left(\frac{1}{n} \log \frac{1}{n}\right) = \log n$. Portanto, $H \in [0, \log n]$. O que pode-se concluir que, para uma maior diversificação nos portfólios tem-se o maior valor para a entropia.

Assim, segundo Jana e Mazumder (2007), um problema de otimização de portfólios utilizando o índice de entropia pode ser formulado conforme (4.25).

$$\begin{aligned}
 \text{Max} \quad & \mu_c = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i \\
 \text{Min} \quad & \sigma^2(\mu_c) = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n w_i w_j \sigma_{ij} \\
 \text{Max} \quad & H = - \sum_{i=1}^n w_i \log w_i \\
 \text{Sujeito a:} \quad & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
 & w_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

A formulação (4.25) será utilizada na determinação do portfólio ótimo utilizando Projeto de Experimento de Misturas (MDE), que será apresentado no próximo capítulo. Além disso, serão utilizados os conceitos de Janelas Móveis, como visto no Capítulo 3 e Réplicas, que será apresentado no Capítulo 5.

Capítulo 5

Otimização utilizando projeto de experimentos de misturas

O Projeto de experimentos de misturas (MDE) é uma classe especial de experimentos de superfície de resposta em que o produto sob investigação é composto de vários componentes ou ingredientes. O objetivo principal de um projeto de experimentos de misturas é determinar a influência que cada componente possui sobre o produto final (OLIVEIRA *et al.*, 2011).

Este capítulo está estruturado da seguinte maneira: na seção 5.1, apresenta-se a definição de projeto de experimentos de misturas, iniciando com o problema de mistura original. Em seguida, a Metodologia de Superfície de Resposta é abordada, pois esta é utilizada para modelar as respostas encontradas no experimento. O *simplex lattice* é apresentado na seção 5.3, o *simplex centroid* na seção 5.4 e o *Extreme vértice* na seção 5.5. Para finalizar o capítulo, na seção 5.6, a otimização pelo MDE é abordada, utilizando a metodologia da função *desirability* e, na última seção, será apresentada o conceito de Réplicas em MDE.

5.1 Projeto de experimentos de misturas - MDE

Muitos produtos são formados por dois ou mais ingredientes, como por exemplo:

- (i) Na formulação de um bolo usando farinha, fermento em pó, açúcar, ovos e água;
- (ii) Na construção de uma estrutura de concreto formado por mistura de areia, água, e um ou mais tipos de cimento;
- (iii) Na indústria farmacêutica, quando se deseja obter um anti-inflamatório formado através da mistura de Poloxomer 407 e Tolfenamic, com determinada viscosidade (CORNELL, 2002).

Em cada um destes casos, uma ou mais propriedades de cada produto são de interesse para o produtor ou o responsável pela mistura dos ingredientes. Essas propriedades são: (i) o gosto ou a aparência do bolo, que é uma função das proporções dos ingredientes; (ii) a rigidez ou resistência a compressão do concreto, onde essa rigidez é uma função da porcentagem de cimento, areia e água na mistura; (iii) a viscosidade do anti-inflamatório, que facilita a ingestão por parte do paciente, que é uma função das proporções de cada agente químico que

compõe a mistura final. Em todos os casos, a propriedade do produto final depende das porcentagens ou das proporções de cada um dos ingredientes que compõem a formulação.

Outra razão para a combinação dos ingredientes em experimentos de mistura é verificar se existem misturas de dois ou mais ingredientes que produzem as propriedades dos produtos mais desejáveis do que as obtidas com os ingredientes individuais. Em cada um dos casos citados, as propriedades de interesse estão diretamente relacionadas com a composição do produto e que, através da mudança das proporções dos ingredientes, as propriedades do produto irão alterar.

Antes de apresentar o método de experimento de mistura, será apresentado o problema original de mistura, segundo Cornell (2002).

5.1.1 Problema original de mistura

Para formular experiências envolvendo misturas, considere a seguinte situação: existem dois tipos de combustíveis, *A* e *B*. A propriedade de interesse é a quilometragem percorrida por litro do combustível, ou seja, deseja-se analisar como variável de resposta o rendimento do combustível. Sabe-se de antemão que o combustível *A* faz 13 km/litro e o combustível *B* faz 7 km/litro. Se um carro é testado com cada combustível separadamente, ou seja, 1 litro do combustível *A* e depois 1 litro do combustível *B*, é esperado que o carro percorra $13 + 7 = 20$ km com os dois litros, ou em média, 10 km/litro. A questão é a seguinte: se combinar ou misturar os dois combustíveis e conduzir o mesmo carro de teste, há uma mistura de *A*:*B*, como um 50%:50%, ou 33%:67%, que produz um maior número médio de quilômetros por litro do que os 10 km/litro, que foi obtido?

Para responder a esta pergunta, um experimento é realizado, o qual consiste em dirigir o carro de teste contendo 50% de combustível *A* e 50% do combustível *B*. Uma estratégia de experimentação consiste em dirigir o carro até os combustíveis acabarem. Repetindo este experimento cinco vezes, obteve o resultado apresentado na Tabela 5.1, conforme encontrado em Cornell (2002).

Tabela 5.1: Quilometragem média para cada um dos cinco experimentos.

Experimento	Quilometragem para a mistura de 50%A: 50%B	Quilometragem média por litro
1	24,6	12,30
2	23,3	11,65
3	24,3	12,15
4	23,1	11,55
5	24,7	12,35
Média:		12,00

O número médio para a mistura foi de 12,0 km/litro, que é maior do que a quilometragem média de 10 km/litro para os dois combustíveis. Assim, os combustíveis A e B são considerados complementares entre si quando misturados.

Este exemplo vem ilustrar a definição de experimento de mistura. Em geral, a resposta em problemas de mistura depende das proporções dos ingredientes presentes na mistura e não da quantidade da mistura.

A resposta é uma função das proporções dos diferentes ingredientes da mistura. Estas proporções são não-negativas e são expressas como uma fração do total da mistura, cuja soma deve ser igual a um (CORNELL, 2002).

O espaço formado pelos experimentos de mistura de componentes é descrito como um sistema de coordenadas *simplex*. A distribuição dessas coordenadas de modo uniforme sobre o *simplex* é conhecido como *lattice* (CORNELL, 2002).

Por exemplo, para uma mistura de dois componentes, o *simplex* será uma linha. Quando existem três componentes na mistura, o espaço geométrico *simplex* será um triângulo equilátero. Para um experimento com quatro componentes, o *simplex* será um tetraedro. Na Figura 5.1 tem-se um exemplo de uma mistura de três componentes.

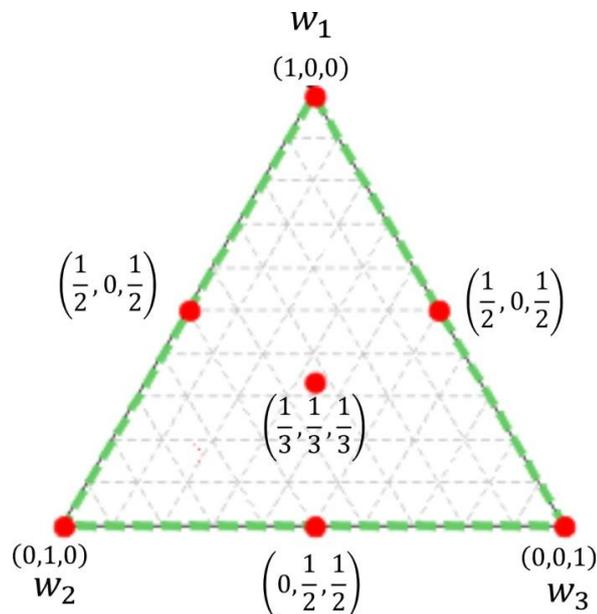


Figura 5.1: Sistema de coordenadas simplex com três componentes

Os vértices do *simplex*, ou triângulo, representam as misturas puras. Os pontos interiores do triângulo representam as misturas nas quais nenhum dos três componentes está ausente, ou seja, $w_i > 0$, para $i = 1, 2$ e 3 . O ponto que está no centro do *simplex* é chamado de centroide, este ponto corresponde à mistura com iguais proporções de cada componente.

Frequentemente existem situações em que algumas das proporções, w_i , são restritas a um limite inferior e/ou limite superior. Assim, estas restrições podem ser escritas como (5.1),

$$0 \leq L_i \leq w_i \leq U_i \leq 1, \quad 1 \leq i \leq q \quad (5.1)$$

onde L_i é o limite inferior e U_i é o limite superior.

Finalmente, o objetivo de um experimento de mistura é tentar modelar a dependência das variáveis de respostas e a relativa proporção dos componentes como uma equação matemática que forneça:

- 1- A influência da proporção de cada componente e sua combinação com os outros componentes sobre a variável de resposta.
- 2- As previsões da resposta para qualquer mistura ou combinação das proporções.
- 3- Identificação das misturas dos componentes que produzem os valores da variável resposta desejável.

A análise do experimento é facilitada com o uso da Metodologia de Superfície de Resposta (MSR).

5.2 Metodologia de superfície de resposta

A Metodologia de superfície de resposta (MSR), é uma coleção de técnicas matemáticas e estatísticas usadas para modelar e analisar problemas onde a resposta de interesse é influenciada por muitas variáveis para alcançar um valor ótimo (MYERS e MONTGOMERY, 2002).

Considere uma mistura de três componentes ($q = 3$) e as proporções de cada componente como sendo w_1, w_2 e w_3 , conforme pode-se observar na Figura 5.2.

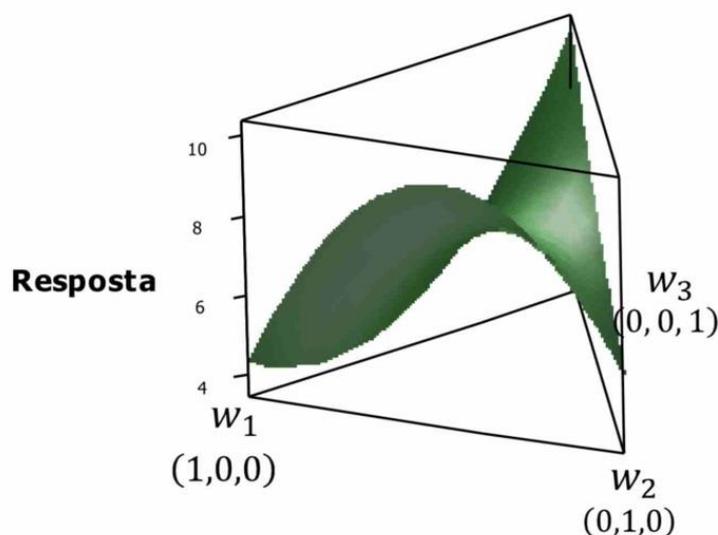


Figura 5.2: Superfície de resposta para misturas de três componentes e o sistema de coordenadas triangulares.

A superfície de resposta pode ser projetada sobre o sistema triangular de coordenadas. Estas projeções geram as curvas de contorno, ou seja, o traçado de contorno da superfície. A Figura 5.3 apresenta a região de superfície de resposta projetada no sistema triangular de coordenadas.

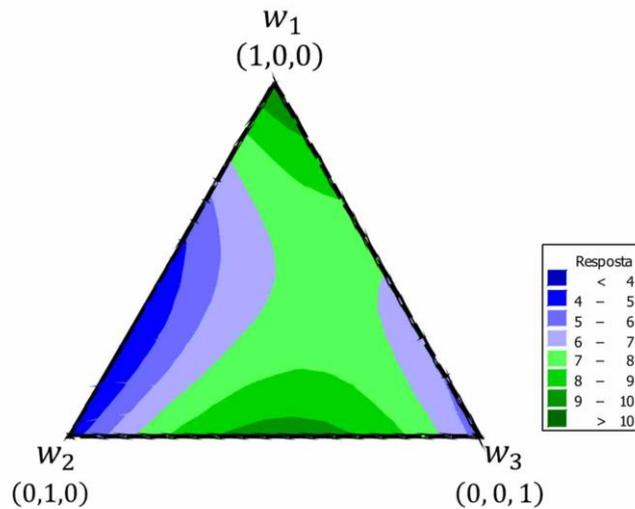


Figura 5.3: Projeção da região de superfície de resposta no sistema triangular de coordenadas.

Segundo Cornell (2002), as principais considerações relacionadas com a exploração da superfície de resposta sobre a região simplex são: (i) a escolha de um modelo adequado para a aproximação da superfície sobre a região de interesse; (ii) o teste da adequação do modelo que represente a superfície de resposta.

De um modo geral, suponha que exista alguma relação funcional entre as variáveis de resposta e as proporções dos componentes, tal que:

$$\eta = \phi(w_1, w_2, \dots, w_q) \quad (5.2)$$

onde, η é a variável de saída ou a propriedade da mistura; ϕ é a função que expressa a relação entre as proporções w_i e a variável de saída; e w_i são as proporções dos componentes da mistura com $i = 1, 2, \dots, q$.

De maneira geral, funções polinomiais de baixa ordem são utilizadas para se encontrar uma aproximação para a relação entre y e o conjunto de variáveis. Esse polinômio geralmente é linear, quadrático ou cúbico, dependendo dos objetivos de resposta.

É preciso, no MDE, determinar o melhor modelo que represente a superfície de resposta. Para isso, existem alguns experimentos padrões: *simplex lattice*, *simplex centroid design* e *Extreme Vertices Design*.

5.3 Simplex Lattice

O *simplex lattice design* é uma abordagem que procura determinar uma equação polinomial que represente a superfície de resposta sobre a região *simplex*, através de pontos distribuídos uniformemente dentro da região. A esse arranjo de pontos é dado o nome de *lattice*.

Conforme Cornell (2002), o *lattice* pode ter uma correspondência a uma equação polinomial específica. Por exemplo, um modelo polinomial de grau m para uma mistura de q componentes, denominado $\{q, m\}$ *simplex-lattice*, consiste de um conjunto coordenado de pontos que definem as proporções de cada ingrediente, distribuídos conforme (5.3)

$$w_i = 0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, 1 \quad (5.3)$$

Por exemplo, tome-se uma mistura de três componentes, $q = 3$; se o grau do polinômio é dois, $m = 2$, a proporção de cada componente assume os valores $w_i = 0, \frac{1}{2}$ e 1 para todo $i = 1, 2$ e 3 e o $\{3, 2\}$ *simplex-lattice* consiste de seis pontos na fronteira do triângulo, conforme estão apresentados em (5.4).

$$(w_1, w_2, w_3) = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \quad (5.4)$$

Os três primeiros componentes representam as misturas puras e estão nos vértices do triângulo e os três últimos termos representam as misturas binárias ou de dois componentes. O número de pontos experimentais no $\{q, m\}$ *simplex-lattice* é dada pela equação (5.5).

$$N = \frac{(q + m - 1)!}{m! (q - 1)!} \quad (5.5)$$

Como no exemplo acima, o *simplex-lattice* teria $N = \frac{(3+2-1)!}{2!(3-1)!} = 6$ pontos. Um outro exemplo seria de um *simplex-lattice* de 8 componentes e de polinômio de grau 3. Assim, $N = \frac{(8+3-1)!}{3!(8-1)!} = 120$ pontos.

Além de determinar o número de pontos do $\{q, m\}$ *simplex-lattice*, o número de termos da equação que modela a variável resposta depende do número de componentes q . Assim, o número de termos da equação pode ser obtida pelas fórmulas (5.6).

$$\begin{aligned}
\text{Linear:} & \quad q \\
\text{Quadrático:} & \quad \frac{(q+1)q}{2} \\
\text{Cúbico especial:} & \quad \frac{(q^2+5)q}{6} \\
\text{Cúbico:} & \quad \frac{(q+1)(1+2)q}{2}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Sendo assim, para cada grau do polinômio m escolhido, a resposta do experimento de misturas pode ser linear, quadrático ou cúbico. A equação (5.7) apresenta um modelo linear, a equação (5.8) um modelo quadrático e a equação (5.9) um modelo cúbico.

$$E(w) = \sum_{i=1}^q \beta_i w_i \tag{5.7}$$

$$E(w) = \sum_{i=1}^q \beta_i w_i + \sum_{i < j} \sum_{i < k} \beta_{ij} w_i w_j \tag{5.8}$$

$$E(w) = \sum_{i=1}^q \beta_i w_i + \sum_{i < j} \sum_{i < k} \beta_{ij} w_i w_j + \sum_{i < j} \gamma_{ij} w_i w_j (w_i - w_j) + \sum_{i < j < k} \beta_{ijk} w_i w_j w_k \tag{5.9}$$

Os coeficientes β_i mostram como cada componente contribui para a variável de resposta. Da mesma forma, o termo β_{ij} indica qual é o efeito combinado dos componentes i e j . Estes coeficientes são estimados usando o algoritmo de Mínimos Quadrados Ordinários (CORNELL, 2002).

5.3.1 Determinação dos coeficientes do polinômio

Como já mencionado, há uma relação entre $\{q, m\}$ *simplex-lattice* e o polinômio $\{q, m\}$ de modo que existe uma correspondência entre o número de pontos dentro do *lattice* e o número de termos do polinômio. Deste modo, os parâmetros ou coeficientes do polinômio podem ser determinados em função dos valores obtidos para a variável resposta para cada ponto do *lattice*. Como exemplo, toma-se a Tabela 5.2 que apresenta os valores da variável resposta associada a cada ponto do *simplex-lattice* para três componentes.

Tabela 5.2: Associação da variável resposta com cada ponto do *simplex-lattice* de três componentes.

Resposta	w_1	w_2	w_3
E_1	1	0	0
E_2	0	1	0
E_3	0	0	1
E_{12}	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
E_{13}	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
E_{23}	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Para um polinômio de grau 2, tem-se

$$E(w) = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \beta_3 w_3 + \beta_{12} w_{12} + \beta_{13} w_{13} + \beta_{23} w_{23} \quad (5.10)$$

Assim, utilizando os valores da Tabela 5.2, tem-se.

$$\begin{aligned} E_1 &= \beta_1 \\ E_2 &= \beta_2 \\ E_3 &= \beta_3 \\ E_{12} &= \beta_1 \left(\frac{1}{2}\right) + \beta_2 \left(\frac{1}{2}\right) + \beta_{12} \left(\frac{1}{4}\right) \\ E_{13} &= \beta_1 \left(\frac{1}{2}\right) + \beta_3 \left(\frac{1}{2}\right) + \beta_{13} \left(\frac{1}{4}\right) \\ E_{23} &= \beta_2 \left(\frac{1}{2}\right) + \beta_3 \left(\frac{1}{2}\right) + \beta_{23} \left(\frac{1}{4}\right) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Resolvendo o sistema de equações (5.11), obtém-se os parâmetros do polinômio de grau 2.

5.3.2 Análise do modelo

Após a obtenção do polinômio $\{q, m\}$ que representa a superfície de resposta, é necessário definir indicadores para analisar o quão bem o modelo é capaz de representar a superfície. Segundo Oliveira (2009), a primeira propriedade é a de verificar se o polinômio é capaz de explicar as variações nos conjuntos de respostas, ou seja, se o número de termos presente no modelo é suficiente para torná-lo adequado à superfície de resposta. Esta verificação é feita através do coeficiente de determinação R^2 , que é calculado pela equação (5.12).

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} \quad (5.12)$$

onde

$$SSR = \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

$$SST = \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2$$
(5.13)

\hat{y}_i é o valor previsto para a resposta considerando o i -ésimo experimento utilizando o polinômio $\{q, m\}$. O termo y_i é o valor da variável de resposta para o i -ésimo experimento e \bar{y} é a média geral dos valores assumidos pela variável resposta considerando todos os experimentos realizados.

Um teste estatístico para verificar os termos do polinômio pode ser feito. Este teste pode evitar que o polinômio tenha um grau excessivamente elevado, quando na verdade um polinômio com grau menor pode representar muito bem a superfície de resposta.

As hipóteses são as seguintes:

H₀: A resposta não depende dos componentes da mistura

H₁: A resposta depende dos componentes da mistura

Quando a hipótese nula é verdadeira, todos os componentes lineares são iguais a um valor constante e os outros termos são iguais a zero. O teste da hipótese nula é feito através do parâmetro F , calculado pela equação (5.14).

$$F = \frac{\frac{SSR}{(p-1)}}{\frac{SSE}{(N-p)}}$$
(5.14)

Sendo,

$$SSE = \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2$$
(5.15)

O grau de liberdade p é o número de parâmetros que são estimados pelo modelo, por exemplo, um polinômio de grau 2 terá 6 parâmetros: $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_{12}, \beta_{13}$ e β_{23} e N é o número de observações. O valor determinado de F é comparado com $F_{(p-1, N-p, \alpha)}$ tabelado. A hipótese nula é rejeitada a um nível de significância α , se $F > F_{(p-1, N-p, \alpha)}$.

5.4 Simplex Centroid Design

Em um *simplex centroid* de q componentes, o número de pontos distintos é dado por $2^q - 1$. Estes pontos correspondem a q permutações de componentes únicos $(1, 0, 0, \dots, 0)$, a

$\binom{q}{2}$ permutações de todas as misturas binárias $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots, 0)$, a $\binom{q}{3}$ permutações do tipo $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \dots, 0)$, ..., e assim por diante, com um ponto central $(\frac{1}{q}, \frac{1}{q}, \frac{1}{q}, \frac{1}{q}, \dots, \frac{1}{q})$. Em outras palavras, o projeto é constituído por todos os subconjuntos dos q componentes, apenas com misturas de proporções iguais (CORNELL, 2002). Essa mistura é localizada no centro do simplex de dimensão $(q - 1)$.

É possível encontrar um polinômio que represente a superfície de resposta, por meio dos pontos do *simplex centroid*. A equação polinomial é dada por (5.16).

$$E(w) = \sum_{i=1}^q \beta_i w_i + \sum_{i < j} \sum_{i < j} \beta_{ij} w_i w_j + \sum_{i < j < k} \sum_{i < j < k} \beta_{ijk} w_i w_j w_k + \dots + \beta_{12\dots q} w_1 w_2 \dots w_q \quad (5.16)$$

Como nos modelos expressos nas equações (5.7) a (5.9), os parâmetros β_i na equação (5.16), representam a resposta esperada para o componente puro i e é chamado de valor linear da mistura do componente i . Os parâmetros β_{ij} é o coeficiente dos termos não aditivos dos componentes i e j da mistura. E os parâmetros β_{ijk} são definidos da mesma maneira (CORNELL, 2002). Para a determinação dos parâmetros e para a análise do polinômio segue as mesmas definições para o *Simplex lattice* apresentada na seção anterior.

5.5 Extreme Vertice

No caso de *Extreme Vertice Design*, os experimentos de misturas desenvolvem dentro de uma pequena porção do *simplex*. Isso acontece quando se inclui restrições no modelo, impondo-se limites inferior e/ou superior nas proporções dos componentes. Estas restrições são da forma $0 \leq L_i \leq w_i \leq U_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, q$.

Os limites inferiores, L_i , são necessários quando se deseja que qualquer um dos componentes esteja presente na mistura. Já os limites superiores, U_i , são necessários quando a mistura não pode conter mais do que uma dada proporção de um componente.

Projetos de experimento de mistura pelo *Extreme Vertice* produzem coeficientes altamente correlacionados. Para reduzir estas correlações, costuma-se transformá-los em pseudocomponentes (MYERS E MONTGOMERY, 2002; CORNELL, 2002).

Para ilustrar a utilização dos limites inferiores, L_i , e as transformações em pseudocomponentes, considere um experimento de misturas formado por três componentes, w_1, w_2 e w_3 , e estes definidos dentro de uma região limitada conforme apresentada em (5.17).

$$0,35 \leq w_1, \quad 0,20 \leq w_2, \quad 0,15 \leq w_3 \quad (5.17)$$

Nesta região tem-se pelo menos, 0,35 do componente 1, 0,20 do componente 2 e 0,15 do componente 3. Naturalmente, nem todos os três componentes podem assumir esses limites inferiores simultaneamente, pois neste caso, tem-se $w_1 + w_2 + w_3 = 0,70$ que é menor do que uma unidade, e, portanto não é um projeto de mistura válido.

A região que satisfaz as restrições apresentadas em (5.17) é o interior do triângulo apresentado na Figura 5.4.

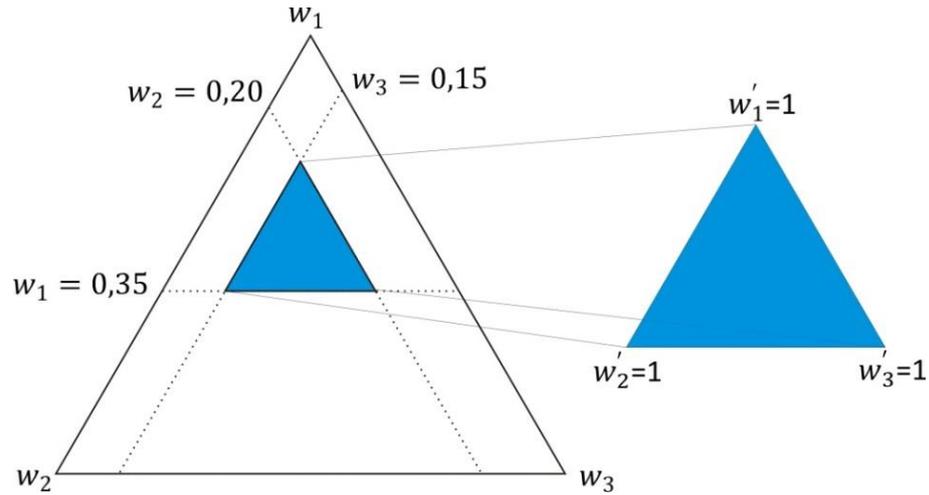


Figura 5.4: Sub-região do simplex original redefinido como um L -pseudocomponente para w'_1, w'_2 e w'_3 .

Os L -pseudocomponentes são definidos em termos dos componentes originais e seus limites inferiores. Considerando um experimento com q componentes e $L_i \geq 0$, sendo w_i a proporção do componente i , a transformação para L -pseudocomponente é feita pela equação (5.18), equação esta introduzida por Kurotori (1966).

$$w'_i = \frac{w_i - L_i}{1 - \sum_{i=1}^q L_i} \quad (5.18)$$

onde $\sum_{i=1}^q L_i < 1$.

Aplicando esta transformação nas restrições apresentadas em (5.17), obtém-se os seguintes resultados:

$$\sum_{i=1}^q L_i = 0,35 + 0,20 + 0,15 = 0,70 \quad (5.19)$$

$$w'_1 = \frac{w_1 - 0,35}{1 - 0,70}, \quad w'_2 = \frac{w_2 - 0,20}{1 - 0,70}, \quad w'_3 = \frac{w_3 - 0,15}{1 - 0,70}$$

A região mostrada na Figura 5.4 é um *simplex* bidimensional nos L -pseudocomponentes w'_i onde $w'_1 + w'_2 + w'_3 = 1$.

Quando duas ou mais proporções são limitadas superiormente, Crosier (1984) define o *U-pseudocomponentes* como (5.20).

$$u_i = \frac{U_i - w_i}{U - 1}, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (5.20)$$

onde,

$$U = \sum_{i=1}^q U_i > 1 \quad (5.21)$$

A região dos *U-pseudocomponentes*, u_i , recebe o nome de *U-simplex*, sendo $\sum_{i=1}^q u_i = 1$.

Por exemplo, considere um projeto de mistura com 3 componentes, e suponha que estes possuem as seguintes restrições,

$$w_1 \leq 0,70, \quad w_2 \leq 0,60, \quad w_3 \leq 0,80. \quad (5.22)$$

Então, a região *U-simplex* definido por (5.22) é a região triangular invertida mostrada na Figura 5.5. Observa-se que a região *U-pseudocomponentes* pode se estender para além dos limites do *simplex* original. Quando isto acontece, a região experimental de misturas é a região de intersecção entre a região do *U-pseudocomponentes* e o *simplex* original. Sendo assim, a condição para que o *U-simplex* esteja dentro do *Simplex* original é

$$\sum_{i=1}^q U_i - U_{min} \leq 1 \quad (5.23)$$

onde U_{min} é o mínimo entre os q limites superiores.

A dimensão do *U-simplex* é definido por (5.24).

$$R_U = \sum_{i=1}^q U_i - 1 \quad (5.24)$$

onde $0 < R_U \leq q - 1$.

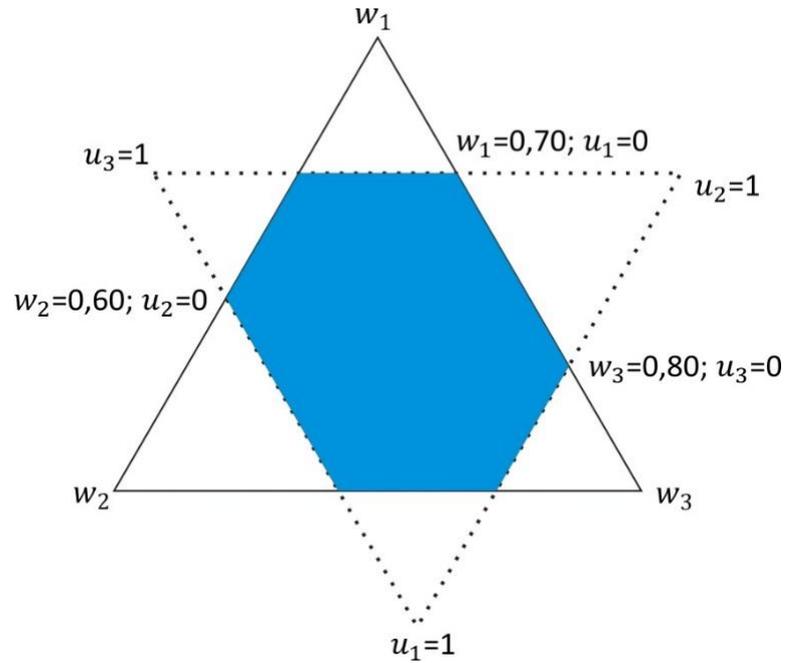


Figura 5.5: *U-pseudocomponentes simplex*.

Quando se coloca limite superior em algum ou em todos os w_i , cria-se limites inferiores implícitos, L_i^* para todos os w_i . Este limite inferior implícito é dado por (5.25).

$$L_i^* = U_i - R_U \quad (5.25)$$

Além disso, quando um vértice do *U-simplex* se encontra fora da região do *simplex* original, o limite inferior implícito para w_i , cujo vértice é $w_i = 1$ é oposto ao vértice do *U-simplex* e é negativo. Por exemplo, considere os limites superiores definidos em (5.22). Os limites inferiores implícitos para w_1, w_2 e w_3 são, respectivamente,

$$\begin{aligned} L_1^* &= 0,70 - 1,10 = -0,40 \\ L_2^* &= 0,60 - 1,10 = -0,50 \\ L_3^* &= 0,80 - 1,10 = -0,30 \end{aligned} \quad (5.26)$$

onde $R_U = (0,70 + 0,60 + 0,80) - 1 = 1,10$. Logo, como cada $L_i^* < 0$, sinaliza que os vértices da *U-simplex* se encontram fora da região *simplex* original.

Da mesma forma, limites superiores implícitos surgem para cada w_i . Estes limites, segundo Crosier (1984), são determinados por (5.27),

$$U_i^* = L_i + R_L \quad (5.27)$$

onde $R_L = 1 - \sum_{i=1}^q L_i$.

Estes limites implícitos são utilizados para determinar se os limites L_i e U_i são consistentes.

Considere como exemplo de um experimento de mistura tendo limite inferior e superior, o caso de uma mistura com 4 componentes. Seus limites estão definidos em (5.28).

$$\begin{aligned} 0,80 \leq w_1 \leq 0,90, & \quad 0,05 \leq w_2 \leq 0,15, \\ 0,02 \leq w_3 \leq 0,10, & \quad 0,03 \leq w_4 \leq 0,05. \end{aligned} \quad (5.28)$$

A região experimental com restrição nas proporções dos componentes dentro do *simplex* original está representada na Figura 5.6.

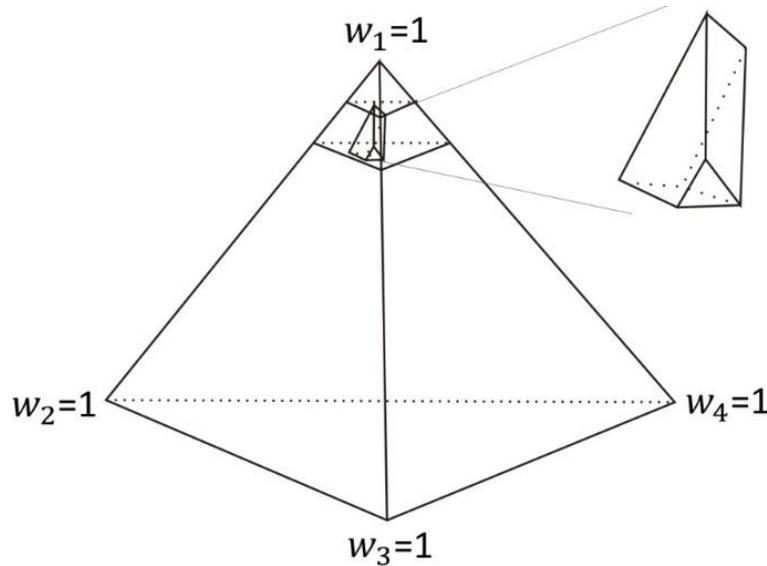


Figura 5.6: *Simplex* com pseudocomponentes dentro do *simplex* original.

Tendo a região do experimento definida, utiliza-se a Metodologia de Superfície de Resposta e o polinômio, conforme apresentado na seção 5.3.1. Tem-se, na equação (5.29), um modelo quadrático para um $\{3,2\}$ -*simplex* com restrição, sendo w'_i modelada por um U ou L -*pseudocomponentes*.

$$y = \beta_1 w'_1 + \beta_2 w'_2 + \beta_3 w'_3 + \beta_{12} w'_1 w'_2 + \beta_{13} w'_1 w'_3 + \beta_{23} w'_2 w'_3. \quad (5.29)$$

5.6 Otimização pelo MDE

Na otimização pelo MDE, o problema mais comum consiste em otimizar as variáveis de resposta do experimento. As variáveis de resposta (y_i) que se deseja otimizar, são dependentes das variáveis de entrada, w_i , as quais representam as proporções de cada componente da mistura. A relação entre y_i e w_i é obtida por meio da análise do experimento

de misturas e o objetivo da otimização consiste em maximizar e/ou minimizar cada variável de resposta y_i . A solução para esse problema não é trivial. Uma estratégia bastante eficiente para encontrar a solução para este problema é o Método *Desirability*, desenvolvido por Derringer e Suich (1980).

5.6.1 Método *Desirability*

Suponha que exista uma relação entre cada k variável de resposta e p variáveis independentes. Considerando y_i o valor esperado, a relação entre as variáveis são representadas pela equação (5.30).

$$\hat{y}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_p) \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (5.30)$$

A função *desirability* envolve a transformação de cada variável resposta estimada \hat{y}_i para um valor desejável individual, d_i , onde $0 \leq d_i \leq 1$. A *desirability* individual é combinada através da média geométrica simples, conforme (5.31), ou através da média geométrica ponderada dada pela equação (5.32). Estes pesos, z_i , revelam a importância de cada propriedade em relação às demais do processo de otimização multiobjetivo.

$$D = \left(\prod_{i=1}^k d_i \right)^{\frac{1}{k}} = (d_1 \times d_2 \times \dots \times d_k)^{\frac{1}{k}} \quad (5.31)$$

$$D = \left(\prod_{i=1}^k d_i^{w_i} \right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^k w_i}} = (d_1^{z_1} \times d_2^{z_2} \times \dots \times d_k^{z_k})^{\frac{1}{\sum_{i=1}^k z_i}} \quad (5.32)$$

onde k é o número de variáveis de resposta e o valor de D mede a *desirability* total, ou seja, a combinação das *desirability* individuais para cada nível de resposta e seu valor está no intervalo $[0, 1]$. Vale destacar que, se qualquer $d_i = 0$, ou seja, quando uma variável não consegue atingir o valor ótimo, a *desirability* geral é zero, isto é, $D = 0$, significando que não foram encontrados, simultaneamente, valores para w_1, \dots, w_p que otimizam y_1, \dots, y_k .

Suponha que, para cada resposta, se tenha interesse que o valor de y_i esteja no intervalo $A_i \leq y_i \leq C_i$, com $i = 1, 2, \dots, k$. Além disso, existe um ponto B_i entre A_i e C_i tal que a *desirability* aumenta entre A_i e B_i e diminui entre B_i e C_i . Pode-se definir o mínimo e o máximo valor para \hat{y}_i da variável resposta y_i , que são respectivamente A_i e C_i . Pela escolha dos parâmetros r e s , podem ser atribuídos vários níveis da *desirability* para os valores de \hat{y}_i , conforme Figura 5.7 (OLIVEIRA, 2009).

Observando a Figura 5.7, nota-se que, para grandes valores de r e s (~ 10), o valor estimado \hat{y}_i se aproxima de B_i e, que pequenos valores de r e s (~ 1), o valor de \hat{y}_i fica próximo de A_i e C_i . Isso é útil no caso em que se deseja que uma variável resposta, y_i , atinja algum alvo (*target*).

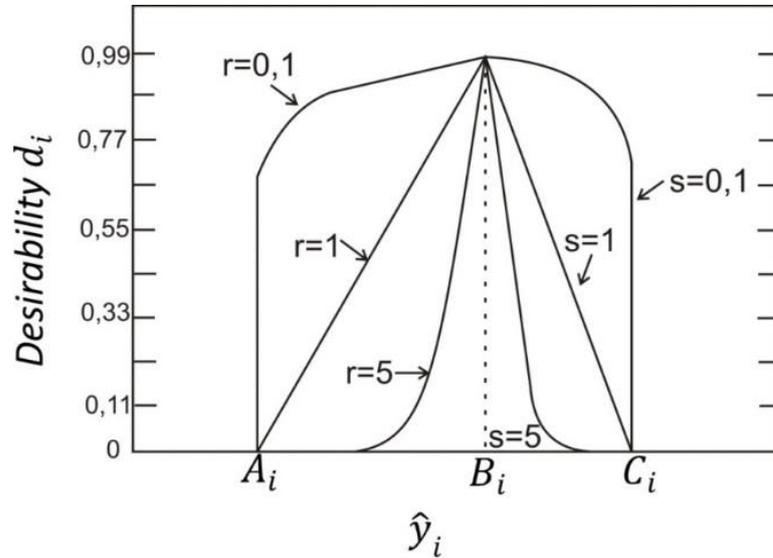


Figura 5.7: Definição do alvo para a *desirability* (CORNELL, 2002).

Com o intuito de se obter uma resposta no alvo (*target*), a função *desirability*, conforme definida por Derringer e Suich (1980), é calculada pela equação (5.33).

$$d[y] = \begin{cases} \left[\frac{(\hat{y}_i - A_i)}{(B_i - A_i)} \right]^r, & \text{se } A_i \leq \hat{y}_i \leq B_i \\ \left[\frac{(\hat{y}_i - C_i)}{(B_i - C_i)} \right]^s, & \text{se } B_i \leq \hat{y}_i \leq C_i \\ 0, & \text{se } \hat{y}_i < A_i \text{ ou } \hat{y}_i < C_i \end{cases} \quad (5.33)$$

No caso de minimizar uma variável resposta (y), utiliza-se as transformações de variáveis conforme a equação (5.34) e para maximizar uma variável resposta (y), utiliza-se a equação (5.35) (DERRINGER e SUICH, 1980).

$$d[y] = \begin{cases} 0 & \text{se } y > H_i \\ \left[\frac{(H_i - y)}{(H_i - T_i)} \right]^t & \text{se } L_i \leq y \leq T_i \\ 1 & \text{se } y < T_i \end{cases} \quad (5.34)$$

$$d[y] = \begin{cases} 0 & \text{se } y < L_i \\ \left[\frac{(y - L_i)}{(T_i - L_i)} \right]^t & \text{se } L_i \leq y \leq T_i \\ 1 & \text{se } y > T_i \end{cases} \quad (5.35)$$

Na Figura 5.8 tem-se a situação de maximização/minimização da variável resposta. Pode-se observar que, quando $\hat{y}_i \leq A_i$, a *desirability* assume um valor nulo, que é uma condição inaceitável para a variável resposta, e que quando $A_i < \hat{y}_i < C_i$, a *desirability* assume um valor entre zero e um, sendo dependente do valor de t que é ajustado.

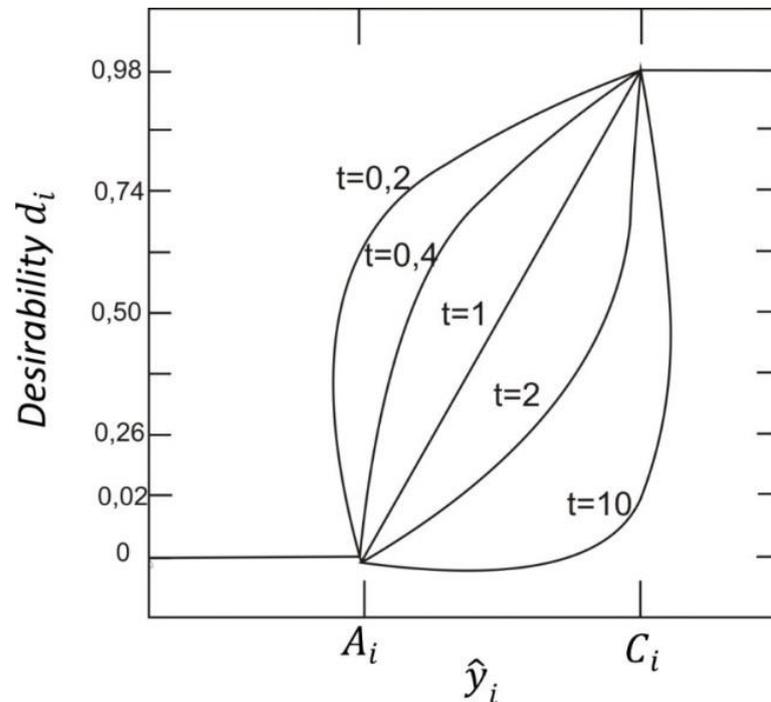


Figura 5.8: Definição da maximização e/ou minimização para a *desirability* (CORNELL, 2002).

Então, como para cada resposta faz necessária a escolha do peso e da importância, e estes variam de 0,1 a 10, dependendo de como se deseja enfatizar o alvo, na Figura 5.9 tem-se a variação da função *desirability* quando o objetivo é maximizar ou minimizar.

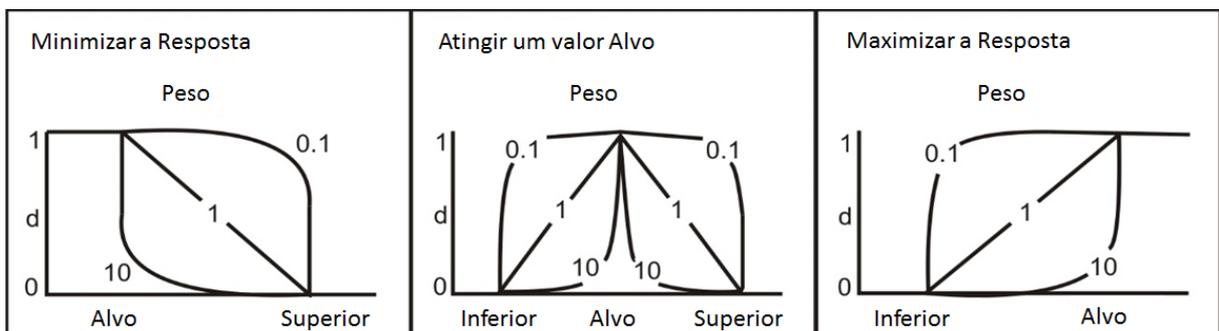


Figura 5.9: Determinação do peso e da importância na função *desirability*.

Assim, com a determinação da *desirability* total, o problema de otimização multivariado fica reduzido a um problema univariado, conforme a equação (5.36), baseada em Oliveira *et al.* (2011).

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} && D \\
 & \text{Sujeito a:} && d^{n+1}(y_i) \geq D, \quad i = 1, 2, \dots, k \\
 & && D \geq 0 \\
 & && w \in \Omega
 \end{aligned}
 \tag{5.36}$$

sendo $d^{n+1}(y_i)$ a função *desirability* de y_i na $(n + 1)^{th}$ iteração; D é o valor mínimo da *desirability* definido no início do modelo iterativo de minimização; $w \in \Omega$ denota toda a região definida no início do processo.

5.7 Réplicas em MDE

Em Projeto de Experimentos de Misturas, as réplicas são retiradas de ensaios experimentais idênticos, mas com características diferentes. Quando todo o projeto é replicado, o conjunto completo de pontos do projeto é duplicado. Assim, pode-se utilizar réplicas para se estimar a variância (erro experimental). O erro experimental serve como referência para determinar se as diferenças observadas nos dados são estatisticamente diferentes. Na Figura 5.10 tem-se um látice simplex de três componentes com três réplicas.

Projeto inicial	Uma repetição adicionada (total de duas repetições)	Duas repetições adicionadas (total de três repetições)																																																																																																												
<table border="1"> <thead> <tr><th>A</th><th>B</th><th>C</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1,00</td><td>0,00</td><td>0,00</td></tr> <tr><td>0,00</td><td>1,00</td><td>0,00</td></tr> <tr><td>0,00</td><td>0,00</td><td>1,00</td></tr> <tr><td>0,50</td><td>0,50</td><td>0,00</td></tr> <tr><td>0,50</td><td>0,00</td><td>0,50</td></tr> <tr><td>0,00</td><td>0,50</td><td>0,50</td></tr> <tr><td>0,33</td><td>0,33</td><td>0,33</td></tr> </tbody> </table>	A	B	C	1,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,50	0,50	0,00	0,50	0,00	0,50	0,00	0,50	0,50	0,33	0,33	0,33	<table border="1"> <thead> <tr><th>A</th><th>B</th><th>C</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1,00</td><td>0,00</td><td>0,00</td></tr> <tr><td>0,00</td><td>1,00</td><td>0,00</td></tr> <tr><td>0,00</td><td>0,00</td><td>1,00</td></tr> <tr><td>0,50</td><td>0,50</td><td>0,00</td></tr> <tr><td>0,50</td><td>0,00</td><td>0,50</td></tr> <tr><td>0,00</td><td>0,50</td><td>0,50</td></tr> <tr><td>0,33</td><td>0,33</td><td>0,33</td></tr> <tr><td>1,00</td><td>0,00</td><td>0,00</td></tr> <tr><td>0,00</td><td>1,00</td><td>0,00</td></tr> <tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr> <tr><td>0,33</td><td>0,33</td><td>0,33</td></tr> </tbody> </table>	A	B	C	1,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,50	0,50	0,00	0,50	0,00	0,50	0,00	0,50	0,50	0,33	0,33	0,33	1,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	⋮	⋮	⋮	0,33	0,33	0,33	<table border="1"> <thead> <tr><th>A</th><th>B</th><th>C</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1,00</td><td>0,00</td><td>0,00</td></tr> <tr><td>0,00</td><td>1,00</td><td>0,00</td></tr> <tr><td>0,00</td><td>0,00</td><td>1,00</td></tr> <tr><td>0,50</td><td>0,50</td><td>0,00</td></tr> <tr><td>0,50</td><td>0,00</td><td>0,50</td></tr> <tr><td>0,00</td><td>0,50</td><td>0,50</td></tr> <tr><td>0,33</td><td>0,33</td><td>0,33</td></tr> <tr><td>1,00</td><td>0,00</td><td>0,00</td></tr> <tr><td>0,00</td><td>1,00</td><td>0,00</td></tr> <tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr> <tr><td>0,33</td><td>0,33</td><td>0,33</td></tr> <tr><td>1,00</td><td>0,00</td><td>0,00</td></tr> <tr><td>0,00</td><td>1,00</td><td>0,00</td></tr> <tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr> <tr><td>0,33</td><td>0,33</td><td>0,33</td></tr> </tbody> </table>	A	B	C	1,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,50	0,50	0,00	0,50	0,00	0,50	0,00	0,50	0,50	0,33	0,33	0,33	1,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	⋮	⋮	⋮	0,33	0,33	0,33	1,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	⋮	⋮	⋮	0,33	0,33	0,33
A	B	C																																																																																																												
1,00	0,00	0,00																																																																																																												
0,00	1,00	0,00																																																																																																												
0,00	0,00	1,00																																																																																																												
0,50	0,50	0,00																																																																																																												
0,50	0,00	0,50																																																																																																												
0,00	0,50	0,50																																																																																																												
0,33	0,33	0,33																																																																																																												
A	B	C																																																																																																												
1,00	0,00	0,00																																																																																																												
0,00	1,00	0,00																																																																																																												
0,00	0,00	1,00																																																																																																												
0,50	0,50	0,00																																																																																																												
0,50	0,00	0,50																																																																																																												
0,00	0,50	0,50																																																																																																												
0,33	0,33	0,33																																																																																																												
1,00	0,00	0,00																																																																																																												
0,00	1,00	0,00																																																																																																												
⋮	⋮	⋮																																																																																																												
0,33	0,33	0,33																																																																																																												
A	B	C																																																																																																												
1,00	0,00	0,00																																																																																																												
0,00	1,00	0,00																																																																																																												
0,00	0,00	1,00																																																																																																												
0,50	0,50	0,00																																																																																																												
0,50	0,00	0,50																																																																																																												
0,00	0,50	0,50																																																																																																												
0,33	0,33	0,33																																																																																																												
1,00	0,00	0,00																																																																																																												
0,00	1,00	0,00																																																																																																												
⋮	⋮	⋮																																																																																																												
0,33	0,33	0,33																																																																																																												
1,00	0,00	0,00																																																																																																												
0,00	1,00	0,00																																																																																																												
⋮	⋮	⋮																																																																																																												
0,33	0,33	0,33																																																																																																												

Figura 5.10: Três réplicas em MDE.

Em modelos de previsão, com o uso de réplicas, aumenta a precisão do modelo, além de fornecer uma estimativa do erro em seu processo e permite estimativas mais precisas de seus efeitos.

Neste trabalho, utilizaremos os conceitos de Janelas Móveis definidas na Seção 3.3 para tratar das séries temporais, e de réplicas em MDE conforme definida neste capítulo na otimização de portfólio. No próximo capítulo será detalhado a metodologia proposta para esta otimização.

Capítulo 6

Otimização de portfólio por Projeto de Experimento de Mistura

Neste capítulo, serão apresentados testes de otimização de portfólio pelo Projeto de Experimento de Mistura, utilizando conceitos de janelas móveis e réplicas em MDE sem fazer previsões nas séries, e testes numéricos utilizando réplicas com previsões. O objetivo é detalhar o método proposto por este trabalho para otimizar portfólios, ou seja, encontrar portfólios eficiente. Com isso, pode-se validar a utilização da metodologia proposta.

No primeiro teste, serão geradas três séries temporais fracamente estacionárias. O portfólio ótimo será obtido sem a necessidade de se fazer previsões nas séries. Já no segundo teste, serão abordadas quatro séries temporais não estacionárias. Neste portfólio serão feito previsões de quatro passos à frente, utilizando modelo ARMA-GARCH. A validação destes testes será feita analisando o portfólio ótimo obtido com a fronteira de pareto. E, o último teste, será aplicado os dois métodos em séries não lineares, e uma comparação entre os métodos será feita.

6.1 Método MDE-JMR: otimização de portfólio pelo MDE com janelas móveis e réplicas sem fazer previsão

O primeiro método proposto por esta tese para obtenção de um portfólio ótimo é utilizar a otimização de Projeto de Experimento de Misturas por meio da função *desirability*, conforme apresentado no Capítulo 5. O ineditismo é utilizar janelas móveis e réplicas para tratar da volatilidade, sazonalidade e tendência nas séries que compõem o portfólio. Uma vantagem é não necessitar de previsões. Vale destacar que cada réplica em MDE equivale a uma Janela Móvel.

A seguir serão apresentadas as etapas do método MDE-JMR.

6.1.1 Etapas da otimização de portfólio pelo método MDE-JMR

1. Determinando as Janelas Móveis e as Réplicas

1.1 Escolher os ativos que irão compor o portfólio.

1.2 Determinar o tamanho das janelas móveis e o número de réplicas.

- 1.2.1 Calcular os lags significativos de cada série, assim tem-se o tamanho do passo da janela móvel.
- 1.2.2 Determinar a ACF de cada série que compõe o portfólio e, o tamanho do passo da janela é dado pelo ACF significativo.
- 1.2.3 Ajustar o tamanho da janela para que o número de réplica seja o mesmo para todas as séries do portfólio.
- 1.3 Calcular, para cada réplica, a média (μ) e o risco (σ).
- 2. Otimização do portfólio**
- 2.1 Escolher um projeto mistura específico (*extreme vertices*, *simplex lattice* ou *simplex centroid*) de acordo com o número de componentes e definir se as proporções adotadas devem ser limitadas ou não.
- 2.2 Calcular os valores para o portfólio, referente aos valores calculados para cada réplica: o retorno, $E(\mu_c)$, o risco, $\sigma^2(\mu_c)$, e a entropia, Ent .
- 2.3 Ajustar os modelos adequados para o MDE, analisando estatisticamente e procurando o melhor R_{adj}^2 .
- 2.4 Escolher os valores desejados para T_i , H_i e L_i , estabelecendo valores para peso e importância.
- 2.5 Aplicar a função *desirability* para maximizar o retorno e a entropia e minimizar o risco.
- 2.6 Adquirir uma solução viável.

A Figura 6.1 apresenta o resumo do fluxograma do método proposto.

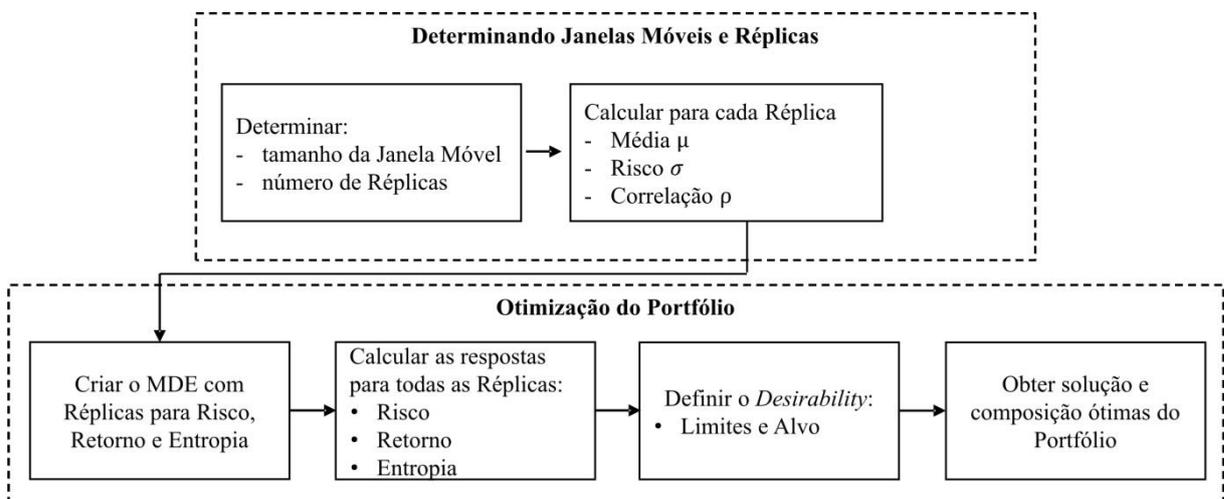


Figura 6.1: Método de otimização de portfólio pelo método MDE-JMR.

6.2 Método MDE-R: otimização de portfólio pelo MDE com réplicas

O segundo método proposto por este trabalho é obter um portfólio ótimo utilizando um MDE com réplicas computacionais e a função *desirability*, onde em cada réplica utiliza-se as previsões das séries. A vantagem em se utilizar o método proposto é que as réplicas melhoram a precisão do modelo, dando maior segurança na tomada de decisão.

A seguir serão apresentadas as etapas do método MDE-R.

6.2.1 Etapas da otimização de portfólio pelo método MDE-R

1. Preparando as séries temporais e fazendo previsões

- 1.1 Escolher os ativos que irão compor o portfólio.
- 1.2 Tratar a tendência, sazonalidade e volatilidade das séries temporais, caso existam.
- 1.3 Escolher o melhor modelo ARMA-GARCH para fazer previsões nas séries, utilizando o teste AIC.
- 1.4 Para cada série prever a média (μ) e o risco (σ), determinando o número de réplicas.
- 1.5 Calcular as correlações σ_{ij} para cada réplica.

2. Otimização do portfólio

- 2.1 Escolher um projeto mistura específico (*extreme vertices*, *simplex lattice* ou *simplex centroid*) de acordo com o número de componentes e definir se as proporções adotadas devem ser limitadas ou não.
- 2.2 Calcular os valores para o portfólio, referente aos valores calculados para cada réplica: o retorno, $E(\mu_c)$, o risco, $\sigma^2(\mu_c)$, e a entropia, Ent .
- 2.3 Ajustar os modelos adequados para o MDE, analisando estatisticamente e procurando o melhor R_{adj}^2 .
- 2.4 Escolher os valores desejados para T_i , H_i e L_i , estabelecendo valores para peso e importância.
- 2.5 Aplicar a função *desirability* para maximizar o retorno e a entropia e minimizar o risco.
- 2.6 Adquirir uma solução viável.

A Figura 6.2 apresenta o resumo do fluxograma do método proposto.

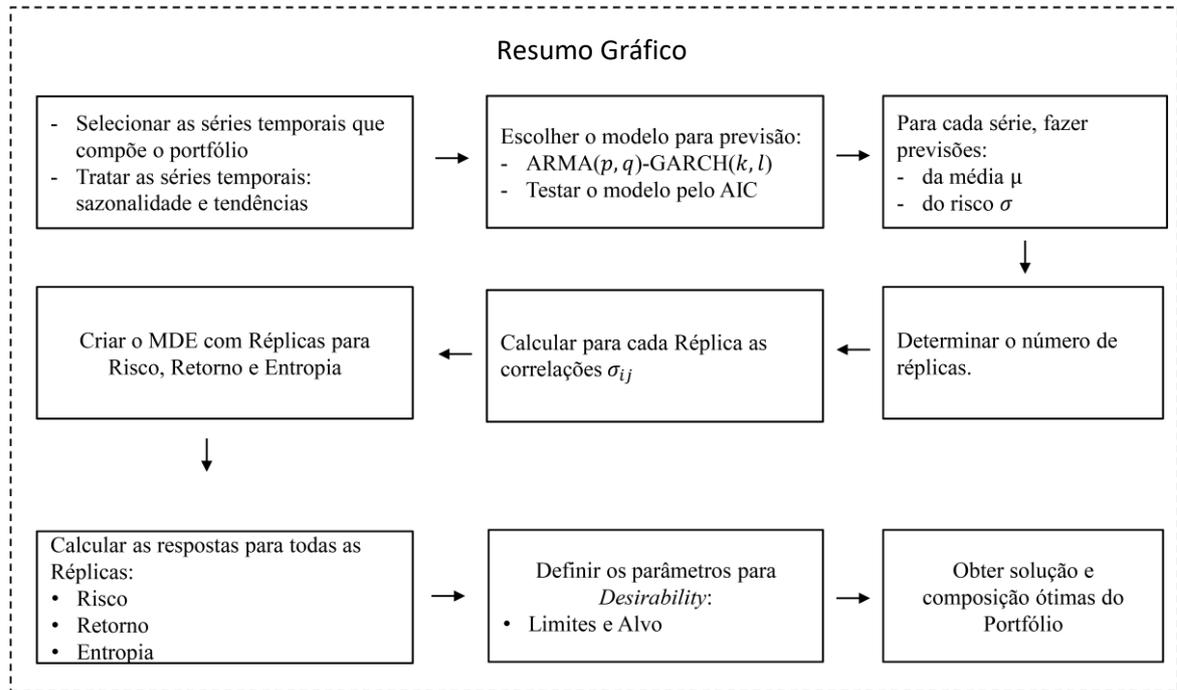


Figura 6.2: Método de otimização de portfólio pelo método MDE-R.

6.3 Testes dos métodos

6.3.1 Teste 1

O primeiro teste será utilizando o método MDE-JMR e será aplicado em um portfólio formado por três séries temporais fracamente estacionárias. Estas séries foram geradas aleatoriamente e sua representação gráfica estão apresentadas na Figura 6.3, Figura 6.4 e Figura 6.5.

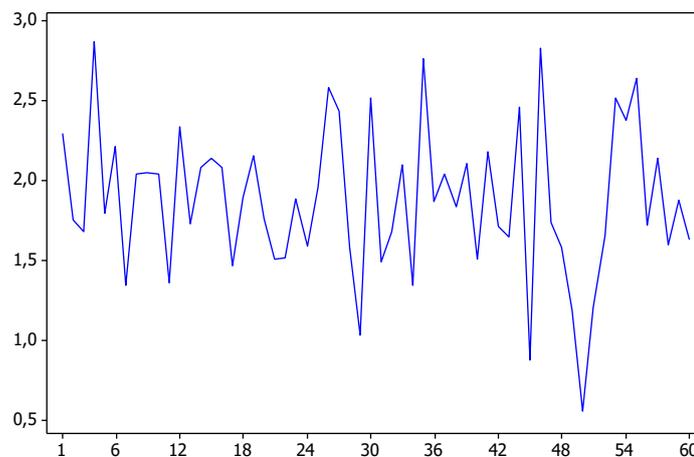


Figura 6.3: Séries temporais estacionárias geradas aleatoriamente – Série A.

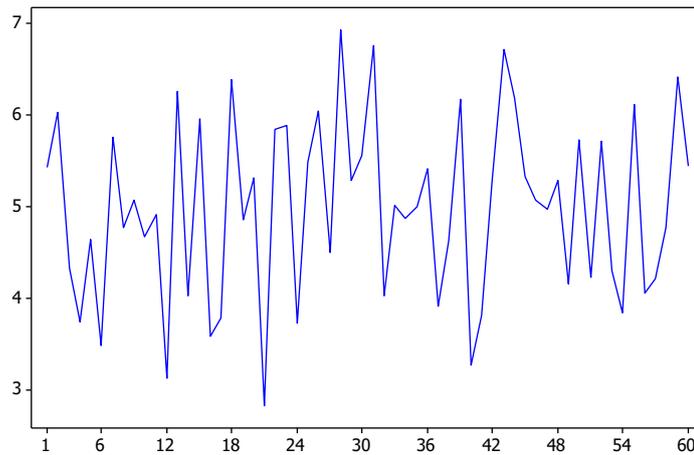


Figura 6.4: Séries temporais estacionárias geradas aleatoriamente – Série B.

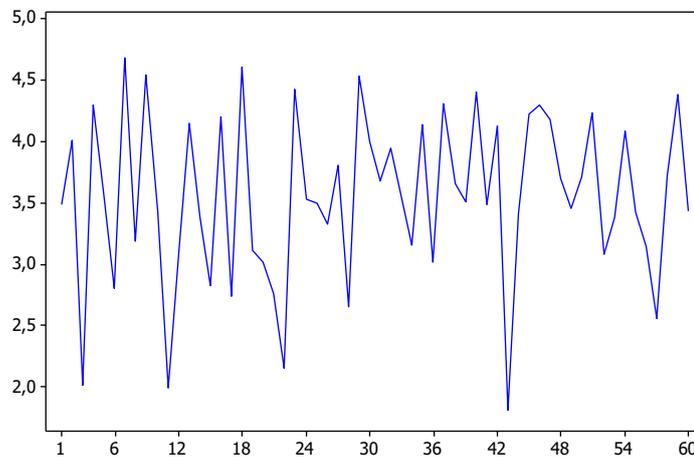


Figura 6.5: Séries temporais estacionárias geradas aleatoriamente – Série C.

- Determinando o tamanho das janelas móveis e o número de réplicas

O segundo passo é determinar o tamanho das janelas móveis e o número de réplicas. Para isso, calcula-se a ACF para cada série. Estão apresentadas na Figura 6.6, Figura 6.7 e Figura 6.8 a ACF da série A, série B e série C, respectivamente.

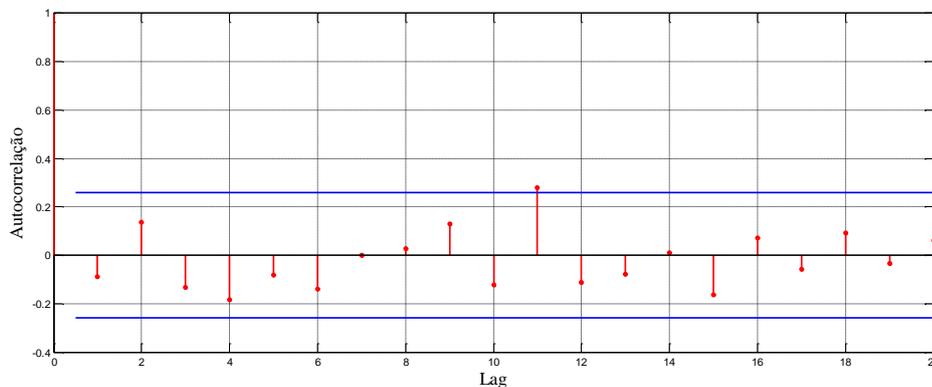


Figura 6.6: Função de autocorrelação (ACF) da Série A.

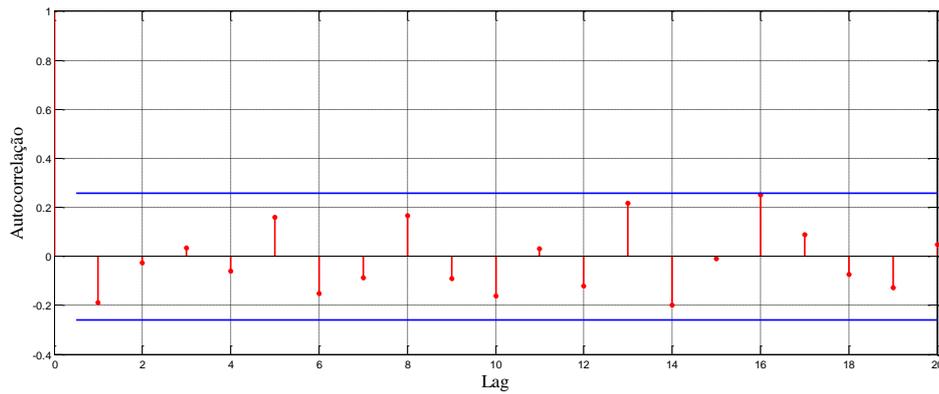


Figura 6.7: Função de autocorrelação (ACF) da Série B.

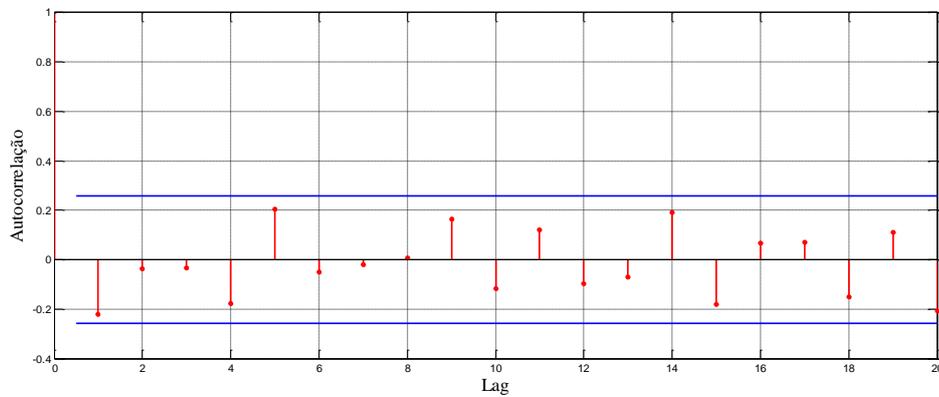


Figura 6.8: Função de autocorrelação (ACF) da Série C.

As três séries têm 60 dados, logo o tamanho da janela móvel, conforme Equação (3.9) é $L = \frac{60}{4} = 15$. O tamanho do passo da janela será igual a 15, visto que não há autocorrelação significativa nas três séries. Portanto, com 4 Janelas Móveis percorre-se toda a série, logo tem-se 4 réplicas, uma para cada Janela.

- Otimização do portfólio

O MDE que será utilizado para a otimização do portfólio é o *extreme vertices*, de grau dois, um ponto central, além de 4 réplicas. Os limites para as proporções são,

$$\begin{aligned} 0,0001 &\leq w_1 \leq 0,9998, \\ 0,0001 &\leq w_2 \leq 0,9998, \\ 0,0001 &\leq w_3 \leq 0,9998. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Na Tabela 6.1, apresenta-se o MDE *extreme vértices* com 3 componentes, w_a, w_b e w_c , e 4 réplicas. O retorno, o risco e a entropia do portfólio para cada réplica também é calculado, conforme Equação (4.2), Equação (4.8) e Equação (4.25), respectivamente.

Tabela 6.1: MDE com 3 componentes e 4 réplicas no Minitab.

	w_a	w_b	w_c	Retorno	Risco	Entropia
Replica 1	0,0001	0,0001	0,9998	3,4342	0,4553	0,0020
	0,9998	0,0001	0,0001	1,9859	0,0239	0,0020
	0,0001	0,9998	0,0001	4,8172	0,8493	0,0020
	0,0001	0,5000	0,5000	4,1257	0,4897	0,6941
	0,5000	0,0001	0,5000	2,7101	0,1940	0,6941
	0,5000	0,5000	0,0001	3,4015	-0,0357	0,6941
	0,3333	0,3333	0,3333	3,4124	0,1404	1,0986
	0,1667	0,1667	0,6666	3,4233	0,3040	0,8677
	0,6666	0,1667	0,1667	2,6992	-0,0149	0,8677
	0,1667	0,6666	0,1667	4,1148	0,3588	0,8677
Replica 2	0,0001	0,0001	0,9998	3,4922	0,4553	0,0020
	0,9998	0,0001	0,0001	1,8688	0,0239	0,0020
	0,0001	0,9998	0,0001	5,0701	0,8492	0,0020
	0,0001	0,5000	0,5000	4,2811	0,4420	0,6941
	0,5000	0,0001	0,5000	2,6805	0,2013	0,6941
	0,5000	0,5000	0,0001	3,4695	-0,0646	0,6941
	0,3333	0,3333	0,3333	3,4770	0,1096	1,0986
	0,1667	0,1667	0,6666	3,4846	0,2829	0,8677
	0,6666	0,1667	0,1667	2,6729	-0,0298	0,8677
	0,1667	0,6666	0,1667	4,2736	0,3256	0,8677
Replica 3	0,0001	0,0001	0,9998	3,6296	0,4553	0,0020
	0,9998	0,0001	0,0001	1,8444	0,0239	0,0020
	0,0001	0,9998	0,0001	5,0975	0,8493	0,0020
	0,0001	0,5000	0,5000	4,3635	0,4369	0,6941
	0,5000	0,0001	0,5000	2,7370	0,2447	0,6941
	0,5000	0,5000	0,0001	3,4710	-0,0001	0,6941
	0,3333	0,3333	0,3333	3,5238	0,1553	1,0986
	0,1667	0,1667	0,6666	3,5767	0,3071	0,8677
	0,6666	0,1667	0,1667	2,6841	0,0176	0,8677
	0,1667	0,6666	0,1667	4,3107	0,3568	0,8677
Replica 4	0,0001	0,0001	0,9998	3,6549	0,4553	0,0020
	0,9998	0,0001	0,0001	1,8202	0,0239	0,0020
	0,0001	0,9998	0,0001	4,9594	0,8493	0,0020
	0,0001	0,5000	0,5000	4,3072	0,4957	0,6941
	0,5000	0,0001	0,5000	2,7376	0,1997	0,6941
	0,5000	0,5000	0,0001	3,3898	0,0030	0,6941
	0,3333	0,3333	0,3333	3,4782	0,1628	1,0986
	0,1667	0,1667	0,6666	3,5666	0,3135	0,8677
	0,6666	0,1667	0,1667	2,6492	0,0055	0,8677
	0,1667	0,6666	0,1667	4,2188	0,3793	0,8677

- Ajustando os modelos

Após analisar os modelos, o melhor que se enquadra no processo é o modelo quadrático, conforme pode ser observado na Figura 6.9 cujo resultado foi obtido no software Minitab.

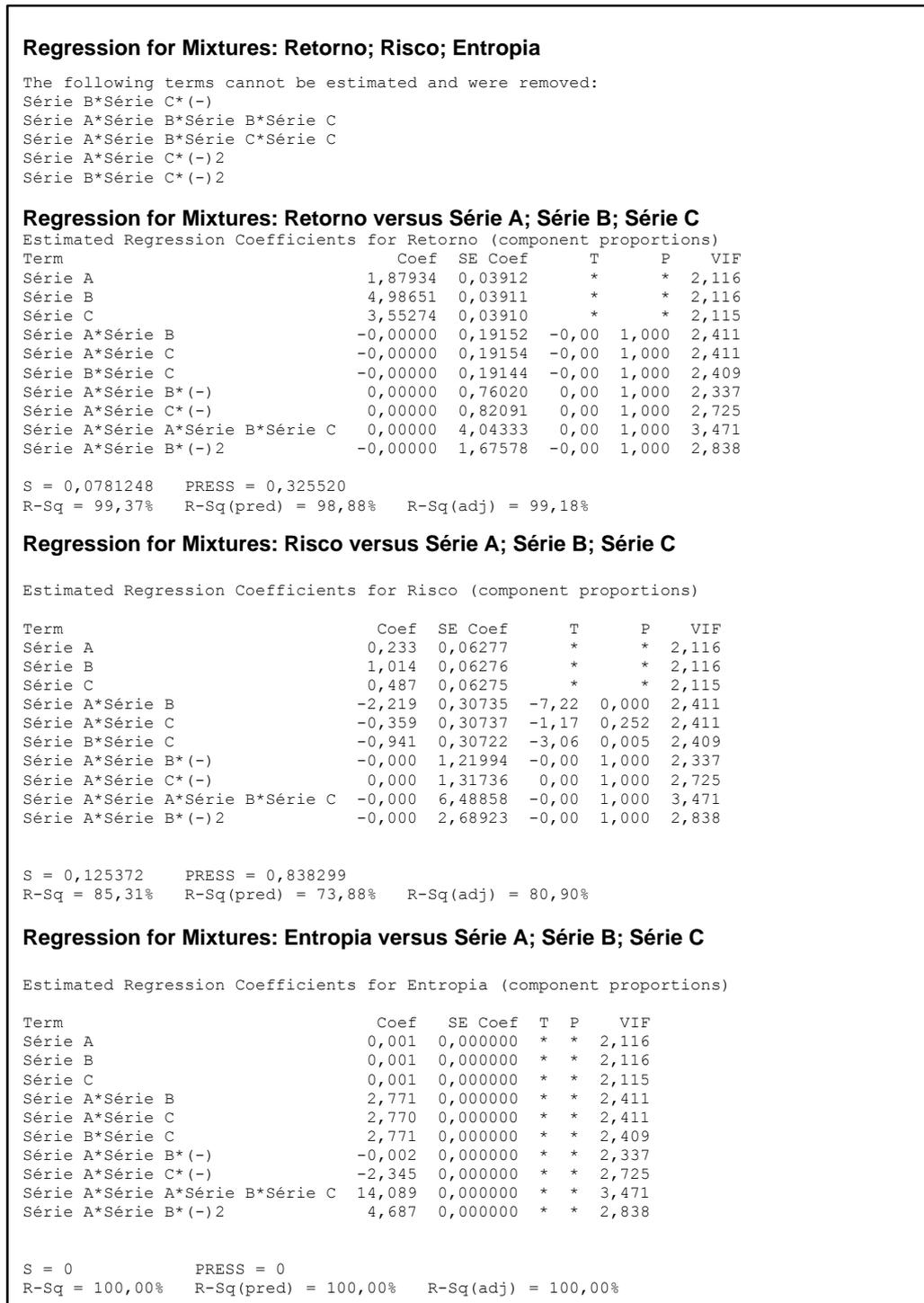


Figura 6.9: Ajuste do modelo para o MDE.

- Determinando os valores para alvo (T_i), limite superior (H_i) e limite inferior (L_i).

O próximo passo é determinar os limites H_i e L_i , e o alvo T_i . Como estratégia para se determinar os valores para T_i , H_i e L_i , pode-se utilizar alguns valores estatísticos, como a média, valor máximo, valor mínimo, primeiro quartil e terceiro quartil. Na Tabela 6.2 tem-se os valores estatísticos para o Retorno, o Risco e a Entropia.

Tabela 6.2: Sumário estatístico do Retorno, do Risco e da Entropia.

	Média	Mínimo	Q1	Q3	Máximo
Retorno	3,47286	1,82018	2,7302552	4,1955195	5,09750
Risco	0,36291	0,01504	0,1803206	0,4949334	1,35168
Entropia	0,57901	0,00204	0,002042	0,8677018	1,09861

Assim, como se deseja maximizar o Retorno e a Entropia e minimizar o Risco, pode-se escolher os seguintes valores para T_i , H_i e L_i .

Tabela 6.3: Valores para a função *desirability*.

	Retorno	Risco	Entropia
T_i	5,09750	0,01504	1,09861
H_i		0,36291	
L_i	3,47286		0,57901

- Aplicando a função *desirability* para maximizar o Retorno e a Entropia e minimizar o Risco.

Para aplicar a função *desirability* é necessário definir o peso e a importância para Retorno, Risco e Entropia. Será utilizado, para o peso o valor de 0,1 e para a importância, o valor de 1. Estes valores foram escolhidos aleatoriamente. Pode-se utilizar o trabalho de Mendes *et al.* (2015) para obter estes valores de maneira mais eficiente.

Sendo assim, o portfólio ótimo obtido, conforme apresentado na Figura 6.10, está descrito na Tabela 6.4.

Tabela 6.4: Portfólio ótimo.

w_a	w_b	w_c	Retorno	Risco	Entropia	<i>Desirability</i> Total
32,12%	53,73%	14,15%	3,7876	0,1482	0,9451	0,9057

Na Tabela 6.5 tem-se o resumo dos valores utilizados na otimização da função *desirability* para obter o portfólio ótimo pelo MDE.

Tabela 6.5: Resumo da função *desirability*.

Parâmetros	Objetivo	Limites			Previsão			
		Inferior	Alvo	Superior	Peso	Import.	Resposta	<i>Desirability</i>
Risco	Minimizar	-	-0,06463	0,27737	0,1	1	0,1482	0,90724
Retorno	Maximizar	3,47286	5,09750	-	0,1	1	3,7856	0,84808
Entropia	Maximizar	0,57901	1,09861	-	0,1	1	0,9451	0,96558
<i>Desirability</i> Total:								0,9057

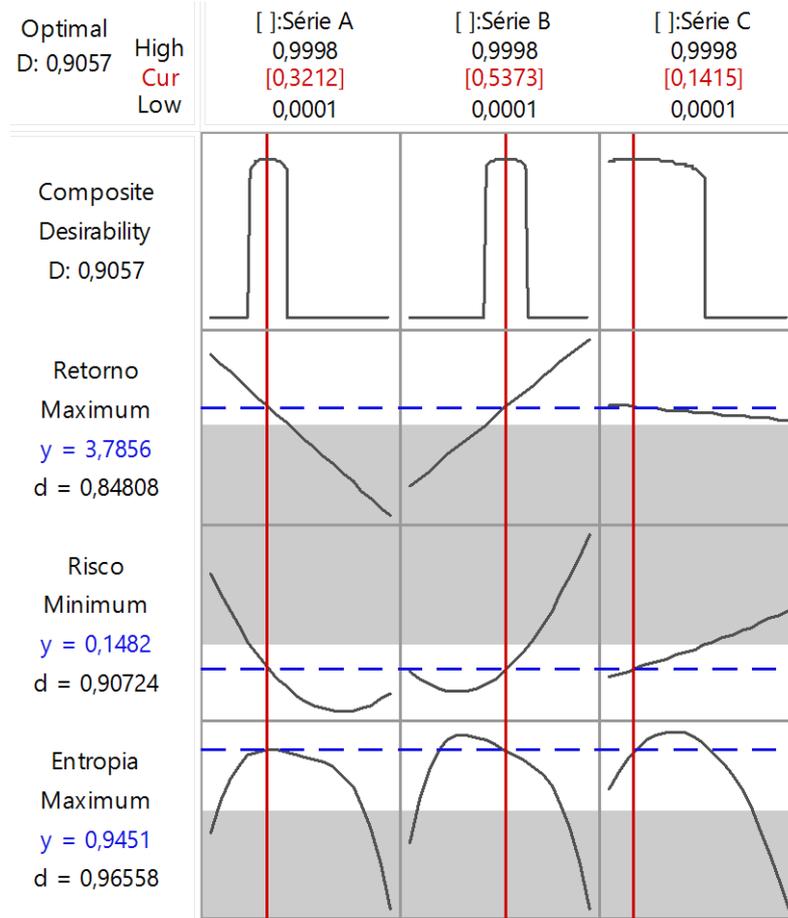


Figura 6.10: Portfólio ótimo obtido pelo método MDE-JMR.

Observe que, para o peso e a importância foram escolhidos valores aleatórios. Estes valores podem ser obtidos de forma calculada, utilizando a proposta apresentada por Mendes (2012).

Comparando o portfólio obtido, Tabela 6.4, com a fronteira de pareto construída a partir do MVP, conforme Equação (4.12), tem-se o resultado apresentado na Figura 6.11.

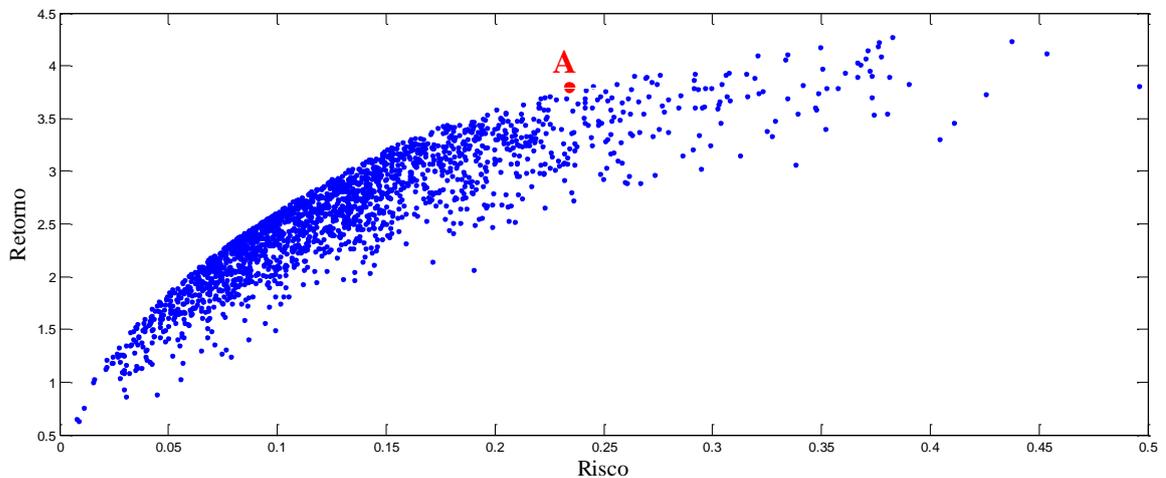


Figura 6.11: Fronteira de pareto.

Pode-se observar que o portfólio ótimo obtido (ponto A) está na região não dominada, ou seja, pertence ao conjunto das melhores combinações para o portfólio. Assim, o método MDE-JMR, otimização de portfólio pelo MDE com janelas móveis e réplicas em MDE sem fazer previsão nas séries, é válida para portfólios compostos por séries temporais fracamente estacionárias.

Quando as séries temporais que compõe o portfólio não são estacionárias, aplica-se a transformação das séries utilizando a diferenciação conforme descrito no Capítulo 3. No Teste 2 será abordado a otimização de um portfólio formado por séries temporais não estacionárias e o método MDE-JMR.

6.3.2 Teste 2

Considere um portfólio formado por três séries temporais. As séries estão apresentadas na Figura 6.12.

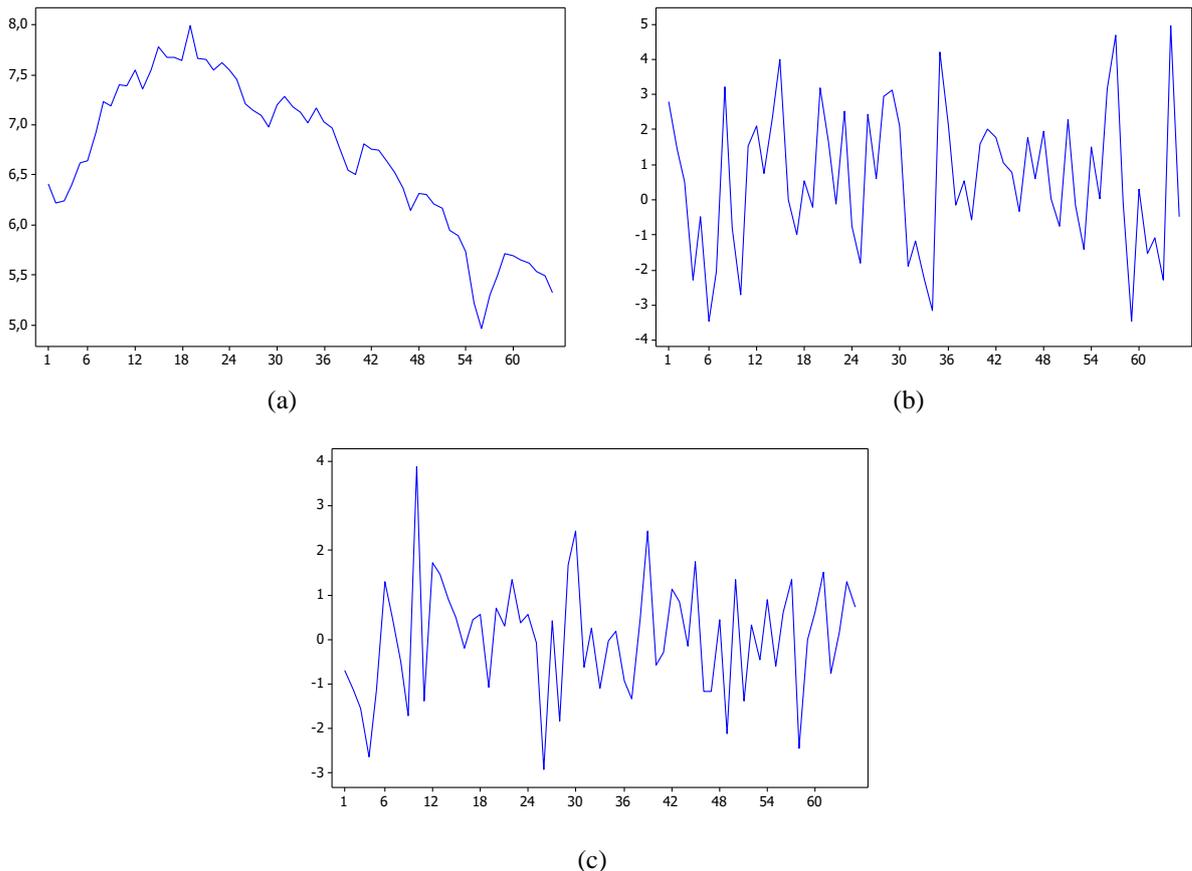


Figura 6.12: (a) Representação gráfica da série A; (b) Representação gráfica da série B; (c) Representação gráfica da série C.

Pode-se observar que a série A não é estacionária e as séries B e C são fracamente estacionárias. Aplicando uma diferenciação na série A, conforme a Equação (3.18), resulta-se na série A transformada, apresentadas na Figura 6.13.

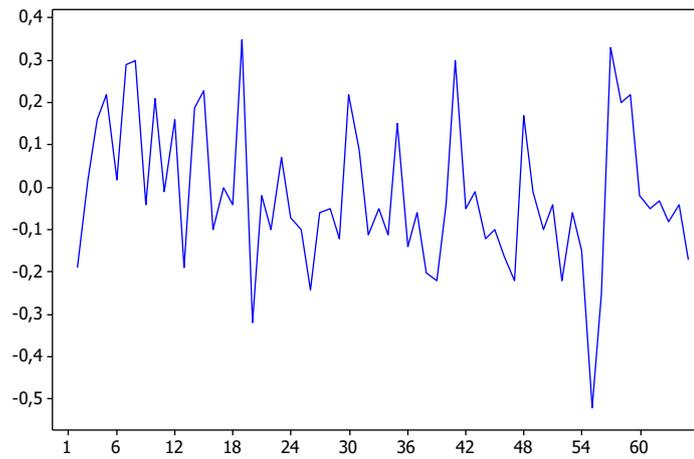


Figura 6.13: Série A transformada por 1 diferenciação.

As autocorrelações das séries estão apresentadas na, Figura 6.14, Figura 6.15 e Figura 6.16.

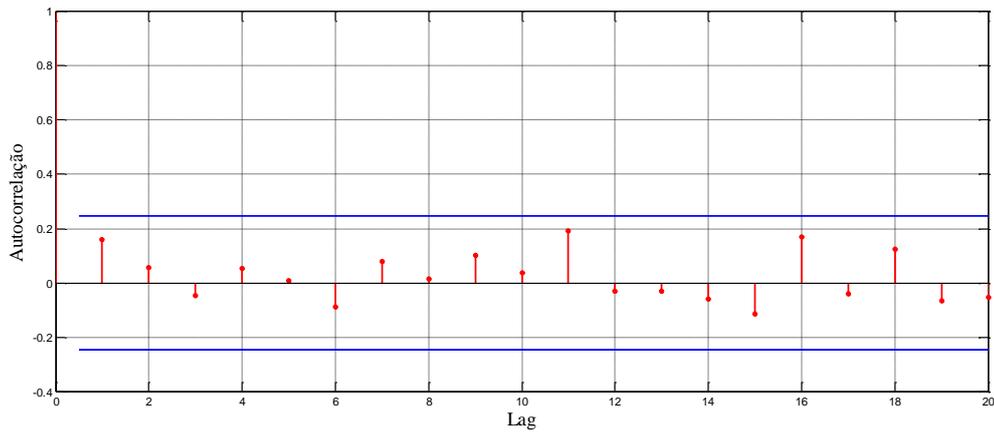


Figura 6.14: Autocorrelação da série transformada A.

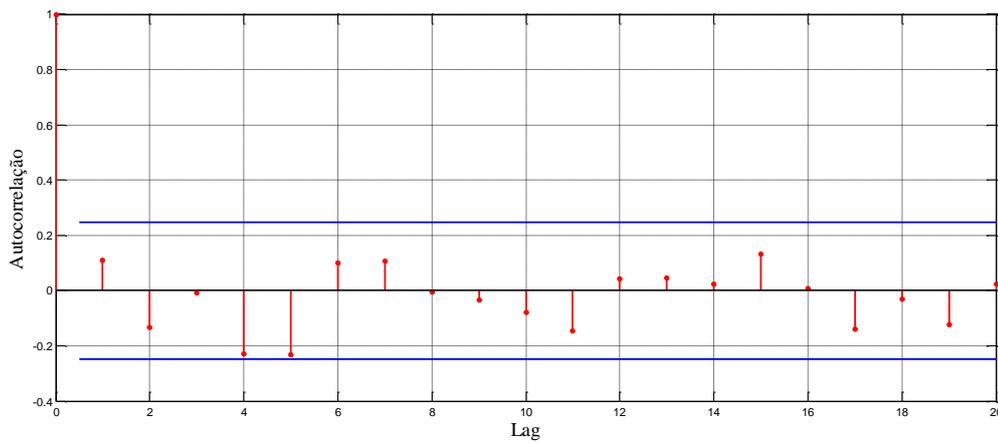


Figura 6.15: Autocorrelação da série B.

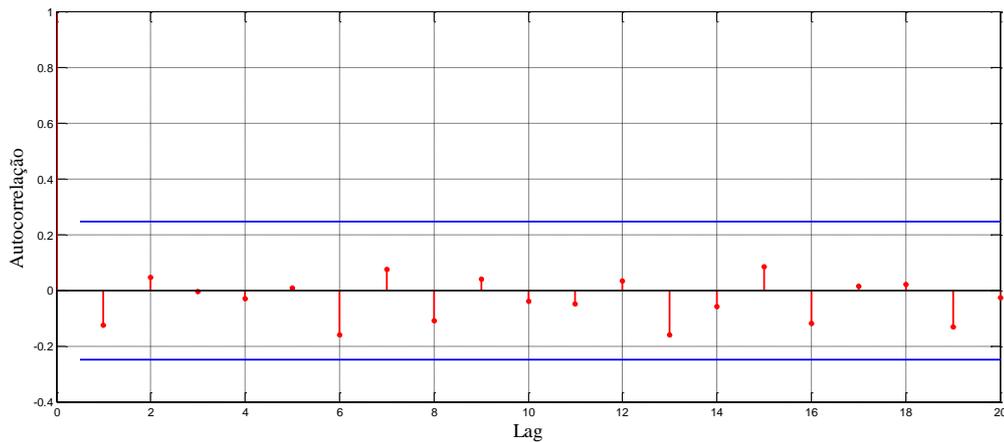


Figura 6.16: Autocorrelação da série C.

Agora, após a transformação na série A, todas as séries que compõe o portfólio são fracamente estacionárias, além de não possuir autocorrelação significativa. Aplicando o MDE-JMR para otimização do portfólio, tem-se que:

As três séries têm 65 dados, logo o tamanho da janela móvel, conforme Equação (3.9), é $L = \frac{65}{4} = 16,25 \cong 17$.

O tamanho do passo da janela será igual a 17, visto que as séries não apresentam autocorrelação significativa. Portanto, tem-se 4 réplicas.

Os valores utilizados na otimização da função *desirability* para obtenção do portfólio ótimo pelo MDE são apresentados na Tabela 6.6.

Tabela 6.6: Resumo da função *desirability*.

Parâmetros	Objetivo	Limites			Previsão			
		Inferior	Alvo	Superior	Peso	Import.	Resposta	<i>Desirability</i>
Variância	Minimizar	-	0,02166	1,28903	0,1	1	0,91306	0,885575
Média	Maximizar	0,20656	0,76686	-	0,1	1	0,26562	0,798526
Entropia	Maximizar	0,57901	1,09861	-	0,1	1	1,089991	0,998313
<i>Desirability</i> Total:								0,89042

Na Figura 6.17 tem-se o portfólio ótimo obtido pelo MDE-JMR e na Figura 6.18 a comparação da combinação ótima obtida pelo MDE-JMR e a fronteira de pareto.

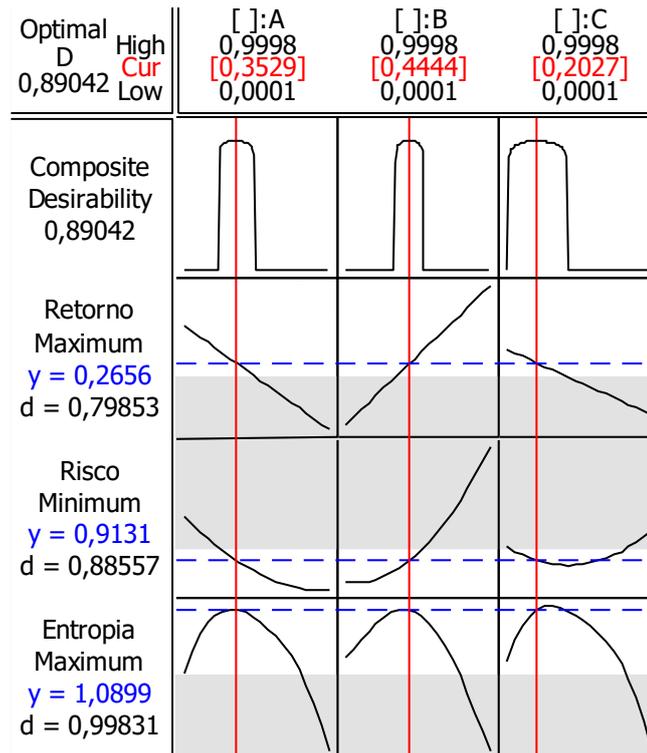


Figura 6.17: Portfólio ótimo obtido pela método MDE-JMR.

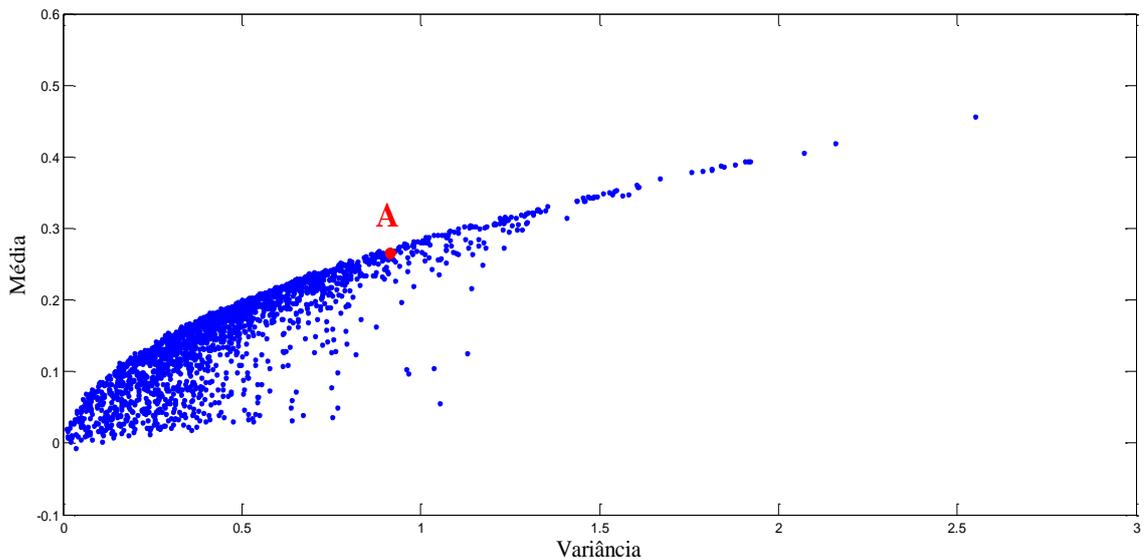


Figura 6.18: Fronteira de pareto.

Para ilustrar e validar o segundo método, serão apresentados dois testes, conforme segue.

6.3.3 Teste 3

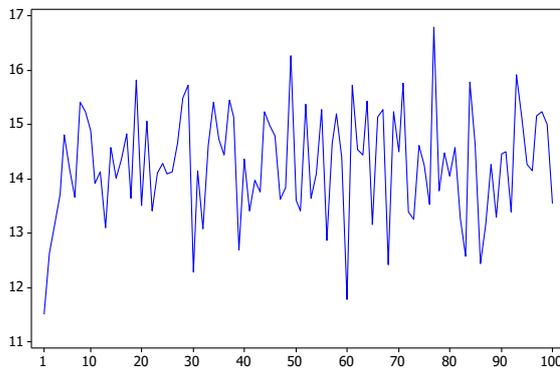
Neste teste, um portfólio ótimo será obtido utilizando o método MDE-R. O primeiro passo é escolher as séries temporais que irão compor o portfólio. Para isso, considere 4 séries temporais geradas a partir das seguintes funções:

$$\begin{aligned}
 \text{Série 1: } y_t &= 10 + 0,3y_{t-1} + \varepsilon_t - 0,7\varepsilon_{t-1} \\
 \text{Série 2: } y_t &= 0,6 + 0,38y_{t-1} + 0,17y_{t-2} + \varepsilon_t + 0,08\varepsilon_{t-1} \\
 \text{Série 3: } y_t &= 18 - 0,8y_{t-1} + \varepsilon_t + 0,8\varepsilon_{t-1} \\
 \text{Série 4: } y_t &= 0,6 + 0,26y_{t-1} + 0,37y_{t-2} + \varepsilon_t + 0,8\varepsilon_{t-1}
 \end{aligned}
 \tag{6.2}$$

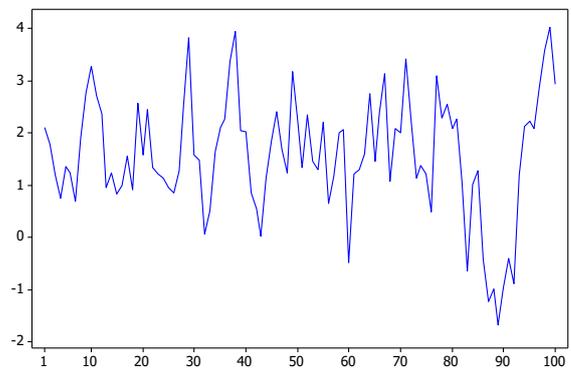
Estas funções foram geradas aleatoriamente. Na Figura 6.19 está a representação gráfica destas séries. Estas séries não apresentam tendência e nem sazonalidade, portanto pode-se seguir para a escolha dos modelos que melhor descreve cada série. Os modelos escolhidos para as séries estão apresentados na Tabela 6.7, estes foram escolhidos por apresentarem o melhor AIC, conforme seção 3.2.12.

Tabela 6.7: Modelos das séries temporais e AIC.

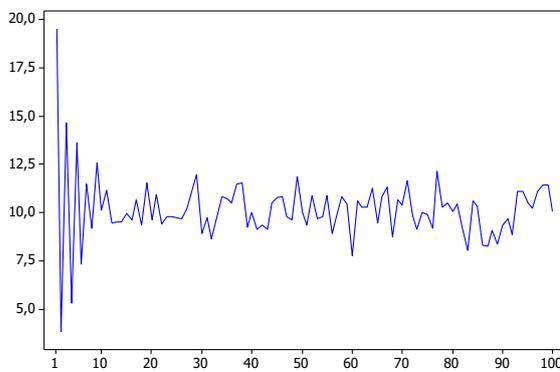
	Série 1	Série 2	Série 3	Série 4
Modelo	ARMA(1,1)	ARMA(1,0)-GARCH(1,1)	ARMA(1,1)-GARCH(0,1)	ARMA(1,1)-GARCH(1,1)
AIC	287,19	270,906	338,46	275,778



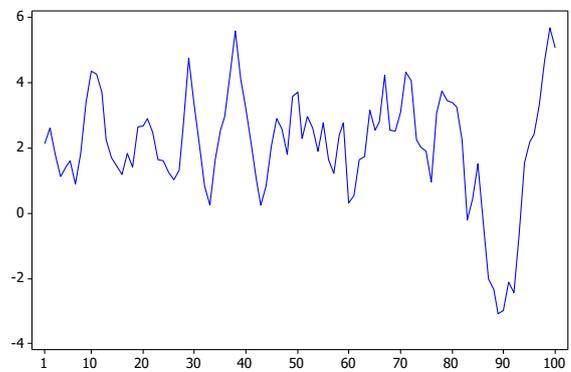
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 6.19: (a) Representação gráfica da série 1; (b) Representação gráfica da série 2; (c) Representação gráfica da série 3; (d) Representação gráfica da série 4.

Utiliza-se o modelo escolhido para se fazer previsões nas séries temporais. Neste teste, fez-se a previsão do retorno e do risco de 5 *steps* à frente, utilizando o software Matlab. Na Tabela 6.8 e Tabela 6.9, estão os valores dessas previsões.

Tabela 6.8: Previsão para o retorno de cada série.

	Série 1	Série 2	Série 3	Série 4
Step	14,97254	2,4129	10,2307	3,9383
1	14,78319	2,0938	10,0975	3,2420
2	14,64562	1,8995	10,2125	2,8119
3	14,54567	1,7813	10,1132	2,5463
4	14,47306	1,7093	10,1989	2,3823
5	14,97254	2,4129	10,2307	3,9383

Tabela 6.9: Previsão para o risco de cada série.

	Série 1	Série 2	Série 3	Série 4
Step	0,969704	0,9959	0,8444	1,0523
1	0,980197	0,9969	1,1942	1,0541
2	0,985691	0,9979	1,4626	1,0559
3	0,988578	0,9989	1,6889	1,0577
4	0,990099	0,9999	1,8882	1,0595
5	0,969704	0,9959	0,8444	1,0523

O próximo passo é definir o número de réplicas. Como foi feito a previsão de 5 *steps*, utiliza-se 5 réplicas, uma para cada *step* previsto. Com as réplicas definidas e com as correlações calculadas, passa-se para a otimização do portfólio utilizando MDE.

- Otimização do portfólio

O MDE que será utilizado para a otimização do portfólio é o *extreme vertices*, de grau dois, um ponto central, além das 5 réplicas. Vale destacar que, como usou-se o índice de entropia para diversificar o portfólio, as proporções precisam ser maiores que zero, pois caso contrário a Entropia não teria solução. Sendo assim, os limites para as proporções são,

$$\begin{aligned}
 0,0001 &\leq w_1 \leq 0,9997, \\
 0,0001 &\leq w_2 \leq 0,9997, \\
 0,0001 &\leq w_3 \leq 0,9997, \\
 0,0001 &\leq w_4 \leq 0,9997.
 \end{aligned}
 \tag{6.3}$$

Adicionou-se pontos dentro do espaço de projeto (pontos axiais). Estes pontos no interior da superfície de resposta fornecem informações que melhoram o resultado

(CORNELL, 2002). Assim, escolheu-se um ponto axial. Na Figura 6.20 apresenta-se a MDE que foi construído.

Na Tabela 6.10, tem-se o MDE *extreme vértices* com 4 componentes, w_1, w_2, w_3 e w_4 , e 5 réplicas. O retorno, o risco e a entropia do portfólio para cada réplica também é calculado, conforme Equação (4.2), Equação (4.8) e Equação (4.25), respectivamente.

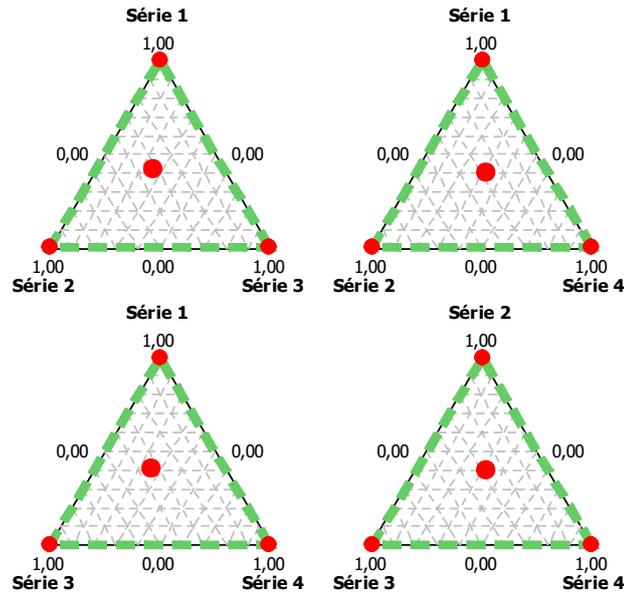


Figura 6.20: Arranjo de mistura para 4 séries temporais.

Tabela 6.10: MDE com 4 componentes e 5 réplicas no Minitab.

	w_1	w_2	w_3	w_4	μ_c	σ^2	Ent
Réplica 1	0,0001	0,0001	0,0001	0,9997	3,9399	1,0257	0,0031
	0,9997	0,0001	0,0001	0,0001	14,9697	0,9846	0,0031
	0,0001	0,9997	0,0001	0,0001	2,4151	0,9978	0,0031
	0,0001	0,0001	0,9997	0,0001	10,2298	0,9188	0,0031
	0,2500	0,2500	0,2500	0,2500	7,8886	0,7680	1,3863
	0,1251	0,1251	0,1251	0,6249	5,9142	0,8507	1,0738
	0,6249	0,1251	0,1251	0,1251	11,4292	0,8046	1,0738
	0,1251	0,6249	0,1251	0,1251	5,1519	0,8718	1,0738
	0,1251	0,1251	0,6249	0,1251	9,0592	0,7770	1,0738
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
Réplica 5	0,0001	0,0001	0,0001	0,9997	2,3842	1,0292	0,0031
	0,9997	0,0001	0,0001	0,0001	14,4701	0,9948	0,0031
	0,0001	0,9997	0,0001	0,0001	1,7115	0,9998	0,0031
	0,0001	0,0001	0,9997	0,0001	10,1977	1,3738	0,0031
	0,2500	0,2500	0,2500	0,2500	7,1909	0,8108	1,3863
	0,1251	0,1251	0,1251	0,6249	4,7876	0,8623	1,0738
	0,6249	0,1251	0,1251	0,1251	10,8305	0,8201	1,0738
	0,1251	0,6249	0,1251	0,1251	4,4512	0,8823	1,0738
	0,1251	0,1251	0,6249	0,1251	8,6943	1,0057	1,0738

- Ajustando os modelos

Após analisar os modelos, o melhor que se enquadra no processo é o modelo quadrático, conforme pode ser observado na Figura 6.21 cujo resultado foi obtido no software Minitab.

Regression for Mixtures: Retorno versus Série 1; Série 2; ...						
Estimated Regression Coefficients for Retorno (component proportions)						
Term	Coef	SE Coef	T	P	VIF	
Série 1	14,6237	0,143	*	*	1,505	
Série 2	1,9882	0,143	*	*	1,503	
Série 3	10,1797	0,143	*	*	1,503	
Série 4	3,0590	0,143	*	*	1,503	
Série 1*Série 2	-0,0000	8,714	-0,00	1,000	61,952	
Série 1*Série 3	-0,0000	8,714	-0,00	1,000	61,952	
Série 1*Série 4	0,0000	2,555	0,00	1,000	5,326	
Série 2*Série 3	0,0000	6,854	0,00	1,000	38,320	
Série 1*Série 1*Série 2*Série 3	0,0000	177,550	0,00	1,000	86,078	
S = 0,319024 PRESS = 5,72493						
R-Sq = 99,46% R-Sq(pred) = 99,16% R-Sq(adj) = 99,34%						
Regression for Mixtures: Risco versus Série 1; Série 2; Série 3; Série 4						
Estimated Regression Coefficients for Risco (component proportions)						
Term	Coef	SE Coef	T	P	VIF	
Série 1	0,99	0,0301	*	*	1,505	
Série 2	1,00	0,0301	*	*	1,503	
Série 3	1,18	0,0301	*	*	1,503	
Série 4	1,03	0,0301	*	*	1,503	
Série 1*Série 2	0,77	1,8352	0,42	0,676	61,952	
Série 1*Série 3	-0,22	1,8352	-0,12	0,907	61,952	
Série 1*Série 4	-1,99	0,5381	-3,70	0,001	5,326	
Série 2*Série 3	-2,05	1,4433	-1,42	0,165	38,320	
Série 1*Série 1*Série 2*Série 3	-10,24	37,3911	-0,27	0,786	86,078	
S = 0,0671850 PRESS = 0,253902						
R-Sq = 78,77% R-Sq(pred) = 66,83% R-Sq(adj) = 74,06%						
Regression for Mixtures: Entropia versus Série 1; Série 2; ...						
Estimated Regression Coefficients for Entropia (component proportions)						
Term	Coef	SE Coef	T	P	VIF	
Série 1	0,00	0,000000	*	*	1,505	
Série 2	0,00	0,000000	*	*	1,503	
Série 3	0,00	0,000000	*	*	1,503	
Série 4	0,00	0,000000	*	*	1,503	
Série 1*Série 2	2,14	0,000000	*	*	61,952	
Série 1*Série 3	2,14	0,000000	*	*	61,952	
Série 1*Série 4	11,07	0,000000	*	*	5,326	
Série 2*Série 3	9,65	0,000000	*	*	38,320	
Série 1*Série 1*Série 2*Série 3	-45,54	0,000000	*	*	86,078	
S = 0 PRESS = 0						
R-Sq = 100,00% R-Sq(pred) = 100,00% R-Sq(adj) = 100,00%						

Figura 6.21: Ajuste do modelo para o MDE.

- Determinando os valores para alvo (T_i), limite superior (H_i) e limite inferior (L_i).

O próximo passo é determinar os limites H_i e L_i , e o alvo T_i . Como estratégia para se determinar os valores para T_i , H_i e L_i , pode-se utilizar alguns valores estatísticos, como a média, valor máximo, valor mínimo, primeiro quartil e terceiro quartil. Na Tabela 6.11 tem-se os valores estatísticos para o Retorno, o Risco e a Entropia.

Tabela 6.11: Sumário estatístico da Média, Variância e Entropia.

	Média	Mínimo	Q1	Q3	Máximo
Retorno	7,46267	1,711493	4,557477	10,21137	14,96971
Risco	0,937969	0,767996	0,850668	0,999342	1,373787
Entropia	0,632631	0,003063	0,003063	1,073784	1,386294

Assim, como se deseja maximizar o Retorno e a Entropia e minimizar o Risco, pode-se escolher os seguintes valores para T_i , H_i e L_i .

Tabela 6.12: Valores para a função *desirability*.

	Retorno	Risco	Entropia
T_i	14,96971	0,767996	1,386294
H_i		0,937969	
L_i	7,46267		0,632631

- Aplicando a função *desirability* para maximizar o Retorno e a Entropia e minimizar o Risco.

Para aplicar a função *desirability* é necessário definir o peso e a importância para Retorno, Risco e Entropia. Será utilizado, para o peso o valor de 0,1 e para a importância, o valor de 1. Estes valores foram escolhidos aleatoriamente.

Sendo assim, o portfólio ótimo obtido, conforme apresentado na Figura 6.22, está descrito na Tabela 6.13.

Tabela 6.13: Portfólio ótimo.

w_1	w_2	w_3	w_4	Retorno	Risco	Entropia	<i>Desirability</i> Total
84,82%	0,01%	0,01%	15,16%	0,989119	12,8694	0,7409	0,98912

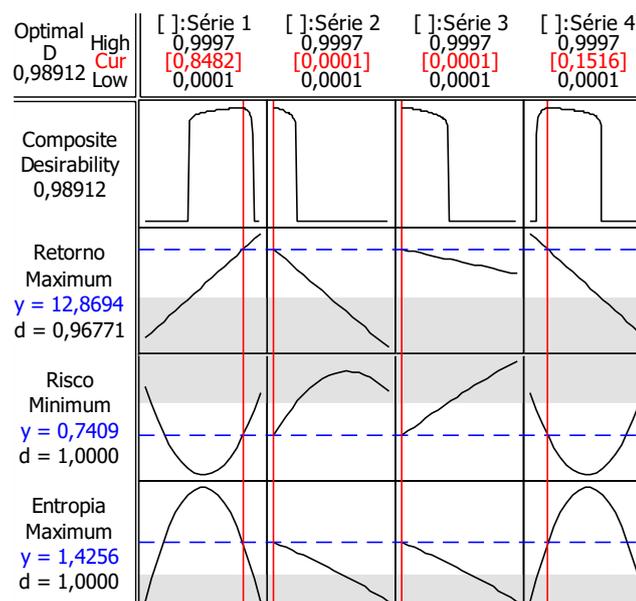


Figura 6.22: Portfólio ótimo obtido pelo método MDE-R.

Comparando o portfólio obtido, Tabela 6.13, com a fronteira de pareto construída a partir do MVP, tem-se o resultado apresentado na Figura 6.23

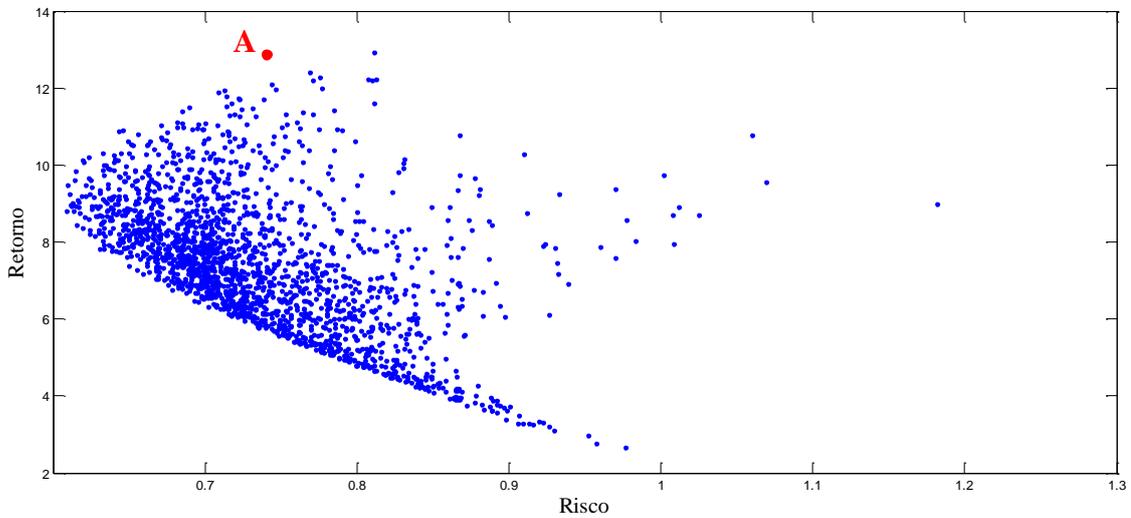


Figura 6.23: Fronteira de pareto pelo MVP.

Pode-se observar que o portfólio ótimo obtido (ponto A) está na região não dominada, ou seja, pertence ao conjunto das melhores combinações para o portfólio. Assim, o método MDE-R, otimização de portfólio pelo MDE com réplicas para cada previsão é válido.

6.3.4 Teste 4

Neste teste, será aplicado o método MDE-R na otimização do portfólio formado pelas séries temporais do Teste 2.

Considere as séries já transformadas, Figura 6.12 e Figura 6.13. Os modelos que melhor descrevem as séries estão apresentados em (6.4)

$$\begin{aligned}
 \text{Série A: } & \text{ARMA}(1,1)\text{-GARCH}(0,1) & - \text{AIC: } & -36,0719 \\
 \text{Série B: } & \text{ARMA}(0,1)\text{-GARCH}(0,1) & - \text{AIC: } & 281,2411 \\
 \text{Série C: } & \text{ARMA}(1,0)\text{-GARCH}(0,1) & - \text{AIC: } & 225,6990
 \end{aligned}
 \tag{6.4}$$

Aplicando o MDE-R, obtém-se os seguintes resultados:

Tabela 6.14: Portfólio ótimo obtido pelo MDE-R.

A	B	C	Retorno	Risco	Entropia	<i>Desirability</i> Total
32,99%	45,79%	21,22%	0,2642	0,4697	1,0071	0,90365

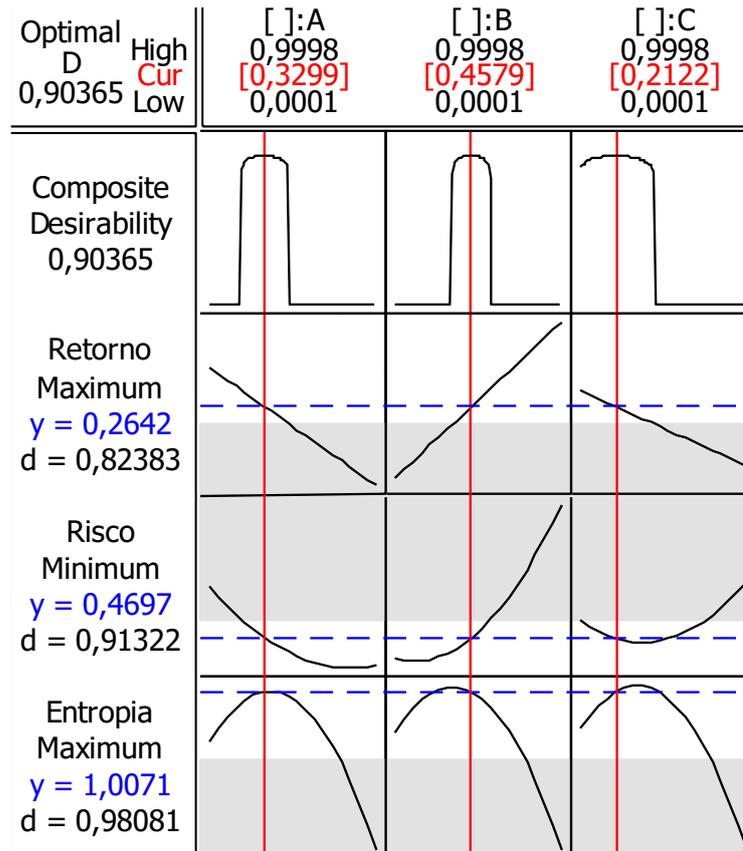


Figura 6.24: Portfólio ótimo obtido pelo método MDE-R.

Comparando o portfólio ótimo obtido, Figura 6.25, com a fronteira de pareto, observa-se que o ponto A, portfólio obtido, está na região não dominada, assegurando que o portfólio é uma solução eficiente.

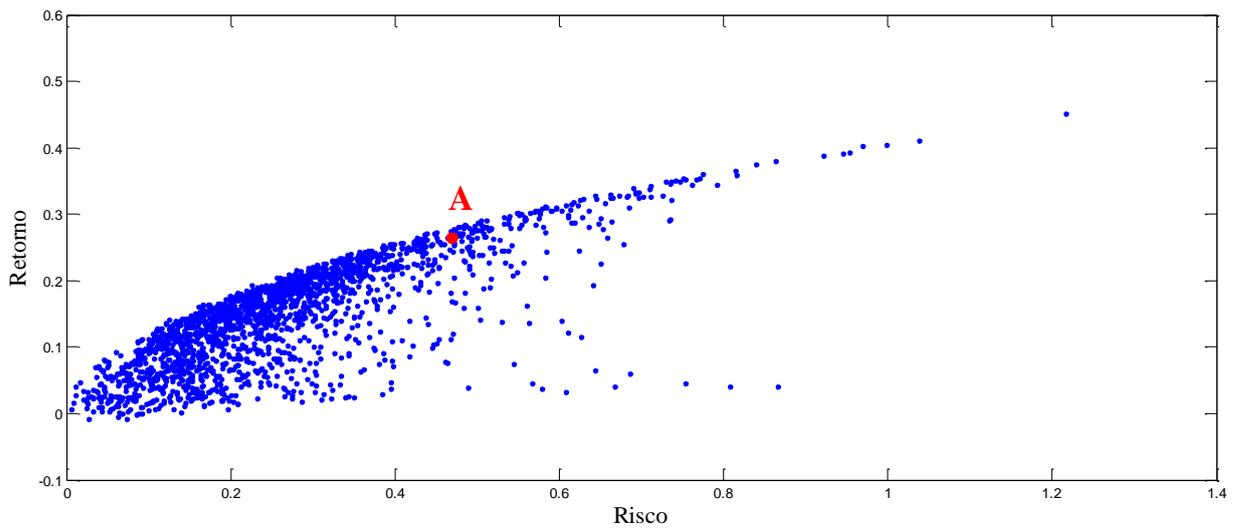


Figura 6.25: Fronteira de pareto pelo MVP.

A comparação do resultado obtido entre os dois métodos aplicados às mesmas séries que compõe o portfólio, ou seja, a comparação do resultado obtido no Teste 2 com o Teste 4, está apresentado na Tabela 6.15.

Tabela 6.15: Comparação do portfólio ótimo obtido por MDE-JMR e MDE-R.

	A	B	C
MDE-JMR	35,29%	44,44%	20,27%
MDE-R	32,99%	45,79%	21,22%

Pode-se observar que os dois resultados foram bastante próximos.

6.3.5 Teste 5

Neste teste será realizado uma comparação entre os dois métodos em séries não lineares. Considere as seguintes séries:

$$\text{Série A: } y_t = 0,8y_{t-1} - 0,8y_{t-1}[1 + \exp(-10y_{t-1})]^{-1} + \varepsilon_t$$

$$\text{Série B: } y_t = 0,3y_{t-1} + 0,6y_{t-2} + (0,1 - 0,9y_{t-1} + 0,8y_{t-2})[1 + \exp(-10y_{t-1})]^{-1} + \varepsilon_t \quad (6.5)$$

$$\text{Série C: } y_t = \varepsilon_t - 0,3\varepsilon_{t-1} + 0,2\varepsilon_{t-2} + 0,4\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2} - 0,25\varepsilon_{t-2}^2$$

As autocorrelações das séries estão apresentadas na

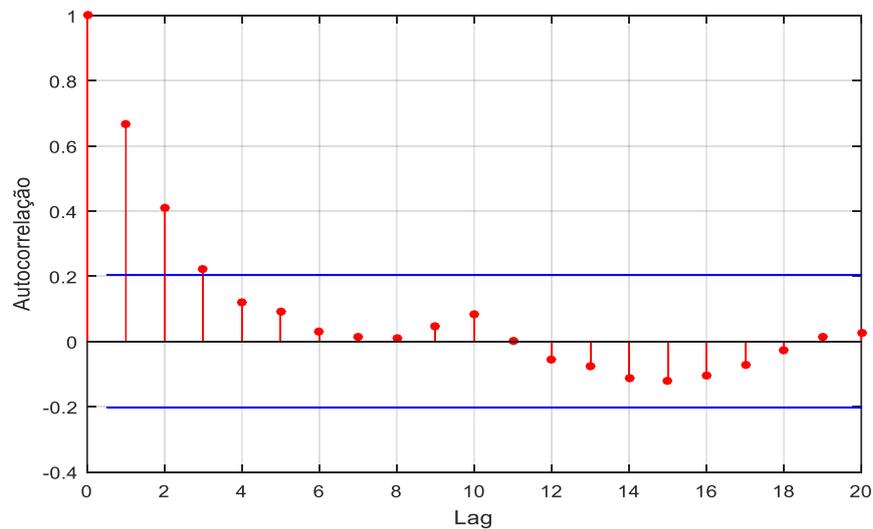


Figura 6.26: Autocorrelação da série A.

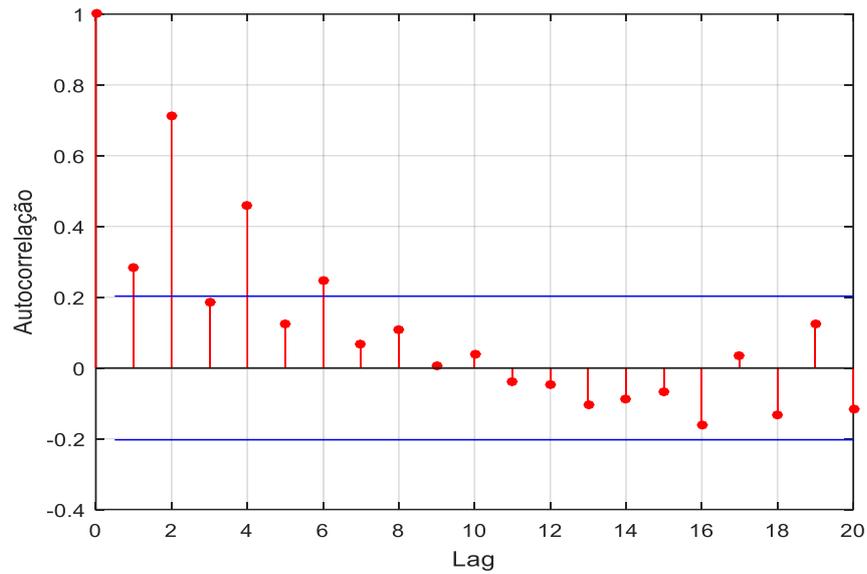


Figura 6.27: Autocorrelação da série B.

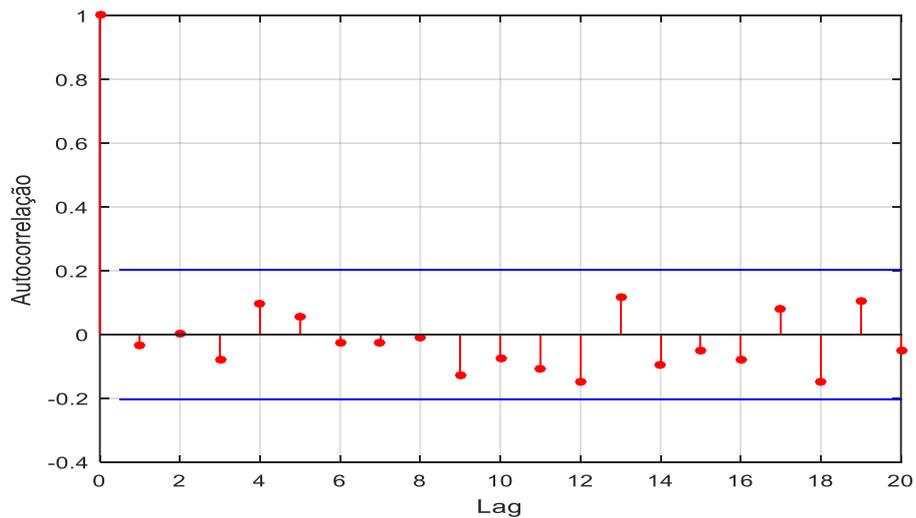


Figura 6.28: Autocorrelação da série C.

1. Aplicando o método MDE-JMR, tempos:

As séries possuem 97 dados observados, logo, o tamanho da janela móvel será $L = \frac{97}{4} = 24,25 \cong 25$. O tamanho do passo da janela será igual a 6, visto que o maior *lag* da autocorrelação significativa é 6, da série B. Assim, tem-se 13 réplicas.

Os valores utilizados na otimização da função *desirability* para obtenção do portfólio ótimo pelo MDE são apresentados na Tabela 6.6. e na Figura 6.29 tem-se o portfólio ótimo obtido pelo MDE-JMR.

Tabela 6.16: Resumo da função *desirability*.

Parâmetros	Objetivo	Limites			Previsão			<i>Desirability</i>
		Inferior	Alvo	Superior	Peso	Import.	Resposta	
Variância	Minimizar	-	0,3667	1,1918	0,1	1	0,5980	0,96764
Média	Maximizar	-1,0849	0,0679	-	0,1	1	-0,6623	0,90452
Entropia	Maximizar	0,5790	1,0986	-	0,1	1	0,97798	0,97798
<i>Desirability Total:</i>								0,9495

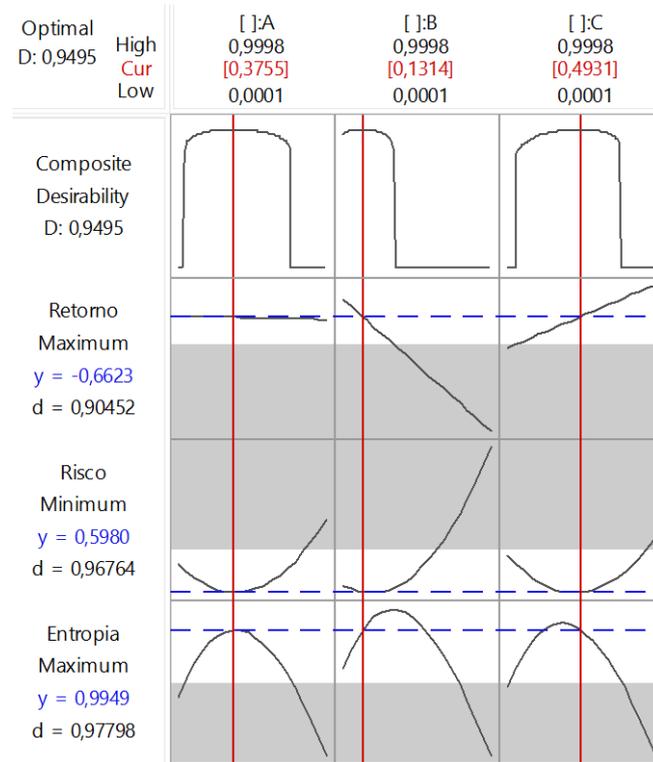


Figura 6.29: Portfólio ótimo obtido pelo método MDE-JMR.

2. Aplicando o método MDE-R, temos:

Os modelos utilizados para fazer previsão nas séries estão apresentados na Tabela 6.17.

Tabela 6.17: Modelo utilizado para previsão nas séries.

	Série A	Série B	Série C
Modelo	Arma(3,3)-Garch(0,1)	Arma(1,4)-Garch(1,1)	Arma(1,0)-Garch(0,1)
AIC	267,141	336,2537	304,2351

Utilizando estes modelos, fez-se a previsão de 4 *steps* à frente. Estes valores estão apresentados na Tabela 6.18 e na Tabela 6.19.

Tabela 6.18: Previsão para o retorno de cada série.

Step	Série 1	Série 2	Série 3
1	-1,3195	-2,3869	-0,1442
2	-1,0379	-2,383	-0,1336
3	-0,4496	-2,3732	-0,1339
4	-0,6387	-2,2568	-0,1338

Tabela 6.19: Previsão para o risco de cada série.

Step	Série 1	Série 2	Série 3
1	0,9364	0,835	1,0700
2	0,9150	1,0117	1,1138
3	0,9140	1,1307	1,1180
4	0,9140	1,2156	1,1184

Aplicando o MDE-R, obtém-se o resultado que está apresentado na

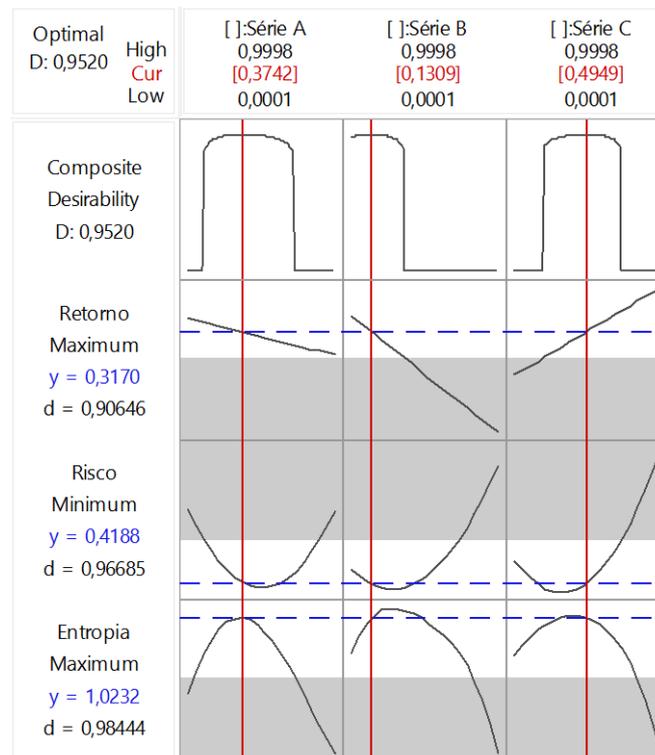


Figura 6.30: Portfólio ótimo obtido pelo método MDE-R.

Comparando os resultados dos dois métodos temos:

Tabela 6.20: Comparação do portfólio ótimo obtido por MDE-JMR e MDE-R.

	A	B	C
MDE-JMR	37,55%	13,14%	49,31%
MDE-R	37,42%	13,09%	49,49%

Analisando as comparações entre os dois métodos, realizada no Teste 4 e no Teste 5, conclui-se que, com a utilização de janelas móveis e réplicas, o resultado foi bem satisfatório. Assim, pose-se utilizá-la em otimização de portfólio, pois seu esforço computacional é bem menor.

Após a validação dos métodos, pretende-se utilizá-los para resolver o problema central deste trabalho que é encontrar um portfólio ótimo para a geração de energia elétrica, que será apresentado no próximo capítulo.

Capítulo 7

Otimização de portfólio de geração de energia elétrica

Neste capítulo, serão apresentados dois casos de otimização de portfólio de geração de energia elétrica utilizando as metodologias propostas, como apresentadas no capítulo anterior. No primeiro caso será utilizado o método MDE-JMR, que será a otimização de um portfólio de geração de energia elétrica para o estado da Califórnia, nos Estados Unidos, com o objetivo de obter o menor custo e risco. Os dados utilizados para esta otimização são os apresentados pelo estudo CEC (2010).

O segundo caso será a otimização de um portfólio de geração de energia elétrica de um cenário brasileiro, também com o objetivo de obter o menor custo e risco. Os dados utilizados foram o estudo realizado no Plano Nacional de Energia 2030 (PNE 2030) e a variação do preço do combustível, cuja fonte é o *World Energy Outlook* (2013).

Em ambos os problemas, deseja-se fazer um planejamento de investimento em implantação de novas usinas elétricas. O investidor pode ser considerado um Governo que necessita saber o quanto deve investir em cada tipo de fonte de energia elétrica para que se tenha ao final o menor custo e risco. O custo envolve desde a instalação até a operação de novas usinas.

Antes da apresentação dos cenários e da otimização dos portfólios para cada uma das duas regiões que serão abordadas, é necessária uma modelagem matemática para o custo e risco de geração de energia elétrica baseado em Delarue (2011). Vale destacar que o único interesse deste trabalho é a otimização de portfólios baseado em custo da geração de energia elétrica. Um estudo sobre os fatores de implementação ou expansão de geradores foge do escopo deste trabalho.

7.1 Modelagem matemática do custo e risco

Nesta seção, será apresentada a abordagem para a otimização de portfólio baseada em Delarue (2011). O custo foi abordado em Jansen *et al.* (2006). Nesta abordagem não se considera a dimensão do tempo. Todos os custos são expressos em [US\$/MWh] determinado a partir do número anual de horas de funcionamento por fonte de energia ou por [US\$/MW] determinado pela capacidade da usina.

Seja I o conjunto das fontes disponíveis (índice i), e K o conjunto de categorias de custos (índice k). Então, para cada fonte de energia i , o custo é composto por diferentes custo de categorias k , conforme (7.1).

$$UTC O_i = \sum_k C_{i,k} = INVe_i + FU_i + FOMe_i + VOM_i, \quad \forall i \in I \quad (7.1)$$

com

$UTC O_i$ custo unitário para fonte de energia i [US\$/MWh].

$C_{i,k}$ custo do componente k para a fonte de energia i .

$INVe_i$ custo do investimento para a fonte de energia i , via fator expresso em [US\$/MWh], por ano (notação e expresso em termos de energia).

FU_i custo do combustível para a fonte de energia i .

$FOMe_i$ custo fixo de Operação e Manutenção para a fonte de energia i via fator expresso em [US\$/MWh], por ano (notação e expresso em termos de energia).

VOM_i custo variável de Operação e Manutenção para a fonte de energia i .

Os custos de CO_2 não estão incluídos explicitamente, porém podem ser considerados implicitamente no custo do combustível.

O risco total para a fonte de energia i é constituído pelos riscos dos diferentes custos da categoria k , expresso por (7.2).

$$\sigma_i = \sqrt{\sum_k \sigma_{i,k}^2}, \quad \forall i \in I \quad (7.2)$$

com σ_i sendo o risco do custo para a fonte de energia i e $\sigma_{i,k}$ o risco dos custos da categoria k e da fonte de energia i .

Esta definição de risco segue o que foi definido por Jansen *et al.* (2006), onde assume que os componentes de custo são independentes.

Existem correlações entre os custos das diferentes categorias k e das diferentes fontes de energia i . A formulação da correlação ρ_{ih} entre o custo total de duas fontes de energia i e h , com o custo dos componentes k e $l \in K$ é dado pela equação (7.3).

$$\rho_{ih} = \frac{\sum_k \sum_l \rho_{kl,ih} \cdot \sigma_{i,k} \sigma_{h,l}}{\sigma_i \cdot \sigma_h}, \quad \forall i \in I \quad (7.3)$$

com $\rho_{kl,ih}$ sendo a correlação entre o custo das categorias k e l e das fontes de energia i e h .

O custo médio do portfólio p , (denotado por $avcost_p$) e medido por US\$/MWh, é definido por (7.4).

$$avcost_p = \sum_i w_i \cdot UTCO_i \quad (7.4)$$

com w_i , sendo o peso das fontes de energia i no portfólio p . E o risco do portfólio é definido por (7.5), com $i, h \in I$

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_i \sum_h w_i \cdot w_h \cdot \rho_{ih} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_h} \quad (7.5)$$

O portfólio de menor custo e menor risco para w_i , pode ser determinado minimizando (7.4) e (7.5) com as restrições $\sum_i w_i = 1$ e $w_i \geq 0, \forall i \in I$. Adaptando este problema ao (4.26), obtém-se o seguinte problema de otimização de portfólio de geração de energia elétrica (7.6), que pode ser tratado como um problema de projeto de experimento de mistura, conforme abordado no Capítulo 5.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & avcost_p = \sum_i w_i \cdot UTCO_i \\ \text{Min} \quad & \sigma_p = \sqrt{\sum_i \sum_h w_i \cdot w_h \cdot \rho_{ih} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_h} \\ \text{Max} \quad & H = - \sum_{i=1}^{n+1} w_i \log w_i \\ \text{Sujeito a:} \quad & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\ & w_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (7.6)$$

7.2 Otimização de portfólio de geração de energia elétrica utilizando MDE, réplicas e janelas móveis.²

Para a otimização de portfólio de geração de energia elétrica através da metodologia 1, escolheu-se o cenário da geração de energia elétrica do estado da Califórnia, nos Estados Unidos. Pretende-se obter a melhor combinação que minimize o custo e o risco e maximize a

² Artigo *Mixture design of experiments on portfolio optimization of power generation*, conforme Monticeli *et al.* (2016).

entropia, cuja presença é sugerida para diversificar o portfólio. Para compor o portfólio, serão utilizadas 5 fontes de energia: Ciclo Combinado Padrão, cujo combustível é o gás natural; Ciclo Combinado de Gaseificação Integrada – IGCC, cujo combustível é o carvão; a solar fotovoltaica, hídrica e a geotérmica. O cenário utilizado será apresentado a seguir.

7.2.1 Cenário da geração de energia elétrica do estado da Califórnia

É considerado custo de investimento fixo a construção ou expansão de geradoras de energia elétrica. A operação e manutenção é dividida em fixa e variável. A operação e manutenção fixa envolvem os recursos humanos, a administração das geradoras e despesas gerais que são previamente programadas, já as variáveis envolvem os reparos e instalações auxiliares. Também é considerado como custo variável o combustível. Os componentes de custo fixo são expressos em US\$/MW e o custo variável por US\$/MWh.

De acordo com Awerbuch e Berger (2003) e Delarue *et al.* (2011), o custo do combustível é dado pela variação do preço de mercado. Assim, com base nos estudos feitos pela *Annual Energy Outlook* (2012), escolheu-se os preços para as geradoras à gás natural e carvão. Vale lembrar que as demais fontes de energia utilizadas neste problema não utilizam combustível.

Os custos fixos como investimento e operação e manutenção bem como o custo de operação e manutenção variável foram baseados em Klein *et al.* (2010). Estes custos estão apresentados na Tabela 7.1.

Tabela 7.1: Custo fixo de investimento e O&M fix e custo da O&M var.

	Ciclo Combinado Padrão	IGCC	Solar fotovoltaica	Hídrica	Geotérmica
Invest. ^a	28,64	72,98	257,53	93,65	84,76
O&M fix. ^b	3,66	11,98	0,00	4,85	5,94
O&M var. ^c	1,61	9,38	47,03	11,10	11,15

^a Invest. – Custo de investimento [US\$/MW]

^b O&M fix.- Operação e manutenção fixo [US\$/MW]

^c O&M var. – Operação e manutenção variável [US\$/MWh]

Os custos apresentados na Tabela 7.1 foram considerados constantes para todas as réplicas, já o custo do combustível fez-se o estudo de seus dados através da metodologia 1. As séries temporais do custo do gás natural e do carvão estão apresentados na Figura 7.1, cuja fonte é a *Annual Energy Outlook* (2012).

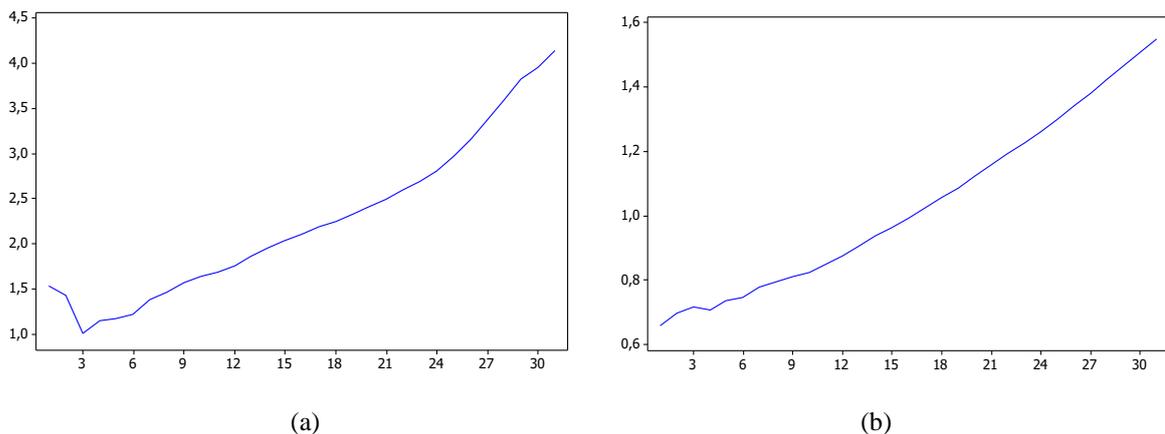


Figura 7.1: (a) Custo do gás natural; (b) custo do carvão.

O risco para o investimento é determinado por vários parâmetros, dentre eles tem-se o tempo de construção da geradora de energia elétrica, a autorização do órgão regulador do meio ambiente (AWERBUCH E BERGER, 2003). Já o risco do combustível está em consonância com as flutuações dos preços ao longo do tempo, de modo que a variância pode ser utilizada para medi-lo. Ainda segundo estudos da *Annual Energy Outlook* (2012) e Awerbuch e Berger (2003), os riscos para cada fonte de energia é calculado por uma porcentagem do custo. Essa porcentagem é dada pela Tabela 7.2.

Tabela 7.2: Percentual do risco para as fontes de energia.

	Gás natural	Carvão	Solar - fotovoltaica	Hídrica	Geotérmica
Invest. Fix. (%)	20,0%	20,0%	0,0%	0,0%	0,0%
O&M Fix. (%)	8,7%	8,7%	8,7%	8,7%	8,7%
O&M Var. (%)	20,0%	20,0%	20,0%	20,0%	20,0%

Para cada réplica deve-se calcular o risco para o combustível, ou seja, a variância e, para os demais parâmetros foi considerado um risco constante.

Baseado em Awerbuch e Berger (2003) e Delarue et al. (2011), tem-se, na Tabela 7.3, os riscos para o Investimento, O&M fix e O&M var.

Tabela 7.3: Risco do custo de investimento e de operação e manutenção fixo e variável.

	Ciclo Combinado Padrão	IGCC	Solar fotovoltaica	Hídrica	Geotérmica
Invest.	5,73	14,60	0,00	0,00	0,00
O&M fix.	0,14	0,82	4,09	0,97	0,97
O&M var.	0,73	2,40	0,00	0,97	1,19

As correlações entre os componentes dos custos semelhantes (excluindo custos com combustível) são iguais a 0,7, enquanto que a correlação entre os diferentes componentes de custo está definido para 0,1. Estes valores são baseados em Awerbuch e Berger (2003). Na

Tabela 7.4, tem-se as correlações entre os componentes dos custos. Para o combustível faz-se o cálculo da correlação das séries.

Tabela 7.4: Correlação entre fontes de energia diferentes.

Categoria	Invest. Fix.	O&M Fix.	O&M Var.
Invest. Fix.	0,7	0,1	0,1
O&M Fix.	0,1	0,7	0,1
O&M Var.	0,1	0,1	0,7

7.2.2 Otimização do portfólio utilizando MDE

Depois de conhecer o cenário de geração de energia no Estado da Califórnia, o passo seguinte é encontrar o portfólio ótimo utilizando a metodologia 1, ou seja, usando Janelas Móveis e Réplicas em MDE, a função *desirability* e, para melhorar a diversidade do portfólio, o índice de entropia.

- **Determinando o tamanho das janelas móveis e o número de réplicas**

Para dar início à otimização, é necessário definir o tamanho e o passo das janelas móveis. Como temos 31 observações, o tamanho das janelas móveis é dado por:

$$L = \frac{31}{4} = 7,75 \cong 8. \quad (7.7)$$

Para se determinar o tamanho do passo das janelas móveis, deve-se calcular as ACF. Vale ressaltar que as séries originais precisaram ser transformadas utilizando a diferenciação, conforme abordado no Capítulo 3. As ACF se encontram representadas nas Figura 7.2 e Figura 7.3. Pode-se observar que na série referente ao custo de gás natural não há correlação significativa, já na série referente ao custo de carvão há correlação significativa de *lag* 2. Portanto o tamanho do passo das janelas móveis será 2.

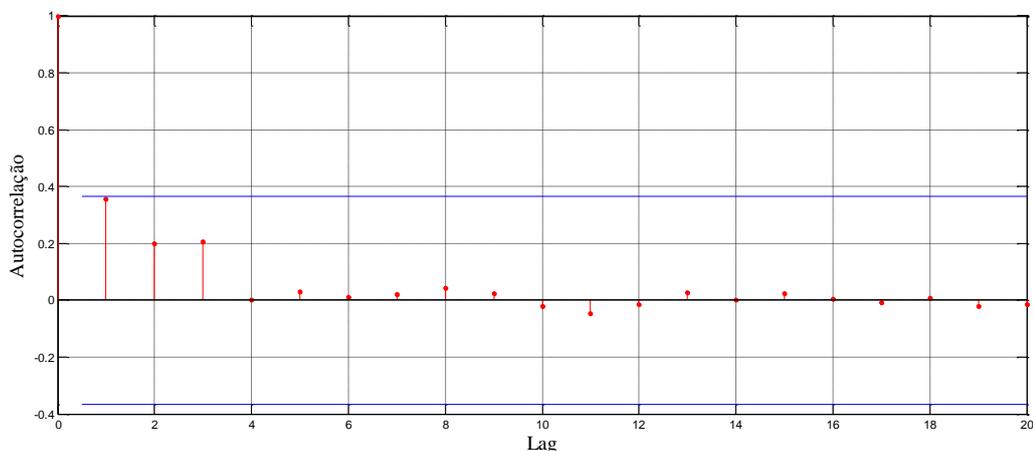


Figura 7.2: Autocorrelação da série do custo de gás natural, transformada com uma diferenciação.

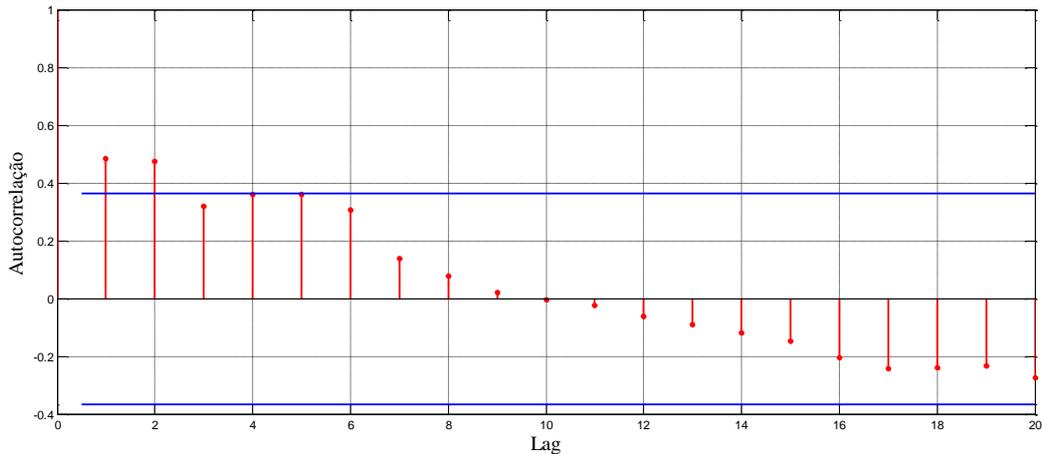


Figura 7.3: Autocorrelação da série do custo de carvão, transformada com uma diferenciação.

Com o tamanho e o passo das janelas móveis definidos, basta aplicá-los nas séries temporais, o que resultará em 13 réplicas. Em seguida, deve-se determinar o custo, $UTC O_i$, o risco, σ_i , e as correlações, ρ_{ih} , para cada componente em cada uma das 13 réplicas, utilizando as Equações (7.1), (7.2) e (7.3), respectivamente, e calcula-se as correlações entre cada componente do custo e entre cada fonte de energia para cada uma das 13 réplicas.

- **Otimização do portfólio**

Neste passo escolhe-se o projeto de mistura a ser criado. Utilizou-se para este problema o projeto *Extreme Vertices*. Como foi utilizado o índice de entropia para diversificar o portfólio, as proporções não podem ser zero. Deste modo, delimita-se as proporções entre 0,01% e 99,96%. Pode-se também adicionar pontos dentro do espaço de projeto (pontos axiais). Assim, escolheu-se um ponto axial. Na Figura 7.4, tem-se o MDE que foi construído com 13 réplicas.

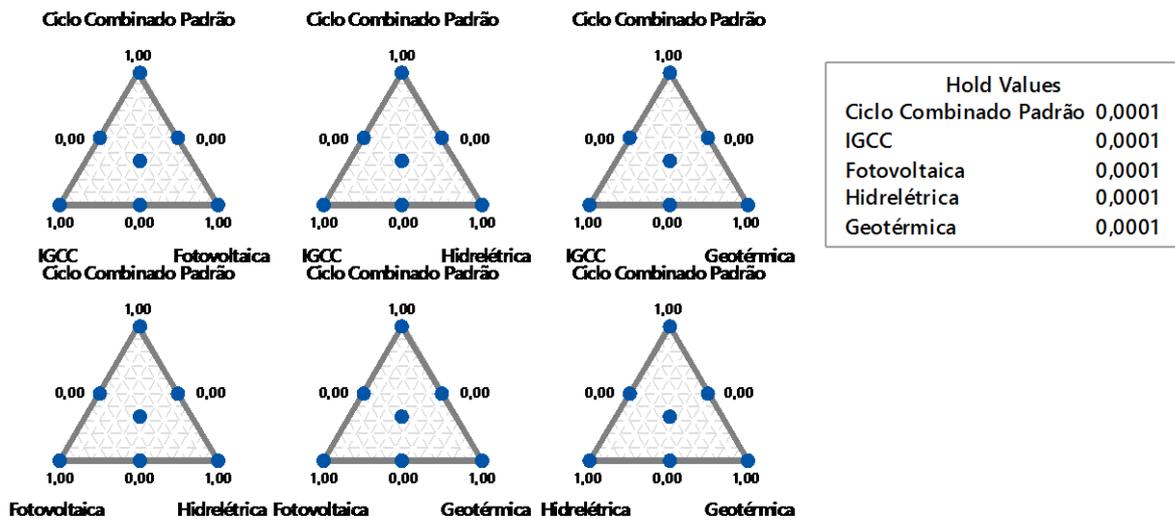


Figura 7.4: Arranjo de mistura com as 5 fontes de energia.

Com o MDE construído, utiliza-se os pesos, w_i , para calcular o custo, risco e entropia para o portfólio, como pode ser visto na Tabela 7.5. Em seguida, uma análise de regressão é feita e um polinômio quadrático foi escolhido para modelar o custo, o risco e a entropia.

Tabela 7.5: MDE com 5 componentes e 13 réplicas.

	Ciclo Combinado Padrão	IGCC	Solar fotovoltaica	Hídrica	Geotérmica	Custo	Risco	Entropia
Réplica 1	0.9996	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	35.2556	5.7781	0.0018
	0.0001	0.9996	0.0001	0.0001	0.0001	95.0876	14.8086	0.0018
	0.0001	0.0001	0.9996	0.0001	0.0001	304.4723	4.0904	0.0018
	0.0001	0.0001	0.0001	0.9996	0.0001	109.6098	1.3691	0.0018
	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.9996	101.8637	1.5340	0.0018
	0.4999	0.4999	0.0001	0.0001	0.0001	65.1716	9.7295	0.3023
	0.4999	0.0001	0.4999	0.0001	0.0001	169.8640	3.7493	0.3023
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Réplica 2	0.9996	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	35.2852	5.7794	0.0018
	0.0001	0.9996	0.0001	0.0001	0.0001	95.1227	14.8086	0.0018
	0.0001	0.0001	0.9996	0.0001	0.0001	304.4724	4.0904	0.0018
	0.0001	0.0001	0.0001	0.9996	0.0001	109.6098	1.3691	0.0018
	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.9996	101.8637	1.5340	0.0018
	0.4999	0.4999	0.0001	0.0001	0.0001	65.2039	9.7554	0.3023
	0.4999	0.0001	0.4999	0.0001	0.0001	169.8788	3.7498	0.3023
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
Réplica 13	0.9996	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	35.2852	5.7794	0.0018
	0.0001	0.9996	0.0001	0.0001	0.0001	95.1227	14.8086	0.0018
	0.0001	0.0001	0.9996	0.0001	0.0001	304.4724	4.0904	0.0018
	0.0001	0.0001	0.0001	0.9996	0.0001	109.6098	1.3691	0.0018
	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.9996	101.8637	1.5340	0.0018
	0.4999	0.4999	0.0001	0.0001	0.0001	65.2039	9.7554	0.3023
	0.4999	0.0001	0.4999	0.0001	0.0001	169.8788	3.7498	0.3023
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Antes de encontrar o portfólio ótimo usando a função *desirability*, é necessário definir os parâmetros para o alvo (T_i), o limite superior (H_i), e o limite inferior (L_i). Estes parâmetros são definidos baseados em alguns valores estatísticos, como feito nos Exemplos numéricos do capítulo anterior. Para minimizar o custo e o risco, o alvo (T_i) utilizado foi o valor mínimo e o limite superior (H_i), a média. No caso de entropia, como se deseja maximizá-la, para T_i utilizou-se o valor máximo e o limite inferior, a média. Estes valores estão apresentados na Tabela 7.6.

Tabela 7.6: Parâmetros para a função *desirability*.

	Custo	Risco	Entropia
Alvo	35,26	1,37	0,70
Limite Superior	129,51	4,81	
Limite Inferior			0,40

A partir destes parâmetros e da função *desirability*, obtém-se a combinação ótima para o portfólio, conforme apresentada na Tabela 7.7 e na Figura 7.5.

Tabela 7.7: Portfólio ótimo obtido pela função *desirability*.

Ciclo Combinado Simples	IGCC	Solar Fotovoltaica	Hídrica	Geotérmica	Custo (US\$/MWh)	Risco (US\$/MWh)	Entropia
32,32%	1,02%	0,01%	33,03%	33,62%	83,13	2,39	0,5050

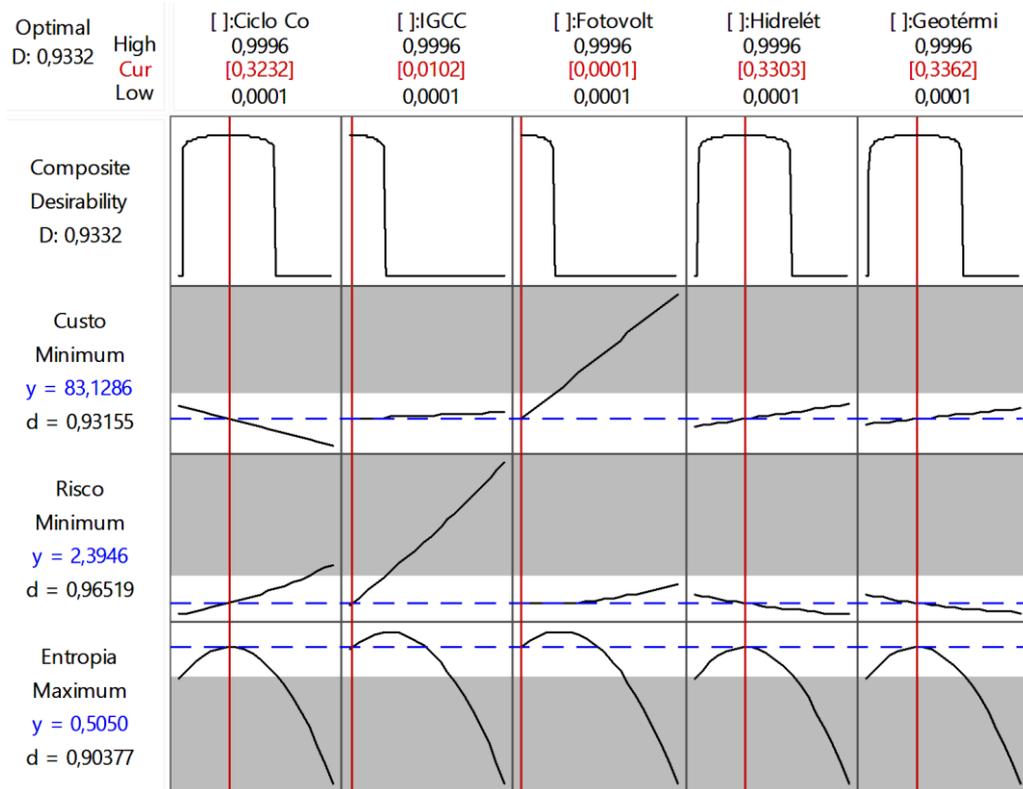


Figura 7.5: Portfólio ótimo.

Comparando o portfólio obtido, Tabela 7.7, com a fronteira eficiente construída a partir do MVP tem-se o resultado apresentado na Figura 7.6. O Ponto A é o portfólio obtido. Observe-se que ele está na fronteira eficiente. Além disso, o portfólio obtido está localizado na combinação de menor custo e risco, portanto, conclui-se que o resultado é satisfatório.

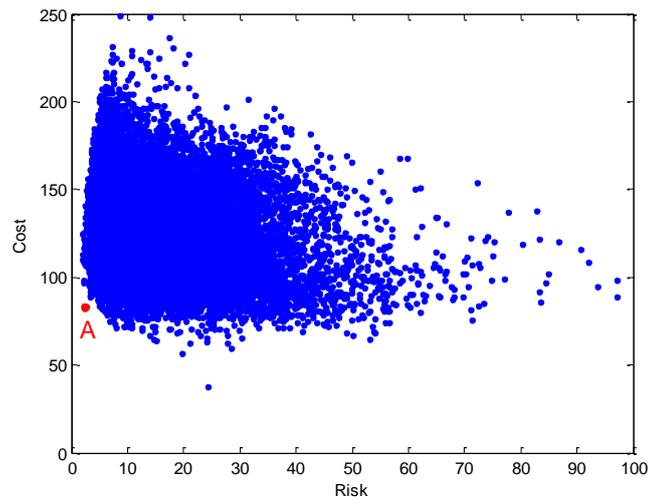


Figura 7.6: Fronteira de pareto.

7.3 Otimização de portfólio de geração de energia elétrica utilizando MDE e réplicas e previsão

Nesta seção, será apresentada a abordagem para a otimização de portfólio da geração de energia elétrica brasileira, utilizando o método MDE-R. Foram escolhidos 8 tipos de fontes de energia elétrica. São elas: hidrelétrica; as seguintes termoelétricas: óleo combustível, gás natural, carvão mineral, urânio (nuclear) e biomassa (cana-de-açúcar); eólica e solar fotovoltaica.

A seguir será apresentado o cenário brasileiro utilizado.

7.3.1 Cenário da geração de energia elétrica brasileira

Os conceitos vistos na seção 7.2.1 para custo de investimento, operação e manutenção fixo, operação e manutenção variável e combustível, são os mesmos. Os componentes dos custos fixo são expressos em US\$/MW e as variáveis por US\$/MWh.

Os custos de investimento e operação e manutenção fixo bem como o custo de operação e manutenção variável estão apresentados na Tabela 7.8, conforme pode ser encontrado no PNE 2030.

Tabela 7.8: Custo fixo de investimento e O&M fix e custo da O&M var.

	Hidrelétrica	Óleo	Gás Natural	Carvão Mineral	Nuclear	Biomassa	Eólica	Solar Fotovoltaica
Invest. Fix.^a	887,00	1.070,00	700,00	1.220,00	1.800,00	1.500,00	1.800,00	3.731,00
O&M Fix.^b	1,74	28,00	15,00	40,00	60,00	55,00	46,00	34,37
O&M Var.^c	2,00	7,00	2,61	4,00	8,00	6,00	0,06	-

^a Invest. – Custo de investimento [US\$/MW]

^b O&M fix.- operação e manutenção fixo [US\$/MW]

^c O&M var. – operação e manutenção variável [US\$/MWh]

Os custos do combustível são baseados no *World Energy* (2013) e PNE (2030). Esses custos, para cada fonte de energia, estão apresentados na Figura 7.7.

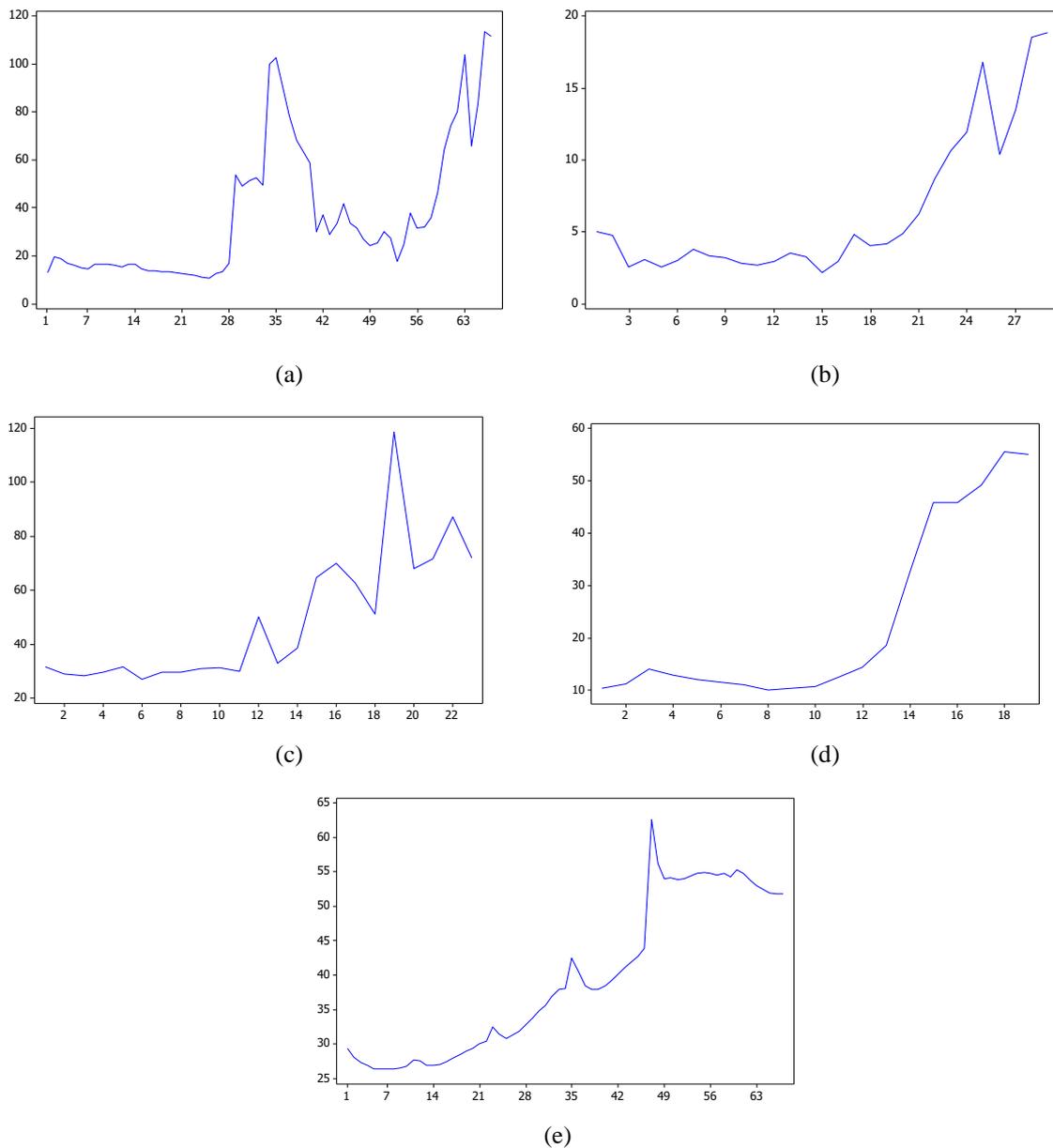


Figura 7.7: (a) Custo do óleo combustível; (b) custo do gás natural; (c) custo do carvão mineral; (d) custo do urânio; (e) custo do bagaço de cana-de-açúcar.

Pode-se observar que as séries precisam ser transformadas, pois não são estacionárias. Após uma diferenciação das séries, obteve-se as séries transformadas conforme apresentadas na Figura 7.8. Com isso procurou-se eliminar as tendências nas séries.

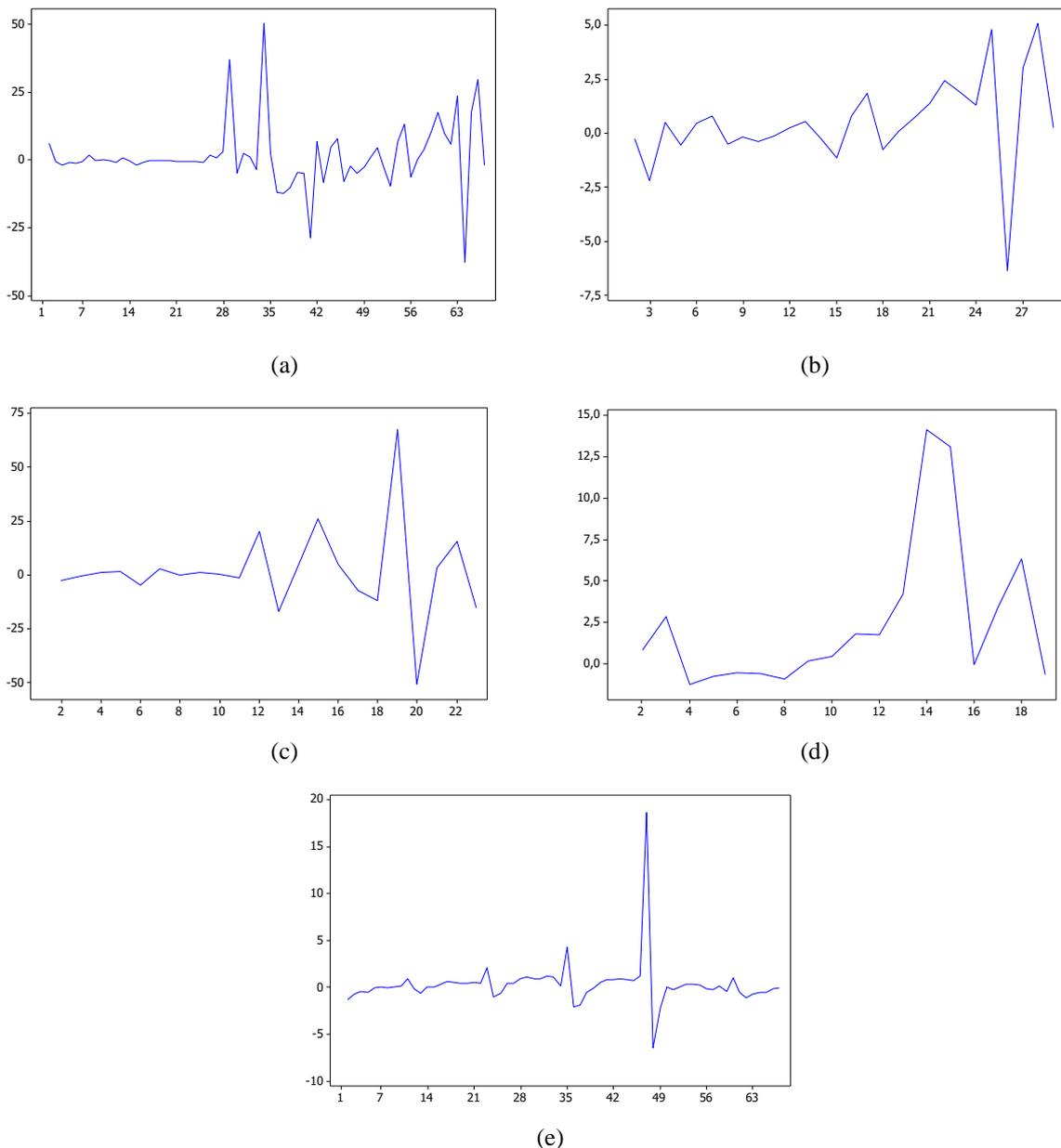


Figura 7.8: (a) Série transformada do custo do óleo combustível; (b) Série transformada do custo do gás natural; (c) Série transformada do custo do carvão mineral; (d) Série transformada do custo do urânio; (e) Série transformada do custo do bagaço de cana-de-açúcar.

Para os riscos de cada planta de geração de energia, serão utilizados os estudos da *Annual Energy Outlook* (2012) e Awerbuch e Berger (2003). Estes riscos estão apresentados na Tabela 7.9. Os riscos para o combustível são dados pela variação dos preços ao longo do tempo, medido pela variância.

Tabela 7.9: Risco de cada geradora de energia elétrica.

	Hidrelétrica	Óleo	Gás Natural	Carvão Mineral	Nuclear	Biomassa	Eólica	Solar Fotovoltaica
Invest. Fix.^a	177,40	214,00	105,00	244,00	360,00	300,00	90,00	186,55
O&M Fix.^b	0,15	2,44	1,31	3,48	5,22	4,79	4,00	2,99
O&M Var.^c	0,40	1,40	0,52	0,80	1,60	1,20	0,01	-

O MDE-R utiliza previsões das séries temporais. Este trabalho restringiu-se a fazer previsões somente da série histórica dos preços dos combustíveis. Para as previsões, foi necessário escolher o modelo que melhor descreva o comportamento das séries. Os modelos escolhidos para cada série estão indicados na Tabela 7.10. Para a escolha dos modelos baseou-se nas autocorrelações, autocorrelações parciais e no teste AIC.

Tabela 7.10: Modelos escolhidos para as séries temporais do custo de combustível.

	Óleo	Gás Natural	Carvão Mineral	Nuclear	Biomassa
Modelo	ARMA(1,1)- GARCH(1,1)	ARMA(0,1)- GARCH(1,1)	ARMA(1,1)- GARCH(1,1)	ARMA(0,1)- GARCH(0,1)	ARMA(1,1)- GARCH(1,1)
AIC	518,0360	110,5413	188,6803	100,2006	321,2418

As correlações entre os componentes dos custos semelhantes (excluindo custos com combustível) serão os mesmos utilizados na seção 7.2, descritos na Tabela 7.11.

Tabela 7.11: Correlação entre fontes de energia diferentes.

	Fonte de energia B			
	Investimento	Combustível	O&M Variável	O&M Fixo
Fonte de energia A				
Investimento	0,7	0	0,1	0,1
O&M Variável	0,1	0	0,7	0,1
O&M Fixo	0,1	0	0,1	0,7

7.3.2 Otimização do portfólio utilizando MDE

Para a otimização do portfólio pela metodologia 2, é necessário fazer previsões nas séries. Estas previsões foram feitas utilizando os modelos escolhidos, conforme Tabela 7.10. Escolheu-se fazer a previsão do custo e do risco de 4 *steps* à frente. As previsões foram feitas com os dados das séries transformadas, e, em seguida, fez-se a conversão para a série original. Os resultados das previsões e dos riscos estão apresentados na Tabela 7.12 e na

Tabela 7.13, respectivamente.

Tabela 7.12: Previsão para o retorno de cada série.

	Óleo	Gás Natural	Carvão Mineral	Nuclear	Biomassa
Step	115,6848	18,78	90,0897	53,7849	52,0941
1	113,6992	18,75	74,4277	54,0039	52,4456
2	116,6894	18,72	92,4595	54,2229	52,8298
3	115,5537	18,69	76,7975	54,4419	53,2366
4	115,6848	18,78	90,0897	53,7849	52,0941

Tabela 7.13: Previsão para o risco de cada série.

	Óleo	Gás Natural	Carvão Mineral	Nuclear	Biomassa
Step	132,5634	21,8751	77,3474	58,1266	54,1509
1	136,9237	21,8607	97,5172	57,3318	54,5730
2	135,2777	21,8593	83,5027	57,9183	54,9480
3	138,6022	21,8576	102,9258	58,4732	55,3370
4	132,5634	21,8751	77,3474	58,1266	54,1509

O próximo passo é definir o número de réplicas. Como foi feito a previsão de 4 *steps*, utilizou-se 4 réplicas, uma para cada *step* previsto. Vale ressaltar que as previsões foram feitas somente no custo do combustível, os demais custos foram considerados constantes para todas demais réplicas. Em cada réplica calcula-se o custo total e o risco total de cada planta de geração de energia elétrica, bem como a correlação entre elas.

- **Otimização do portfólio**

Em seguida, criou-se o MDE *extreme vertices*, de grau dois, um ponto central e um ponto axial, além das 4 réplicas. Como está sendo utilizado o índice de entropia, as proporções precisam ser maiores que zero, sendo assim, os limites para todas as proporções são 0,01% e 99,93%. Na Tabela 7.15, tem-se o MDE *extreme vertices* com 8 componentes, 4 réplicas, o custo, o risco e a entropia calculada para cada réplica.

Após a escolha do modelo de superfície de resposta, é necessário determinar os limites H_i e L_i , e o alvo T_i . Esses parâmetros foram escolhidos baseados nos dados estatísticos. Como deseja-se minimizar o custo e o risco, adotou-se para estes a média como limite superior e o valor mínimo para o alvo. Já para a entropia, como se deseja maximizá-la, adotou-se a média como limite inferior e o valor máximo como o alvo. Na Tabela 7.14 tem-se os valores utilizados para estes parâmetros.

Tabela 7.14: Parâmetros para a função *desirability*.

	Custo	Risco	Entropia
T_i	737,04	75,93	0,9031
L_i			0,32817
H_i	1 667,77	175,5313	

O peso e a importância utilizados para a função *desirability* foram 0,1 e 1, respectivamente. O portfólio obtido pela MDE está apresentado na

Tabela 7.16, e na Figura 7.9.

Tabela 7.15: MDE com 8 componentes e 4 réplicas no Minitab.

Hidrelét.	Óleo	Gás Natural	Carvão	Nuclear	Biomassa	Eólica	Solar	Custo	Risco	Entropia
0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,9993	3763,6900	156,4714	0,0031
0,9993	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	891,3622	148,5151	0,0031
0,0001	0,9993	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1221,0431	179,5326	0,0031
0,0001	0,0001	0,9993	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	737,1306	88,1211	0,0031
0,0001	0,0001	0,0001	0,9993	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1354,3412	204,6561	0,0031
0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,9993	0,0001	0,0001	0,0001	1921,5823	301,9479	0,0031
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,9993	3763,6908	156,4714	0,0031
0,9993	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	891,3605	148,5151	0,0031
0,0001	0,9993	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1219,0574	179,5326	0,0031
0,0001	0,0001	0,9993	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	737,0993	88,1211	0,0031
0,0001	0,0001	0,0001	0,9993	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1338,6901	204,6561	0,0031
0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,9993	0,0001	0,0001	0,0001	1921,7994	301,9479	0,0031
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,9993	3763,6930	156,4714	0,0031
0,9993	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	891,3627	148,5151	0,0031
0,0001	0,9993	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1222,0473	179,5326	0,0031
0,0001	0,0001	0,9993	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	737,0719	88,1211	0,0031
0,0001	0,0001	0,0001	0,9993	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1356,7096	204,6561	0,0031
0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,9993	0,0001	0,0001	0,0001	1922,0204	301,9479	0,0031
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,9993	3763,6914	156,4714	0,0031
0,9993	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	891,3611	148,5151	0,0031
0,0001	0,9993	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1220,9109	179,5326	0,0031
0,0001	0,0001	0,9993	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	737,0407	88,1211	0,0031
0,0001	0,0001	0,0001	0,9993	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	1341,0585	204,6561	0,0031
0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,9993	0,0001	0,0001	0,0001	1922,2376	301,9479	0,0031

Tabela 7.16: Portfólio ótimo.

Hidrelétrica	Óleo	Gás Natural	Carvão	Nuclear	Biomassa	Eólica	Solar	Custo	Risco	Entropia
16,16%	1,02%	82,77%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	766,90	94,91	0,9081

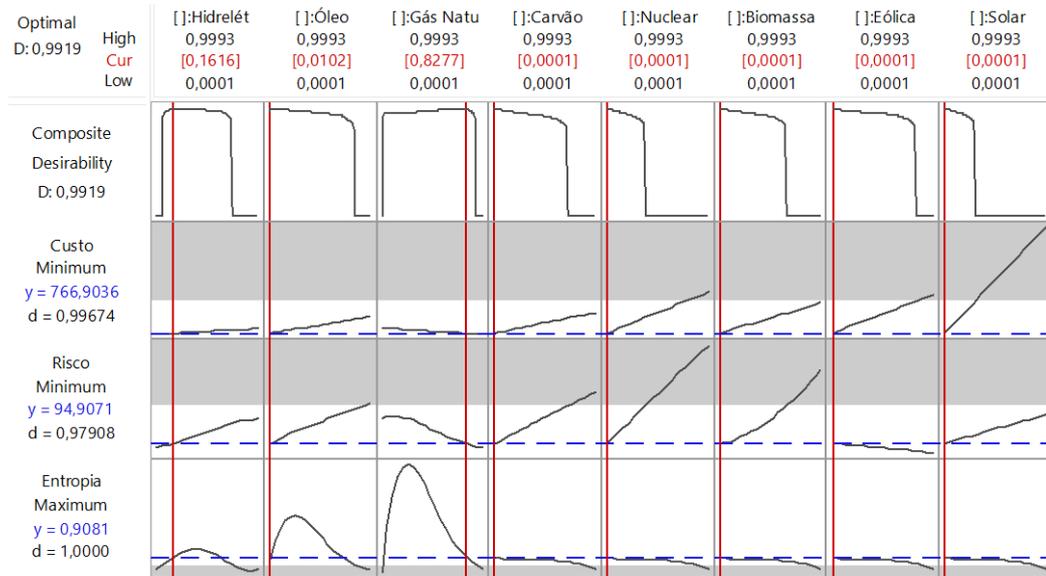


Figura 7.9: Portfólio ótimo obtido pela metodologia proposta.

Analisando cada uma das fontes individualmente, pode-se notar que a Gás Natural é a única que, quando se aumenta a proporção de investimento para esta fonte de energia, o custo e o risco diminuem e o valor da Entropia e a Desirability geral também. Na Figura 7.10 tem-se esta alteração, ou seja, o valor do investimento para Gás Natural passou de 82,77% para 88,70%, ocasionando uma redução de 1,34% no custo e 3,41% no risco, porém, na Entropia houve uma redução de 37,50% e no derirability geral de 2,71%. A redução da Entropia leva a um portfólio menos diversificado. Ainda pode-se aumentar o investimento para Gás Natural, porém, o portfólio ficaria muito concentrado nesta fonte de energia. Cabe agora ao investidor a tomada de decisão.

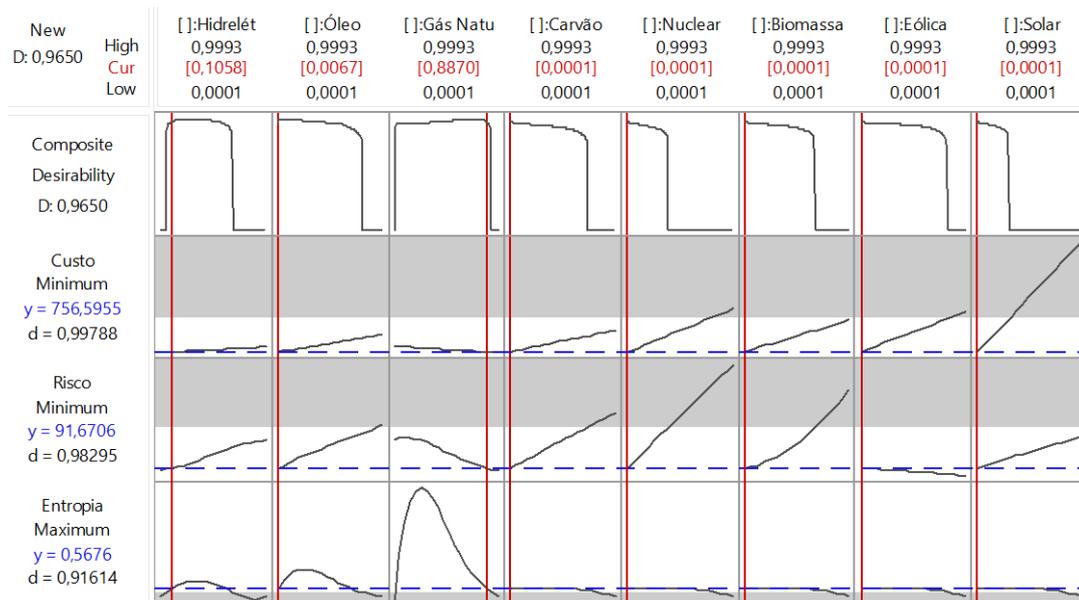


Figura 7.10: Portfólio com um aumento de investimento em Gás Natural.

Na Figura 7.11 tem-se a Fronteira eficiente e o portfólio ótimo obtido pela metodologia proposta, conforme

Tabela 7.16.

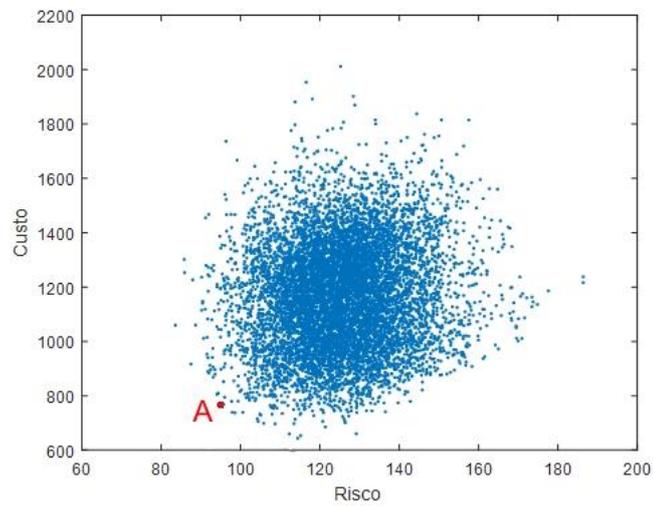


Figura 7.11: Fronteira de pareto.

Capítulo 8

Considerações finais e perspectivas futuras

O foco central deste trabalho foi a obtenção de um portfólio eficiente para a geração de energia elétrica. Esta obtenção foi feita utilizando Projeto de Experimento de Mistura. Foi apresentada a teoria clássica da Média-Variância de Markowitz. Esta teoria possibilita a criação de uma fronteira de pareto que contém todas as combinações ótimas. Um estudo sobre o Projeto de Experimento de Mistura também foi abordado, descrevendo o funcionamento da função *desirability* para obtenção da otimização de um portfólio.

Durante o estudo, foram apresentados dois métodos para se obter o portfólio ótimo: um utilizando MDE com réplicas e janelas móveis e outro utilizando MDE com réplicas. No primeiro, não há necessidade de se modelar as séries, pois as janelas móveis e réplicas captam o comportamento das séries. Já no segundo método, quando se realizam previsões nas séries, utilizando réplicas pode-se melhorar o resultado encontrado na otimização de portfólio.

As vantagens em se utilizar janelas móveis e réplicas em MDE são: detectar tendências mais rapidamente nas séries temporais; explorar a sazonalidade; aumentar o grau de liberdade na estimação dos parâmetros; melhorar a precisão do modelo e permitir a detecção de pequenos efeitos nas séries; fornecer uma estimativa do erro e, assim, permitir estimativas mais precisas.

Na parte experimental, foi feita uma aplicação dos dois métodos propostos em alguns exemplos testes e comparou-se os resultados com a fronteira de pareto. A solução para a combinação encontrada foi, em todos os casos, considerada satisfatória. Também, fez-se uma comparação entre os dois métodos, com o intuito de analisar a eficiência do resultado obtido com o uso de janelas móveis. Pode-se concluir, que o resultado foi bem satisfatório. Com isso, pode-se afirmar que o método que utiliza janelas móveis e réplicas na otimização de portfólio é bem viável, haja vista que o esforço computacional é menor com relação àquele que utiliza modelos, como o ARMA-GARCH, para captar o comportamento das séries temporais.

Em seguida, após validar os métodos, obteve-se a otimização de portfólio de geração de energia elétrica, um para o estado da Califórnia, nos Estados Unidos, e outro para um cenário brasileiro.

A vantagem de usar a metodologia proposta em relação ao MVP é que, no MVP o resultado obtido é uma linha (fronteira de pareto) com várias combinações possíveis. Nos

métodos propostos, o resultado encontrado foi uma combinação ideal, e isso que facilita a tomada de decisão.

Como trabalho futuro pode-se sugerir:

- utilização de outras métricas para o risco do portfólio;
- criar uma rotina que gere as réplicas e janelas móveis automaticamente, tornando o processo mais ágil;
- comparar o resultado obtido utilizando o ARMA-GARCH com Redes Neurais;
- colocar variáveis no processo, como por exemplo a emissão de CO₂ para agregar ao portfólio e facilitar ainda mais na tomada de decisão.

9. Referência bibliográfica

ABRADEE, Associação Brasileira e Distribuidores de Energia Elétrica. Setor Elétrico. Disponível em: <<http://www.abradee.com.br/setor-eletrico/redes-de-energia-eletrica>>. Acesso em nov/2016.

AKAIKE, H. Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. Proc. 2nd Inter. *Symposium on Information Theory*, 267-281, Budapest, 1973.

ANAGNOSTOPOULOS, K. P.; MAMANIS, G. A portfolio optimization model with three objectives and discrete variables. *Computers and Operations Research*, v. 37, n. 7, p. 1285–1297, 2010.

ANEEL, Agência Nacional de Energia Elétrica – Atlas de Energia Elétrica do Brasil. Disponível em: <www2.aneel.gov.br/arquivos/pdf/atlas_par2_cap3.pdf>. Acesso em nov/2016.

ANNUAL ENERGY OUTLOOK, U.S. Energy Information Administration (EIA), 2012. Disponível em: <http://www.eia.gov/forecasts/aeo>> acesso: ago/2012.

ANUÁRIO ESTATÍSTICO DE ENERGIA ELÉTRICA, 2015 – Ano base 2014. Ministério de Minas e Energia.

ARTZNER, P.; DELBAEN, F.; EBER, J.-M.; HEATH, D. Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, v. 9, n. June 1996, p. 203–228, 1999.

AWERBUCH, S.; BERGER, M. Applying portfolio theory to EU electricity planning and policy-making. *IEA/EET working paper*, v. 3, n. February, p. 69, 2003.

BAR-LEV D.; KATZ, S. A portfolio approach to fossil fuel procurement in the electric utility industry. *Journal of Finance*, v. 31, p. 933-947, 1976.

BOLLERSLEV T., Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, v. 31, iss. 3, p. 307-327, 1986.

BOX, G.E.P.; JENKINS, G.: *Time series analysis, forecasting and control*. Holden-Day, San Francisco, California, 1976.

BRADRI, A.; JADID, S.; RASHIDINEJAD, M.; MOGHADDAM, M. P. Optimal bidding strategies in oligopoly markets considering bilateral contracts and transmission constraints. *Electric Power Systems Research*, v. 78, n. 6, p. 1089–1098, 2008.

BRASIL, MINISTÉRIO DE MINAS E ENERGIA. *Plano Nacional de Energia – PNE 2030*. Ministério de Minas e Energia; Colaboração Empresa de Pesquisa Energética - Brasília: MME: EPE, 12 v., 2007

BROCKWELL, P. J.; DAVIS, R. A. *Introduction to Time Series and Forecasting*, Second Edition Springer Texts in Statistics. 2002.

CCEE, Câmara de Comercialização de Energia Elétrica. Disponível em: <<https://www.ccee.org.br>>. Acesso em: dez/2016.

CEC, California Energy Commission, *Comparative Costs of California Central Station Electricity Generation*, Final Staff Report, State of California, 2010.

CORNELL, J., *Experiments with Mixtures*. Third editions. John Wiley & Sons, 2002.

CROSIER, R.B. Mixture experiments: geometry and pseudocomponents. *Technometrics*, Vol. 26, pp. 209-216, 1984.

DANIELSSON, J.; *Financial Risk Forecasting: The Theory and Practice of Forecasting Market Risk with Implementation in R and Matlab*, The Wiley Finance Series, Wiley, 2011.

DELAQUIL, P., AWERBUCH, S., STROUP, K. A portfolio-risk analysis of electricity supply options in the commonwealth of Virginia. Chesapeake Climate Action. *Network Report*, 2005.

DELARUE, E.; JONGHE, C. DE; BELMANS, R.; D'HAESELEER, W. Applying portfolio theory to the electricity sector: Energy versus power. *Energy Economics*, v. 33, n. 1, p. 12–23, 2011.

DELEEUW, J. Introduction to Akaike (1973) Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle. *Breakthroughs in Statistics Volume I: Foundations and Basic Theory*, 1992.

DERRINGER, G.; SUICH, R. Simultaneous-Optimization of Several Response Variables. *Journal of Quality Technology*, v. 12, n. 4, p. 214–219, 1980.

DOUD, K, *Beyond Value at Risk*. John Wiley & Sons, 1998.

EHLERS, R. S. *Análise de séries temporais*. 2009.

ENERGIA INTELIGENTE. Especial: A crise energética brasileira. Disponível em:
< <https://energiainteligenteufjf.com/2015/03/26/especial-a-crise-energetica-brasileira/>>
Acesso em: nov/2016

FABOZZI, Frank J.; KOLM, Petter N.; PACHAMANOVA, Dessislava A.; FOCARDI, Sergio M., *Robust Portfolio Optimization and Management*. Ed. John Wiley & Sons, Inc., 2007.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. *Cálculo B: funções de várias variáveis, integrais duplas e triplas*. São Paulo: Prentice-Hall, 2007.

FRANCQ, C.; ZAKOIAN, J.M. *Garch models: structure, statistical inference and financial applications*. UK: John Wiley & Sons, 2010.

HUANG, X. Portfolio selection with a new definition of risk. *European Journal of Operational Research*, v. 186, n. 1, p. 351–357, 2008.

IMHOFF, J. Desenvolvimento de Conversores Estáticos para Sistemas Fotovoltaicos Autônomos. Dissertação de Mestrado apresentada à Escola de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria. 2007. 146 f.

JANA, K.; ROY, T.; MAZUMDER, S. Multi-objective mean-variance-skewness model for Portfolio Optimization. *Advanced Modeling and Optimization*, v. 9, n. 1, p. 181–193, 2007.

JANSEN, J. C.; BEURSKENS, L. W. M.; TILBURG, X. VAN. *Application of portfolio analysis to the Dutch generating mix Reference case and two renewables cases : year 2030 - SE and GE scenario*. 2006.

JOODE, J. and BOOTS, M.G. Concepts of investment risks and strategies in electricity generation. *Energy Research Centre of Netherlands*, ECN-061, June 2005.

KLEIN, J.; RHYNE, I.; BENDER, S.; JONES, M. Comparative costs of California Central Station electricity generation. *California Energy Commission*, n. January, p. 186, 2010.

LAI, K. K.; YU, L.; WANG, S. Mean-Variance-Skewness-Kurtosis-based Portfolio Optimization. *First International Multi-Symposiums on Computer and Computational Sciences (IMSCCS'06)*, p. 292–297, 2006.

LIN, J.-L. On the Diversity Constraints for Portfolio Optimization. *Entropy*, v. 15, n. ISSN 1099-4300, p. 1–16, 2013.

LIU, H.; ERDEM, E.; SHI, J. Comprehensive evaluation of ARMA-GARCH(-M) approaches for modeling the mean and volatility of wind speed. *Applied Energy*, v. 88, n. 3, p. 724–732, 2011.

LIU, Y.-C. L. Y.-C.; WANG, T. W. T.; GAO, L.-Q. G. L.-Q.; REN, P. R. P.; LIU, B.-Z. L. B.-Z. Fuzzy portfolio optimization model based on worst-case VaR. *2005 International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, v. 6, n. August, p. 18–21, 2005.

LJUNG, G. M.; BOX, G. E. P. On a measure of lack of fit in time series models. *Biometrika*, v. 65, p. 297–303, 1978.

KUROTORI, I.S.. Experiments with mixtures of components having lower bounds. *Industrial Quality Control*, Vol. 22, pp. 592-596, 1996.

MADLENER, R., GLENSK, B., RAYMOND, P. Investigation of E. ON's Power Generation Assets by Using Mean-Variance Portfolio Analysis, *FCN Working Paper No. 12/2009*, TWTH Aachen University, 2009.

MAKRIDAKIS, S.; WHEELWRIGHT, S.C. and HYNDMAN, R. J. *Forecasting: Methods and Applications*. Wiley, 1998

MARIMOUTOU, V.; RAGGAD, B.; TRABELSI, A. Extreme Value Theory and Value at Risk: Application to oil market. *Energy Economics*, v. 31, n. 4, p. 519–530, 2009.

MARKOWITZ, H. Portfolio selection*. *The journal of finance*, v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952.

MENDES, R. R. A. Uma contribuição para a otimização de portfólios de séries heteroscedásticas usando projeto de experimento de misturas: uma abordagem do desirability aplicada a modelos garch, *Tese de doutorado*, Universidade Estadual Paulista, 2012.

MENDES, R. R. A., PAIVA, A. P., PERUCHI, R. S., BALESTRASSI, P. P., LEME, R. C., SILVA, M. B., Multiobjective portfolio optimization of ARMA-GARCH time series based on experimental designs. *Computers & Operations Research*, v. 66, p. 434-444, 2015.

MONTGOMERY, D.; JENNINGS, C.; KULAHCI, M. *Introduction to Time Series Analysis and Forecasting*. New Jersey: Wiley, 2008.

MONTICELI, A. R., BALESTRASSI, P. P., DE SOUZA, A. C. Z., LEME, R. C., PAIVA, A. P., Mixture design of experiments on portfolio optimization of power generation, *IET Generation, Transmission & Distribution*, p. 1-8, 2016.

MYERS, R.H.; MONTGOMERY, D.C. *Response surface methodology: Process and Product Optimization Using Designed Experiments*. 2 Ed., John Wiley & Sons, New York, NY, 2002.

Neosolar Energia. Disponível em: <http://www.neosolar.com.br/aprenda/saiba-mais/energia-solar-fotovoltaica>. Acesso: ago/2016.

OLIVEIRA, E. Estratégia de comercialização de energia elétrica através da otimização de portfólios de contratos utilizando projetos de experimentos de misturas, *Tese de doutorado*, Universidade Federal de Itajubá, 2009.

OLIVEIRA, F. A. DE; PAIVA, A. P. DE; LIMA, J. W. M.; BALESTRASSI, P. P.; MENDES, R. R. A. Portfolio optimization using Mixture Design of Experiments: Scheduling trades within electricity markets. *Energy Economics*, v. 33, n. 1, p. 24–32, 2011.

PEREIRA, B. DE B. Séries temporais multivariadas. In: Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (Ed.); *Anais 6º Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística*, Rio de Janeiro, 1984.

PHAM, HT, YANG BS. Estimation and forecasting of machine health condition using ARMA/GARCH model. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 24, iss. 2, p. 546-558, 2010.

REILLY, FRANK K & BROWN, K. C. *Investment Analysis & Portfolio Management TENTH EDITION*. 2012.

ROCKAFELLAR, R.T., URYASEV, S., Conditional Value at Risk for general loss distributions. *Journal of Banking and Finance*, no. 26, p.1443-1471, 2002.

RODEHORST, A. *Evaluating Expected Electric Generation Technology Cost and Risk Applying Modern Portfolio Theory to North Carolina Electric Power Generation*. Dissertação de Mestrado, Duke University, 2007.

ROQUES, F. A., NEWBERY, D. M. , NUTTALL, W. J., Fuel mix diversification in liberalized electricity markets: A mean-variance portfolio theory approach. *Energy Economics*, v. 30, p. 1831-1849, 2008.

SHANNON, C. A mathematical theory of communication. *Bell System Technology Journal*, v. 27, n. July/October, p. 379:423, 623–656, 1948.

SHUMWAY, R. H.; STOFFER, D. S. *Time Series Analysis and Its Applications With R Examples*. 2011.

SOARES, V. DE C. A. *Aplicações do problema de otimização de carteiras de investimento*, Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas, 2011.

SZOLGAYOVÁ, J. *CVaR Portfolio Models for Electricity Generating Capacities*. Dissertação de Mestrado, Universidade Comenius de Bratislava, 2010.

TASY, S. *Analysis of Financial Time Series Second Edition*. 2002.

URYASEV, S. Conditional value-at-risk: optimization algorithms and applications. *Financial Engineering News*, n. 14, p. 3–8, 2000.

WIND FORCE 12 - GREENPEACE. 2003. Disponível em: <<http://4dlab.info/energy/energy-wind-wind-force-12.pdf>>. Acesso em: 11 nov. 2016.

WINDPOWER MONTHLY NEWS MAGAZINE. Disponível em: <<http://www.windpowermonthly.com/>> acesso: ago/2016.

WORLD ENERGY OUTLOOK, 2014. Disponível em: <http://www.bp.com/statisticalreview>> acesso: jul/2014.