

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Conjectura de Carathéodory para Superfícies  
em 3-espço Minkowski**

**Marco Antônio do Couto Fernandes**

**Orientador: Prof. Dr. Fabio Scalco Dias**

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

ITAJUBÁ, 2 DE MARÇO DE 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Conjectura de Carathéodory para Superfícies  
em 3-espaço Minkowski**

**Marco Antônio do Couto Fernandes**

**Orientador: Prof. Dr. Fabio Scalco Dias**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em  
Matemática como parte dos requisitos para obtenção do  
Título de Mestre em Ciências em Matemática

**Área de Concentração: Topologia/Geometria**

ITAJUBÁ – MG

2 DE MARÇO DE 2017

*Dedico este trabalho ao meu avô, Geraldo José Lopes.*

# Agradecimentos

À Deus pelo dom da vida.

À minha família por todo apoio que me deram. Principalmente, os meus pais, Francisco e Terezinha, e os meus irmão, Marcelo e Márcio.

Ao professor Fabio, meu orientador e amigo, pelas infinitas contribuições ao longo desta jornada.

Aos professores do IMC, em especial ao Antônio, Bráulio, Claudemir, Dênis, Leandro e Luis Fernando.

À Eveline, Karine, Marcos, Michele e todos os outros amigos que fiz em Itajubá, por terem tornado a caminhada muito mais agradável.

À todos que direta ou indiretamente colaboraram com este trabalho.

*“Nunca será um verdadeiro matemático aquele que não for um pouco poeta.”*

*Karl Weierstrass*

# Resumo

O objetivo deste trabalho é o estudo da conjectura de Carathéodory adaptada para o espaço de Minkowski,  $\mathbb{R}_1^3$ . A conjectura de Carathéodory é ainda hoje um problema em aberto no espaço Euclidiano e se enuncia da seguinte forma

*“Toda superfície fechada e convexa possui no mínimo 2 pontos umbílicos”,*

onde uma superfície fechada é uma superfície compacta e sem bordo. Farid Tari demonstrou esta conjectura para superfícies em  $\mathbb{R}_1^3$ .

Para tanto, realizamos um estudo sobre equações diferenciais binárias da forma

$$a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0,$$

quando  $\delta = b^2 - ac$  possui uma singularidade de Morse na origem, e também um estudo sobre as linhas de curvatura de superfícies em  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{R}_1^3$ .

**Palavras-chave:** Conjectura de Carathéodory, Espaço de Minkowski, Ponto Umbílico, Equação Diferencial Binária, Linha de Curvatura.

# Abstract

The objective of this work is the study of Carathéodory conjecture adapted to Minkowski space,  $\mathbb{R}_1^3$ . The Carathéodory conjecture still is an open issue in the Euclidean space and it is stated as follows

*“Any closed and convex surface has at least two umbilic points”,*

where a closed surface is a surface that is compact and without boundary. Farid Tari proved this conjecture for surfaces in  $\mathbb{R}_1^3$ .

For this, we did a study of the following binary differential equations

$$a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0,$$

when  $\delta = b^2 - ac$  has a Morse singularity at the origin, and we also did a study about the lines of principal curvature of surfaces in  $\mathbb{R}^3$  and  $\mathbb{R}_1^3$ .

**Keywords:** Carathéodory Conjecture, Minkowski Space, Umbilic Point, Binary Differential Equation, Lines of Principal Curvature.

# Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Índice	vi
Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	ix
Introdução	1
<b>1 Conceitos Iniciais</b>	<b>5</b>
1.1 Geometria Diferencial de Superfícies em $\mathbb{R}^3$ . . . . .	5
1.2 Geometria Diferencial de Superfícies no Espaço de Minkowski . . . . .	10
<b>2 Equações Diferenciais Binárias</b>	<b>18</b>
2.1 Equações Diferenciais Binárias . . . . .	18
2.2 Levantamento do Campo de Direções . . . . .	20
2.3 Formas Normais de Algumas EDB's . . . . .	25
2.3.1 EDB cujos coeficientes não se anulam simultaneamente na origem.	26
2.3.2 EDB cujos coeficientes se anulam simultaneamente na origem e $\delta$ possui uma singularidade de Morse . . . . .	27



<b>3</b>	<b>Linhas de Curvatura</b>	<b>30</b>
3.1	Linhas de Curvatura em Superfícies em $\mathbb{R}^3$ . . . . .	30
3.2	Linhas de Curvatura em Superfícies Lorentzianas . . . . .	38
3.3	Linhas de Curvatura em Superfícies em $\mathbb{R}_1^3$ . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Pontos Umbílicos de Superfícies no 3-Espaço Minkowski</b>	<b>60</b>
4.1	Conjectura de Carathéodory . . . . .	60
4.2	Casos Particulares . . . . .	70
4.2.1	Esfera . . . . .	70
4.2.2	Ovaloide . . . . .	74
4.2.3	Toro . . . . .	76
	<b>Conclusões</b>	<b>85</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>86</b>

# Lista de Figuras

1.1	Plano hiperbólico. . . . .	14
1.2	Espaço De Sitter. . . . .	15
2.1	Configuração de $dy^2 - xdx^2 = 0$ . . . . .	26
2.2	Configuração de $dy^2 + (-y + \lambda x^2)dx^2 = 0$ . . . . .	27
2.3	Configuração da EDB (2.1) quando os coeficientes se anulam simultaneamente na origem e $\delta$ possui uma singularidade $A_1^+$ . . . . .	28
2.4	Configuração da EDB (2.1) quando os coeficientes se anulam simultaneamente na origem e $\delta$ possui uma singularidade $A_1^-$ . . . . .	29
3.1	Gráfico da cúbica $\Phi$ com três raízes e da função $-\Phi'$ . . . . .	48
3.2	Configuração das linhas de curvatura de superfícies em $\mathbb{R}_1^3$ . . . . .	58
4.1	Plano $P_b$ entre os planos $P_a$ e $P_c$ . . . . .	62
4.2	Caso $P_a^+ \cap P_b^-$ . . . . .	63
4.3	Caso $P_a^- \cap P_b^+$ . . . . .	63
4.4	Intersecção entre a esfera $\mathbb{S}^2$ e o cone de luz. . . . .	66
4.5	Regiões Riemannianas e Lorentzianas da esfera. . . . .	71
4.6	Linhas de curvatura da esfera $\mathbb{S}^2$ próximas a um ponto umbílico. . . . .	74
4.7	Construção do toro $\mathbb{T}^2$ . . . . .	76
4.8	Gráfico de $-\theta^3 + \theta + b/2 = 0$ . . . . .	80

# Lista de Tabelas

4.1	Soluções do sistema (4.8) quando $\cos(v) = 0$ . . . . .	79
4.2	Soluções do sistema (4.8) quando $\sin(u) = 0$ . . . . .	83
4.3	Pontos umbílicos do toro $\mathbb{T}^2$ . . . . .	84

# Introdução

*“Toda superfície fechada e convexa possui no mínimo dois pontos umbílicos.”*

A afirmação acima é conhecida como Conjectura de Carathéodory. Não se sabe ao certo a origem desta conjectura, mas ela apareceu pela primeira vez nos artigos de Hamburger e foi atribuída ao matemático alemão de origem grega Constantin Carathéodory em [14]. Esta conjectura estipula uma cota mínima de pontos umbílicos para certas superfícies. Consideramos como fechadas as superfícies que são compactas e sem bordo.

Uma das maneiras de se atacar este problema é estudando o índice de singularidades. O índice de um ponto umbílico isolado é um invariante topológico dado por um semi-inteiro, ou seja, tem a forma  $n/2$ , onde  $n$  é um número inteiro. Loewner conjecturou que o índice de um ponto umbílico isolado é no máximo 1. Como toda superfície fechada e convexa possui Característica de Euler igual a 2, pelo Teorema de Poincaré-Hopf a soma dos índices de todos os pontos umbílicos isolados deve ser igual a 2. Deste modo, uma resposta afirmativa para a Conjectura de Loewner fornece uma resposta afirmativa para a Conjectura de Carathéodory.

O índice de um ponto umbílico isolado, indicado por  $l(p)$ , pode ser calculado, dentre outras maneiras, pela fórmula do índice de Poincaré [9]

$$l(p) = 1 + \frac{E - H}{2},$$

onde  $E$  é o número de setores elípticos e  $H$  é o número de setores hiperbólicos das linhas de curvatura numa vizinhança de um ponto umbílico isolado. Entretanto, a Conjectura dos Setores Elípticos, ver [25] por exemplo, diz que um ponto umbílico isolado não admite setor elíptico para as linhas de curvatura. Logo, uma resposta afirmativa para a Conjectura

dos Setores Elípticos fornece uma resposta afirmativa para a Conjectura de Loewner, que por sua vez, fornece uma resposta afirmativa para a Conjectura de Carathéodory.

Consta na literatura, como em [10], que genericamente o índice de um ponto umbílico isolado  $p$  é  $\pm 1/2$ . Logo, a Conjectura de Carathéodory vale genericamente. No caso em que o valor absoluto do índice em  $p$  é maior do que ou igual a 1, podemos ter um contraexemplo para a Conjectura de Loewner. Sendo assim, Smyth e Xavier [24] mostraram que  $p$  deve ser um ponto crítico da curvatura média ( $H$ ), da curvatura Gaussiana ( $K$ ) e ainda que o terceiro jato de  $H^2 - K$  deve ser nulo. No entanto, isto só ocorrerá quando doze funções se anularem simultaneamente, o que é muito improvável. Isto é um indício da veracidade da Conjectura de Carathéodory.

Muitos matemáticos sugeriram provas para tal conjectura. Os primeiro foram Hamburger [15] e Bol [1], em 1940 e 1944, respectivamente. Posteriormente, Klotz [18], Titus [27], Scherbel [23] e Ivanov [16] também trabalharam com esta conjectura, no intuito de demonstra-lá. Todos estes trabalhos visavam provar a Conjectura de Carathéodory para superfícies analíticas utilizando a Conjectura de Loewner. Entretanto, à medida que os anos passam, todas essas provas parecem não ter convencido a comunidade matemática. Em 1999, Sotomayor e Mello [20], assumindo que a conjectura é verdadeira para superfícies analíticas e adicionando uma hipótese técnica de não degenerescência, demonstraram que ela também será válida para superfícies de classe  $C^3$ . Por fim, Guilfoyle e Klingenberg [11] elaboraram uma prova para a conjectura, porém ainda não publicaram o seu trabalho.

Em contrapartida, alterando a métrica de  $\mathbb{R}^3$  e trabalhando com o espaço de Minkowski,  $\mathbb{R}_1^3$ , Tari [26] demonstrou que a conjectura de Carathéodory adaptada para este espaço é verdadeira. A chave da demonstração apresentada por Tari é a aplicação do Teorema de Poincaré-Hopf e alguns lemas provenientes da geometria de superfícies em  $\mathbb{R}_1^3$ . Estudar esta prova será o principal objetivo deste trabalho.

Considere  $\mathbb{R}^3$  com a métrica Euclidiana usual. A equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

com  $a > c > 0$  ou  $c > a > 0$ , determina uma superfície fechada e convexa em  $\mathbb{R}^3$ , chamada de elipsoide. O elipsoide possui exatamente dois pontos umbílicos. Logo, a cota mínima

estipulada por Carathéodory é atingida e não pode ser aumentada.

A esfera  $\mathbb{S}^2$  é uma superfície fechada e convexa onde todos os pontos são umbílicos. Assim, vemos que não é possível estipular uma cota máxima para os pontos umbílicos de superfícies em  $\mathbb{R}^3$  com as mesmas hipóteses da conjectura de Carathéodory.

Por outro lado, o toro  $\mathbb{T}^2$  é um exemplo de superfície fechada em  $\mathbb{R}^3$  que não possui pontos umbílicos e por isso vemos que a hipótese de convexidade não pode ser omitida.

Considerando o espaço de Minkowski, em [26] Tari apresenta um resultado que garante a existência apenas de pontos umbílicos tipo espaço em ovaloides. Nesta dissertação apresentaremos este resultado, trataremos da existência de pontos umbílicos em outras duas superfícies, a esfera e o toro, e analisaremos as diferenças com o caso Euclidiano apresentado anteriormente.

Para tratarmos sobre pontos umbílicos, mais precisamente sobre a existência deles, acreditamos ser interessante realizar um estudo a respeito de Equações Diferenciais Binárias (EDB's) e das linhas de curvatura de superfícies. Por isso, abordaremos estes tópicos antes de iniciar nossa discussão acerca da existência de pontos umbílicos.

Este texto está organizado da seguinte forma. No primeiro capítulo realizaremos uma breve revisão sobre geometria diferencial em  $\mathbb{R}^3$  e no espaço de Minkowski, com o objetivo de encontrar a equação das linhas de curvatura para uma superfície  $S$ .

No Capítulo 2 iremos estudar EDB's da forma

$$a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0.$$

Estaremos interessados especialmente em EDB's nas quais as funções  $a$ ,  $b$  e  $c$  se anulam simultaneamente na origem e cuja função discriminante,  $\delta = b^2 - ac$ , possui uma singularidade de Morse neste ponto.

No Capítulo 3 utilizaremos os resultados sobre EDB's para estudar as linhas de curvatura de superfícies em  $\mathbb{R}^3$  e no espaço de Minkowski. Veremos que, genericamente, as linhas de curvatura em  $\mathbb{R}^3$  e no espaço de Minkowski se comportam como nas Figuras 2.3 e 3.2, respectivamente.

No último capítulo, apresentaremos os resultados a respeito da existência de pontos umbílicos em superfícies no espaço de Minkowski. Neste contexto, a conjectura de

Carathéodory será verdadeira e apresentaremos a sua demonstração. Por fim, analisaremos três casos particulares: a esfera, o ovoide e o toro.

# Capítulo 1

## Conceitos Iniciais

Neste capítulo apresentaremos um breve resumo sobre geometria diferencial de superfícies em  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{R}_1^3$ . Este estudo será essencial no decorrer deste trabalho.

A fim de fixar algumas notações que serão utilizadas durante toda a dissertação, considere o espaço  $\mathbb{R}^3$  com sua estrutura euclidiana usual. Denotamos por  $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^3$ . Ao longo de todo o trabalho utilizaremos  $B$  como base para  $\mathbb{R}^3$ , exceto quando fizermos menção ao contrário. No decorrer deste texto,  $S$  representará uma superfície suave (de classe  $C^\infty$ ), regular e orientada, em  $\mathbb{R}^3$  ou  $\mathbb{R}_1^3$ . O plano tangente a  $S$  em um dado ponto  $p \in S$  será denotado por  $T_p S$ .

### 1.1 Geometria Diferencial de Superfícies em $\mathbb{R}^3$

Nesta seção apresentaremos um resumo sobre geometria diferencial de superfícies em  $\mathbb{R}^3$ . Para mais detalhes e demonstrações dos resultados aqui apresentados, indicamos [6].

Em todo o trabalho, os símbolos  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\epsilon$ ,  $\|\cdot\|_\epsilon$  e  $\times_\epsilon$  representarão o produto interno, a norma e o produto vetorial usuais de  $\mathbb{R}^3$ , respectivamente. Utilizaremos o subíndice  $\epsilon$  para diferenciar tais estruturas de suas análogas no espaço de Minkowski.

Tome  $S$  uma superfície suave e orientada em  $\mathbb{R}^3$ . A forma quadrática

$$\begin{aligned} I_p : T_p S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto \langle w, w \rangle_\epsilon, \end{aligned}$$



em um ponto  $p \in S$ , é chamada de **primeira forma fundamental**, ou **métrica**, e é a maneira como a superfície herda o produto interno de  $\mathbb{R}^3$ .

Seja

$$\begin{aligned} x : U \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow S \\ (u, v) &\longmapsto x(u, v) \end{aligned}$$

uma parametrização local de  $S$ . Tome  $p = x(u_0, v_0)$  e  $w \in T_p S$ . Então existe uma curva regular  $\alpha(t) = x(u(t), v(t)) \in S$  tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = w$ . Como  $\alpha'(0) = x_u(u_0, v_0)u'(0) + x_v(u_0, v_0)v'(0)$ , vemos que  $w$  é combinação linear de  $x_u(u_0, v_0)$  e  $x_v(u_0, v_0)$ , ou seja,  $\{x_u(u_0, v_0), x_v(u_0, v_0)\}$  é uma base de  $T_p S$ .

**Observação 1.1.1.** *Para simplificar a notação, a partir deste momento iremos omitir os parâmetros das funções  $x_u$ ,  $x_v$ ,  $u'$  e  $v'$ , considerando que estas funções indicam seus valores em  $p$ .*

Podemos escrever a primeira forma fundamental como

$$\begin{aligned} I_p(w) &= \langle w, w \rangle_\epsilon \\ &= \langle x_u u' + x_v v', x_u u' + x_v v' \rangle_\epsilon \\ &= E(u')^2 + 2F u' v' + G(v')^2, \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde

$$E = \langle x_u, x_u \rangle_\epsilon, \quad F = \langle x_u, x_v \rangle_\epsilon, \quad G = \langle x_v, x_v \rangle_\epsilon. \tag{1.2}$$

Desta forma,  $E$ ,  $F$  e  $G$  são funções suaves em  $U$  e serão chamadas de **coeficientes da primeira forma fundamental**.

Considere a aplicação

$$\begin{aligned} N : x(U) &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ p &\longmapsto \frac{x_u \times_\epsilon x_v}{\|x_u \times_\epsilon x_v\|_\epsilon}(q), \end{aligned}$$

sendo  $p = x(q)$  e  $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_\epsilon = 1\}$ , denominada **aplicação de Gauss**. A aplicação de Gauss relaciona a cada ponto  $p \in x(U)$  um vetor unitário e normal à superfície  $S$  em  $p$ .

A derivada de  $N$  em  $p$  é uma aplicação linear auto-adjunta,  $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ . Podemos definir em  $T_pS$  uma forma quadrática dada por

$$\begin{aligned} II_p : T_pS &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto -\langle dN_p(w), w \rangle_\epsilon, \end{aligned}$$

que é chamada de **segunda forma fundamental** de  $S$  em  $p$ .

Como  $dN_p$  é auto-adjunta, existe uma base ortonormal  $\{b_1, b_2\}$  de  $T_pS$  tal que  $dN_p(b_1) = -k_1b_1$  e  $dN_p(b_2) = -k_2b_2$ . Além disso,  $k_1$  e  $k_2$  ( $k_1 \geq k_2$ ) são, respectivamente, o máximo e o mínimo de  $II_p$  restrita ao círculo unitário em  $T_pS$ . Os números  $k_1$  e  $k_2$  são chamados de **curvaturas principais** em  $p$  e as direções geradas pelos vetores  $b_1$  e  $b_2$  são chamadas de **direções principais** em  $p$ .

**Definição 1.1.1.** *Se uma curva regular e conexa  $C$  em  $S$  é tal que para todo  $p \in C$  a reta tangente a  $C$  em  $p$  é uma direção principal, então  $C$  é chamada **linha de curvatura** de  $S$ .*

**Proposição 1.1.1 (Olinde Rodrigues).** *Uma condição necessária e suficiente para que uma curva regular e conexa  $C$  em  $S$  seja uma linha de curvatura de  $S$  é que*

$$N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t),$$

para qualquer parametrização  $\alpha(t)$  de  $C$ , onde  $N(t) = N \circ \alpha(t)$  e  $\lambda$  é uma função diferenciável de  $t$ . Nesse caso,  $-\lambda(t)$  é a curvatura (principal) segundo  $\alpha'(t)$ .

Dada a derivada da aplicação de Gauss definimos a **curvatura Gaussiana**,  $K$ , e a **curvatura média**,  $H$ , de  $S$  em  $p$  como sendo

$$K = \det(dN_p) = k_1k_2 \quad \text{e} \quad H = -\frac{\text{tr}(dN_p)}{2} = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Um ponto de  $S$  é chamado de **elíptico**, **hiperbólico**, **parabólico** ou **planar** quando  $K > 0$ ,  $K < 0$ ,  $K = 0$  com  $dN_p \neq 0$ , ou  $dN_p = 0$ , respectivamente.

**Teorema 1.1.1 (Teorema de Hadamard).** *Se  $S$  é uma superfície onde todos os pontos são elípticos, então a aplicação de Gauss é um difeomorfismo de  $S$  em  $\mathbb{S}^2$ .*

**Definição 1.1.2.** Um ponto  $p \in S$  é chamado de **ponto umbílico** de  $S$  quando  $k_1 = k_2$  em  $p$ .

**Proposição 1.1.2.** Um ponto  $p \in S$  é umbílico se, e somente se,  $dN_p$  for um múltiplo da identidade.

A partir da Definição 1.1.2, vemos que um ponto  $p$  é umbílico se, e somente se,  $H^2 - K = 0$ . Uma superfície onde todos os pontos são umbílicos é chamada de **totalmente umbílica**.

Vamos agora obter a segunda forma fundamental a partir de um sistema de coordenadas. Para isso, considere  $x : U \rightarrow S$ ,  $p \in S$ ,  $w \in T_p S$  e  $\alpha(t)$  como os utilizados no cálculo dos coeficientes da primeira forma fundamental. Tomando  $N_u = dN_p(x_u)$  e  $N_v = dN_p(x_v)$ , temos que

$$dN_p(w) = dN_p(x_u u' + x_v v') = N_u u' + N_v v'.$$

Como  $N_u, N_v \in T_p S$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} N_u &= a_{11}x_u + a_{21}x_v, \\ N_v &= a_{12}x_u + a_{22}x_v \end{aligned} \tag{1.3}$$

e, portanto,

$$dN_p(w) = (a_{11}u' + a_{12}v')x_u + (a_{21}u' + a_{22}v')x_v.$$

Desta forma, escrevendo os vetores de  $T_p S$  na base  $\{x_u, x_v\}$ , obtemos

$$dN_p \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Isto mostra que  $dN_p$  é dada pela matriz  $(a_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2$ . Por outro lado, a segunda forma fundamental é dada por

$$\begin{aligned} II_p(w) &= -\langle dN_p(w), w \rangle_\epsilon \\ &= -\langle N_u u' + N_v v', x_u u' + x_v v' \rangle_\epsilon \\ &= e(u')^2 + 2f u' v' + g(v')^2, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
e &= -\langle N_u, x_u \rangle_\epsilon = \langle N, x_{uu} \rangle_\epsilon, \\
f &= -\langle N_u, x_v \rangle_\epsilon = \langle N, x_{uv} \rangle_\epsilon = -\langle N_v, x_u \rangle_\epsilon, \\
g &= -\langle N_v, x_v \rangle_\epsilon = \langle N, x_{vv} \rangle_\epsilon,
\end{aligned} \tag{1.5}$$

sendo que tais igualdades são verdadeiras pois  $\langle N, x_u \rangle_\epsilon = \langle N, x_v \rangle_\epsilon = 0$ . Desta forma,  $e$ ,  $f$  e  $g$  são funções suaves em  $U$  e serão chamadas de **coeficientes da segunda forma fundamental**.

Da definição dos coeficientes da segunda forma fundamental e pelas equações (1.2) e (1.3), obtemos

$$\begin{aligned}
-f &= \langle N_u, x_v \rangle_\epsilon = a_{11}F + a_{21}G, \\
-f &= \langle N_v, x_u \rangle_\epsilon = a_{12}E + a_{22}F, \\
-e &= \langle N_u, x_u \rangle_\epsilon = a_{11}E + a_{21}F, \\
-g &= \langle N_v, x_v \rangle_\epsilon = a_{12}F + a_{22}G.
\end{aligned}$$

Estas relações podem ser resolvidas, chegando em

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}, & a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \\
a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2}, & a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Aplicando as equações (1.6) nas definições de curvatura Gaussiana e curvatura média encontramos

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad \text{e} \quad H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}. \tag{1.7}$$

De acordo com a Proposição 1.1.1, uma curva regular conexa  $C \subset S$ , parametrizada por  $\gamma(t) = x(u(t), v(t))$ , é uma linha de curvatura de  $S$  se, e somente se,

$$dN_p(\gamma'(t)) = \lambda(t)\gamma'(t), \tag{1.8}$$

onde  $\lambda$  é uma função real. Das equações (1.4), (1.6) e (1.8) vemos que  $C$  é uma linha de curvatura se, e somente se,

$$\begin{aligned}
\frac{fF - eG}{EG - F^2}u' + \frac{gF - fG}{EG - F^2}v' &= \lambda u', \\
\frac{eF - fE}{EG - F^2}u' + \frac{fF - gE}{EG - F^2}v' &= \lambda v'.
\end{aligned}$$

Isolando  $\lambda$  no sistema anterior, obtemos a equação diferencial das linhas de curvatura

$$(fG - gF)(v')^2 + (eG - gE)u'v' + (eF - fE)(u')^2 = 0, \quad (1.9)$$

a qual pode ser escrita na forma matricial como

$$\det \begin{pmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{pmatrix} = 0.$$

Da Proposição 1.1.2 vemos que o ponto  $p \in S$  será umbílico se, e somente se,  $a_{11} = a_{22}$  e  $a_{12} = a_{21} = 0$ . Das equações em (1.6), resulta que tais condições são satisfeitas quando  $gE - eG = gF - fG = fE - eF = 0$ . Logo, um ponto  $p$  é umbílico se, e somente se, os coeficientes da equação (1.9) se anulam simultaneamente em  $p$ .

## 1.2 Geometria Diferencial de Superfícies no Espaço de Minkowski

Nesta seção apresentaremos o espaço de Minkowski e elencaremos propriedades de superfícies neste espaço. Para mais detalhes recomendamos a leitura de [19] e [21]. Como ponto de partida temos a seguinte definição.

**Definição 1.2.1.** *O espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do pseudo-produto interno*

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto -u_0v_0 + u_1v_1 + u_2v_2, \end{aligned} \quad (1.10)$$

onde  $u = (u_0, u_1, u_2)$  e  $v = (v_0, v_1, v_2)$ , é chamado de **espaço de Minkowski** e é denotado por  $\mathbb{R}_1^3$ .

Como  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é um pseudo-produto interno, existem vetores  $u, v, w \in \mathbb{R}_1^3$ , não nulos, tais que  $\langle u, u \rangle > 0$ ,  $\langle v, v \rangle = 0$  e  $\langle w, w \rangle < 0$ . Isto nos leva a definir a norma de um vetor  $v \in \mathbb{R}_1^3$  como sendo  $\|v\| = \sqrt{|\langle v, v \rangle|}$ . Decorre a seguinte classificação.

**Definição 1.2.2.** *Um vetor  $v \in \mathbb{R}_1^3$  é classificado como:*

(1) **tipo espaço**, se  $\langle v, v \rangle > 0$  ou  $v = \vec{0}$ ;

(2) **tipo luz**, se  $\langle v, v \rangle = 0$  e  $v \neq \vec{0}$ ;

(3) **tipo tempo**, se  $\langle v, v \rangle < 0$ .

Note que se  $v = (v_0, v_1, v_2) \in \mathbb{R}_1^3$ , então  $\langle v, v \rangle = -v_0^2 + v_1^2 + v_2^2$ . Logo,  $v$  será tipo luz se, e somente se,

$$v_0 = \pm \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \quad \text{e} \quad v \neq \vec{0}. \quad (1.11)$$

A equação (1.11) nos mostra que os vetores tipo luz estão contidos em um cone e todos os pontos deste cone, excetuando a origem, são tipo luz. Por isto, o conjunto dos vetores de  $\mathbb{R}_1^3$  que são do tipo luz é chamado de **cone de luz** e o representaremos por  $LC$ .

Um subespaço vetorial  $U$  de  $\mathbb{R}_1^3$  é tipo espaço (resp. tipo tempo, ou tipo luz) se  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  restrita a  $U$  for positiva definida (resp. não degenerada de índice 1, ou degenerada). Dado um plano  $P_c^v = \{u \in \mathbb{R}_1^3 : \langle u, v \rangle = c\}$ , o vetor  $v$  é chamado de **vetor normal** ao plano  $P_c^v$ . Note que,  $P_0^v$  é um subespaço vetorial, assim pode ser classificado como acima. Dizemos que  $P_c^v$  é tipo espaço (resp. tipo tempo, ou tipo luz) se  $P_0^v$  é tipo espaço (resp. tipo tempo, ou tipo luz).

**Proposição 1.2.1.** *Valem as seguintes afirmações.*

(1)  $P_0^v$  é tipo espaço (resp. tipo tempo, ou tipo luz) se, e somente se,  $v$  é tipo tempo (resp. tipo espaço, ou tipo luz);

(2)  $P_0^v$  é tipo espaço se, e somente se, todos os vetores de  $P_0^v$  são tipo espaço;

(3)  $P_0^v$  é tipo tempo se, e somente se,  $P_0^v$  possui um vetor tipo tempo;

(4)  $P_0^v$  é tipo tempo se, e somente se,  $P_0^v$  possui dois vetores tipo luz linearmente independentes;

(5)  $P_0^v$  é tipo luz se, e somente se,  $P_0^v$  possui um único vetor tipo luz linearmente independente;

(6)  $P_0^v$  é tipo luz se, e somente se,  $v \in P_0^v$ .

A demonstração da Proposição 1.2.1 pode ser encontrada em [19], por isso a omitiremos aqui.

Para o espaço de Minkowski a definição de produto vetorial é a mesma utilizada para o espaço Euclidiano usual.

**Definição 1.2.3.** *Sejam  $u, v \in \mathbb{R}_1^3$ . O produto vetorial de  $u$  e  $v$  é o único vetor, denotado por  $u \times v$ , que satisfaz*

$$\langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w), \quad \forall w \in \mathbb{R}_1^3, \quad (1.12)$$

onde  $\det(u, v, w)$  é o determinante da matriz obtida colocando em cada coluna as coordenadas dos vetores  $u, v$  e  $w$ , respectivamente.

Se  $u = (u_0, u_1, u_2)$  e  $v = (v_0, v_1, v_2)$ , temos que o vetor

$$\det \begin{pmatrix} -\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_0 & u_1 & u_2 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix} = (u_2v_1 - u_1v_2, u_2v_0 - u_0v_2, u_0v_1 - u_1v_0) \in \mathbb{R}_1^3$$

satisfaz a condição (1.12), o que garante a existência de  $u \times v$ . A unicidade de tal vetor é dada pela bilinearidade de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Assim, o produto vetorial está bem definido.

**Proposição 1.2.2.** *O produto vetorial possui as seguintes propriedades:*

- (1)  $u \times v = -v \times u$ ;
- (2)  $\langle u, u \times v \rangle = \langle v, u \times v \rangle = 0$ .

As demonstrações de tais propriedades são imediatas a partir da Definição 1.2.3.

**Observação 1.2.1.** *Ao longo de todo este trabalho os símbolos  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $\|\cdot\|$  e  $\times$  irão representar o pseudo-produto interno, a norma e o produto vetorial, respectivamente, definidos para o espaço de Minkowski.*

Seja  $S$  uma superfície suave e orientada em  $\mathbb{R}_1^3$  (de classe  $C^\infty$ ). A forma quadrática

$$\begin{aligned} I_p : T_p S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto \langle w, w \rangle, \end{aligned}$$

em um ponto  $p \in S$ , é chamada de **primeira forma fundamental**, ou **métrica**, e é a maneira como a superfície herda o pseudo-produto interno de  $\mathbb{R}_1^3$ .

Tome

$$\begin{aligned} x : U \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow S \\ (u, v) &\longmapsto x(u, v) \end{aligned}$$

uma parametrização local de  $S$ . Dado  $p = x(u_0, v_0) \in S$ , temos que  $\{x_u, x_v\}$  é uma base para  $T_p S$  (resultado análogo ao obtido para o caso Euclidiano anteriormente). Assim, dado  $w \in T_p S$ , podemos escrever  $w = ax_u + bx_v$  e, procedendo como em (1.1), obtemos

$$\begin{aligned} I_p(w) &= Ea^2 + 2Fab + Gb^2 \\ &= (a \ b) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{1.13}$$

onde

$$E = \langle x_u, x_u \rangle, \quad F = \langle x_u, x_v \rangle, \quad G = \langle x_v, x_v \rangle. \tag{1.14}$$

Desta forma,  $E$ ,  $F$  e  $G$  são funções suaves em  $U$  e serão chamadas de **coeficientes da primeira forma fundamental**.

Diremos que a métrica é degenerada em um ponto  $p \in S$  quando  $T_p S$  é tipo luz. O conjunto de todos os pontos de  $S$  onde a métrica é degenerada é chamado de **local de degenerescência** e será representado por  $LD$ . Também identificaremos a pré-imagem de  $LD$  por  $x$  como  $LD$ . Então, tomando

$$\delta(u, v) = (EG - F^2)(u, v), \tag{1.15}$$

o conjunto  $LD$  (em  $U$ ) é  $\delta^{-1}(0)$  e disto segue que  $LD$  é um subconjunto fechado de  $S$ .

O subconjunto  $S_1 \subset S$  formado pelos pontos onde o plano tangente é tipo espaço é chamado de parte Riemanniana de  $S$ . Da mesma forma, o subconjunto  $S_2 \subset S$  dos pontos onde o plano tangente é tipo tempo é chamado de parte Lorentziana de  $S$ . A superfície  $S$  é chamada de **superfície Lorentziana** quando  $S = S_2$ . Definimos  $U_i = x^{-1}(S_i)$ , com  $i = 1, 2$ , assim  $U = U_1 \cup U_2 \cup LD$ .

**Proposição 1.2.3.** *Seja  $p = x(u, v) \in S$ , então*



(1)  $p$  pertence à parte Riemanniana de  $S$  quando  $(EG - F^2)(u, v) > 0$ ,

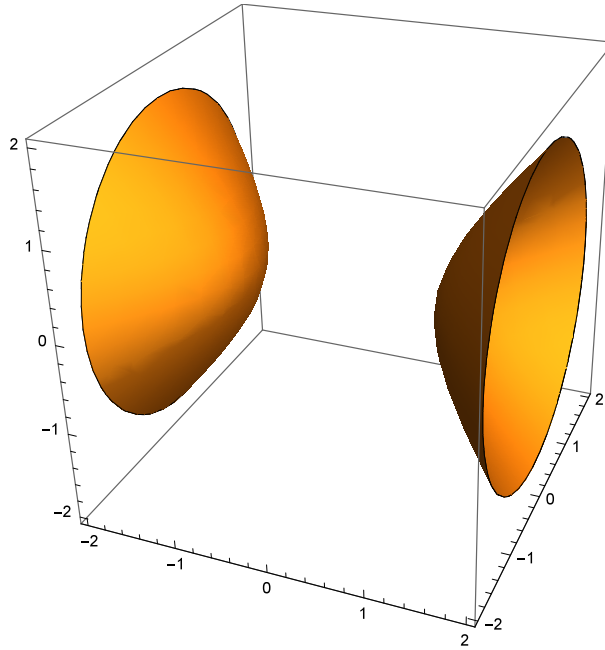
(2)  $p$  pertence à parte Lorentziana de  $S$  quando  $(EG - F^2)(u, v) < 0$ .

Considere a aplicação

$$\begin{aligned} N : x(U) \setminus LD &\longrightarrow \mathbb{R}_1^3 \\ p &\longmapsto \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|}(q), \end{aligned}$$

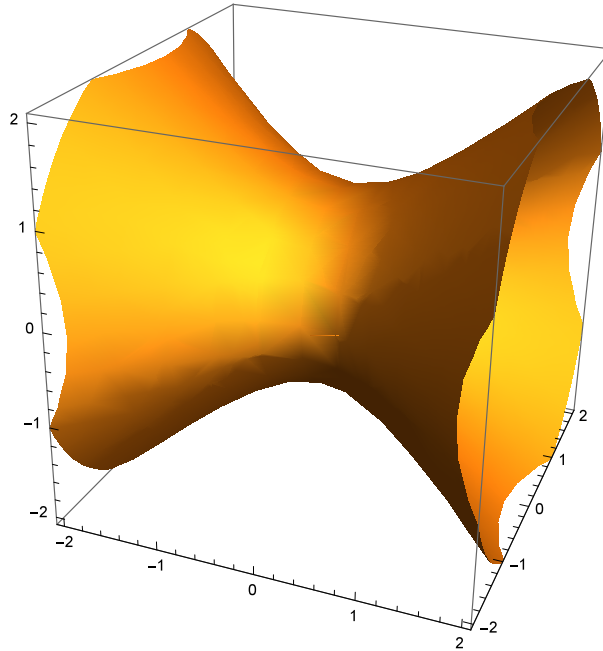
onde  $p = x(q)$ . Esta aplicação relaciona a cada ponto  $p \in x(U) \setminus LD$  um vetor unitário e normal à superfície  $S$  em  $p$ . Se  $p \in S_1$ , então  $N(p) \in \mathbb{H}^2(-1) = \{x \in \mathbb{R}_1^3 : \langle x, x \rangle = -1\}$ . Quando  $p \in S_2$ , temos que  $N(p) \in \mathbb{S}_1^2 = \{x \in \mathbb{R}_1^3 : \langle x, x \rangle = 1\}$ .

**Definição 1.2.4.** A superfície  $\mathbb{H}^2(-1) = \{x \in \mathbb{R}_1^3 : \langle x, x \rangle = -1\}$  é chamada de **plano hiperbólico** e  $\mathbb{S}_1^2 = \{x \in \mathbb{R}_1^3 : \langle x, x \rangle = 1\}$  é denominada **espaço De Sitter**. Ver Figuras 1.1 e 1.2.



**Figura 1.1:** Plano hiperbólico.

A derivada de  $N$  em  $p$  é uma aplicação linear auto-adjunta,  $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ . Tome  $A_p = -dN_p$ , note que  $A_p$  também é auto-adjunta. Podemos definir em  $T_p S$  uma forma



**Figura 1.2:** Espaço De Sitter.

quadrática dada por

$$\begin{aligned} II_p : T_p S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto \langle A_p(w), w \rangle, \end{aligned}$$

que é chamada de **segunda forma fundamental** de  $S$  em  $p$ .

Quando  $A_p$  possuir autovalores reais, eles serão chamados de **curvaturas principais** de  $S$  em  $p$  e as direções definidas pelos autovetores associados serão chamadas de **direções principais** de  $S$  em  $p$ . Observamos que sempre existem duas direções principais em todos os pontos da parte Riemanniana de  $S$ , porém na região Lorentziana podem ocorrer pontos onde existem duas, apenas uma ou nenhuma direção principal.

**Definição 1.2.5.** *Se uma curva regular e conexa  $C$  em  $S$  é tal que para todo  $p \in C$  a reta tangente a  $C$  em  $p$  é uma direção principal, então  $C$  é chamada **linha de curvatura** de  $S$ .*

A Proposição 1.1.1 é válida também neste contexto, e sua demonstração é análoga ao caso Euclidiano.

**Definição 1.2.6.** *Seja  $p \in S$  um ponto da parte Riemanniana (ou Lorentziana). Se  $A_p$  é um múltiplo da identidade, então  $p$  é chamado de **ponto umbílico tipo espaço (tipo tempo)**.*

Podemos obter a segunda forma fundamental a partir de um sistema de coordenadas,  $x : U \rightarrow S$ . Procedendo de forma análoga ao caso Euclidiano, segue que

$$II_p(w) = l(u')^2 + 2mu'v' + n(v')^2,$$

sendo  $w = x_u u' + x_v v'$  e

$$l = \langle N, x_{uu} \rangle, \quad m = \langle N, x_{uv} \rangle, \quad n = \langle N, x_{vv} \rangle, \quad (1.16)$$

onde  $e$ ,  $f$  e  $g$  são funções suaves em  $U \setminus LD$  e serão chamadas de **coeficientes da segunda forma fundamental**. Ainda de modo análogo ao caso Euclidiano, as linhas de curvatura são dadas pela equação diferencial

$$(mG - nF)(v')^2 + (lG - nE)u'v' + (lF - mE)(u')^2 = 0, \quad (1.17)$$

e os pontos umbílicos serão os pontos onde os coeficientes de (1.17) se anulam simultaneamente.

O discriminante da equação (1.17) será o subconjunto de  $U \setminus LD$  formado pelos pontos onde (1.17) determina uma única direção, tal subconjunto será denotado por  $LPL$ . Definindo

$$\delta_2(u, v) = ((lG - nE)^2 - 4(mG - nF)(lF - mE))(u, v),$$

temos que  $LPL = \delta_2^{-1}(0)$ .

A seguir iremos estender as linhas de curvatura para os pontos do  $LD$ . Note que a equação (1.17) é homogênea de grau 1 em  $l$ ,  $m$  e  $n$ , isto é, multiplicando  $l$ ,  $m$  e  $n$  por uma constante não nula  $c \in \mathbb{R}$  esta constante pode ser colocada em evidência na equação (1.17). Logo, multiplicando ambos os lados de (1.17) por  $\|x_u \times x_v\| \neq 0$ , obtemos a equação

$$(\bar{m}G - \bar{n}F)(v')^2 + (\bar{l}G - \bar{n}E)u'v' + (\bar{l}F - \bar{m}E)(u')^2 = 0, \quad (1.18)$$

que não altera os pares de direções de (1.17) em  $x(U) \setminus LD$  e está bem definida nos pontos do  $LD$ . Os coeficientes  $\bar{l}$ ,  $\bar{m}$  e  $\bar{n}$  são dados por

$$\bar{l} = \langle x_u \times x_v, x_{uu} \rangle, \quad \bar{m} = \langle x_u \times x_v, x_{uv} \rangle, \quad \bar{n} = \langle x_u \times x_v, x_{vv} \rangle. \quad (1.19)$$

Anteriormente, definimos os pontos umbílicos tipo tempo e espaço, como sendo os pontos  $p \in S \setminus LD$  onde  $A_p$  é um múltiplo da identidade. Entretanto, nos pontos do  $LD$  não está bem definido o operador  $A_p$ , por isto definiremos os **pontos umbílicos tipo luz** como sendo os pontos do  $LD$  onde os coeficientes de (1.18) se anulam simultaneamente. Como vimos, esta definição é equivalente à dada para os pontos umbílicos tipo tempo e tipo espaço.

**Definição 1.2.7.** Dizemos que  $p \in S$  é um **ponto umbílico** se  $p$  for um ponto umbílico tipo espaço, tempo ou luz.

Uma superfície em  $\mathbb{R}_1^3$  é dita **totalmente umbílica** se todos os seus pontos são pontos umbílicos. Assim, existem apenas três superfícies totalmente umbílicas: o plano, o plano hiperbólico e o espaço De Sitter.

# Capítulo 2

## Equações Diferenciais Binárias

Neste capítulo apresentaremos um estudo sobre Equações Diferenciais Binárias (EDB's). Iremos destacar especialmente o caso onde a função discriminante possui uma singularidade do tipo Morse na origem. Os resultados desta seção serão utilizados no estudo das linhas de curvatura de superfícies em  $\mathbb{R}^3$  e no espaço de Minkowski,  $\mathbb{R}_1^3$ . Mais detalhes a respeito deste tema podem ser encontrados em [4], [10] e [13].

### 2.1 Equações Diferenciais Binárias

Uma **Equação Diferencial Implícita** (EDI) é uma equação da forma

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

sendo  $F$  uma função suave. Tais equações recebem o nome implícita para distinguí-las das equações diferenciais onde a derivada é dada explicitamente por uma função de  $x$  e  $y$ , isto é

$$\frac{dy}{dx} = G(x, y).$$

Uma outra forma de escrever a equação acima é

$$a(x, y)dy + b(x, y)dx = 0.$$

Genericamente, esta Equação Diferencial Ordinária (EDO) determina um campo de direções, ou seja, uma direção é relacionada com cada ponto do plano. Uma curva re-

gular é chamada de **solução** da EDO se em cada um de seus pontos ela for tangente a direção dada. Os pontos onde  $a$  e  $b$  se anulam simultaneamente são chamados de **pontos singulares** da EDO.

Por outro lado, uma EDI pode determinar muitas direções para um ponto  $(x, y)$  do plano e, conseqüentemente, muitas curvas soluções. Assim, uma EDI pode ser pensada como uma superposição de EDO's. Os pontos singulares da EDI serão de três formas: os pontos onde duas ou mais direções coincidem, os pontos onde alguma das direções não está bem definida e onde ambas as coisas ocorrem.

Uma EDI é chamada de **Equação Diferencial Binária** (EDB) se existirem no máximo duas direções para cada ponto do plano. Neste trabalho, estudaremos as EDB's da forma

$$a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dydx + c(x, y)dx^2 = 0, \quad (2.1)$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são funções suaves em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Relacionamos com a equação (2.1) a função  $\delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y)$ , chamada **função discriminante** da EDB, e o **conjunto discriminante**  $\Delta = \{(x, y) \in U : \delta(x, y) = 0\}$ .

**Proposição 2.1.1.** *A equação (2.1) define um par de direções em cada ponto  $(x, y) \in U$  onde  $\delta(x, y) > 0$  e não existem direções em pontos onde  $\delta(x, y) < 0$ . Nos pontos de  $\Delta$ , onde as funções  $a$ ,  $b$  e  $c$  não se anulam simultaneamente, a EDB (2.1) define uma única direção.*

**Demonstração:** Seja  $(x_0, y_0) \in U$ . Podemos supor, sem perda de generalidade, que  $a(x_0, y_0) \neq 0$ . Tome as constantes  $a_0 = a(x_0, y_0)$ ,  $b_0 = b(x_0, y_0)$  e  $c_0 = c(x_0, y_0)$  e construa a seguinte equação do segundo grau na variável  $z$

$$a_0z^2 + 2b_0z + c_0 = 0. \quad (2.2)$$

Se  $\delta(x_0, y_0) > 0$ , então  $4b_0^2 - 4a_0c_0 > 0$  e a equação (2.2) possui duas raízes reais distintas, digamos  $z_1$  e  $z_2$ . A direção dada por  $dx = 1$  e  $dy = z_1$  é solução da EDB (2.1) em  $(x_0, y_0)$ . Da mesma forma, a direção  $dx = 1$  e  $dy = z_2$  é uma outra solução de (2.1) em  $(x_0, y_0)$ . Logo, a EDB define duas direções em  $(x_0, y_0)$ .

Se  $\delta(x_0, y_0) < 0$ , então  $4b_0^2 - 4a_0c_0 < 0$  e a equação (2.2) não possui raízes reais. Suponha que a EDB (2.1) define uma direção em  $(x_0, y_0)$ , com  $dx = x_1$  e  $dy = y_1$ . Logo,  $x_1 \neq 0$  ou  $y_1 \neq 0$ . Como  $a(x_0, y_0) \neq 0$ , temos que  $x_1 \neq 0$ , pois se  $x_1 = 0$ , então  $y_1$  também seria nula, o que não é possível. Então  $z = y_1/x_1$  é solução de (2.2), contrariando o fato de que esta equação não possui soluções reais. Assim, a EDB não define nenhuma direção em  $(x_0, y_0)$ .

Por fim, se  $\delta(x_0, y_0) = 0$ , então  $4b_0^2 - 4a_0c_0 = 0$  e a equação (2.2) possui uma única raiz real, digamos  $z_1$ . A direção dada por  $dx = 1$  e  $dy = z_1$  é solução de (2.1) em  $(x_0, y_0)$ , o que garante a existência. Suponha que exista uma outra solução  $dx = x_1$  e  $dy = y_1$  para (2.1) em  $(x_0, y_0)$ . Então, como no caso anterior,  $x_1 \neq 0$  e  $z_2 = y_1/x_1$  é solução da equação do segundo grau. Como as direções são distintas, temos que  $z_2 \neq z_1$ , o que contradiz o fato de (2.2) ter uma única solução. Portanto, a EDB define uma única direção em  $(x_0, y_0)$ . ■

O conjunto discriminante juntamente com as direções definidas em cada ponto de  $U$  são chamados de configuração da EDB (2.1). Duas equações diferenciais binárias são ditas **topologicamente equivalentes**, se existir um homeomorfismo local do plano que leva a configuração de uma delas na da outra, e são chamadas de **suavemente equivalentes**, quando a configuração de uma é levada na configuração da outra por meio de uma mudança local de coordenadas e pela multiplicação por uma função suave não nula.

Ao longo de todo o trabalho consideraremos o ponto de interesse como sendo a origem, isto é, iremos analisar o comportamento das soluções de (2.1) próximas do ponto  $(0, 0) \in U$ . Consideraremos também  $U = \mathbb{R}^2$ , para simplificar a notação.

Na próxima seção estudaremos a EDB (2.1) quando as funções  $a$ ,  $b$  e  $c$  se anulam simultaneamente na origem e a função discriminante possui uma singularidade de Morse em  $(0, 0)$ . Este estudo será feito através do levantamento do campo de direções.

## 2.2 Levantamento do Campo de Direções

O método do levantamento do campo de direções consiste em desdobrar a EDB em uma EDO definida num espaço mais complicado. Considere a EDB (2.1) e o espaço  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1$ ,

onde  $\mathbb{R}P^1$  representa o espaço projetivo. Tomando uma carta em  $\mathbb{R}P^1$ , dada por  $r = dy/dx$ , consideramos localmente em  $\mathbb{R}^3$  a superfície

$$M = \{(x, y, r) \in \mathbb{R}^3 : P(x, y, r) = 0\}, \quad (2.3)$$

com  $P(x, y, r) = a(x, y)r^2 + 2b(x, y)r + c(x, y)$ . Definimos  $a(x, y) = a_1x + a_2y + o(2)$ ,  $b(x, y) = b_1x + b_2y + o(2)$  e  $c(x, y) = c_1x + c_2y + o(2)$ , sendo  $o(2)$  termos de ordem maior do que ou igual a 2 nas variáveis  $x$  e  $y$ .

Juntamente com a superfície  $M$  obtemos uma projeção natural

$$\begin{aligned} \pi : \quad M &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, r) &\longmapsto (x, y), \end{aligned}$$

a qual será utilizada adiante.

**Proposição 2.2.1.** *Valem as seguintes afirmações.*

- (1) *A superfície  $M$  dada em (2.3) é suave em uma vizinhança de  $\{0\} \times \mathbb{R}P^1$  se, e somente se, a função discriminante  $\delta = b^2 - ac$  tem uma singularidade de Morse na origem.*
- (2) *A projeção  $\pi : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $(x, y, r) \mapsto (x, y)$  é um difeomorfismo local fora de  $\pi^{-1}(\Delta)$ , onde  $\Delta$  é o conjunto discriminante.*

**Demonstração:**

(1) A superfície  $M$  será suave se, e somente se, 0 for um valor regular de  $P$  em uma vizinhança de  $\{0\} \times \mathbb{R}P^1$ . A função  $P_r = \partial P / \partial r = 2ar + 2b$  é identicamente nula em  $\{0\} \times \mathbb{R}P^1$ . Assim, 0 deixa de ser valor regular de  $P$  em uma vizinhança de  $\{0\} \times \mathbb{R}P^1$  se, e somente se,

$$\frac{\partial P}{\partial x}(0, 0, r) = a_1r^2 + 2b_1r + c_1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(0, 0, r) = a_2r^2 + 2b_2r + c_2$$

forem simultaneamente nulas para algum  $r$ . A matriz resultante  $R$  destes dois polinômios é dada por

$$R = \begin{pmatrix} a_1 & 2b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & 2b_2 & c_2 & 0 \\ 0 & a_1 & 2b_1 & c_1 \\ 0 & a_2 & 2b_2 & c_2 \end{pmatrix}.$$



Logo,

$$\det(R) = 0 \iff (c_2a_1 - c_1a_2)^2 - 4(b_2a_1 - b_1a_2)(c_2b_1 - c_1b_2) = 0. \quad (2.4)$$

Portanto, existe uma solução  $r$  dos dois polinômios se, e somente se, (2.4) é verdadeira.

Por outro lado, a função discriminante é dada por

$$\delta = b^2 - ac = (b_1x + b_2y + o(2))^2 - (a_1x + a_2y + o(2))(c_1x + c_2y + o(2)).$$

Depois de alguns cálculos, resulta que

$$\delta = (b_1^2 - c_1a_1)x^2 + (2b_1b_2 - c_2a_1 - c_1a_2)xy + (b_2^2 - c_2a_2)y^2 + o(3). \quad (2.5)$$

A função discriminante possui uma singularidade na origem, esta singularidade será de Morse quando o determinante da matriz Hessiana de  $\delta$  nesse ponto,  $\text{Hess } \delta(0, 0)$ , é diferente de zero. Este determinante é dado por

$$\det(\text{Hess } \delta(0, 0)) = 4(b_1^2 - c_1a_1)(b_2^2 - c_2a_2) - (2b_1b_2 - c_2a_1 - c_1a_2)^2.$$

Fazendo algumas simplificações, concluímos que

$$\det(\text{Hess } \delta(0, 0)) = 4(b_2a_1 - b_1a_2)(c_2b_1 - c_1b_2) - (c_2a_1 - c_1a_2)^2.$$

Portanto, o determinante de  $\text{Hess } \delta(0, 0)$  é diferente de zero se, e somente se, a expressão (2.4) não é válida. Assim, a superfície  $M$  será suave em uma vizinhança de  $\{0\} \times \mathbb{R}P^1$  se, e somente se,  $\delta$  possui uma singularidade de Morse na origem.

**(2)** A projeção  $\pi$  não é um difeomorfismo local nos pontos  $(x, y, r)$  onde  $P_r(x, y, r) = 0$ , isto é, quando  $P = P_r = 0$  ( $P = 0$ , para que o ponto esteja na superfície  $M$ ), isto quer dizer que o plano tangente à superfície  $M$  é vertical. Calculando o resultante de  $P$  e  $P_r$ , vemos que  $P = P_r = 0$  se, e somente se,  $b^2 - ac = 0$ , que é precisamente  $\pi^{-1}(\Delta)$ .

■

Assumindo que a superfície  $M$  é suave, podemos fazer a seguinte construção. Em cada ponto  $(x, y, r) \in M$  tomamos uma direção tangente a  $M$  e cuja projeção esteja sobre a

reta que passa por  $(x, y)$  com direção  $r$ . De fato, seja  $r$  uma das direções definidas por (2.1) em  $(x, y)$ . O plano que é paralelo ao eixo  $r$  e contém a reta que passa por  $(x, y)$  com direção  $r$  é chamado **plano de contato**. O plano tangente a  $M$  em  $(x, y, r)$  é diferente do plano de contato sempre que  $P_r(x, y, r) \neq 0$ . Quando isto ocorre, a intersecção destes planos será uma reta. Além disso, se  $P_r(x, y, r) \neq 0$ , então isto também ocorrerá para todos os pontos em uma vizinhança de  $(x, y, r)$ . Assim, em uma vizinhança de  $(x, y, r)$ , os planos de contato e os planos tangentes se interceptarão segundo retas, dando origem a um campo de direções em  $M$  com as propriedades desejadas.

**Definição 2.2.1.** *Um campo vetorial  $\xi$  sobre a superfície  $M$  é chamado de **levantamento da EDB** (2.1) se, e somente se,  $d\pi_{(x,y,r)}(\xi)$  é um vetor de direção  $r$ . Quando  $\xi$  é, além disso, um campo tangente à superfície  $M$ , dizemos que  $\xi$  é um **levantamento adequado** sobre  $M$ .*

**Proposição 2.2.2.** *Valem as seguintes afirmações.*

(1) *O campo vetorial*

$$\xi = P_r \frac{\partial}{\partial x} + rP_r \frac{\partial}{\partial y} - (P_x + rP_y) \frac{\partial}{\partial r}$$

*é um levantamento adequado sobre  $M$  do campo bivaluado (2.1). Esse campo é chamado de **Campo de Lie-Cartan**.*

(2) *O campo vetorial  $\xi$  tem genericamente um ou três pontos de equilíbrio em  $\{0\} \times \mathbb{R}P^1$ .*

*Estes pontos são do tipo nó ou sela.*

**Demonstração:**

(1) Seja

$$\xi = A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial y} + C \frac{\partial}{\partial r}$$

um campo vetorial em  $M$ . O campo  $\xi$  é um levantamento adequado se ele for tangente à superfície  $M$  e  $d\pi_{(x,y,r)}(\xi)$  é um vetor de direção  $r$ . Como  $\pi(x, y, r) = (x, y)$ , segue que

$$d_{(x,y,r)}\pi(\xi) = A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial y},$$

portanto  $r = B/A$ .

A condição de tangência do campo  $\xi$  em  $M$  é dada por  $AP_x + rAP_y + CP_r = 0$ . Tomando  $A = 1$ , obtemos

$$C = \frac{-(P_x + rP_y)}{P_r}.$$

Multiplicando o campo  $\xi$  por  $P_r$ , resulta que

$$\xi = P_r \frac{\partial}{\partial x} + rP_r \frac{\partial}{\partial y} - (P_x + rP_y) \frac{\partial}{\partial r}.$$

(2) Os pontos de equilíbrio do campo  $\xi$  são dados pelo anulamento de  $P$ ,  $P_r$  e  $P_x + rP_y$ . Quando  $P = P_r = 0$ , temos que  $b^2 - ac = 0$ , e isto determina a imagem inversa de  $\Delta$  pela projeção  $\pi$ , que contém  $\{0\} \times \mathbb{R}P^1$ . Assim, os pontos de equilíbrio do campo  $\xi$  em  $\{0\} \times \mathbb{R}P^1$  são dados pelos zeros de  $(P_x + rP_y)$  em  $\{0\} \times \mathbb{R}P^1$ , ou seja, por  $(P_x + rP_y)(0, 0, r) = 0$ . Esta equação é uma cúbica em  $r$  dada por

$$\Phi(r) = a_2 r^3 + (2b_2 + a_1)r^2 + (2b_1 + c_2)r + c_1.$$

Genericamente podemos escolher  $a_i, b_i, c_i$ , com  $i = 1, 2$ , no conjunto aberto e denso de  $\mathbb{R}^6$ , que é o complementar do conjunto definido pelo anulamento de  $\Phi$  e  $\Phi'$  simultaneamente, de forma que a cúbica  $\Phi$  tenha uma ou três raízes reais distintas.

Procuramos agora o tipo topológico dos correspondentes pontos de equilíbrio de  $\xi$ . Para isto, é necessário analisar os autovalores da linearização de  $\xi$  nestes pontos. Seja  $r_1$  uma raiz da cúbica  $\Phi$ . Escrevendo o campo  $\xi$  na forma de sistema, obtemos

$$\xi = \begin{cases} x' = P_r = 2ar + 2b, \\ y' = rP_r = 2ar^2 + 2br, \\ r' = -(P_x + rP_y) = -\Phi(r). \end{cases}$$

A linearização do campo  $\xi$  em  $(0, 0, r_1)$  é

$$d\xi(0, 0, r_1) = \begin{pmatrix} 2(a_1 r_1 + b_1) & 2(a_2 r_1 + b_2) & 0 \\ 2r_1(a_1 r_1 + b_1) & 2r_1(a_2 r_1 + b_2) & 0 \\ 0 & 0 & -\Phi'(r_1) \end{pmatrix}.$$

Os autovalores desta matriz são

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\Phi'(r_1), \quad \lambda_3 = \alpha(r_1) = 2(a_2 r_1^2 + (a_1 + b_2)r_1 + b_1).$$

Como  $r_1$  não é uma raiz repetida de  $\Phi$ , segue que  $\Phi'(r_1) \neq 0$ , logo  $\lambda_2 \neq 0$ . Genericamente  $\alpha$  e  $\Phi$  não possuem raízes comuns, assim  $\alpha(r_1) \neq 0$  e  $\lambda_3 \neq 0$ . Desta forma, se  $\lambda_2 \cdot \lambda_3 > 0$ , temos que o ponto de equilíbrio do campo é do tipo nó, e se  $\lambda_2 \cdot \lambda_3 < 0$ , temos que o equilíbrio do campo é do tipo sela. Portanto, os pontos de equilíbrio do campo  $\xi$  sobre  $\{0\} \times \mathbb{R}P^1$  são do tipo nó ou sela. ■

### Observação 2.2.1.

- (1) A projeção  $\pi$  das curvas integrais do campo  $\xi$  são as soluções da EDB (2.1), com  $r = dy/dx \neq 0$ .
- (2) Poderíamos tomar a carta  $s = dx/dy$  para  $\mathbb{R}P^1$  e obter a superfície

$$N = \{(x, y, s) \in \mathbb{R}^3 : Q(x, y, s) = 0\},$$

sendo  $Q(x, y, s) = a(x, y) + 2b(x, y)s + c(x, y)s^2$ . Neste caso, as ideias e conclusões seriam análogas e o campo vetorial dado por

$$\eta = sQ_s \frac{\partial}{\partial x} + Q_s \frac{\partial}{\partial y} - (sQ_x + Q_y) \frac{\partial}{\partial s} \quad (2.6)$$

seria um levantamento adequado sobre  $N$ . As vezes ocorrem singularidades no infinito quando trabalhamos com  $M$  e  $\xi$ , nestes casos a superfície  $N$  e o campo vetorial  $\eta$  são mais adequados.

## 2.3 Formas Normais de Algumas EDB's

A maneira natural de se estudar a EDB (2.1) é definir sobre a superfície  $M = P^{-1}(0)$ , onde  $P(x, y, r) = a(x, y)r^2 + b(x, y)r + c(x, y)$ , o campo vetorial

$$\xi = P_r \frac{\partial}{\partial x} + rP_r \frac{\partial}{\partial y} - (P_x + rP_y) \frac{\partial}{\partial r}$$

e observar o comportamento desta EDO. Na seção anterior fizemos este estudo quando as funções  $a$ ,  $b$  e  $c$  se anulavam simultaneamente na origem e  $\delta$  possuía uma singularidade de Morse na origem. Nesta seção iremos apresentar formas normais para algumas EDB's, isto

é, apresentaremos EDB's que são equivalentes à EDB (2.1), de acordo com os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  e com o campo  $\xi$ .

Nas figuras que apresentaremos, o segmento em destaque será o conjunto discriminante. As demais curvas representarão as soluções da EDB.

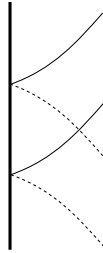
### 2.3.1 EDB cujos coeficientes não se anulam simultaneamente na origem.

Abordaremos aqui o caso onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  não se anulam simultaneamente na origem.

Segundo Cibrario [7], quando os coeficientes da EDB (2.1) não se anulam simultaneamente na origem e o campo  $\xi$  é regular (não possui singularidades), então a EDB (2.1) é suavemente equivalente a

$$dy^2 - xdx^2 = 0. \quad (2.7)$$

Assim, as curvas soluções serão cúspides sobre o conjunto discriminante. Veja Figura 2.1.



**Figura 2.1:** Configuração de  $dy^2 - xdx^2 = 0$ .

Porém, se o campo  $\xi$  possuir uma singularidade elementar (sela, nó ou foco), então o respectivo ponto é chamado de **singularidade de dobra** da EDB. Davydov, em [8], mostrou que em uma singularidade de dobra, e quando  $\xi$  possui autovalores não ressonantes, ver detalhes em [8], a EDB (2.1) é suavemente equivalente a

$$dy^2 + (-y + \lambda x^2)dx^2 = 0, \quad \lambda \neq 0, \frac{1}{16}. \quad (2.8)$$

Bruce e Tari em [5] mostraram que, considerando o ponto de interesse como sendo a origem, a EDB (2.1) será suavemente equivalente à EDB (2.8) quando o 2-jato de  $P$  em

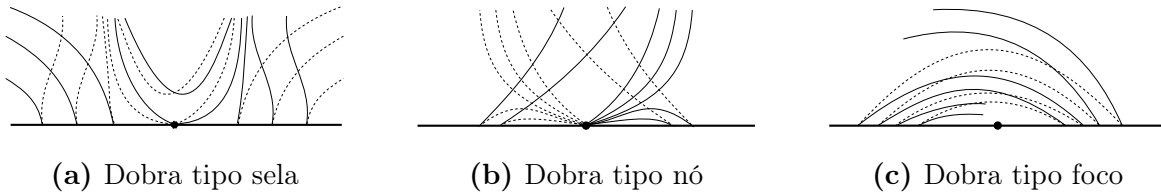
$(0, 0, 0)$ ,

$$j^2P = a_0r^2 + (b_0 + b_1x + b_2y)r + (c_1x + c_2y + c_3x^2 + c_4xy + c_5y^2),$$

tem as seguintes propriedades:  $c_1 = 0$ ,  $c_2 \neq 0$ ,  $c_3 \neq 0$  e

$$\lambda = \frac{4a_0c_3 - b_1^2 - b_1c_2}{4c_2^2} \neq 0, \frac{1}{16}.$$

Nestes casos, quando  $\lambda < 0$  temos a dobra tipo sela, se  $0 < \lambda < 1/16$  obtemos a dobra tipo nó e quando  $\lambda > 1/16$  obtemos uma dobra tipo foco. A nomenclatura sela dobrada, nó dobrado e foco dobrado também é adotada em alguns textos. Veja a Figura 2.2.



**Figura 2.2:** Configuração de  $dy^2 + (-y + \lambda x^2)dx^2 = 0$ .

Outros casos onde os coeficientes não se anulam simultaneamente na origem também já foram estudados, ver por exemplo [3]. Contudo não apresentaremos tais resultados aqui.

### 2.3.2 EDB cujos coeficientes se anulam simultaneamente na origem e $\delta$ possui uma singularidade de Morse

Apresentaremos agora os casos onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  se anulam simultaneamente na origem e a função discriminante possui uma singularidade de Morse neste ponto.

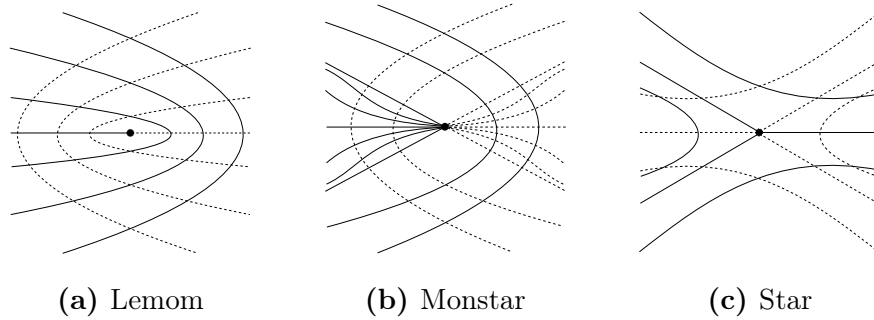
Uma singularidade de Morse pode ser de dois tipos,  $A_1^+$  e  $A_1^-$ , sendo que cada um ocorre exatamente quando a matriz Hessiana de  $\delta$  na origem possui determinante positivo ou negativo, respectivamente. De outra forma,  $\delta$  pode ser escrita em uma vizinhança de  $(0, 0)$ , através de uma mudança de coordenadas, como  $\pm(u^2 + v^2)$  ou  $\pm(u^2 - v^2)$ , respectivamente.

Quando os coeficientes se anulam simultaneamente na origem e o conjunto discriminante é formado por um ponto isolado (esta última condição é equivalente a  $\delta$  possuir uma singularidade  $A_1^+$ ), Bruce e Fidal, em [2], mostraram que a EDB (2.1) é topologicamente equivalente a um dos seguintes casos:

- (1)  $ydy^2 + 2xdxdy - ydx^2 = 0$ , quando o campo de Lie-Cartan possui apenas uma sela;
- (2)  $ydy^2 - 2xdxdy - ydx^2 = 0$ , quando o campo de Lie-Cartan possui duas selas e um nó;
- (3)  $ydy^2 + \frac{1}{2}xdxdy - ydx^2 = 0$ , quando o campo de Lie-Cartan possui três selas.

Na literatura, estes casos são chamados de D1 ou Lemom, D2 ou Monstar e D3 ou Star, respectivamente. Na Figura 2.3 apresentamos a configuração de cada um destes casos.

Uma consequência disto é que quando os coeficientes de (2.1) se anulam simultaneamente na origem e o discriminante é apenas um ponto isolado, o campo de Lie-Cartan não apresenta os seguintes casos: apenas um nó; uma sela e dois nós; três nós.



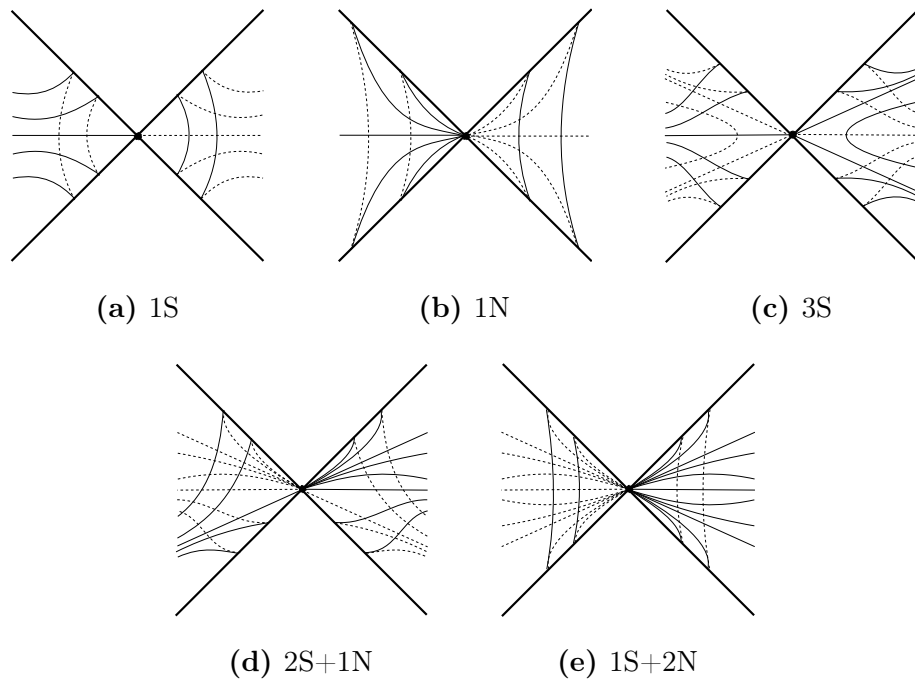
**Figura 2.3:** Configuração da EDB (2.1) quando os coeficientes se anulam simultaneamente na origem e  $\delta$  possui uma singularidade  $A_1^+$ .

Quando os coeficientes se anulam simultaneamente na origem e o conjunto discriminante é formado por duas curvas regulares (esta última condição é equivalente a  $\delta$  possuir uma singularidade  $A_1^-$ ), Bruce e Tari mostraram em [4] que a EDB (2.1) é topologicamente equivalente a um dos seguintes casos:

- (1)  $ydy^2 + 2xdxdy + ydx^2 = 0$ , quando o campo de Lie-Cartan possui apenas uma sela;

- (2)  $ydy^2 - \frac{1}{2}x dx dy + ydx^2 = 0$ , quando o campo de Lie-Cartan possui apenas um nó;
- (3)  $ydy^2 - 4x dx dy + ydx^2 = 0$ , quando o campo de Lie-Cartan possui três selas;
- (4)  $ydy^2 + 2(y-x) dx dy + ydx^2 = 0$ , quando o campo de Lie-Cartan possui duas selas e um nó;
- (5)  $ydy^2 - \frac{4}{3}x dx dy + ydx^2 = 0$ , quando o campo de Lie-Cartan possui uma sela e dois nós.

A Figura 2.4 apresenta a configuração de cada um destes casos.



**Figura 2.4:** Configuração da EDB (2.1) quando os coeficientes se anulam simultaneamente na origem e  $\delta$  possui uma singularidade  $A_1^-$ .

Uma consequência disto é que, quando os coeficientes da EDB (2.1) se anulam simultaneamente na origem e o discriminante é formado por duas curvas regulares, o campo de Lie-Cartan não apresenta o caso com três nós.



# Capítulo 3

## Linhas de Curvatura

As EDB's aparecem em vários ramos da Matemática, em particular na geometria diferencial de superfícies. Neste capítulo iremos aplicar os resultados a respeito de EDB, vistos anteriormente, para estudar o comportamento das linhas de curvatura de superfícies em  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{R}_1^3$  próximas de um ponto umbílico. Mais detalhes podem ser encontrados em [10], [13] e [17].

### 3.1 Linhas de Curvatura em Superfícies em $\mathbb{R}^3$

Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície e  $p \in S$  um ponto umbílico. Tome  $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização de  $S$ , com  $x(0, 0) = p$ , e considere a equação das linhas de curvatura

$$(gF - fG)dv^2 + (gE - eG)dudv + (fE - eF)du^2 = 0. \quad (3.1)$$

Defina  $a = (gF - fG)$ ,  $2b = (gE - eG)$  e  $c = (fE - eF)$ . Tome a superfície  $M$ , a projeção  $\pi$  e o campo de Lie-Cartan  $\xi$  relacionados com a equação (3.1), como construídos no capítulo anterior.

**Definição 3.1.1.** *Seja  $p$  um ponto umbílico em uma superfície  $S$  e considere o cenário descrito acima. Diremos que  $p$  é um **ponto umbílico Darbouxiano** se ocorrem as duas condições a seguir:*

**T: (Condição de Transversalidade)** *A superfície  $M$  é suave em  $\pi^{-1}(0, 0)$ ;*

**D: (Condição do Discriminante)** *As singularidades do campo de Lie-Cartan são hiperbólicas e são dadas por um dos casos abaixo:*

**D<sub>1</sub>:** *uma única sela, ou*

**D<sub>2</sub>:** *um único nó e duas selas, ou*

**D<sub>3</sub>:** *três selas.*

Os índices 1, 2 e 3 correspondem ao número de selas do campo. A Figura 2.3 ilustra o comportamento dos casos acima, sendo que  $D_1$ ,  $D_2$  e  $D_3$  são do tipo Lemon, Monstar e Star, respectivamente.

Escrevendo uma superfície  $S$  na forma de Monge, Gutierrez e Sotomayor mostraram em [12] que podemos relacionar as condições de Darboux com os coeficientes da parametrização de  $S$ .

**Teorema 3.1.1.** *Seja  $p \in S$  um ponto umbílico. Transladando  $p$  para a origem e realizando algumas rotações, considere a carta de Monge  $\alpha$  de  $S$  em uma vizinhança de  $p$  dada por*

$$\alpha(x, y) = \left( x, y, \frac{k}{2}(x^2 + y^2) + \frac{a}{6}x^3 + \frac{b}{2}xy^2 + \frac{c}{6}y^3 + o(4) \right).$$

*Suponhamos as seguintes condições:*

**T)**  $b(b - a) \neq 0;$

**D<sub>1</sub>)**  $\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2 < 0;$

**D<sub>2</sub>)**  $\left(\frac{c}{2b}\right)^2 + 2 > \frac{a}{b} > 1, a \neq 2b;$

**D<sub>3</sub>)**  $\frac{a}{b} < 1.$

*Então o comportamento das linhas de curvatura próximas ao ponto umbílico  $p$ , nos casos  $D_1$ ,  $D_2$  e  $D_3$ , são do tipo Lemon, Monstar e Star, respectivamente.*

**Demonstração:** Calculando os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental de  $\alpha$ , encontramos

$$\begin{aligned}
E &= 1 + \left[ kx + \frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{2}y^2 + o(3) \right]^2, \\
F &= \left[ kx + \frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{2}y^2 + o(3) \right] \left[ ky + bxy + \frac{c}{2}y^2 + o(3) \right], \\
G &= 1 + \left[ ky + bxy + \frac{c}{2}y^2 + o(3) \right]^2, \\
e &= k + ax + o(2), \quad f = by + o(2), \quad g = k + bx + cy + o(2).
\end{aligned}$$

Por (3.1), a equação das linhas de curvatura é dada por

$$[-by + o(2)]dy^2 + [(b-a)x + cy + o(2)]dxdy + [by + o(2)]dx^2 = 0. \quad (3.2)$$

Associada à equação diferencial binária (3.2), consideremos a superfície

$$M = \{(x, y, r) : P(x, y, r) = [-by + o(2)]r^2 + [(b-a)x + cy + o(2)]r + [by + o(2)] = 0\},$$

com  $r = dy/dx$ , como em (2.3).

Primeiramente verificaremos que a condição  $T$  é equivalente à superfície  $M$  ser suave em uma vizinhança de  $\{0\} \times \mathbb{R}P^1$ . Pela Proposição 2.2.1, isto é equivalente à função discriminante,

$$\delta(x, y) = [(b-a)x + cy + o(2)]^2 - 4[-by + o(2)][by + o(2)],$$

ter uma singularidade de Morse na origem. De fato, a origem é uma singularidade de  $\delta$ . Além disso, o determinante da Hessiana desta função em  $(0, 0)$  é dado por

$$4(b-a)^2(c^2 + 4b^2) - 4c^2(b-a)^2 = 16b^2(b-a)^2.$$

Portanto, a função  $\delta$  possui uma singularidade de Morse na origem se, e somente se,  $b(b-a) \neq 0$ . Com isto, vemos que a condição  $T$  é equivalente a superfície  $M$  ser suave em  $\{0\} \times \mathbb{R}P^1$ .

Para estudar o comportamento das linhas de curvatura, consideremos o campo de Lie-Cartan

$$\xi = P_r \frac{\partial}{\partial x} + rP_r \frac{\partial}{\partial y} - (P_x + rP_y) \frac{\partial}{\partial r}.$$

Podemos escrever o campo vetorial  $\xi$  na forma de sistema

$$\xi = \begin{cases} x' = P_r = -2byr + (b-a)x + cy + o(2) \\ y' = rP_r = r[-2byr + (b-a)x + cy + o(2)] \\ r' = -(P_x + rP_y) = -[(b-a)r + r(-br^2 + cr + b) + o(1)]. \end{cases} \quad (3.3)$$

Os pontos de equilíbrio do sistema (3.3) são dados por  $P = P_r = P_x + rP_y = 0$ . As equações  $P = P_r = 0$ , nos fornecem os pontos  $(0, 0, r) \in \{0\} \times \mathbb{R}P^1$ . Os pontos onde  $P_x + rP_y = 0$  em  $\{0\} \times \mathbb{R}P^1$  são dados por uma cúbica  $\phi$  em  $r$ ,

$$\phi(r) = -(P_x + rP_y)(0, 0, r) = -(b - a)r - r(-br^2 + cr + b) = r(br^2 - cr + a - 2b) = 0.$$

As raízes desta cúbica são

$$r_0 = 0 \quad \text{e} \quad r_{\pm} = \frac{c}{2b} \pm \sqrt{\Delta},$$

sendo

$$\Delta = \left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2.$$

Portanto, quando  $\Delta > 0$ , o sistema apresenta três pontos de equilíbrio, denotados por

$$E_0 = (0, 0, 0), \quad E_+ = (0, 0, r_+), \quad E_- = (0, 0, r_-).$$

As raízes da cúbica  $\phi$  representam as possíveis direções ao longo das quais as linhas de curvatura podem se aproximar do ponto umbílico. Quando  $\Delta < 0$ , o sistema tem apenas  $E_0$  como ponto de equilíbrio. Passamos agora ao estudo do tipo topológico destes pontos de equilíbrios. A linearização do campo vetorial  $\xi$  dado em (3.3) no ponto  $(0, 0, r)$ , onde  $r \in \{0, r_-, r_+\}$ , tem a forma

$$D\xi(0, 0, r) = \begin{pmatrix} b - a & c - 2br & 0 \\ (b - a)r & (c - 2br)r & 0 \\ 0 & 0 & 3br^2 - 2cr + a - 2b \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Os autovalores da matriz em (3.4) são

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3br^2 - 2cr + a - 2b, \quad \lambda_3 = -2br^2 + cr + b - a.$$

Observe que como  $r$  é raiz da equação cúbica  $\phi(r) = r(br^2 - cr + a - 2b)$ , podemos simplificar a escrita dos autovalores  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  como

**i.** Se  $r \neq 0$ , então

$$\lambda_2 = 3br^2 - 2cr + a - 2b = \underbrace{br^2 - cr + a - 2b}_{=0} + 2br^2 - cr = \underbrace{br^2 - cr}_{=2b-a} + br^2 = br^2 + 2b - a.$$

$$\lambda_3 = -2br^2 + cr + b - a = -\underbrace{(br^2 - cr + a - 2b)}_{=0} - br^2 - b = -b(r^2 + 1).$$

ii. Se  $r = 0$ , então

$$\lambda_2 = \underbrace{3br^2 - 2cr}_{=0} + a - 2b = a - 2b.$$

$$\lambda_3 = \underbrace{-2br^2 + cr}_{=0} + b - a = b - a.$$

De agora em diante, assumiremos então tais simplificações de  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$ . Surgem os seguintes casos:

**Caso  $D_1$ :**  $\left( \Delta = \left( \frac{c}{2b} \right)^2 - \frac{a}{b} + 2 < 0 \right)$ .

Neste caso, a origem é a única raiz real de  $\phi(r)$ , ou seja, temos apenas  $E_0$  como ponto de equilíbrio. Os autovalores de  $D\xi(E_0)$  são  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = a - 2b$  e  $\lambda_3 = b - a$ . Para que tenhamos uma singularidade do tipo  $D_1$ , conforme a definição de ponto umbílico Darbouxiano, é suficiente mostrar que os autovalores  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  tenham sinais opostos. Como  $\Delta < 0$ , segue que

$$\frac{a - 2b}{b} > 0.$$

Portanto,  $(a - 2b)$  e  $b$  têm o mesmo sinal. Assim,

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_2} = \frac{b - a}{a - 2b} = -1 - \frac{b}{a - 2b} < 0.$$

Segue, então, que  $E_0$  é um ponto de equilíbrio do tipo sela.

**Caso  $D_2$ :**  $\left( \Delta = \left( \frac{c}{2b} \right)^2 - \frac{a}{b} + 2 > 0, \quad \frac{a}{b} > 1, \quad a \neq 2b \right)$ .

Neste caso temos três pontos de equilíbrios. Dividimos este caso em dois sub-casos. Primeiramente consideraremos

$$1 < \frac{a}{b} < 2.$$

É fácil ver que  $E_0$  é um ponto de equilíbrio do tipo nó, pois

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_2} = \frac{b - a}{a - 2b} = \frac{b \left( 1 - \frac{a}{b} \right)}{b \left( \frac{a}{b} - 2 \right)} = \frac{\left( 1 - \frac{a}{b} \right)}{\left( \frac{a}{b} - 2 \right)} > 0,$$

porque  $1 - a/b < 0$  e  $a/b - 2 < 0$ .

Para estudar a natureza dos pontos de equilíbrio  $E_{\pm}$ , consideremos a razão

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_3} = \frac{2b - a + br^2}{-b(r^2 + 1)} = \frac{b \left(2 - \frac{a}{b} + r^2\right)}{-b(r^2 + 1)} = \frac{\left(2 - \frac{a}{b} + r^2\right)}{-(r^2 + 1)} < 0.$$

Portanto,  $E_{\pm}$  são pontos de equilíbrio do tipo sela, independentemente da escolha de  $r$ .

No segundo sub-caso, consideraremos

$$2 < \frac{a}{b} < 2 + \left(\frac{c}{2b}\right)^2.$$

De modo análogo ao sub-caso anterior, é fácil ver que  $E_0$  é um ponto de equilíbrio do tipo sela, ou seja,  $\lambda_3/\lambda_2 < 0$ . Estudaremos agora o tipo topológico dos pontos de equilíbrio  $E_{\pm}$ . Novamente consideraremos a razão

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_3} = \frac{2b - a + br^2}{-b(r^2 + 1)} = \frac{b \left(2 - \frac{a}{b} + r^2\right)}{-b(r^2 + 1)} = \frac{\left(2 - \frac{a}{b} + r^2\right)}{-(r^2 + 1)}.$$

Neste caso temos que o sinal da razão depende do valor de  $r$  e é dado pelo numerador, já que o denominador é sempre negativo, independentemente de  $r$ . Passamos assim a estudar o sinal da expressão  $N_{\pm} = 2 - a/b + r_{\pm}^2$ . Substituindo o valor de  $r_{\pm}$  em  $N_{\pm}$ , chegamos na seguinte equação

$$N_{\pm} = 2\Delta \pm \frac{c}{b}\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{\Delta} \left(\sqrt{\Delta} \pm \frac{c}{2b}\right).$$

Como  $\Delta > 0$  os sinais de  $N_{\pm}$  seguem da expressão dentro dos parênteses. Assim, supondo  $bc > 0$ , segue que  $N_+$  é sempre positivo e o sinal de  $N_-$  segue de

$$\sqrt{\Delta} - \frac{c}{2b} = \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2} - \frac{c}{2b} < \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{c}{2b}} = \left|\frac{c}{2b}\right| - \frac{c}{2b} = 0.$$

A desigualdade decorre do fato que  $2 < a/b$  e a última igualdade segue pois estamos considerando  $bc > 0$ . Assim, temos que  $E_+$  e  $E_-$  são pontos de equilíbrio do tipo sela e nó, respectivamente. De modo análogo, supondo  $bc < 0$ , concluímos que  $E_+$  e  $E_-$  são pontos de equilíbrio do tipo nó e sela, respectivamente.

**Caso  $D_3$ :**  $\left(\frac{a}{b} < 1\right)$ .

Neste caso temos 3 pontos de equilíbrio e todos são do tipo sela. De fato, a natureza de  $E_0$  segue do sinal da razão

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_2} = \frac{b-a}{a-2b} = \frac{\left(1 - \frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{a}{b} - 2\right)} < 0,$$

porque  $1 - a/b > 0$  e  $a/b - 2 < 0$ . O tipo topológico dos pontos de equilíbrio  $E_-$  e  $E_+$  é dado pelo sinal da seguinte razão

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_3} = \frac{2b-a+br^2}{-b(r^2+1)} = \frac{b\left(2 - \frac{a}{b} + r^2\right)}{-b(r^2+1)} = \frac{\overbrace{\left(2 - \frac{a}{b}\right)}^{>0} + r^2}{-(r^2+1)} < 0.$$

■

Os seguintes resultados apresentarão interpretações geométricas para a condição de transversalidade  $T$ .

**Proposição 3.1.1.** *Considere as curvas  $(gF - fG)(x, y) = 0$  e  $(gE - eG)(x, y) = 0$ . A intersecção delas define os pontos umbílicos. A condição de transversalidade  $T$  significa que as curvas acima são regulares e se encontram transversalmente em  $(0, 0)$ .*

**Demonstração:** Suponha que  $(gF)(x, y) = (fG)(x, y)$  e  $(gE)(x, y) = (eG)(x, y)$ . De acordo com as equações (1.7), temos que

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + \overbrace{gE}^{=eG}}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \frac{2eG - 2fF}{EG - F^2} = \frac{eG - fF}{EG - F^2},$$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} H^2 - K &= \left(\frac{eG - fF}{EG - F^2}\right)^2 - \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\ &= \frac{(eG - fF)^2 - (eg - f^2)(EG - F^2)}{(EG - F^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-2eGfF + egF^2 + f^2EG}{(EG - F^2)^2} \\
&= \frac{-2eGfF + e \overbrace{gF}^{=fG} F + fE \overbrace{fG}^{=gF}}{(EG - F^2)^2} \\
&= \frac{-2eGfF + efGF + f \overbrace{Eg}^{=eG} F}{(EG - F^2)^2} \\
&= \frac{-2eGfF + efGF + feGF}{(EG - F^2)^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Como  $(H^2 - K)(x, y) = 0$ , temos que a intersecção das duas curvas serão pontos umbílicos.

Por outro lado, nos pontos umbílicos temos que os coeficientes da equação (1.9) se anulam simultaneamente, em particular temos  $(gF - fG)(x, y) = 0$  e  $(gE - eG)(x, y) = 0$ . Logo, os pontos umbílicos são exatamente a intersecção das duas curvas.

Defina

$$\begin{aligned}
A(x, y) &= (gF - fG)(x, y) = by + o(2) = 0, \\
B(x, y) &= (gE - eG)(x, y) = (b - a)x + cy + o(2) = 0.
\end{aligned}$$

Temos

$$\det \begin{pmatrix} A_x(0, 0) & A_y(0, 0) \\ B_x(0, 0) & B_y(0, 0) \end{pmatrix} = -b(b - a).$$

Assim, se valer a condição  $T$ , o determinante anterior será diferente de 0. Logo, as linhas da matriz acima não se anulam e portanto as curvas são regulares em  $(0, 0)$ . Além disto, o determinante diferente de zero significa que seus vetores tangentes são linearmente independentes, ou seja, as curvas se encontram transversalmente em  $(0, 0)$ . ■

**Teorema 3.1.2.** *A condição de transversalidade  $T$  do Teorema 3.1.1 é equivalente a função  $H^2 - K$  ter uma singularidade de Morse em  $(0, 0)$ .*

**Demonstração:** De acordo com as equações apresentadas em (1.7), temos que

$$\begin{aligned}
H^2 - K &= \frac{(eG - 2fF + gE)^2}{4(EG - F^2)^2} - \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\
&= \frac{(eG - gE)^2 + 2fE(2fg - gF) + 2eF(2gF - fG)}{4(EG - F^2)^2}.
\end{aligned}$$



Substituindo os coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental, calculados na demonstração do Teorema 3.1.1, e efetuando alguns cálculos e simplificações, obtemos

$$H^2 - K = \frac{(b-a)^2x^2 + 2(b-a)cxy + (4b^2 + c^2)y^2 + o(3)}{4 + 8k^2x^2 + 8k^2y^2 + o(3)}, \quad (3.5)$$

onde  $o(3)$  são termos de grau maior do que ou igual a 3.

Note que a origem é um ponto singular de  $H^2 - K$ . De fato, como  $(0, 0)$  é uma raiz do numerador de (3.5) e de suas derivadas parciais de primeira ordem, pois ele é um polinômio homogêneo de grau 2, temos pela regra da derivada do quociente que a origem é um zero das derivadas parciais de primeira ordem de  $H^2 - K$ . Além disso,

$$\text{Hess}(H^2 - K)(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{(b-a)^2}{2} & \frac{(b-a)c}{2} \\ \frac{(b-a)c}{2} & \frac{(4b^2+c^2)}{2} \end{pmatrix}.$$

A função  $H^2 - K$  possui uma singularidade de Morse na origem quando  $\det(\text{Hess}(H^2 - K)(0, 0)) = b^2(b-a)^2$  for diferente 0. Portanto, a função  $H^2 - K$  possui uma singularidade de Morse na origem se, e somente se, a condição de transversalidade,  $b(b-a) \neq 0$ , for verificada. ■

## 3.2 Linhas de Curvatura em Superfícies Lorentzianas

Nesta seção consideraremos  $S \subset \mathbb{R}_1^3$  como sendo uma superfície Lorentziana. Sejam  $x : U \rightarrow S$  uma parametrização local de  $S$ ,  $I_p$  a primeira forma fundamental de  $S$  em  $p \in x(U)$  e  $E$ ,  $F$  e  $G$  seus coeficientes, conforme (1.14).

Como  $S$  é Lorentziana, existem duas direções tipo luz em  $T_pS$ , para todo  $p \in S$ . Tais direções são soluções de  $I_p(v) = 0$  e determinam dois campos de direções suaves em  $x(U)$ .

**Lema 3.2.1.** *Sejam  $w$  um campo de vetores em um conjunto aberto  $V \subset \mathbb{R}^2$  e  $p \in V$  tal que  $w(p) \neq 0$ . Então existe uma vizinhança  $W \subset V$  de  $p$  onde está definida uma integral primeira local de  $w$ .*

A demonstração deste lema pode ser feita utilizando o Teorema do Fluxo Tubular e será omitida. Tal resultado pode ser encontrado em [6].

**Lema 3.2.2.** *Sejam  $S$  uma superfície,  $w$  um campo de vetores em um conjunto aberto  $V \subset S$  e  $p \in V$  tal que  $w(p) \neq 0$ . Então existe uma vizinhança  $W \subset V$  de  $p$  onde está definida uma integral primeira local de  $w$ .*

**Demonstração:** A demonstração deste lema é feita tomando uma parametrização  $x : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  e, assim, podemos considerar  $S$  localmente como um aberto de  $\mathbb{R}^2$  e aplicar o Lema 3.2.1. ■

**Teorema 3.2.1.** *Seja  $S \subset \mathbb{R}_1^3$  uma superfície Lorentziana. Para qualquer ponto  $p \in S$ , existe uma parametrização local em uma vizinhança  $V$  de  $p$  tal que as curvas coordenadas em  $q$  são tangentes as direções tipo luz de  $T_q S$ , para todo  $q \in V$ . Em outras palavras, existe uma parametrização local  $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset S$  com  $E = G = 0$  em  $U$ .*

**Demonstração:** Sejam  $w_1$  e  $w_2$  os campos vetoriais suaves sobre  $S$  definidos pelos vetores tipo luz em cada ponto. Tome  $p \in S$ . Segue do item (4) da Proposição 1.2.1 que  $w_1(p)$  e  $w_2(p)$  são linearmente independentes. Disto segue que  $w_1(p) \neq 0$  e  $w_2(p) \neq 0$ . Logo, pelo Lema 3.2.2, existe uma vizinhança  $W$  de  $p$  onde integrais primeiras  $f_1$  e  $f_2$  de  $w_1$  e  $w_2$ , respectivamente, estão definidas.

Defina a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : W &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ q &\longmapsto (f_1(q), f_2(q)). \end{aligned}$$

Como  $f_i$  é constante ao longo das trajetórias de  $w_i$ , temos que  $(df_i)_p(w_i) = 0$ , com  $i = 1, 2$ . Assim,

$$d\varphi_p(w_1) = ((df_1)_p(w_1), (df_2)_p(w_1)) = (0, a),$$

onde  $a = (df_2)_p(w_1)$ . Note que  $a \neq 0$ . De fato, como  $w_1$  e  $w_2$  são linearmente independentes e  $(df_2)_p(w_2) = 0$ , se  $(df_2)_p(w_1) = 0$  teríamos que  $(df_2)_p$  seria identicamente nula, o que contraria o fato de  $f_2$  ser integral primeira. Analogamente,

$$d\varphi_p(w_2) = ((df_1)_p(w_2), (df_2)_p(w_2)) = (b, 0),$$

onde  $b = (df_1)_p(w_2) \neq 0$ .

Decorre que  $d\varphi_p$  é inversível e, portanto,  $\varphi$  é um difeomorfismo local. Logo, existe uma vizinhança  $U \subset \mathbb{R}^2$  de  $\varphi(p)$  que é levada difeomorficamente por  $x = \varphi^{-1}$  em uma vizinhança  $V \subset x(U)$  de  $p$ . Além disto, se  $c \in \mathbb{R}$  é uma constante,

$$x(u, c) = \varphi^{-1}(u, c) = \{q \in V : f_2(q) = c\},$$

$$x(c, v) = \varphi^{-1}(c, v) = \{q \in V : f_1(q) = c\},$$

quando  $u$  e  $v$  percorrem  $\mathbb{R}$ . Logo, as curvas coordenadas de  $x$  são

$$f_1(q) = c_1, \quad f_2(q) = c_2,$$

com  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , as quais são curvas integrais de  $w_1$  e  $w_2$ , respectivamente, portanto tangente a estes campos. ■

Na Seção 1.2 definimos a segunda forma fundamental de  $S$  em  $p$  utilizando a aplicação auto-adjunta  $dN_p$ . A partir disto foram definidas as curvaturas e direções principais de  $S$ . Tais definições podem ser generalizadas. Para isso, tome  $A : TS \rightarrow TS$  um operador auto-adjunto e denote por  $A_p$  a restrição de  $A$  a  $T_pS$ .

Seja  $x : U \rightarrow S$  uma parametrização de  $S$ . Dado  $p \in x(U)$  e  $w = ax_u + bx_v \in T_pS$ , temos que  $\langle A_p(w), w \rangle = la^2 + 2mab + nb^2$ , onde

$$l = \langle A_p(x_u), x_u \rangle, \quad m = \langle A_p(x_u), x_v \rangle = \langle A_p(x_v), x_u \rangle, \quad n = \langle A_p(x_v), x_v \rangle. \quad (3.6)$$

Considere  $(a_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2$ , a matriz de  $A_p$  com relação a base  $\{x_u, x_v\}$ . As equações descritas em (3.6) nos mostram que

$$\begin{aligned} l &= a_{11}E + a_{21}F, & m &= a_{12}E + a_{22}F, \\ m &= a_{11}F + a_{21}G, & n &= a_{12}F + a_{22}G. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Como  $EG - F^2 < 0$ , as equações em (3.7) podem ser resolvidas e obtemos

$$A_p = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

O operador auto-adjunto  $A_p$  nem sempre possui autovalores reais. Quando existirem autovalores reais, eles serão chamados de **curvaturas  $A$ -principais** e iremos denotá-los por  $k_i$ ,  $i = 1, 2$ . As direções definidas pelos autovetores associados as curvaturas

$A$ -principais são chamados de **direções  $A$ -principais**. Uma curva em  $S$  é chamada de **linha de curvatura  $A$ -principal**, se a reta tangente a todos os seus pontos for uma direção  $A$ -principal.

Assim, um vetor não nulo  $v \in T_p S$  será uma direção  $A$ -principal de  $p$  se existir um número real  $\lambda$  tal que  $A_p(v) = \lambda v$ . Tomando  $v = (v_1, v_2)$ , temos que esta condição é dada por

$$\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix}.$$

Simplificando esta equação chegamos no seguinte sistema

$$\begin{cases} (Gl - Fm)v_1 + (Gm - Fn)v_2 = (EG - F^2)\lambda v_1 \\ (Em - Fl)v_1 + (En - Fm)v_2 = (EG - F^2)\lambda v_2. \end{cases}$$

Como  $v$  é não nulo, suponha, sem perda de generalidade, que  $v_2 \neq 0$ . Assim, podemos isolar  $\lambda$  na segunda equação e substituir seu valor na primeira equação do sistema. Com isto, encontramos

$$(Fl - Em)v_1^2 + (Gl - En)v_1v_2 + (Gm - Fn)v_2^2 = 0.$$

Os vetores  $v = (v_1, v_2)$  soluções desta equação são as direções  $A$ -principais. Como as linhas de curvatura  $A$ -principais são tangentes a este campo de vetores, temos que estas curvas são as soluções da EDB

$$(Gm - Fn)dv^2 + (Gl - En)dudv + (Fl - Em)du^2 = 0. \quad (3.9)$$

O conjunto dos pontos onde  $\delta(u, v) = 0$  será denotado por  $A$ -LPL, sendo  $\delta$  a função discriminante de (3.9),

$$\delta(u, v) = ((lG - nE)^2 - 4(mG - nF)(lF - mE))(u, v). \quad (3.10)$$

Um ponto  $p = x(q) \in S$  é um **ponto umbílico tipo tempo** quando os coeficientes de (3.9) se anulam simultaneamente em  $q$ . Os demais conceitos e resultados da Seção 1.2 podem ser estendidos para este contexto de forma análoga.

Seja  $\mathcal{S}$  o conjunto dos operadores auto-adjuntos em  $S$ , ou seja, um subconjunto das funções suaves de  $TS \rightarrow TS$ . Induzimos em  $\mathcal{S}$  a topologia  $C^\infty$  de Whitney. Dizemos que

operador auto-adjunto  $A$  é genérico se ele pertence a um subconjunto aberto e denso de  $S$ .

**Proposição 3.2.1.** *Valem as seguintes afirmações.*

- (1) *Dado um operador auto-adjunto  $A$  genérico em uma superfície Lorentziana  $S \subset \mathbb{R}_1^3$ , a  $A$ -LPL é uma curva em  $S$ . Esta curva pode ser caracterizada como sendo o subconjunto de  $S$  onde as duas direções  $A$ -principais coincidem em uma das direções tipo luz.*
- (2) *O  $A$ -LPL divide a superfície  $S$  em duas regiões. Em uma delas não existem direções  $A$ -principais e na outra existem duas direções  $A$ -principais distintas em cada ponto. No último caso, as direções  $A$ -principais são ortogonais, uma delas é tipo tempo e a outra tipo espaço.*
- (3) *Dado um operador auto-adjunto  $A$  genérico em uma superfície Lorentziana  $S \subset \mathbb{R}_1^3$ , a  $A$ -LPL é uma curva regular em  $S$ , exceto em pontos isolados. Nos pontos onde  $A$ -LPL não é regular,  $\delta$  possui uma singularidade de Morse do tipo  $A_1^-$  e  $A_p$  é um múltiplo da identidade.*

**Demonstração:**

(1) Seja  $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização de  $S$  e considere  $\delta$  como em (3.10). Temos que  $A$ -LPL =  $\delta^{-1}(0)$  é genericamente uma curva suave ou um conjunto vazio, pois o Lema da Transversalidade Elementar garante que, em geral, 0 é valor regular de  $\delta$ .

Seja  $p = x(q) \in S$ . Uma direção  $v = dx_u + dx_v \in T_p S$  será tipo luz se, e somente se,

$$Gdv^2 + 2Fdu dv + Edu^2 = \langle v, v \rangle = 0. \quad (3.11)$$

Este vetor  $v = dx_u + dx_v$  será uma direção  $A$ -principal tipo luz em  $p$  se, e somente se, (3.9) e (3.11) são válidas. A matriz resultante  $R$  destes dois polinômios é

$$R = \begin{pmatrix} (mG - nF) & (lG - nE) & (lF - mE) & 0 \\ 0 & (mG - nF) & (lG - nE) & (lF - mE) \\ G & 2F & E & 0 \\ 0 & G & 2F & E \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\det(R) = (EG - F^2)((Gl - En)^2 - 4(Gm - Fn)(Fl - Em)).$$

O sistema formado pelas equações (3.9) e (3.11) terá solução quando  $\det(R) = 0$ . Portanto, como  $EG - F^2 < 0$ ,  $p$  terá uma direção  $A$ -principal tipo luz se, e somente se,

$$((Gl - En)^2 - 4(Gm - Fn)(Fl - Em))(q) = 0,$$

isto é, se  $p$  pertence ao  $A$ -LPL.

**(2)** Considere os conjuntos  $x(D_0)$  e  $x(D_2)$  em  $S$ , onde  $D_0 = \{(u, v) \in U : \delta(u, v) < 0\}$  e  $D_2 = \{(u, v) \in U : \delta(u, v) > 0\}$ . Temos que o  $A$ -LPL separa estas duas regiões. Pela Proposição 2.1.1, se  $(u, v) \in D_0$ , então não existem direções  $A$ -principais em  $x(u, v) \in x(D_0)$ . Por outro lado, se  $(u, v) \in D_2$ , esta mesma proposição nos garante que existem duas direções  $A$ -principais em  $x(u, v) \in x(D_2)$ . Assim, o  $A$ -LPL divide  $S$  em duas regiões,  $x(D_0)$  e  $x(D_2)$ , sendo que na primeira região não existem direções  $A$ -principais e na segunda região temos duas direções  $A$ -principais distintas.

Tome  $(u, v) \in D_2$  e considere suas curvaturas  $A$ -principais,  $k_1$  e  $k_2$ , e suas respectivas direções  $A$ -principais,  $v_1$  e  $v_2$ . Como  $(u, v) \notin A$ -LPL, temos que  $x(u, v)$  não é ponto umbílico, assim  $k_1 \neq k_2$ . Entretanto, note que

$$k_1 \langle v_1, v_2 \rangle = \langle A_p(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, A_p(v_2) \rangle = k_2 \langle v_1, v_2 \rangle.$$

Como  $k_1 \neq k_2$ , temos que  $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$  e as direções  $A$ -principais serão ortogonais. Pelo item anterior, temos que  $v_1$  e  $v_2$  não são tipo luz, logo uma destas direções será tipo tempo e a outra tipo espaço, pois se ambas fossem do mesmo tipo elas não seriam ortogonais.

**(3)** Nesta prova tomaremos a parametrização dada pelo Teorema 3.2.1. Com esta parametrização, a equação das linhas de curvatura  $A$ -principal é

$$ndv^2 - ldu^2 = 0.$$

A função discriminante desta equação é  $\delta(u, v) = (ln)(u, v)$  e o  $A$ -LPL é dado por  $\delta^{-1}(0)$ . Pelo item (1) desta proposição, dado um operador auto-adjunto genérico  $A$ , temos que  $A$ -LPL é uma curva.

Seja  $q \in A\text{-LPL}$  com  $l(q) \neq 0$  ou  $n(q) \neq 0$ . Vamos supor, sem perda de generalidade, que  $n(q) \neq 0$ . Logo, como  $\delta(q) = 0$ , temos que  $l(q) = 0$ . Assim,

$$\delta_u(q) = l_u(q)n(q) + l(q)n_u(q) = l_u(q)n(q),$$

$$\delta_v(q) = l_v(q)n(q) + l(q)n_v(q) = l_v(q)n(q).$$

Ou seja,  $q$  será um ponto singular de  $\delta$  se, e somente se,  $l_u(q) = l_v(q) = 0$ . Desta forma, vemos que  $q$  genericamente não é um ponto singular. Disto, segue que:

**i.** Genericamente, o  $A\text{-LPL}$  será uma curva suave, exceto nos pontos onde  $l(q) = n(q) = 0$ . De fato, se  $l(q) \neq 0$  ou  $n(q) \neq 0$ , então em geral  $q$  é não singular. Logo, existe uma vizinhança  $W$  de  $q$  em  $U$  tal que  $\delta$  não é singular em pontos de  $W$ . Assim, 0 é valor regular de  $\delta|_W$  e  $\delta|_W^{-1}(0) = A\text{-LPL} \cap W$  é uma curva suave. Portanto, genericamente,  $A\text{-LPL}$  é uma curva suave em  $q$ .

**ii.** Genericamente, os pontos singulares de  $\delta$  são isolados. De fato, se  $l(q) \neq 0$  ou  $n(q) \neq 0$ , então em geral  $q$  é não singular. Logo, os pontos singulares de  $\delta$  ocorrem quando  $l(q) = n(q) = 0$  e, em geral, isto ocorre em pontos isolados.

Além disso, em geral, as singularidades de  $\delta$  são de Morse do tipo  $A_1^-$ . De fato, se  $q$  é ponto singular, então, em geral,  $l(q) = n(q) = 0$  e

$$\begin{aligned} \det(\text{Hess } \delta) &= \det \begin{pmatrix} 2l_u n_u & l_u n_v + l_v n_u \\ l_u n_v + l_v n_u & 2l_v n_v \end{pmatrix} \\ &= 4l_u l_v n_u n_v - (l_u n_v + l_v n_u)^2 \\ &= -(l_u n_v - l_v n_u)^2 \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Genericamente, podemos supor que  $(l_u n_v - l_v n_u)(q) \neq 0$ , o que nos mostra que  $q$  possui uma singularidade de Morse do tipo  $A_1^-$ .

Segundo a equação (3.8), a matriz de  $A_p$ , com  $p = x(q)$ , é

$$A_p = -\frac{1}{F^2} \begin{pmatrix} 0 & -F \\ -F & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} = \frac{1}{F} \begin{pmatrix} m & n \\ l & n \end{pmatrix}.$$

Logo,  $A_p$  é múltiplo da identidade se, e somente se,  $l(q) = n(q) = 0$ , ou seja, se  $q$  é ponto singular de  $\delta$ . ■

No próximo teorema iremos analisar o comportamento das linhas de curvaturas em pontos do  $LPL$ .

**Teorema 3.2.2.** *Valem as seguintes afirmações.*

- (1) *Nos pontos regulares de  $A$ - $LPL$ , as linhas de curvatura  $A$ -principal formam uma família de cúspides no  $A$ - $LPL$ , exceto em pontos isolados desta curva. Em tais pontos, a equação das linhas de curvatura  $A$ -principal tem genericamente uma singularidade de dobra do tipo sela, nó ou foco (Ver Figura 2.2).*
- (2) *Em um ponto umbílico tipo tempo, a função discriminante da EDB das linhas de curvatura  $A$ -principal tem genericamente uma singularidade de Morse do tipo  $A_1^-$ . Todos os cinco casos genéricos para tais singularidades podem ocorrer (Ver Figura 2.4).*

**Demonstração:** Considere a parametrização local,  $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ , dada pelo Teorema 3.2.1. Desta forma, a equação das linhas de curvatura  $A$ -principal será dada por

$$ndv^2 - ldu^2 = 0. \quad (3.12)$$

(1) Seja  $p_0 = x(q_0)$  um ponto regular do  $A$ - $LPL$ . Temos então que  $l(q_0) \neq 0$  ou  $n(q_0) \neq 0$ . Suponha, sem perda de generalidade, que  $n(q_0) \neq 0$ . Como  $p_0 \in A$ - $LPL$ , segue que  $l(q_0) = 0$ . Assim, existe uma vizinhança  $V \subset U$  de  $q_0$  onde  $n(q) \neq 0$ , para todo  $q \in V$ , e a equação (3.12) pode ser reescrita como

$$dv^2 - \frac{l}{n}du^2 = 0, \quad (3.13)$$

em  $V$ . O campo de Lie-Cartan relacionado com esta EDB será dado por

$$\xi = \left( 2r, 2r^2, \frac{l_u n - l n_u + r(l_v n - l n_v)}{n^2} \right),$$

onde  $\xi$  está definido na superfície

$$M = \{(u, v, r) \in V \times \mathbb{R}P^1 : P(u, v, r) = 0\},$$

sendo  $P(u, v, r) = r^2 - l(u, v)/n(u, v)$ , como vimos no Capítulo 2.



A equação (3.13) é suavemente equivalente a  $dv^2 - udu^2 = 0$  em uma vizinhança de  $q_0$  se, e somente se,  $l_u(q_0) \neq 0$ . De fato, suponha que tais EDB's são suavemente equivalentes. Como vimos na Seção 2.3, (3.13) é suavemente equivalente a  $dv^2 - udu^2 = 0$  quando  $\xi$  é regular. Logo, o campo  $\xi$  não possui zeros. Como  $l(q_0) = 0$  temos que  $(q_0, 0) \in M$  e  $\xi(q_0, 0) = (0, 0, l_u(q_0)/n(q_0))$ . Assim,  $l_u(q_0) \neq 0$ .

Reciprocamente, suponha que  $l_u(q_0) \neq 0$ . Podemos considerar, diminuindo  $V$  caso necessário, que  $l_u(q) \neq 0$ , para todo  $q \in V$ . Suponha que  $\xi(q, r) = (0, 0, 0)$  para algum  $q \in V$ . Logo  $r = 0$  e isto implica que  $l(q) = 0$ . Mas se  $r = 0$  e  $l(q) = 0$ , a terceira coordenada de  $\xi(q, r)$  será zero apenas se  $l_u(q) = 0$ , o que não é possível pois  $q \in V$ . Portanto, o campo  $\xi$  é regular em  $V$  e (3.13) é suavemente equivalente a  $dv^2 - udu^2 = 0$  em uma vizinhança de  $q_0$ .

Assim, as linhas de curvatura formarão uma cúspide no ponto  $p = x(q)$  do  $A$ -LPL se, e somente se,  $l(q) = 0$  e  $l_u(q) \neq 0$ . A primeira igualdade garante que  $p$  está no  $A$ -LPL, já que estamos supondo que  $n(q) \neq 0$ , e a segunda condição garante que a EDB (3.13) é suavemente equivalente a  $dv^2 - udu^2 = 0$  em uma vizinhança de  $q$ , ou seja, as linhas interceptam o  $A$ -LPL em  $q$  através de cúspides.

Decorre que as linhas de curvatura não serão cúspides em  $p = x(q) \in A$ -LPL quando  $l(q) = 0$  e  $l_u(q_0) = 0$ . Como genericamente duas curvas se interceptam em pontos isolados, podemos concluir que, em geral, os pontos do  $A$ -LPL onde as linhas de curvatura não formam cúspides são isolados. Suponha que  $p_0 = x(q_0)$  seja um destes pontos e considere, sem perda de generalidade, que  $q_0$  é a origem. O 2-jato de  $P$  em  $(0, 0, 0)$  é dado por

$$j^2P = r^2 + \frac{l_v}{n}v - \frac{l_{uu}}{2n}u^2 - \frac{l_{uv}n - l_v n_u}{n^2}uv - \frac{l_{vv}n - 2l_v n_v}{2n^2}v^2,$$

onde as funções  $n$  e  $l$  e suas derivadas estão sendo calculadas na origem.

De acordo com Bruce e Tari em [5] e conforme vimos na Seção 2.3, teremos uma singularidade de dobra em  $q_0$  quando

$$l_v(q_0) \neq 0 \quad \text{e} \quad \lambda = \frac{n(q_0)l_{uu}(q_0)}{2l_v^2(q_0)} \neq 0, \frac{1}{16},$$

sendo que isto ocorre genericamente.

(2) Seja  $p_0 = x(q_0)$  um ponto umbílico tipo tempo. Então, temos  $n(q_0) = l(q_0) = 0$ . Assim,  $q_0 \in A-LPL$  e  $q_0$  é ponto singular de  $\delta$ , pois

$$\delta(q_0) = n(q_0)l(q_0) = 0,$$

$$\delta_u(q_0) = n_u(q_0)l(q_0) + n(q_0)l_u(q_0) = 0,$$

$$\delta_v(q_0) = n_v(q_0)l(q_0) + n(q_0)l_v(q_0) = 0.$$

Logo, pelo item (3) da Proposição 3.2.1, a função discriminante possui, genericamente, uma singularidade de Morse do tipo  $A_1^-$ .

Considere, sem perda de generalidade, que  $q_0 = (0, 0)$ . Tome a superfície  $M$ , a projeção  $\pi$  e o campo de Lie-Cartan  $\xi$  relacionados com a EDB (3.12), conforme a Seção 2.2. Pela Proposição 2.2.2, temos que o campo  $\xi$  possui genericamente um ou três pontos de equilíbrio em  $\{0\} \times \mathbb{R}P^1$ , todos do tipo sela ou nó.

Sendo  $j^1n(0) = n_1u + n_2v$  e  $j^1l(0) = l_1u + l_2v$ , a prova do item (2) da Proposição 2.2.2 nos mostra que:

- i. Os pontos de equilíbrio de  $\xi$  em  $\{0\} \times \mathbb{R}P^1$  são da forma  $(0, 0, r_i)$ , onde  $r_i$  são as raízes da cúbica

$$\Phi(r) = n_2r^3 + n_1r^2 - l_2r - l_1.$$

- ii. Genericamente, podemos supor que  $\Phi$  possui uma ou três raízes e que as quadráticas

$$\lambda_1(r) = -\Phi'(r) = -3n_2r^2 - 2n_1r + l_2,$$

$$\lambda_2(r) = 2n_2r^2 + 2n_1r,$$

não se anulam nas raízes de  $\Phi$ .

- iii. Dada uma raiz  $r_i$  de  $\Phi$ , se  $\lambda_1(r_i)$  e  $\lambda_2(r_i)$  possuem o mesmo sinal, então  $(0, 0, r_i)$  é um ponto de equilíbrio do tipo nó, senão  $(0, 0, r_1)$  será do tipo sela.

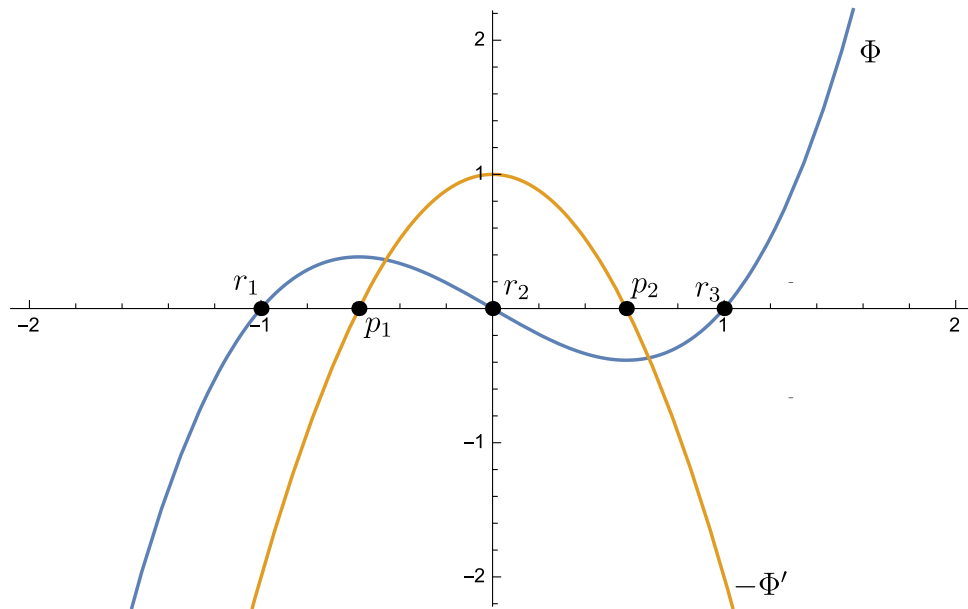
Mostraremos que todos os cinco casos apresentados na Figura 2.4 podem ocorrer, de acordo com a escolha dos coeficientes  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $l_1$  e  $l_2$ . Para isto, estamos supondo que  $\Phi$  tem uma ou três raízes e que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  não se anulam nas raízes de  $\Phi$ .

Considere  $n_2 > 0$ . Desta forma,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  serão parábolas com as concavidades voltadas para baixo e para cima, respectivamente. Denotaremos por  $r_i$ ,  $p_i$  e  $q_i$  as raízes de  $\Phi$ ,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , nesta ordem, com  $i$  variando de acordo com a quantidade de zeros de cada uma destas funções. Caso alguma função possua um única raiz, esta será denotada pelo índice  $i = 1$ . Caso contrário, adotaremos a seguinte convenção

$$r_i < r_j \iff i < j,$$

o mesmo vale para  $p$  e  $q$ .

Note que se  $\Phi$  possui três raízes reais distintas, então  $\lambda_1$  possui duas raízes pois, neste caso,  $\Phi$  terá um ponto de máximo local e um mínimo local e estes pontos são zeros de  $\Phi' = -\lambda_1$ . Além disso, teremos  $r_1 < p_1 < r_2 < p_2 < r_3$ , pois o máximo e o mínimo local ficam entre duas raízes. Logo, como a concavidade de  $\lambda_1$  está voltada para baixo, temos  $\lambda_1(r_1) < 0$ ,  $\lambda_1(r_2) > 0$  e  $\lambda_1(r_3) < 0$ . A Figura 3.1 ilustra estes fatos.



**Figura 3.1:** Gráfico da cúbica  $\Phi$  com três raízes e da função  $-\Phi'$ .

Por outro lado, se  $\Phi$  possui apenas uma raiz real, então  $\lambda_1$  pode ter uma, duas ou nenhuma raiz. Caso  $\lambda_1$  tenha apenas uma ou nenhuma raiz, então  $\lambda_1 \leq 0$  e, em particular,  $\lambda_1(r_1) < 0$ . Se  $\lambda_1$  possui duas raízes, então  $r_1 < p_1 < p_2$  ou  $p_1 < p_2 < r_1$ . De fato,

suponha que  $p_1 < r_1 < p_2$ . Como  $n_2 > 0$ , o gráfico da função cúbica nos mostra que  $\Phi(p_1) > \Phi(r_1) > \Phi(p_2)$ , pois  $r_1$  está entre o máximo e o mínimo local da cúbica  $\Phi$ . Logo  $\Phi(p_1) > 0$  e

$$0 \in (-\infty, 0] \subset (-\infty, \Phi(p_1)] = \Phi((-\infty, p_1]),$$

ou seja, existiria uma raiz  $r \in (-\infty, p_1]$  de  $\Phi$  diferente de  $r_1$ , o que é absurdo. Logo,  $r_1 < p_1 < p_2$  ou  $p_1 < p_2 < r_1$ , em ambos os casos temos  $\lambda_1(r_1) < 0$ .

Vamos agora analisar o sinal de  $\lambda_2$  nas raízes de  $\Phi$ . Tome  $n_1 = 0$ . Então,  $q_1 = q_2 = 0$  e  $\lambda_2 \geq 0$ , em particular,  $\lambda_2(r_i) > 0$ . Logo, se  $\Phi$  possuir três raízes, teremos que  $(0, 0, r_1)$  e  $(0, 0, r_3)$  serão pontos de equilíbrio do tipo sela e  $(0, 0, r_2)$  será do tipo nó. Porém, se  $\Phi$  tiver uma única raiz, então ela será uma sela.

Por outro lado, se  $n_1 \neq 0$ , então  $q_1 < q_2$ . Caso  $r \in (q_1, q_2)$ , temos  $\lambda_2(r) < 0$ . Se  $r \notin (q_1, q_2)$ , então  $\lambda_2(r) > 0$ .

Note que se  $\Phi$  possui uma única raiz, temos duas possibilidades,  $r_1 \in (q_1, q_2)$  ou  $r_1 \notin (q_1, q_2)$ . No primeiro caso,  $\lambda_2(r_1) < 0$  e  $(0, 0, r_1)$  será um ponto de equilíbrio do tipo nó. No outro caso,  $\lambda_2(r_1) > 0$  e  $(0, 0, r_1)$  será do tipo sela.

Agora, se  $\Phi$  possui três raízes, temos quatro possibilidades:

- i.** Nenhuma raiz de  $\Phi$  está entre  $q_1$  e  $q_2$ ;
- ii.** Uma raiz de  $\Phi$  está entre  $q_1$  e  $q_2$ ;
- iii.** Duas raízes de  $\Phi$  estão entre  $q_1$  e  $q_2$ ;
- iv.** Todas as raízes de  $\Phi$  estão entre  $q_1$  e  $q_2$ .

Em **i**, temos que  $\lambda_2(r_i) > 0$ , para  $i = 1, 2, 3$ , assim temos que  $(0, 0, r_1)$  e  $(0, 0, r_3)$  serão pontos de equilíbrio do tipo sela e  $(0, 0, r_2)$  será do tipo nó.

No caso **ii** podem ocorrer dois comportamentos distintos. Se  $r_2 \in (q_1, q_2)$ , então  $\lambda_2(r_1) > 0$ ,  $\lambda_2(r_2) < 0$  e  $\lambda_2(r_3) > 0$  e os pontos  $(0, 0, r_1)$ ,  $(0, 0, r_2)$  e  $(0, 0, r_3)$  serão pontos de equilíbrio do tipo sela. Se  $r_1 \in (q_1, q_2)$ , então  $\lambda_2(r_1) < 0$ ,  $\lambda_2(r_2) > 0$  e  $\lambda_2(r_3) > 0$ , assim  $(0, 0, r_1)$  e  $(0, 0, r_2)$  serão ponto de equilíbrio do tipo nó e  $(0, 0, r_3)$  será do tipo sela. O caso em que  $r_3 \in (q_1, q_2)$  é similar ao anterior.

Se **iii** ocorre, temos que  $r_1, r_2 \in (q_1, q_2)$  ou  $r_2, r_3 \in (q_1, q_2)$ . Quando  $r_1, r_2 \in (q_1, q_2)$ , temos  $\lambda_2(r_1) < 0$ ,  $\lambda_2(r_2) < 0$  e  $\lambda_2(r_3) > 0$ , ou seja,  $(0, 0, r_1)$  será um ponto de equilíbrio do tipo nó e os outros serão do tipo sela. O caso  $r_2, r_3 \in (q_1, q_2)$  é similar.

Por fim, se todas as raízes de  $\Phi$  estão entre  $q_1$  e  $q_2$ , então  $\lambda_2(r_i) < 0$ , para  $i = 1, 2, 3$ . Logo,  $(0, 0, r_1)$  e  $(0, 0, r_3)$  serão pontos de equilíbrio do tipo nó e  $(0, 0, r_2)$  será do tipo sela.

Portanto, vemos que as cinco possibilidades podem ocorrer. ■

### 3.3 Linhas de Curvatura em Superfícies em $\mathbb{R}_1^3$

Seja  $S$  uma superfície suave no espaço de Minkowski,  $\mathbb{R}_1^3$ . Como vimos na Seção 1.2,  $S$  é dada pela união disjunta de  $S_1$ ,  $S_2$  e  $LD$ . As regiões  $S_1$  e  $S_2$  são as partes Riemanniana e Lorentziana de  $S$ , respectivamente. Por outro lado,  $LD$  é o conjunto dos pontos onde a métrica se degenera. Em muitas superfícies temos que  $LD \neq \emptyset$ , o Lema 4.1.1, por exemplo, mostrará que isto sempre é verdade em superfícies fechadas.

O comportamento das linhas de curvatura em  $S_1$  e  $S_2$  é apresentado nas Seções 3.1 e 3.2, respectivamente. Desta forma, para entendermos o comportamento das linhas de curvatura em  $S$ , precisamos analisar como tais curvas se comportam em  $LD$ . Para este estudo vamos supor que  $LD$  é uma curva suave. Tal hipótese é genérica, pois  $LD = \delta^{-1}(0)$ , onde  $\delta$  é como em (1.15), e em geral 0 é um valor regular de  $\delta$ .

Os dois próximos teoremas irão garantir a existência de parametrizações de  $S$  que serão úteis no decorrer desta seção.

**Teorema 3.3.1.** *Seja  $S \subset \mathbb{R}_1^3$  uma superfície suave. Dado  $p \in LD$ , existe uma parametrização  $x : U \rightarrow S$ , com  $p \in x(U)$ , tal que  $x_u$  é a única direção tipo luz de  $T_{\tilde{p}}S$ , para todo  $\tilde{p} \in LD \cap x(U)$ . Consequentemente,  $E = F = 0$  em  $LD$ .*

**Demonstração:** Seja  $p \in LD$  e tome uma parametrização  $\tilde{x} : U \rightarrow S$  com  $p = \tilde{x}(q) \in \tilde{x}(U)$ , então

$$F^2(q) - E(q)G(q) = 0. \tag{3.14}$$

Assim, quando  $E(q) = 0$  ou  $G(q) = 0$ , temos  $F(q) = 0$ . Desta forma, não podemos ter  $E(q) = G(q) = 0$  em pontos no  $LD$ , pois teríamos  $F(q) = 0$  e a primeira forma fundamental em  $q$  seria identicamente nula, o que não ocorre. Por isso, sem perda de generalidade, podemos assumir que  $G \neq 0$  em  $U$ .

Seja  $w = a\tilde{x}_u + b\tilde{x}_v \in T_pS$ . Note que  $w$  será um vetor tipo luz se, e somente se,

$$G(q)b^2 + 2F(q)ab + E(q)a^2 = \langle w, w \rangle = 0.$$

Além disto, como  $p \in LD$ , a equação (3.14) garante que

$$\begin{aligned} G(q)b^2 + 2F(q)ab + E(q)a^2 = 0 &\Leftrightarrow G(q)b^2 + 2F(q)ab + \frac{F^2(q)}{G(q)}a^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow G^2(q)b^2 + 2G(q)F(q)ab + F^2(q)a^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (G(q)b + F(q)a)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow G(q)b + F(q)a = 0. \end{aligned}$$

Logo, a única direção tipo luz em  $T_pS$  será dada por  $G\tilde{x}_u - F\tilde{x}_v$ . Este é um campo de vetores suaves em  $\tilde{x}(U)$ . Assim, procedendo como na demonstração do Teorema 3.2.1, podemos escolher uma parametrização de  $S$  numa vizinhança de  $p$ , a qual denotaremos por  $x$ , de forma que  $x_u$  é o vetor definido no campo em questão.

Assim, nos pontos do  $LD$ ,  $x_u$  coincide com a única direção tipo luz, donde segue que  $E = F = 0$  em  $LD$ , pois  $E = \langle x_u, x_u \rangle = 0$  e isto implica que  $F = 0$ . Como a primeira forma fundamental não é identicamente nula, temos também que  $G \neq 0$  em  $LD$ . ■

**Teorema 3.3.2.** *Seja  $S \subset \mathbb{R}_1^3$  uma superfície suave. Dado  $p \in S$ , existe uma parametrização  $x : U \rightarrow S$ , com  $p \in x(U)$ , tal que  $F(q) = 0$  para todo  $q \in U$ .*

**Demonstração:** Seja  $p \in S$ . Trataremos três casos separadamente: Quando  $p$  pertence a região Riemanniana, Lorentziana ou ao  $LD$ .

Se  $p$  está na região Riemanniana de  $S$ , tome uma parametrização  $\tilde{x} : V \rightarrow S$ , com  $p \in \tilde{x}(V)$ . Considere, reduzindo  $V$  caso necessário, que  $\tilde{x}(V)$  pertence à parte Riemanniana de  $S$ . Logo,  $\tilde{x}_u$  e  $\tilde{x}_v$  serão vetores tipo espaço de  $T_qS$ , para todo  $q \in \tilde{x}(V)$ . Tome os campos vetoriais

$$\vec{u} := \tilde{x}_u \quad \text{e} \quad \vec{v} := \langle \tilde{x}_u, \tilde{x}_v \rangle \tilde{x}_u - \langle \tilde{x}_u, \tilde{x}_u \rangle \tilde{x}_v,$$

em  $\tilde{x}(V)$ . Como  $\tilde{x}_u$  é tipo espaço, temos que  $\langle \tilde{x}_u, \tilde{x}_u \rangle > 0$ . Logo,  $\vec{v}$  é não nulo e linearmente independente com relação a  $\vec{u}$ , para todo  $q \in \tilde{x}(V)$ , pois  $\{\tilde{x}_u, \tilde{x}_v\}$  é base. Além disso,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \tilde{x}_u, \langle \tilde{x}_u, \tilde{x}_v \rangle \tilde{x}_u - \langle \tilde{x}_u, \tilde{x}_u \rangle \tilde{x}_v \rangle = \langle \tilde{x}_u, \tilde{x}_v \rangle \langle \tilde{x}_u, \tilde{x}_u \rangle - \langle \tilde{x}_u, \tilde{x}_u \rangle \langle \tilde{x}_u, \tilde{x}_v \rangle = 0.$$

Suponha que  $p \in LD$ . Tome uma parametrização  $\tilde{x} : V \rightarrow S$  dada pelo Teorema 3.3.1. Como  $\tilde{x}_u$  é tipo luz em  $p$ , temos que  $\tilde{x}_v$  será tipo espaço. Podemos supor, reduzindo  $V$  caso necessário, que  $\tilde{x}_v$  é tipo espaço, para todo  $q \in \tilde{x}(V)$ . Defina os campos vetoriais

$$\vec{u} := \tilde{x}_v \quad \text{e} \quad \vec{v} := \langle \tilde{x}_v, \tilde{x}_v \rangle \tilde{x}_u - \langle \tilde{x}_u, \tilde{x}_v \rangle \tilde{x}_v,$$

em  $\tilde{x}(V)$ . Como  $\tilde{x}_v$  é tipo espaço, temos que  $\langle \tilde{x}_v, \tilde{x}_v \rangle > 0$ . Logo,  $\vec{v}$  é não nulo e linearmente independente com relação a  $\vec{u}$ , para todo  $q \in \tilde{x}(V)$ , pois  $\{\tilde{x}_u, \tilde{x}_v\}$  é base. Além disso,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \tilde{x}_v, \langle \tilde{x}_v, \tilde{x}_v \rangle \tilde{x}_u - \langle \tilde{x}_u, \tilde{x}_v \rangle \tilde{x}_v \rangle = \langle \tilde{x}_v, \tilde{x}_v \rangle \langle \tilde{x}_u, \tilde{x}_v \rangle - \langle \tilde{x}_u, \tilde{x}_v \rangle \langle \tilde{x}_v, \tilde{x}_v \rangle = 0.$$

Por fim, seja  $p$  pertencente a região Lorentziana. Tome uma parametrização  $\tilde{x} : V \rightarrow S$  dada pelo Teorema 3.2.1. Temos que  $\tilde{x}_u$  e  $\tilde{x}_v$  são tipo luz, para todo  $q \in \tilde{x}(V)$ . Tome os campos vetoriais

$$\vec{u} := \tilde{x}_u + \tilde{x}_v \quad \text{e} \quad \vec{v} := \tilde{x}_u - \tilde{x}_v,$$

em  $\tilde{x}(V)$ . Como  $\{\tilde{x}_u, \tilde{x}_v\}$  é base, temos que  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são não nulos e linearmente independentes. Além disso,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \tilde{x}_u + \tilde{x}_v, \tilde{x}_u - \tilde{x}_v \rangle = \langle \tilde{x}_u, \tilde{x}_u \rangle + \langle \tilde{x}_v, \tilde{x}_u \rangle - \langle \tilde{x}_u, \tilde{x}_v \rangle - \langle \tilde{x}_v, \tilde{x}_v \rangle = \langle \tilde{x}_v, \tilde{x}_u \rangle - \langle \tilde{x}_u, \tilde{x}_v \rangle = 0.$$

Em todos os casos, construímos campos vetoriais  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  numa vizinhança  $\tilde{x}(U)$  de  $p$ . Tais campos são linearmente independentes. Procedendo como na prova do Teorema 3.2.1, é possível tomar uma parametrização  $x : U \rightarrow S$ , com  $p \in x(U)$ , tal que  $x_u = \vec{u}$  e  $x_v = \vec{v}$ , para todo  $q \in x(U)$ . Com isto, temos que  $F = \langle x_u, x_v \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ . ■

De acordo com a primeira forma fundamental, as direções tipo luz são dadas pela EDB

$$Gdv^2 + 2Fdvdu + Edu^2 = 0,$$

as soluções de tal EDB são chamadas de **curvas tipo luz**. Temos que o conjunto discriminante desta equação é justamente o  $LD$ . Izumiya e Tari [17], afirmam que a única direção

tipo luz em  $LD$  é transversal ao  $LD$ , mas podem haver exceções em pontos isolados. Mais precisamente, os autores enunciam o seguinte teorema.

**Teorema 3.3.3.** *Genericamente, as curvas tipo luz formam uma família de cúspides ao longo do  $LD$ , exceto talvez em pontos isolados onde esta curva possui uma singularidade de dobra do tipo sela, nó ou foco (Ver Figura 2.2).*

**Demonstração:** Considere a parametrização local,  $x : U \rightarrow S$ , dada pelo Teorema 3.3.2. Desta forma, a equação das direções tipo luz é dada por

$$Gdv^2 + Edu^2 = 0.$$

Procedendo de forma análoga à demonstração do item (1) do Teorema 3.2.2, terminamos a prova. ■

Seja  $A : TS \rightarrow TS$  um operador auto-adjunto em  $S$  e  $A_p$  a restrição de  $A$  a  $T_pS$ . Considere as construções feitas na Seção 3.2 a partir deste operador, como, por exemplo, as curvaturas, direções e linhas de curvatura  $A$ -principais e os coeficientes  $l$ ,  $m$  e  $n$  da segunda forma fundamental.

**Teorema 3.3.4.** *Para uma parametrização como a do Teorema 3.3.1, temos que  $l = 0$  e  $m = 0$  no  $LD$ . Além disso, a única direção tipo luz em  $p \in LD$  é um autovetor de  $A_p$ , para qualquer operador auto-adjunto  $A$ .*

**Demonstração:** Sejam  $p \in LD$  e  $A$  um operador auto-adjunto em  $S$ . Tome uma parametrização como a do Teorema 3.3.1. Então  $\langle x_u, v \rangle = 0$  para todo  $v \in T_pS$ , pois  $T_pS$  e  $x_u$  são tipo luz, logo pela Proposição 1.2.1,  $x_u$  é um vetor normal à  $T_pS$ . Em particular,

$$l = \langle x_u, A_p(x_u) \rangle = 0 \quad \text{e} \quad m = \langle x_u, A_p(x_v) \rangle = 0.$$

Além disto,

$$\langle v, A_p(x_u) \rangle = \langle A_p(v), x_u \rangle = 0,$$

para todo  $v \in T_pS$ . Logo,  $A_p(x_u)$  é tipo luz, visto que

$$\langle A_p(x_u), A_p(x_u) \rangle = 0.$$



Como  $\{x_u\}$  é uma base do subespaço tipo luz de  $T_pS$ , pois este subespaço é unidimensional e contem  $x_u$ , temos que  $A_p(x_u) = \lambda x_u$ , para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Portanto,  $x_u$  é um autovetor de  $A_p$ . ■

Nos pontos do  $LD$  temos que  $EG - F^2 = 0$ . Por isto, não podemos resolver o sistema (3.7) afim de obter uma expressão como (3.8) para os pontos do  $LD$ . Considerando a parametrização  $x : U \rightarrow S$  dada pelo Teorema 3.3.1, temos que  $E = F = l = m = 0$  em  $LD \cap U$ . Utilizando o Lema 1 de [22], é possível encontrar  $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  tal que:

- i.  $\lambda(q) = 0$  se, e somente se,  $q \in LD$ ;
- ii.  $E = \lambda\tilde{E}$ ,  $F = \lambda\tilde{F}$ ,  $l = \lambda\tilde{l}$  e  $m = \lambda\tilde{m}$  em  $U$ , onde  $\tilde{E}$ ,  $\tilde{F}$ ,  $\tilde{l}$  e  $\tilde{m}$  são funções suaves.

Deste modo, a função discriminante será dada por

$$\delta = \lambda(\tilde{E}G - \lambda\tilde{F}^2).$$

Como  $LD = \delta^{-1}(0)$ , temos que  $\tilde{E}G - \lambda\tilde{F}^2 \neq 0$  nos pontos de  $x(U) \setminus LD$ . Desde que estamos supondo que o  $LD$  é uma curva regular, dado  $q \in LD$ , temos  $\delta_u(q) \neq 0$  ou  $\delta_v(q) \neq 0$ . Suponha, sem perda de generalidade, que  $\delta_u(q) \neq 0$ . Assim,

$$\begin{aligned} \delta_u(q) \neq 0 &\Leftrightarrow \lambda_u(\tilde{E}G - \lambda\tilde{F}^2) + \lambda(\tilde{E}_uG + \tilde{E}G_u - \lambda_u\tilde{F}^2 - 2\lambda\tilde{F}\tilde{F}_u) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda_u(\tilde{E}G - \lambda\tilde{F}^2) \neq 0. \end{aligned}$$

A última equivalência decorre do fato de que  $\lambda(q) = 0$ , pois  $q \in LD$ . Logo,  $\tilde{E}G - \lambda\tilde{F}^2 \neq 0$  em  $LD$ . Portanto, tal desigualdade sempre valerá em  $x(U)$ .

Dado  $p \in x(U)$  e  $w = ax_u + bx_v \in T_pS$ , temos que  $\langle A_p(w), w \rangle = la^2 + 2mab + nb^2$ , onde

$$l = \langle A_p(x_u), x_u \rangle, \quad m = \langle A_p(x_u), x_v \rangle = \langle A_p(x_v), x_u \rangle, \quad n = \langle A_p(x_v), x_v \rangle. \quad (3.15)$$

Seja  $(a_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2$ , a matriz de  $A_p$  com relação a base  $\{x_u, x_v\}$ . As equações em (3.15) nos mostram que

$$\begin{aligned} l &= a_{11}E + a_{21}F, & m &= a_{12}E + a_{22}F, \\ m &= a_{11}F + a_{21}G, & n &= a_{12}F + a_{22}G. \end{aligned}$$

Substituindo os valores de  $E$ ,  $F$ ,  $l$  e  $m$ , obtemos

$$\begin{aligned}\lambda\tilde{l} &= a_{11}\lambda\tilde{E} + a_{21}\lambda\tilde{F}, & \lambda\tilde{m} &= a_{12}\lambda\tilde{E} + a_{22}\lambda\tilde{F}, \\ \lambda\tilde{m} &= a_{11}\lambda\tilde{F} + a_{21}G, & n &= a_{12}\lambda\tilde{F} + a_{22}G.\end{aligned}$$

Considere  $p \in x(U) \setminus LD$ . Temos que  $\lambda(p) \neq 0$ , logo podemos simplificar as duas primeiras equações neste ponto,

$$\begin{aligned}\tilde{l} &= a_{11}\tilde{E} + a_{21}\tilde{F}, & \tilde{m} &= a_{12}\tilde{E} + a_{22}\tilde{F}, \\ \lambda\tilde{m} &= a_{11}\lambda\tilde{F} + a_{21}G, & n &= a_{12}\lambda\tilde{F} + a_{22}G.\end{aligned}$$

Como  $\tilde{E}G - \lambda\tilde{F}^2 \neq 0$  em  $p$ , as equações acima podem ser resolvidas para  $p$ , o que nos conduz a

$$A_p = \frac{1}{\tilde{E}G - \lambda\tilde{F}^2} \begin{pmatrix} G & -\tilde{F} \\ -\lambda\tilde{F} & \tilde{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{l} & \tilde{m} \\ \lambda\tilde{m} & n \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Pela continuidade de  $A$ , temos que a função  $f$  que associa a cada  $p \in S$  o operador  $A_p : T_p S \rightarrow T_p S$  é contínua. Defina a função  $g$  em  $x(U)$  tal que

$$g(p) = \frac{1}{\tilde{E}G - \lambda\tilde{F}^2} \begin{pmatrix} G & -\tilde{F} \\ -\lambda\tilde{F} & \tilde{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{l} & \tilde{m} \\ \lambda\tilde{m} & n \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

onde as funções utilizadas na definição de  $g$  tem seus valores calculados em  $p$ . De acordo com (3.16), temos que  $f(p) = g(p)$  para todo  $p \in x(U) \setminus LD$ . Como  $x(U) \setminus LD$  é denso em  $x(U)$ , temos que  $f(p) = g(p)$  para todo  $p \in x(U)$ . Logo, a equação (3.16) é válida para todo  $p \in x(U)$ .

Procedendo como em (3.9), vemos que a equação das linhas de curvatura  $A$ -principais é dada por

$$(G\tilde{m} - \tilde{F}n)dv^2 + (G\tilde{l} - \tilde{E}n)dudv + \lambda(\tilde{F}\tilde{l} - \tilde{E}\tilde{m})du^2 = 0. \quad (3.18)$$

O discriminante da EDB (3.18) é

$$\tilde{\delta} = (G\tilde{l} - \tilde{E}n)^2 - 4\lambda(G\tilde{m} - \tilde{F}n)(\tilde{F}\tilde{l} - \tilde{E}\tilde{m}).$$

Com isso, temos  $A\text{-LPL} = \tilde{\delta}^{-1}(0)$ . Se  $\lambda(p) = 0$  e  $(G\tilde{l} - \tilde{E}n) \neq 0$ , então  $p \in LD$  e

$$\tilde{\delta}(p) = ((G\tilde{l} - \tilde{E}n)^2 - 4\lambda(G\tilde{m} - \tilde{F}n)(\tilde{F}\tilde{l} - \tilde{E}\tilde{m}))(p) = (G\tilde{l} - \tilde{E}n)^2(p) > 0.$$

Logo, a equação (3.18) determina duas direções  $A$ -principais distintas em  $p$ . Tais direções serão denotadas por  $v_1$  e  $v_2$ . Como  $p$  não é ponto umbílico, pois  $\tilde{\delta}(p) \neq 0$ , temos que as curvaturas principais,  $k_1$  e  $k_2$ , são números reais distintos. Entretanto, note que

$$k_1 \langle v_1, v_2 \rangle = \langle A_p(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, A_p(v_2) \rangle = k_2 \langle v_1, v_2 \rangle,$$

sendo  $k_1 \neq k_2$ , temos que  $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$  e as direções  $A$ -principais serão ortogonais. Como  $p \in LD$ , segue que  $T_p S$  é um plano tipo luz. Logo, como  $v_1$  e  $v_2$  são ortogonais, uma das direções  $A$ -principais é tipo luz e a outra tipo espaço. Isto está de acordo com o Teorema 3.3.4.

**Definição 3.3.1.** *Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  duas curvas regulares, com  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  e  $\beta$  definida implicitamente por  $\beta = f^{-1}(0)$ , onde  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Suponha que  $\alpha$  e  $\beta$  se interceptem em  $p = \alpha(t_0)$ . Dizemos que estas curvas possuem uma **tangência ordinária** em  $p$  se  $(f \circ \alpha)'(t_0) = 0$  e  $(f \circ \alpha)''(t_0) \neq 0$ .*

O  $LD$  é uma curva regular e, pela definição da função  $\lambda$ ,  $LD = \lambda^{-1}(0)$ . De acordo com a Proposição 3.2.1, item (3), o  $A$ - $LPL$  também é uma curva regular, a qual é dada por  $A$ - $LPL = \tilde{\delta}^{-1}(0)$ . A intersecção destas curvas ocorre quando  $\lambda = G\tilde{l} - \tilde{E}n = 0$ . Tais curvas possuem em geral pontos de intersecção isolados. Além disso, o próximo teorema diz que nas intersecções temos tangências ordinárias, genericamente.

**Teorema 3.3.5.** *Genericamente, as curvas  $LD$  e  $A$ - $LPL$  possuem tangências ordinárias nos seus pontos de intersecção. Em tais pontos, a única direção  $A$ -principal é tipo luz.*

**Demonstração:** Tome uma parametrização do  $LD$  dada por  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , com  $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ . Temos que  $A$ - $LPL = \tilde{\delta}^{-1}(0)$ . Seja  $p = \alpha(t_0)$  um ponto de intersecção do  $LD$  e do  $A$ - $LPL$ .

Note que

$$\tilde{\delta}(\alpha(t)) = ((G\tilde{l} - \tilde{E}n)^2 - 4\lambda(G\tilde{m} - \tilde{F}n)(\tilde{F}\tilde{l} - \tilde{E}\tilde{m}))(\alpha(t)) = (G\tilde{l} - \tilde{E}n)^2(\alpha(t)) \geq 0.$$

Assim,  $\tilde{\delta} \circ \alpha \geq 0$ . Como  $(\tilde{\delta} \circ \alpha)(t_0) = 0$ , temos que  $t_0$  é um ponto de mínimo da função  $\tilde{\delta} \circ \alpha$ . Portanto,  $(\tilde{\delta} \circ \alpha)'(t_0) = 0$ . Genericamente, podemos supor que  $(\tilde{\delta} \circ \alpha)''(t_0) \neq 0$  e assim temos uma tangência ordinária em  $p$ .

Como o  $A$ - $LPL$  é uma curva de nível de  $\tilde{\delta}$ , temos que o vetor tangente ao  $A$ - $LPL$  em  $p$  é ortogonal ao vetor gradiente de  $\tilde{\delta}$  em  $p$ , que denotaremos por  $\nabla\tilde{\delta}(p)$ . Além disso,  $\langle \nabla\tilde{\delta}(p), \alpha'(t_0) \rangle_\epsilon = (\tilde{\delta} \circ \alpha)'(t_0) = 0$ , pois a tangência entre as curvas é ordinária. Assim, os vetores tangentes ao  $LD$  e ao  $A$ - $LPL$  em  $p$  são paralelos.

De acordo com o Teorema 3.3.4, a única direção tipo luz de  $p$  é um autovetor de  $A_p$ . Logo, a direção tipo luz será uma direção  $A$ -principal em  $p$ . Portanto, a única direção  $A$ -principal em  $p \in LD \cap A$ - $LPL$  é tipo luz. ■

Em [17], os autores afirmam que nos pontos de intersecção do  $LD$  com o  $A$ - $LPL$  a direção  $A$ -principal é tangente ao  $LD$ . Logo, em tais pontos, a única direção tipo luz é tangente ao  $LD$ . Assim, o Teorema 3.3.3 garante que genericamente as intersecções do  $LD$  com o  $A$ - $LPL$  são as singularidades de dobra das curvas tipo luz.

Tome  $p \in LD$  e considere, sem perda de generalidade, que  $p = x(0, 0)$ . Conforme vimos na Subseção 2.3.1, pondo

$$P(u, v, r) = G(u, v)r^2 + 2\lambda(u, v)\tilde{F}(u, v)r + \lambda(u, v)\tilde{E}(u, v)$$

e calculando o 2-jato de  $P$  em  $(0, 0, 0)$ ,

$$j^2P = a_0r^2 + (b_0 + b_1x + b_2y)r + (c_1x + c_2y + c_3x^2 + c_4xy + c_5y^2),$$

as curvas tipo luz possuem uma singularidade de dobra em  $p$  quando

$$c_1 = 0, \quad c_2 \neq 0, \quad c_3 \neq 0, \quad \alpha = \frac{4a_0c_3 - b_1^2 - b_1c_2}{4c_2^2} \neq 0, \frac{1}{16}.$$

De modo análogo, definindo

$$Q(u, v, r) = (G\tilde{m} - \tilde{F}n)(u, v)r^2 + (G\tilde{l} - \tilde{E}n)(u, v)r + \lambda(u, v)(\tilde{F}\tilde{l} - \tilde{E}\tilde{m})(u, v)$$

e calculando o 2-jato de  $Q$  em  $(0, 0, 0)$ ,

$$j^2Q = l_0r^2 + (m_0 + m_1x + m_2y)r + (n_1x + n_2y + n_3x^2 + n_4xy + n_5y^2),$$

as linhas de curvatura possuem uma singularidade de dobra em  $p$  quando

$$n_1 = 0, \quad n_2 \neq 0, \quad n_3 \neq 0, \quad \beta = \frac{4l_0n_3 - m_1^2 - m_1n_2}{4n_2^2} \neq 0, \frac{1}{16}.$$

Genericamente, podemos supor que

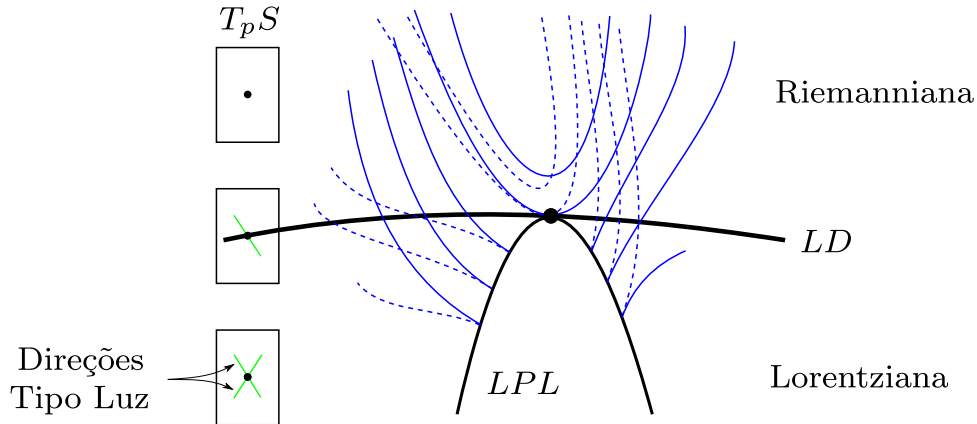
$$\begin{aligned} c_2 \neq 0, \quad c_3 \neq 0, \quad \alpha \neq 0, \frac{1}{16}, \\ n_2 \neq 0, \quad n_3 \neq 0, \quad \beta \neq 0, \frac{1}{16}, \\ \tilde{E}(0,0) \neq 0, \quad (\tilde{F}\tilde{l} - \tilde{E}\tilde{m})(0,0) \neq 0. \end{aligned}$$

Entretanto, note que

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\partial P}{\partial u}(0,0,0) = \lambda_u(0,0)\tilde{E}(0,0), \\ n_1 &= \frac{\partial Q}{\partial u}(0,0,0) = \lambda_u(0,0)(\tilde{F}\tilde{l} - \tilde{E}\tilde{m})(0,0). \end{aligned}$$

Logo, como estamos supondo que  $\tilde{E}(0,0) \neq 0$  e  $(\tilde{F}\tilde{l} - \tilde{E}\tilde{m})(0,0) \neq 0$ , temos que  $c_1 = 0$  se, e somente se,  $n_1 = 0$ . Assim, genericamente, as singularidades de dobra das linhas de curvatura ocorrem exatamente nas singularidades de dobra das curvas tipo luz e tais pontos, como vimos anteriormente, serão as intersecções entre  $LD$  e  $A$ - $LPL$ .

A Figura 3.2 ilustra os resultados que obtemos ao longo desta seção.



**Figura 3.2:** Configuração das linhas de curvatura de superfícies em  $\mathbb{R}_1^3$ .

Toda a discussão realizada ao longo desta seção termina no seguinte teorema, que foi demonstrado ao longo do texto.

**Teorema 3.3.6.** *Seja  $S \subset \mathbb{R}_1^3$  uma superfície suave e  $A$  um operador auto-adjunto genérico em  $S$ . As linhas de curvatura  $A$ -principais podem ser estendidas para o  $LD$ , onde*

*uma das direções A-principais será tipo luz. Genericamente, esta extensão possui singularidades de dobras do tipo sela, nó ou foco, e elas ocorrem exatamente onde as curvas tipo luz têm uma singularidade de dobra.*

# Capítulo 4

## Pontos Umbílicos de Superfícies no 3-Espaço Minkowski

Neste capítulo apresentaremos um estudo sobre pontos umbílicos em uma superfície fechada  $S \subset \mathbb{R}_1^3$ . Na primeira seção apresentaremos a prova dada por Farid Tari à conjectura de Carathéodory para superfícies em  $\mathbb{R}_1^3$ , este resultado estipula uma cota mínima de pontos umbílicos para superfícies fechadas e convexas. Por fim, apresentaremos alguns resultados sobre pontos umbílicos em três superfícies particulares: a esfera, o ovaloide e o toro.

### 4.1 Conjectura de Carathéodory

Seja  $S$  uma superfície em  $\mathbb{R}_1^3$ . Quando  $S$  for compacta e sem bordo, dizemos que ela é uma **superfície fechada**. Se  $S$  está contida em um único semiespaço fechado definido por  $T_p S$ , para todo  $p \in S$ , chamamos  $S$  de **superfície convexa**.

Dizemos que  $S$  é **localmente convexa** em  $p \in S$  se existir uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $S$  tal que  $V$  está contida em um único semiespaço fechado determinado por  $T_p S$ . Logo, uma superfície convexa é localmente convexa em todo  $p \in S$ .

A conjectura de Carathéodory diz que uma superfície fechada e convexa possui no mínimo dois pontos umbílicos. Tari [26] mostrou que este resultado vale para superfícies

em  $\mathbb{R}_1^3$ . Nesta seção apresentaremos este resultado e sua demonstração, no Teorema 4.1.1. Para provar a conjectura, Tari demonstrou os Lemas 4.1.2 e 4.1.4, que serão utilizados na mesma. Visando justificar algumas outras afirmações que faremos, incluímos outros dois lemas.

**Lema 4.1.1.** *Seja  $S$  uma superfície fechada em  $\mathbb{R}^3$ . Então a aplicação de Gauss  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$  é sobrejetora.*

**Demonstração:** Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície fechada. Tome  $v \in \mathbb{S}^2$ , vamos mostrar que existe  $x \in S$  tal que  $N(x) = v$ . Considere  $v = (v_1, v_2, v_3)$  e defina

$$\begin{aligned} g : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto xv_1 + yv_2 + zv_3. \end{aligned}$$

Temos que  $g$  é contínua em  $\mathbb{R}^3$ , logo  $g$  é contínua em  $S$ . Como  $S$  é compacta, existem  $p, q \in S$  tais que  $m_1 = g(p)$  e  $m_2 = g(q)$  são o máximo e o mínimo de  $g$  em  $S$ , respectivamente. Seja  $P_c$  o plano dado por  $v_1x + v_2y + v_3z = c$ . Note que:

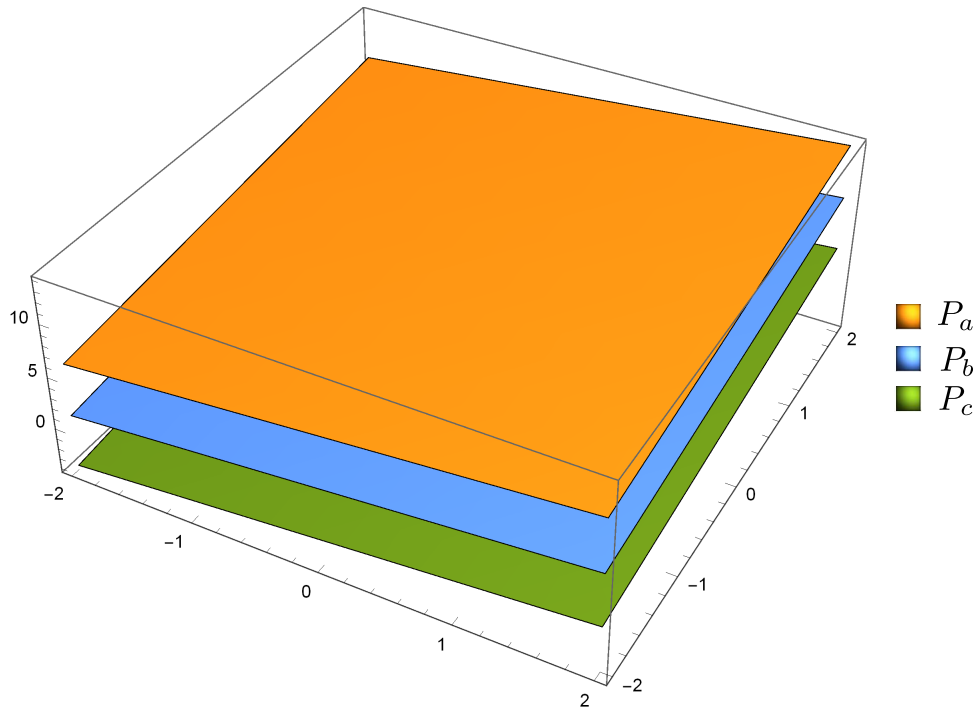
- (1) Para todo  $c \in \mathbb{R}$ , temos que  $\pm v$  são os únicos vetores unitários normais a  $P_c$ , o que é imediato a partir da definição de  $P_c$ .
- (2) Se  $a \leq b \leq c$ , então  $P_b$  está contido entre os planos  $P_a$  e  $P_c$ , ver Figura 4.1. De fato, como  $v \in \mathbb{S}^2$ , temos que  $v_1 \neq 0$ ,  $v_2 \neq 0$  ou  $v_3 \neq 0$ . Suponha que  $v_3 \neq 0$  e seja  $(x, y, z) \in P_b$ . Existem  $z_a, z_c \in \mathbb{R}$  tais que  $(x, y, z_i) \in P_i$ , com  $i = a, c$ . Assim, vemos que

$$z_a = \frac{a - v_1x - v_2y}{v_3}, \quad z = \frac{b - v_1x - v_2y}{v_3}, \quad z_c = \frac{c - v_1x - v_2y}{v_3}.$$

Portanto, se  $v_3 > 0$ , então  $z_a < z < z_c$ , por outro lado, se  $v_3 < 0$ , então  $z_c < z < z_a$ . Em ambos os casos temos que  $(x, y, z)$  está entre os planos  $P_a$  e  $P_c$ . Os casos em que  $v_1 \neq 0$  e  $v_2 \neq 0$  são análogos.

- (3)  $S$  está contida entre os planos  $P_{m_1}$  e  $P_{m_2}$ . De fato, dado  $x \in S$ , temos que  $x \in P_{g(x)}$ , mas  $m_2 \leq g(x) \leq m_1$ , logo  $P_{g(x)}$  está entre  $P_{m_1}$  e  $P_{m_2}$ , assim  $x$  está entre  $P_{m_1}$  e  $P_{m_2}$ , para todo  $x \in S$ .





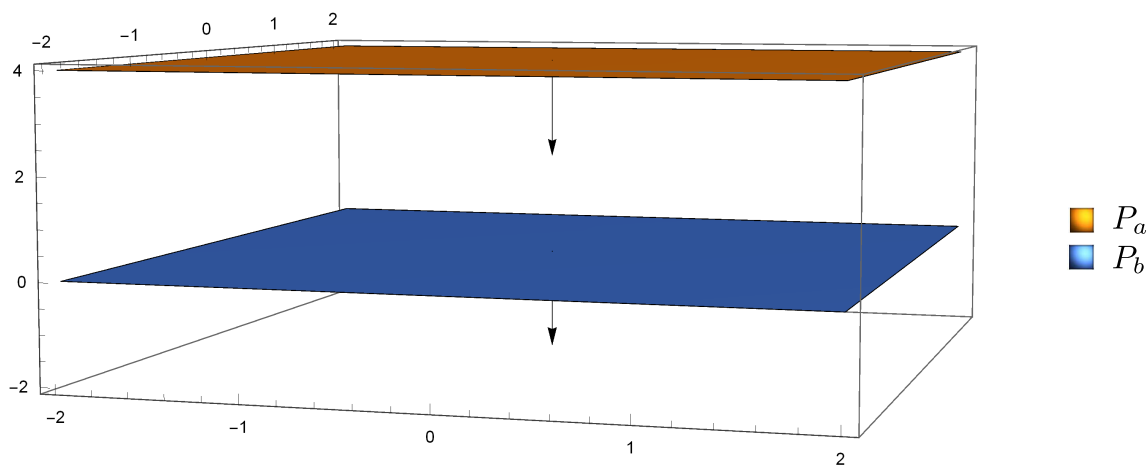
**Figura 4.1:** Plano  $P_b$  entre os planos  $P_a$  e  $P_c$ .

- (4)  $P_c$  divide  $\mathbb{R}^3$  em dois semiespaços, um contendo  $v$  que será denotado por  $P_c^+$ , e outro contendo  $-v$ , que será denotado por  $P_c^-$ .
- (5) Dados  $a, b \in \mathbb{R}$ , temos que a região entre  $P_a$  e  $P_b$  será dada por  $P_a^+ \cap P_b^-$  ou  $P_a^- \cap P_b^+$ . De fato, temos apenas duas possibilidades, como ilustram as Figuras 4.2 e 4.3.
- (6) De (3) e (5) segue que  $S \subset P_{m_1}^- \cap P_{m_2}^+$  ou  $S \subset P_{m_1}^+ \cap P_{m_2}^-$ .

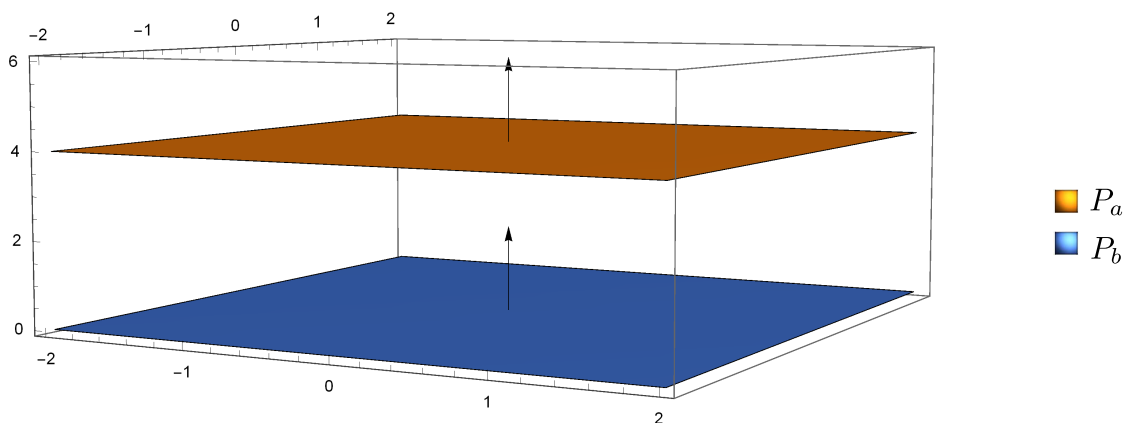
Vamos mostrar que  $T_p S = P_{m_1}$ . Seja  $u \in T_p S$ . Tome uma curva  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$  com  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = u$ . Como  $g(p)$  é o máximo de  $g$  em  $S$ , temos que  $(g \circ \alpha)(0)$  é o máximo de  $g \circ \alpha$  em  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ . Logo,

$$0 = (g \circ \alpha)'(0) = \langle g'(p), \alpha'(0) \rangle_\varepsilon = \langle v, u \rangle_\varepsilon.$$

Portanto,  $u \in P_0$ . Como  $P_0$  é paralelo a  $P_{m_1}$ , temos que  $u \in P_{m_1}$ . Assim, vemos que  $T_p S \subset P_{m_1}$ . Mas  $\dim T_p S = \dim P_{m_1} = 2$ , logo  $T_p S = P_{m_1}$ . De modo análogo concluímos que  $T_q S = P_{m_2}$ .



**Figura 4.2:** Caso  $P_a^+ \cap P_b^-$ .



**Figura 4.3:** Caso  $P_a^- \cap P_b^+$ .

Como  $N(p)$  e  $N(q)$  são vetores unitários normais a  $T_p S = P_{m_1}$  e  $T_q S = P_{m_2}$ , respectivamente, a observação (2) feita acima nos mostra que  $N(p) = \pm v$  e  $N(q) = \pm v$ .

Por hipótese temos que  $S$  é compacta, logo  $S$  divide  $\mathbb{R}^3$  em duas regiões, uma interior (limitada) e uma exterior (ilimitada). Como  $N$  é contínua, se  $N(x)$  aponta para o interior de  $S$ , em algum ponto  $x \in S$ , então  $N(y)$  apontará para o interior de  $S$ , para todo  $y \in S$ . O mesmo vale para o exterior de  $S$ .

Logo, existem quatro possibilidades:

1.  $S \subset P_{m_1}^- \cap P_{m_2}^+$  e  $N$  aponta para o interior de  $S$ . Neste caso temos que  $N(q) = v$ .

2.  $S \subset P_{m_1}^+ \cap P_{m_2}^-$  e  $N$  aponta para o interior de  $S$ . Neste caso temos que  $N(p) = v$ .
3.  $S \subset P_{m_1}^- \cap P_{m_2}^+$  e  $N$  aponta para o exterior de  $S$ . Neste caso temos que  $N(p) = v$ .
4.  $S \subset P_{m_1}^+ \cap P_{m_2}^-$  e  $N$  aponta para o exterior de  $S$ . Neste caso temos que  $N(q) = v$ .

Em todos os casos vemos que existe  $x \in S$ , que será ou  $p$  ou  $q$ , tal que  $N(x) = v$ . ■

**Lema 4.1.2.** *O LD de uma superfície fechada  $S \subset \mathbb{R}_1^3$  é a união de dois subconjuntos fechados, disjuntos e não vazios de  $S$ .*

**Demonstração:** Seja  $S \subset \mathbb{R}_1^3$  uma superfície fechada. Vamos mostrar que o LD de  $S$  é a união de dois subconjuntos fechados, disjuntos e não vazios. Note que os pontos do LD são exatamente aqueles onde o plano tangente é tipo luz. Assim, pela Proposição 1.2.1, item (5),  $p \in LD$  se, e somente se,  $T_p S$  é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}_1^3$  tangente ao cone de luz.

Tome a aplicação

$$\begin{aligned} i : \quad \mathbb{R}_1^3 &\longrightarrow (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_\epsilon) \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, y, z), \end{aligned}$$

onde  $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_\epsilon)$  representa o espaço  $\mathbb{R}^3$  com a métrica euclidiana usual, e defina  $\tilde{S} = i(S)$  e  $\tilde{p} = i(p)$ , para todo  $p \in S$ . Como o espaço tangente de uma superfície não depende da métrica utilizada, temos que

$$T_p S = T_{\tilde{p}} \tilde{S}.$$

Assim, procuramos os pontos de  $\tilde{S}$  tais que  $T_{\tilde{p}} \tilde{S}$  é tangente ao cone de luz,

$$LC = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\} : x^2 = y^2 + z^2\}.$$

Para isso, observe que  $(x, y, z) \in LC$  se, e somente se,  $(-x, y, z) \in LC$ . Veja ainda que as seguintes afirmações são equivalentes:

- (1)  $P$  é um plano tangente a  $LC$ ;
- (2)  $P$  passa pela origem e o vetor normal de  $P$  pertence a  $LC$ .

De fato, se  $P$  é um plano tangente a  $LC$  em  $(a, b, c) \in LC$ , então

$$P = T_{(a,b,c)}LC = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -ax + by + cz = 0\},$$

logo  $P$  passa pela origem e seu vetor normal é  $(-a, b, c) \in LC$ , pois  $(a, b, c) \in LC$ . Por outro lado, seja  $P$  um plano que passa pela origem e cujo vetor normal,  $\vec{n} = (a, b, c)$ , pertence ao cone de luz, então  $(-a, b, c) \in LC$  e

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\} = T_{(-a,b,c)}LC,$$

donde  $P$  é tangente ao cone de luz.

Tome a aplicação de Gauss  $N : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{S}^2$ . Pela definição de tal aplicação, vemos que  $N(\tilde{p})$  é normal ao plano  $T_{\tilde{p}}\tilde{S}$ . Logo, pela equivalência anterior, vemos que  $T_{\tilde{p}}\tilde{S}$  é tangente a  $LC$  se, e somente se,  $N(\tilde{p}) \in LC \cap \mathbb{S}^2$ . Definindo

$$C_+ = \left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\cos(t)}{\sqrt{2}}, \frac{\sin(t)}{\sqrt{2}} \right) \in \mathbb{R}^3 : t \in [0, 2\pi] \right\},$$

$$C_- = \left\{ \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\cos(t)}{\sqrt{2}}, \frac{\sin(t)}{\sqrt{2}} \right) \in \mathbb{R}^3 : t \in [0, 2\pi] \right\},$$

temos que

$$LC \cap \mathbb{S}^2 = C_+ \cup C_-. \quad (4.1)$$

Como  $C_+$  e  $C_-$  são curvas disjuntas, vemos que  $LC \cap \mathbb{S}^2$  é formado por dois conjuntos fechados, disjuntos e não vazios, conforme Figura 4.4.

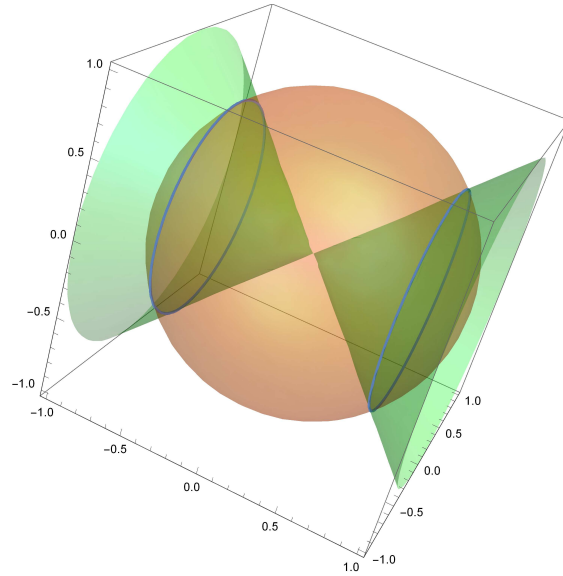
Sejam  $\tilde{A}_+ = N^{-1}(C_+)$  e  $\tilde{A}_- = N^{-1}(C_-)$ , ambos subconjuntos de  $\tilde{S}$ . Temos que  $\tilde{A}_+ \cap \tilde{A}_- = \emptyset$ , pois  $C_+$  e  $C_-$  são disjuntos. Como  $S$  é superfície fechada, o Lema 4.1.1 nos garante que  $N$  é sobrejetora, logo  $\tilde{A}_+ \neq \emptyset$  e  $\tilde{A}_- \neq \emptyset$ . Além disso, como  $N$  é contínua, segue que  $\tilde{A}_+$  e  $\tilde{A}_-$  são fechados. Tomando  $A_+ = i^{-1}(\tilde{A}_+)$  e  $A_- = i^{-1}(\tilde{A}_-)$ , temos que estas propriedades também valerão para  $A_+$  e  $A_-$ , pois  $i$  é um homeomorfismo.

Por fim, note que os pontos de  $\tilde{A}_+ \cup \tilde{A}_-$  são exatamente os pontos  $p \in \tilde{S}$  tais que  $T_p\tilde{S}$  é tangente ao cone de luz. Portanto,  $LD = A_+ \cup A_-$ , o que conclui a prova. ■

**Lema 4.1.3.** *Sejam  $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização local de  $S$ ,  $p_0 = x(q_0) \in x(U)$ ,  $\mathbf{v} = (x_u \times x_v)(q_0)$  vetor normal a  $S$  em  $p_0$  e a função altura*

$$h : U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \mapsto \langle x(u, v), \mathbf{v} \rangle.$$



**Figura 4.4:** Intersecção entre a esfera  $\mathbb{S}^2$  e o cone de luz.

Uma condição necessária para que  $S$  seja localmente convexa em  $p_0$  é que

$$(h_{uv}^2 - h_{uu}h_{vv})(q_0) \leq 0.$$

**Demonstração:** Note que  $q_0$  é ponto crítico de  $h$ , pois

$$h_u(q_0) = \langle x_u(q_0), \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \text{e} \quad h_v(q_0) = \langle x_v(q_0), \mathbf{v} \rangle = 0.$$

Suponha que  $(h_{uv}^2 - h_{uu}h_{vv})(q_0) > 0$ . Temos que o determinante da matriz Hessiana de  $h$  em  $q_0$  será

$$\det(\text{Hess } h(q_0)) = (h_{uu}h_{vv} - h_{uv}^2)(q_0) < 0.$$

Logo,  $q_0$  é um ponto de sela de  $h$ . Tome uma vizinhança  $V$  de  $p_0$  em  $S$  e considere  $W = x^{-1}(V \cap x(U))$  uma vizinhança de  $q_0$ . Como  $q_0$  é ponto de sela, existem  $q_1$  e  $q_2$  em  $W$  tais que

$$h(q_1) < h(q_0) < h(q_2). \tag{4.2}$$

Vamos mostrar que  $x(q_1)$  e  $x(q_2)$  estão em lados opostos de  $T_{p_0}S$ . De fato, tome os planos

$$P_i = \{v \in \mathbb{R}_1^3 : \langle v, \mathbf{v} \rangle = h(q_i)\},$$

com  $i = 0, 1, 2$ . Note que  $x(q_i) \in P_i$ . Pela equação (4.2), podemos concluir, de modo análogo ao feito na prova do Lema 4.1.1 e ilustrado na Figura 4.1, que o plano  $P_0$  está situado entre os planos  $P_1$  e  $P_2$ . Além disso,  $P_0 = T_{p_0}S$ , pois

$$T_{p_0}S = \{p_0 + ax_u + bx_v : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

(Note que aqui estamos considerando  $T_{p_0}S$  como sendo o plano que tangencia a superfície  $S$  em  $p_0$ , e não como espaço vetorial). Assim, vemos que  $P_1$  e  $P_2$  pertencem a semiespaços distintos definidos por  $T_{p_0}S$ . Logo, como  $x(q_i) \in P_i$ , temos que  $x(q_1)$  e  $x(q_2)$  estão em lados opostos de  $T_{p_0}S$ . Como  $V$  é uma vizinhança arbitrária de  $p_0$ , concluímos que  $S$  não é localmente convexa em  $p_0$ . ■

**Lema 4.1.4.** *Seja  $S$  uma superfície fechada e convexa em  $\mathbb{R}_1^3$  de classe  $C^3$ .*

- (1) *Os pontos singulares de  $\delta = F^2 - EG$  em  $LD$  são exatamente os pontos umbílicos tipo luz.*
- (2) *Se  $\delta$  é regular em  $LD$ , então a única direção tipo luz no  $T_pS$ , com  $p \in LD$ , é transversal ao  $LD$ .*

**Demonstração:** Seja  $x : U \rightarrow S$  uma parametrização de  $S$  dada pelo Teorema 3.3.1. Assim, nos pontos do  $LD$ ,  $x_u$  coincide com a única direção tipo luz e disto segue que  $E = F = 0$  e  $G \neq 0$  em  $LD$ . Utilizaremos tal parametrização no decorrer da prova.

- (1) A função  $\delta$  é singular quando  $(\delta_u, \delta_v) = (0, 0)$ . Calculando tais derivadas obtemos

$$\delta_u = 2FF_u - E_uG - EG_u \quad \text{e} \quad \delta_v = 2FF_v - E_vG - EG_v.$$

Nos pontos do  $LD$  temos que  $E = F = 0$ . Assim,  $\delta$  será singular no  $LD$  se, e somente se,  $(-E_uG, -E_vG) = (0, 0)$ . Além disso, os coeficientes da equação (1.18) em  $LD$  serão  $(G\bar{m}, G\bar{l}, 0)$ .

Da Proposição 1.2.1, itens (1) e (6), e da Proposição 1.2.2, item (2), vemos que  $x_u \times x_v = \lambda x_u$ , para alguma função não nula  $\lambda$ . Desta forma,

$$\bar{l} = \langle x_u \times x_v, x_{uu} \rangle = \lambda \langle x_u, x_{uu} \rangle = \frac{1}{2} \lambda E_u,$$

$$\bar{m} = \langle x_u \times x_v, x_{uv} \rangle = \lambda \langle x_u, x_{uv} \rangle = \frac{1}{2} \lambda E_v.$$

Logo, os coeficientes de (1.18) em pontos do  $LD$  serão  $(\lambda E_v G, \lambda E_u G, 0)$ . Tais coeficientes serão 0 exatamente quando  $(E_v G, E_u G) = (0, 0)$ , pois  $\lambda$  é não nulo. Portanto,  $q \in LD$  será um ponto umbílico se, e somente se,  $\delta$  é singular em  $q$ .

(2) Suponha que  $\delta$  é regular em  $LD$  e seja  $p_0 = x(q_0) \in LD$ . Então 0 é valor regular de  $\delta$ , o que nos garante que  $LD = \delta^{-1}(0)$  é uma subvariedade de codimensão 1 de  $S$  (curva regular) e  $T_{p_0} LD = \ker(d\delta_{p_0})$ . Como

$$d\delta_{p_0}(ax_u + bx_v) = -E_u(q_0)G(q_0)a - E_v(q_0)G(q_0)b,$$

e  $G(q_0) \neq 0$ , teremos

$$T_{p_0} LD = \{ax_u + bx_v \in T_{p_0} S : E_u(q_0)a + E_v(q_0)b = 0\}.$$

Disto segue que  $x_u$  é tangente a  $LD$  em  $p_0$  se, e somente se,  $E_u(q_0) = 0$ .

Entretanto, como  $\delta$  é regular em  $p_0$ , temos que  $E_u(q_0) \neq 0$  ou  $E_v(q_0) \neq 0$ . Se  $S$  é convexa, então ela será localmente convexa. Logo, pelo Lema 4.1.3, temos que  $(h_{uv}^2 - h_{uu}h_{vv})(q_0) \leq 0$ . Como

$$\begin{aligned} h_{uu}(q_0) &= \langle x_{uu}(q_0), x_u(q_0) \rangle = \frac{1}{2} E_u(q_0), \\ h_{uv}(q_0) &= \langle x_{uv}(q_0), x_u(q_0) \rangle = \frac{1}{2} E_v(q_0), \\ h_{vv}(q_0) &= \langle x_{vv}(q_0), x_u(q_0) \rangle = (F_v - \frac{1}{2} G_u)(q_0), \end{aligned}$$

obtemos

$$(E_v^2 - (2F_v - G_u)E_u)(q_0) \leq 0.$$

Assim,  $E_u(q_0) = 0$  implica que  $E_v(q_0) = 0$ . Logo, como  $\delta$  é regular em  $p_0$ , temos que  $E_u(q_0) \neq 0$ .

Portanto,  $x_u$  é transversal a  $LD$  em  $p_0$ . ■

Agora estamos prontos para apresentar a demonstração da conjectura de Carathéodory para superfícies em  $\mathbb{R}_1^3$ . Para isto, utilizaremos os Lemas 4.1.2 e 4.1.4. Utilizaremos também o fato de que dado um campo vetorial numa região homeomorfa a

um disco, transversal ao bordo desta região, a soma dos índices das singularidades deste campo será um. Este último resultado pode ser visto como um corolário do Teorema de Poincaré-Hopf.

**Teorema 4.1.1 (Conjectura de Carathéodory).** *Seja  $S$  uma superfície fechada e convexa em  $\mathbb{R}_1^3$  de classe  $C^3$ . Então  $S$  tem pelo menos dois pontos umbílicos.*

**Demonstração:** Considere a função de classe  $C^3$  dada por

$$\begin{aligned} f : S \subset \mathbb{R}_1^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (p_0, p_1, p_2) &\mapsto p_0. \end{aligned}$$

Como  $S$  é compacta, existe um mínimo global e um máximo global de  $f$  em  $S$ , os quais denotaremos por  $p_{min}$  e  $p_{max}$ , respectivamente.

Tome a aplicação

$$\begin{aligned} i : \mathbb{R}_1^3 &\longrightarrow (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_\epsilon) \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, y, z), \end{aligned}$$

como na demonstração do Lema 4.1.2, e defina  $\tilde{S} = i(S)$  e  $\tilde{p} = i(p)$ , para todo  $p \in S$ . Seja  $N : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{S}^2$  a aplicação de Gauss. Podemos decompor a esfera  $\mathbb{S}^2$  nas seguintes partes

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}, \\ S_2 &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}, \\ S_3 &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}, \\ S_4 &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : x = \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}, \\ S_5 &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : x > \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}, \end{aligned}$$

de forma que  $\mathbb{S}^2$  seja a união disjunta destes conjuntos. Utilizando os mesmos argumentos da prova do Lema 4.1.1, vemos que  $N(\tilde{p}_{min}) = (-1, 0, 0)$  e  $N(\tilde{p}_{max}) = (1, 0, 0)$ , para isso estamos considerando que  $N$  aponta para o exterior de  $\tilde{S}$ .

Observe que, de modo análogo ao feito na demonstração do Lema 4.1.2, a parte Riemanniana de  $S$  é dada por  $(N \circ i)^{-1}(S_1 \cup S_5)$ . Como  $S_1 \cup S_5$  é desconexo, temos que a parte Riemanniana de  $S$  é desconexa e  $p_{min}$  e  $p_{max}$  pertencem a componentes conexas distintas, pois  $N(\tilde{p}_{min}) \in S_1$  e  $N(\tilde{p}_{max}) \in S_5$ . Denotaremos as componentes conexas



de  $p_{min}$  e  $p_{max}$  por  $R_1$  e  $R_2$ , respectivamente. Sejam  $L_1$  e  $L_2$  as fronteiras de  $R_1$  e  $R_2$ , nesta ordem. Temos que  $L_1$  e  $L_2$  são disjuntas, pois  $L_1 \subset (N \circ i)^{-1}(S_2)$  e  $L_2 \subset (N \circ i)^{-1}(S_4)$ . Além disso, como  $LD = (N \circ i)^{-1}(S_2 \cup S_4)$ , vemos que  $L_1$  e  $L_2$  estão contidas no  $LD$ .

Considere uma parametrização local de  $S$  em  $L_1$ . Se  $\delta = F^2 - EG$  é singular em  $L_1$ , então pelo Lema 4.1.4, item (1), existe um ponto umbílico tipo luz em  $L_1$ .

Suponha, então, que  $\delta$  é regular em  $L_1$ . Logo,  $L_1$  é uma curva regular. Por outro lado,  $L_1$  é a fronteira de  $R_1$ , ou seja,  $L_1$  é um conjunto fechado. Portanto,  $L_1$  é uma curva fechada, pois é uma curva regular que topologicamente é um conjunto fechado. Como  $S$  é homeomorfa à  $\mathbb{S}^2$ , porque é fechada e convexa, temos que  $R_1$  é homeomorfo a um disco. Considere o campo de direções em  $R_1$  dado por (1.18). Sabemos que em  $p \in L_1 \subset LD$ , uma das direções determinadas por (1.18) coincide com a única direção tipo luz de  $T_p S$ . Esta direção é transversal a  $L_1$  pelo Lema 4.1.4, item (2). Assim, pelo Teorema de Poincaré-Hopf existe pelo menos uma singularidade em  $R_1$ . Esta singularidade é um ponto umbílico tipo espaço em  $R_1$ .

Portanto, em ambos os casos existe pelo menos um ponto umbílico em  $R_1 \cup L_1$ . De modo análogo, vemos que isto também é válido para  $R_2 \cup L_2$ . Como  $R_1 \cup L_1$  e  $R_2 \cup L_2$  são disjuntos, concluimos que existem no mínimo dois pontos umbílicos em  $S$ . ■

## 4.2 Casos Particulares

### 4.2.1 Esfera

Mostraremos nesta subseção que a esfera euclidiana no espaço de Minkowski possui exatamente dois pontos umbílicos e estes são tipo espaço. Considere a esfera euclidiana no espaço de Minkowski,

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}_1^3 : x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1\}. \quad (4.3)$$

Dado  $x = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{S}^2$ , temos que

$$\begin{aligned} T_x \mathbb{S}^2 &= \{(u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{R}_1^3 : x_0 u_0 + x_1 u_1 + x_2 u_2 = 0\} \\ &= \{(u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{R}_1^3 : \langle (u_0, u_1, u_2), (-x_0, x_1, x_2) \rangle = 0\}. \end{aligned}$$

Assim, um vetor normal a  $\mathbb{S}^2$  em  $x$  é dado por  $\eta = (-x_0, x_1, x_2)$ . Este vetor será tipo luz quando

$$x_0^2 = x_1^2 + x_2^2. \quad (4.4)$$

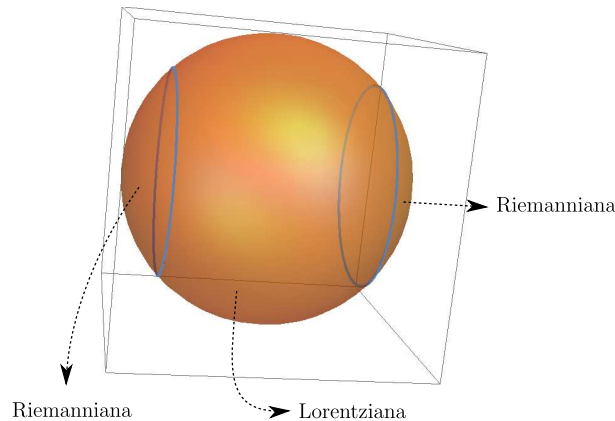
De (4.3) e (4.4) vemos que  $\eta$  é tipo luz se, e somente se,

$$x_0^2 = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{2}.$$

Logo, o conjunto  $LD$  de  $\mathbb{S}^2$  será composto por dois círculos,

$$LD = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}_1^3 : x = \frac{\sqrt{2}}{2}, y^2 + z^2 = \frac{1}{2} \right\} \cup \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}_1^3 : x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, y^2 + z^2 = \frac{1}{2} \right\}.$$

O espaço tangente em  $(\pm 1, 0, 0)$  é tipo espaço, pois nestes pontos  $\eta$  é tipo tempo. Por outro lado, o espaço tangente em  $(0, 1, 0)$  é tipo tempo, pois neste ponto  $\eta$  é tipo espaço. Assim, concluímos que o  $LD$  separa  $\mathbb{S}^2$  em três regiões, sendo duas Riemannianas e uma Lorentziana, conforme a Figura 4.5.



**Figura 4.5:** Regiões Riemannianas e Lorentzianas da esfera.

Considere a parametrização

$$\begin{aligned} x : U = (0, 2\pi) \times (0, \pi) &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ (u, v) &\longmapsto (\cos(v), \cos(u) \sin(v), \sin(u) \sin(v)). \end{aligned}$$

Esta parametrização cobre toda a esfera, excetuando um semi-círculo. Calculando os coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental, obtemos

$$E = \sin^2(v), \quad F = 0, \quad G = \cos^2(v) - \sin^2(v),$$

$$\bar{l} = \text{sen}^3(v), \quad \bar{m} = 0, \quad \bar{n} = \text{sen}(v),$$

conforme as equações (1.14) e (1.19). Com isto, a equação das linhas de curvatura será

$$-2 \text{sen}^5(v) dudv = 0.$$

Como  $v \in (0, \pi)$ , temos que  $\text{sen}^5(v) \neq 0$ , logo a equação acima pode ser simplificada para

$$dudv = 0. \tag{4.5}$$

Assim, não existem pontos umbílicos em  $x(U)$ , pois não é possível zerar o coeficiente de (4.5).

Agora, tome a parametrização

$$\begin{aligned} y : U = (0, 2\pi) \times (0, \pi) &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ (u, v) &\longmapsto (\text{sen}(u) \text{sen}(v), -\cos(u) \text{sen}(v), \cos(v)). \end{aligned}$$

Temos que a parametrização  $y$  contempla os pontos de  $\mathbb{S}^2 \setminus x(U)$ , isto é,  $\mathbb{S}^2 = x(U) \cup y(U)$ . Os coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental para esta parametrização, de acordo com (1.14) e (1.19), são

$$\begin{aligned} E &= \text{sen}^2(v)(\text{sen}^2(u) - \cos^2(u)), \\ F &= -\frac{1}{2} \text{sen}(2u) \text{sen}(2v), \\ G &= \cos^2(v)(\cos^2(u) - \text{sen}^2(u)) + \text{sen}^2(v), \\ \bar{l} &= \text{sen}^3(v), \\ \bar{m} &= 0, \\ \bar{n} &= \text{sen}(v). \end{aligned}$$

Com os coeficientes acima, e algumas simplificações, obtemos a seguinte equação para as linhas de curvatura

$$a(u, v)dv^2 + 2b(u, v)dudv + c(u, v)du^2 = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} a(u, v) &= -\text{sen}(2u) \text{sen}(2v), \\ b(u, v) &= -\text{sen}^2(v)(\text{sen}^2(v) + \cos(2u)(\cos^2(v) + 1)), \\ c(u, v) &= \text{sen}^2(v) \text{sen}(2u) \text{sen}(2v). \end{aligned}$$

Um ponto  $p = y(u, v) \in \mathbb{S}^2$  será um ponto umbílico se, e somente se,  $a$ ,  $b$  e  $c$  se anularem simultaneamente em  $(u, v)$ . Isto ocorrerá quando

$$\begin{cases} \operatorname{sen}^2(v) + \cos(2u)(\cos^2(v) + 1) = 0 \\ \operatorname{sen}(2u) \operatorname{sen}(2v) = 0. \end{cases}$$

A segunda equação se anula quando  $u \in \{\pi/2, \pi, 3\pi/2\}$  ou se  $v = \pi/2$ . Quando  $u = \pi$ , a primeira equação não se anula. Se  $u = \pi/2$  ou  $u = 3\pi/2$ , a primeira equação se anula apenas para  $v = \pi/2$ . Por fim, se  $v = \pi/2$ , então a primeira equação se anula se  $u = \pi/2$  ou  $u = 3\pi/2$ . Logo, as únicas soluções do sistema acima são  $(u, v) = (\pi/2, \pi/2)$  e  $(u, v) = (3\pi/2, \pi/2)$ . Assim,  $\mathbb{S}^2$  possui dois pontos umbílicos,

$$p_1 = y\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = (1, 0, 0) \quad \text{e} \quad p_2 = y\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = (-1, 0, 0),$$

sendo ambos tipo espaço.

Podemos tomar em uma vizinhança de  $p_1$  a seguinte carta de Monge para  $\mathbb{S}^2$ ,

$$\begin{aligned} \phi: \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ (u, v) &\longmapsto (\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v). \end{aligned}$$

Utilizando  $\phi$ , a equação das linhas de curvatura é

$$-uvdv^2 + (v^2 - u^2)dudv + uvdu^2 = 0,$$

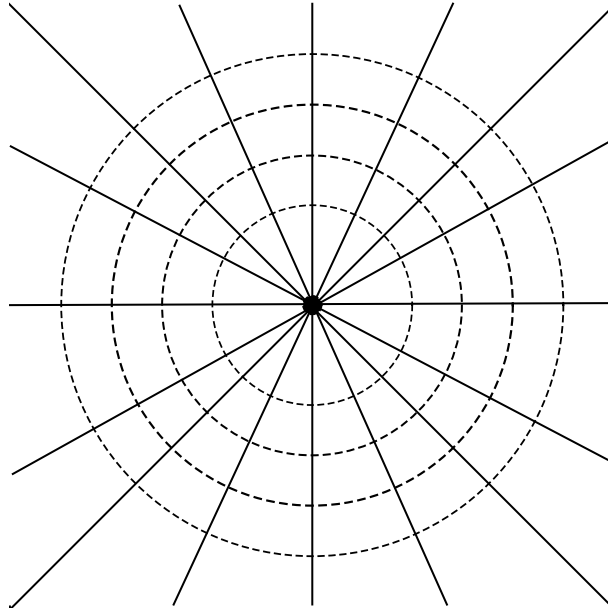
que pode ser reescrita como

$$(udu + vdv)(vdu - udv) = 0.$$

Assim, obtemos duas EDO's lineares que podem ser vistas como os seguintes sistemas

$$\begin{cases} u' = -v \\ v' = u \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} u' = u \\ v' = v \end{cases}.$$

Da teoria qualitativa das EDO's, vemos que o primeiro sistema é um centro linear e o segundo sistema é um nó impróprio. Logo, o retrato de fase das linhas de curvatura de  $\mathbb{S}^2$  próximas de  $p_1$  é ilustrado na Figura 4.6. O resultado para  $p_2$  é análogo.



**Figura 4.6:** Linhas de curvatura da esfera  $\mathbb{S}^2$  próximas a um ponto umbílico.

### 4.2.2 Ovaloide

No espaço Euclidiano, um ovaloide é uma superfície fechada onde a curvatura Gaussiana é estritamente positiva em todos os pontos. Porém, no espaço de Minkowski, o conceito de curvatura Gaussiana não está definido para os pontos do  $LD$ . Por isto, iremos definir os ovaloides utilizando o contato de superfícies com planos.

Seja  $S$  uma superfície e  $P_c^v = \{u \in \mathbb{R}_1^3 : \langle u, v \rangle = c\}$  um plano, ambos em  $\mathbb{R}_1^3$ . Defina a função altura

$$\begin{aligned} h : S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto \langle p, v \rangle. \end{aligned}$$

Dizemos que o contato de  $S$  com  $P_c^v$  em  $p \in S$  é do tipo  $A_1^+$ , se  $p \in P_c^v$  e a função altura possui uma singularidade de Morse do tipo  $A_1^+$  em  $p$ .

Uma superfície  $S$  fechada e convexa é um **ovaloide** quando ela possui um contato do tipo  $A_1^+$  com  $T_p S$ , para todo  $p \in S$ . A esfera  $\mathbb{S}^2$  é um exemplo de ovaloide. Na subseção anterior mostramos que os dois pontos umbílicos da esfera euclidiana são tipo espaço. Este resultado pode ser generalizado para os ovaloides, o que motivou o seguinte teorema, demonstrado por Tari em [26].

**Teorema 4.2.1.** *Um ovaloide em  $\mathbb{R}_1^3$  possui apenas pontos umbílicos tipo espaço.*

**Demonstração:** Seja  $S \subset \mathbb{R}_1^3$  um ovaloide. Considere

$$\begin{aligned} i: \quad \mathbb{R}_1^3 &\longrightarrow (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_\epsilon) \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, y, z) \end{aligned}$$

e  $\tilde{S} = i(S)$ , como na demonstração do Lema 4.1.2. Como o contato da superfície com o plano tangente independe da métrica, temos que  $\tilde{S}$  tem um contato  $A_1^+$  com o plano tangente em todos os pontos. Logo, a curvatura Gaussiana de  $\tilde{S}$  é estritamente positiva.

Pelo Teorema 1.1.1, a aplicação de Gauss,  $N : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{S}^2$ , é um difeomorfismo. Isto divide a superfície  $S$  em três regiões, sendo duas Riemannianas e uma Lorentziana. Isto também implica que o  $LD$  de  $S$  é a união de duas curvas regulares, não vazias, disjuntas e fechadas. Como  $LD$  é uma curva regular, não existem pontos singulares de  $\delta = F^2 - EG$  em  $LD$ , pois, caso existissem, nestes pontos a curva deixaria de ser regular. Logo, pelo item (1) do Lema 4.1.4, não existem pontos umbílicos tipo luz. Pelo Lema 4.1.4, item (2), a única direção tipo luz sobre o  $LD$  é transversal ao  $LD$ . Assim, pelo Teorema de Poincaré-Hopf, existe pelo menos um ponto umbílico em cada região Riemanniana.

Os pontos umbílicos tipo tempo ocorrem na região Lorentziana da superfície. Pelo Teorema 3.2.1, podemos tomar uma parametrização  $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2$  com  $E = G = 0$ . A equação das linhas de curvatura, com esta parametrização, é

$$ndv^2 - ldu^2 = 0.$$

Logo, os pontos umbílicos tipo tempo ocorrem quando  $l = n = 0$ . Seja  $q_0 = (u_0, v_0) \in U$  um ponto da região Lorentziana e considere a função altura  $h$  em  $x(U)$  ao longo do vetor

$$N(q_0) = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|}(q_0),$$

ou seja,  $h(u, v) = \langle x(u, v), N(q_0) \rangle$ . Temos que

$$h_{uu}(q_0) = \langle x_{uu}(q_0), N(q_0) \rangle = l(q_0),$$

$$h_{uv}(q_0) = \langle x_{uv}(q_0), N(q_0) \rangle = m(q_0),$$

$$h_{vv}(q_0) = \langle x_{uu}(q_0), N(q_0) \rangle = n(q_0).$$

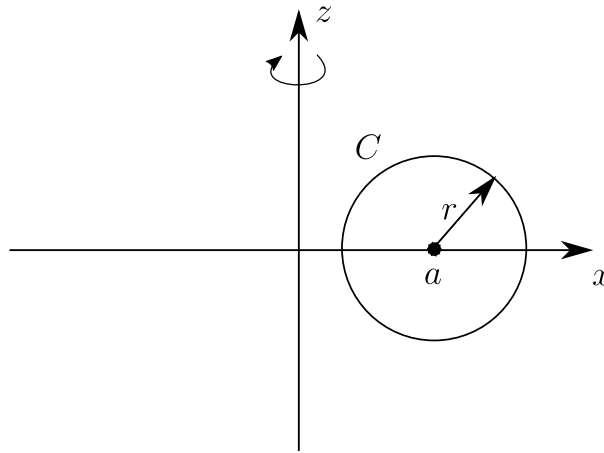
Assim, o determinante da matriz Hessiana de  $h$  em  $q_0$  será  $l(q_0)n(q_0) - m(q_0)^2$ . Como  $S$  é um ovaloide, o contato de  $S$  com  $T_{q_0}S$  será do tipo  $A_1^+$ , logo o determinante da matriz Hessiana deve ser maior que 0, ou seja,

$$l(q_0)n(q_0) - m(q_0)^2 > 0,$$

portanto,  $l(q_0) \neq 0$ ,  $n(q_0) \neq 0$  e  $q_0$  não é um ponto umbílico. Assim, não existem pontos umbílicos tipo tempo. ■

### 4.2.3 Toro

Seja  $C$  uma circunferência no plano  $xz$  de centro  $(a, 0)$  e raio  $r > 0$ , com  $a > r$ . Nesta seção, consideraremos o toro  $\mathbb{T}^2$  como sendo a superfície obtida ao rotacionar  $C$  em torno do eixo  $z$ , ver Figura 4.7. Os valores  $a$  e  $r$  serão chamados de raio maior e raio menor de  $\mathbb{T}^2$ , respectivamente.



**Figura 4.7:** Construção do toro  $\mathbb{T}^2$ .

Tome as seguintes parametrizações para  $\mathbb{T}^2$

$$\begin{aligned} x_i : U_i &\longrightarrow \mathbb{T}^2 \\ (u, v) &\longmapsto ((a + r \cos(u)) \cos(v), (a + r \cos(u)) \sin(v), r \sin(u)), \end{aligned} \tag{4.6}$$

com  $i = 1, 2, 3$ ,  $U_i = I_i \times I_i \subset \mathbb{R}^2$  e

$$I_1 = (0, 2\pi) \subset \mathbb{R},$$

$$I_2 = (-\pi, \pi) \subset \mathbb{R},$$

$$I_3 = \left( \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \right) \subset \mathbb{R}.$$

Note que  $\mathbb{T}^2 = x_1(U_1) \cup x_2(U_2) \cup x_3(U_3)$ . Os coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental, com relação as parametrizações  $x_i$ , são dados por

$$\begin{aligned} E &= r^2(\cos^2(u) - \operatorname{sen}^2(u) \cos(2v)), \\ F &= -r(a + r \cos(u)) \operatorname{sen}(2v) \operatorname{sen}(u), \\ G &= (a + r \cos(u))^2 \cos(2v), \\ \bar{l} &= r^2(a + r \cos(u)), \\ \bar{m} &= 0, \\ \bar{n} &= r(a + r \cos(u))^2 \cos(u). \end{aligned}$$

Com isto, a equação das linhas de curvatura, após algumas simplificações, é dada por

$$a(u, v)dv^2 + b(u, v)dudv + c(u, v)du^2 = 0,$$

sendo

$$\begin{aligned} a(u, v) &= (G\bar{m} - F\bar{n})(u, v) = \frac{1}{2}(a + r \cos(u)) \operatorname{sen}(2v) \operatorname{sen}(2u), \\ b(u, v) &= (G\bar{l} - E\bar{n})(u, v) = (a + r \cos(u)) \cos(2v) - r \cos(u)(\cos^2(u) - \operatorname{sen}^2(u) \cos(2v)), \\ c(u, v) &= (F\bar{l} - E\bar{m})(u, v) = -r \operatorname{sen}(2v) \operatorname{sen}(u). \end{aligned}$$

Logo, os pontos umbílicos de  $\mathbb{T}^2$  serão da forma  $x_i(u, v)$ , para algum  $i = 1, 2, 3$ , onde  $a(u, v) = b(u, v) = c(u, v) = 0$ . Os valores de  $u$  e  $v$  que anulam  $a$ ,  $b$  e  $c$  simultaneamente são as soluções do sistema

$$\begin{cases} (a + r \cos(u)) \cos(2v) - r \cos(u)(\cos^2(u) - \operatorname{sen}^2(u) \cos(2v)) = 0, \\ \cos(v) \operatorname{sen}(v) \operatorname{sen}(u) = 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

**Teorema 4.2.2.** *Considere o toro  $\mathbb{T}^2$  dado em (4.6).*

(a) *Se  $a = 2r$ , então  $\mathbb{T}^2$  tem exatamente 6 pontos umbílicos.*



(b) Se  $a \neq 2r$ , então  $\mathbb{T}^2$  tem exatamente 8 pontos umbílicos.

Em ambos os casos, 4 pontos umbílicos são tipo espaço e os demais são tipo tempo.

**Demonstração:** Ao longo desta prova, consideraremos a imagem da função arccos como sendo o intervalo  $[0, \pi]$ . Como  $r > 0$ , podemos definir  $b = a/r$ , sendo  $b > 1$ . Desta forma, o sistema (4.7) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} (b + \cos(u)) \cos(2v) - \cos(u)(\cos^2(u) - \sin^2(u) \cos(2v)) = 0 \\ \cos(v) \sin(v) \sin(u) = 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

A segunda equação de (4.8) será nula se, e somente se,  $\cos(v) = 0$ , ou  $\sin(v) = 0$ , ou  $\sin(u) = 0$ . Vamos analisar estes casos separadamente.

**Caso 1:**  $\cos(v) = 0$ .

Analisaremos quais valores de  $v$ , em cada um dos  $I_i$ , são zeros da função cosseno. Em  $I_1$  temos que  $\cos(v) = 0$  quando  $v = \pi/2$  ou  $v = 3\pi/2$ . Por outro lado, em  $I_2$ ,  $\cos(v) = 0$  quando  $v = \pm\pi/2$ . Em  $I_3$ ,  $\cos(v) = 0$  apenas se  $v = 3\pi/2$ .

Sendo  $\cos(v) = 0$ , então  $\cos(2v) = -1$  e a primeira equação de (4.8) se torna

$$-(b + \cos(u)) - \cos(u)(\cos^2(u) + \sin^2(u)) = 0.$$

Após algumas manipulações nesta equação, obtemos

$$\cos(u) = -\frac{b}{2}. \quad (4.9)$$

Quando  $b < 2$ , então temos as seguintes soluções em cada  $I_i$ :

- Em  $I_1$ , as soluções de (4.9) são  $u = \arccos\left(-\frac{b}{2}\right)$  e  $u = 2\pi - \arccos\left(-\frac{b}{2}\right)$ ;
- Em  $I_2$ , as soluções de (4.9) são  $u = \arccos\left(-\frac{b}{2}\right)$  e  $u = -\arccos\left(-\frac{b}{2}\right)$ ;
- Em  $I_3$ , as soluções de (4.9) são  $u = \arccos\left(-\frac{b}{2}\right)$  e  $u = 2\pi - \arccos\left(-\frac{b}{2}\right)$ .

Quando  $b = 2$ , então temos as seguintes soluções em cada  $I_i$ :

- Em  $I_1$ , a solução de (4.9) é  $u = \pi$ ;
- Em  $I_2$ , não existe solução de (4.9);
- Em  $I_3$ , a solução de (4.9) é  $u = \pi$ .

Por fim, se  $b > 2$ , não temos soluções de (4.9).

A Tabela 4.1 lista as soluções da equação (4.8) no Caso 1.

**Tabela 4.1:** Soluções do sistema (4.8) quando  $\cos(v) = 0$ .

Caso	$i$	$u$	$v$
$b < 2$	1 e 2	$\arccos(-b/2)$	$\pi/2$
	1 e 3	$\arccos(-b/2)$	$3\pi/2$
	1	$2\pi - \arccos(-b/2)$	$\pi/2$
	1 e 3	$2\pi - \arccos(-b/2)$	$3\pi/2$
	2	$-\arccos(-b/2)$	$-\pi/2$
	2	$-\arccos(-b/2)$	$\pi/2$
	2	$\arccos(-b/2)$	$-\pi/2$
$b = 2$	1	$\pi$	$\pi/2$
	1 e 3	$\pi$	$3\pi/2$

**Caso 2:**  $\sin(v) = 0$ .

Sendo  $\sin(v) = 0$ , então  $\cos(2v) = 1$  e a primeira equação de (4.8) se torna

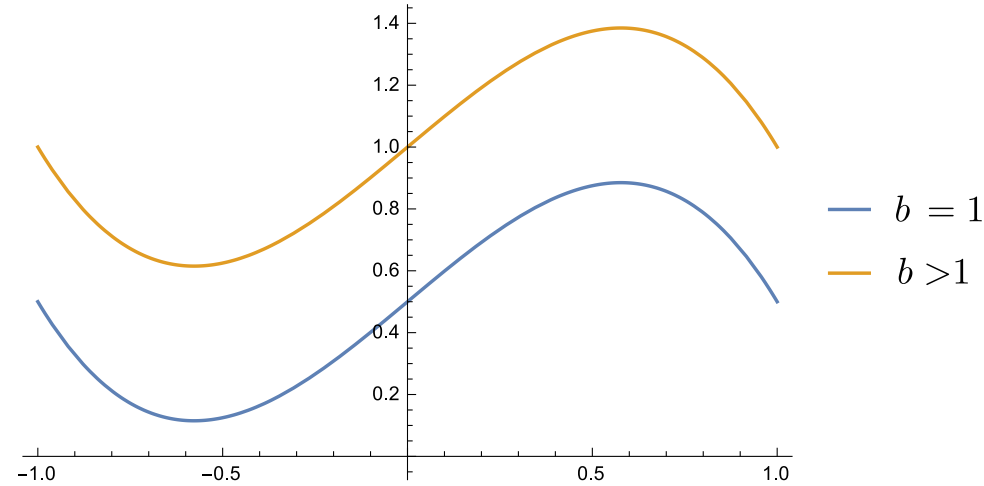
$$(b + \cos(u)) - \cos(u)(\cos^2(u) - \sin^2(u)) = 0.$$

Após algumas simplificações, obtemos

$$-\cos^3(u) + \cos(u) + \frac{b}{2} = 0. \quad (4.10)$$

Como  $b > 1$ , temos que a equação do terceiro grau  $-\theta^3 + \theta + b/2 = 0$  não possui solução em  $[-1, 1]$ . De fato, quando  $b = 1$ , o gráfico da função  $-\theta^3 + \theta + 1/2$ , dado na

Figura 4.8, nos mostra que não existem soluções da equação anterior em  $[-1, 1]$ . Quando  $b > 1$ , estamos transladando o gráfico da função para cima, conforme a Figura 4.8, logo não existirão raízes no intervalo  $[-1, 1]$ . Portanto, a equação (4.10) não possui soluções.



**Figura 4.8:** Gráfico de  $-\theta^3 + \theta + b/2 = 0$ .

Desta forma, vemos que no Caso 2, isto é, quando  $\text{sen}(v) = 0$ , o sistema (4.8) não possui soluções.

**Caso 3:**  $\text{sen}(u) = 0$ .

Analisaremos quais valores de  $u$ , em cada um dos  $I_i$ , são zeros da função seno. Em  $I_1$ , temos que  $\text{sen}(u) = 0$  quando  $u = \pi$ . Por outro lado, em  $I_2$ ,  $\text{sen}(u) = 0$  apenas se  $u = 0$ . Em  $I_3$ ,  $\text{sen}(u) = 0$  quando  $u = \pi$  ou  $2\pi$ .

Se  $\text{sen}(u) = 0$ , então  $\cos(u) = \pm 1$ . Assim, a primeira equação do sistema (4.8) é dada por

$$\begin{aligned} (b \pm 1) \cos(2v) \mp 1 &= 0, \\ \cos(2v) &= \frac{\pm 1}{b \pm 1}, \\ \cos^2(v) - \text{sen}^2(v) &= \frac{1}{1 \pm b}, \\ 2 \cos^2(v) - 1 &= \frac{1}{1 \pm b}, \\ \cos^2(v) &= \frac{2 \pm b}{2(1 \pm b)}. \end{aligned}$$

Primeiramente, considere  $\cos(u) = 1$ . Desta forma, temos

$$\cos^2(v) = \frac{2+b}{2(1+b)} \in (0, 1),$$

ou seja,

$$\cos(v) = \pm \sqrt{\frac{2+b}{2+2b}}. \quad (4.11)$$

Então temos as seguintes soluções em  $I_2$  e  $I_3$  (não precisamos verificar para  $I_1$ , pois, em  $I_1$ ,  $\sin(u) = 0$  apenas quando  $u = \pi$  e nesse caso  $\cos(u) = -1$ ):

- Em  $I_2$ , as soluções de (4.11) são  $v = \pm \arccos\left(\sqrt{\frac{2+b}{2+2b}}\right)$  e  $v = \pm \arccos\left(-\sqrt{\frac{2+b}{2+2b}}\right)$ ;
- Em  $I_3$ , as soluções de (4.11) são

$$v = 2\pi + \arccos\left(\sqrt{\frac{2+b}{2+2b}}\right), \quad v = 2\pi - \arccos\left(\sqrt{\frac{2+b}{2+2b}}\right),$$

$$v = \arccos\left(-\sqrt{\frac{2+b}{2+2b}}\right), \quad v = 2\pi - \arccos\left(-\sqrt{\frac{2+b}{2+2b}}\right).$$

Por outro lado, se  $\cos(u) = -1$ , temos

$$\cos^2(v) = \frac{2-b}{2(1-b)},$$

ou seja,

$$\cos(v) = \pm \sqrt{\frac{2-b}{2-2b}}. \quad (4.12)$$

Se  $b < 2$ , então (4.12) não possui soluções, pois  $(2-b)/(2-2b) < 0$ . Porém, se  $b = 2$ , então  $(2-b)/(2-2b) = 0$  e temos as seguintes soluções em  $I_1$  e  $I_3$ :

- Em  $I_1$ , as soluções de (4.12) são  $v = \frac{\pi}{2}$  ou  $v = \frac{3\pi}{2}$ ;
- Em  $I_3$ , a solução de (4.12) é  $v = \frac{3\pi}{2}$ .

Por fim, se  $b > 2$ , então  $(2-b)/(2-2b) \in (0, 1/2)$  e temos as seguintes soluções em  $I_1$  e  $I_3$ :

- Em  $I_1$ , as soluções de (4.12) são

$$v = \arccos\left(\sqrt{\frac{2-b}{2-2b}}\right), \quad v = 2\pi - \arccos\left(\sqrt{\frac{2-b}{2-2b}}\right),$$

$$v = \arccos\left(-\sqrt{\frac{2-b}{2-2b}}\right), \quad v = 2\pi - \arccos\left(-\sqrt{\frac{2-b}{2-2b}}\right).$$

- Em  $I_3$ , as soluções de (4.12) são

$$v = 2\pi + \arccos\left(\sqrt{\frac{2-b}{2-2b}}\right), \quad v = 2\pi - \arccos\left(\sqrt{\frac{2-b}{2-2b}}\right),$$

$$v = \arccos\left(-\sqrt{\frac{2-b}{2-2b}}\right), \quad v = 2\pi - \arccos\left(-\sqrt{\frac{2-b}{2-2b}}\right).$$

Observe que não tratamos as soluções em  $I_2$ , fizemos isto pelo mesmo motivo apresentado para  $I_1$  quando  $\cos(u) = 1$ . A Tabela 4.2 lista as soluções da equação (4.8) no Caso 3.

Por fim, os pontos umbílicos de  $\mathbb{T}^2$  são obtidos ao calcular  $x_i$  nas soluções do sistema (4.7), listadas nas Tabelas 4.1 e 4.2. Realizando tais cálculos, obtemos os pontos umbílicos apresentados na Tabela 4.3. O tipo de cada ponto umbílico foi obtido através do valor da função  $EG - F^2$  avaliado na solução do sistema (4.7) que originou o respectivo ponto umbílico, conforme a Proposição 1.2.3, o que conclui a prova.

■

**Tabela 4.2:** Soluções do sistema (4.8) quando  $\text{sen}(u) = 0$ .

Caso	$i$	$u$	$v$
$b < 2$	2	0	$\pm \arccos \left( \pm \sqrt{(2+b)/(2+2b)} \right)$
	3	$2\pi$	$\arccos \left( -\sqrt{(2+b)/(2+2b)} \right)$
	3	$2\pi$	$2\pi - \arccos \left( -\sqrt{(2+b)/(2+2b)} \right)$
	3	$2\pi$	$2\pi \pm \arccos \left( \sqrt{(2+b)/(2+2b)} \right)$
$b = 2$	2	0	$\pm \arccos \left( \pm \sqrt{(2+b)/(2+2b)} \right)$
	1	$\pi$	$\pi/2$
	1 e 3	$\pi$	$3\pi/2$
	3	$2\pi$	$\arccos \left( -\sqrt{(2+b)/(2+2b)} \right)$
	3	$2\pi$	$2\pi - \arccos \left( -\sqrt{(2+b)/(2+2b)} \right)$
	3	$2\pi$	$2\pi \pm \arccos \left( \sqrt{(2+b)/(2+2b)} \right)$
$b > 2$	2	0	$\pm \arccos \left( \pm \sqrt{(2+b)/(2+2b)} \right)$
	3	$2\pi$	$2\pi \pm \arccos \left( \sqrt{(2+b)/(2+2b)} \right)$
	3	$2\pi$	$\arccos \left( -\sqrt{(2+b)/(2+2b)} \right)$
	3	$2\pi$	$2\pi - \arccos \left( -\sqrt{(2+b)/(2+2b)} \right)$
	1	$\pi$	$\arccos \left( \sqrt{(2-b)/(2-2b)} \right)$
	1 e 3	$\pi$	$\arccos \left( -\sqrt{(2-b)/(2-2b)} \right)$
	1 e 3	$\pi$	$2\pi - \arccos \left( \pm \sqrt{(2-b)/(2-2b)} \right)$
	3	$\pi$	$2\pi + \arccos \left( \sqrt{(2-b)/(2-2b)} \right)$

**Tabela 4.3:** Pontos umbílicos do toro  $\mathbb{T}^2$ .

Caso	Ponto Umbílico	Tipo
$b < 2$	$\left( \pm \sqrt{\frac{(a+2r)(a+r)}{2}}, \pm \sqrt{\frac{a(a+r)}{2}}, 0 \right)$	Espaço
	$\left( 0, \pm \frac{a}{2}, \pm \frac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{2} \right)$	Tempo
$b = 2$	$\left( \pm \sqrt{\frac{(a+2r)(a+r)}{2}}, \pm \sqrt{\frac{a(a+r)}{2}}, 0 \right)$	Espaço
	$(0, \pm(a - r), 0)$	Tempo
$b > 2$	$\left( \pm \sqrt{\frac{(a+2r)(a+r)}{2}}, \pm \sqrt{\frac{a(a+r)}{2}}, 0 \right)$	Espaço
	$\left( \pm \sqrt{\frac{(a-2r)(a-r)}{2}}, \pm \sqrt{\frac{a(a-r)}{2}}, 0 \right)$	Tempo

# Conclusões

O principal objetivo deste trabalho foi apresentar a prova da veracidade da conjectura de Carathéodory para superfícies em  $\mathbb{R}_1^3$ . Assim, concluímos que qualquer superfície fechada e convexa no espaço de Minkowski possui ao menos dois pontos umbílicos. Acredita-se que tal afirmação seja válida no espaço Euclidiano, porém isto ainda carece de uma demonstração.

O espaço Euclidiano e o espaço de Minkowski se diferem, essencialmente, por uma simples mudança na métrica. Entretanto, esta alteração da métrica proporciona diferenças consideráveis na geometria das superfícies mergulhadas nestes espaços. Por exemplo, o comportamento das linhas de curvatura se modifica ao alternarmos entre o espaço Euclidiano e o espaço de Minkowski.

Outra diferença entre o espaço Euclidiano e o espaço de Minkowski é a existência de pontos umbílicos em duas superfícies particulares: a esfera e o toro. No caso Euclidiano, a esfera possui infinitos pontos umbílicos, enquanto o toro não apresenta tais pontos. Porém, ao alterarmos a métrica, a esfera apresentou apenas dois pontos umbílicos, enquanto no toro surgiram seis ou oito pontos umbílicos, dependendo dos raios.

A partir das diferenças apresentadas pelo toro em  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{R}_1^3$  surgiu uma questão. A hipótese de convexidade é realmente necessária para a conjectura de Carathéodory em  $\mathbb{R}_1^3$ ? Uma outra pergunta é qual será o comportamento dos pontos umbílicos do toro se mudarmos o eixo em que rotacionamos a circunferência  $C$  na construção desta superfície? Por fim, um outro trabalho futuro será o estudo sobre o comportamento das linhas de curvatura no toro em  $\mathbb{R}_1^3$ .



# Referências Bibliográficas

- [1] G. Bol, *Über Nabelpunkte auf einer Eifläche*, Math Z., **49** (1944), 389–410.
- [2] J. W. Bruce, D. Fidal, *On binary differential equations and umbilics*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, **111A** (1989), 147–168.
- [3] J. W. Bruce, G. J. Fletcher, F. Tari, *Bifurcations of implicit differential equations*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, **130A** (2000), 485–506.
- [4] J. W. Bruce, F. Tari, *On binary differential equations*, Nonlinearity, **8** (1995), 255–271.
- [5] J. W. Bruce, F. Tari, *Duality and implicit differential equations*, Nonlinearity, **13** (2000), 791–812.
- [6] M. P. do Carmo, *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. 5 ed., Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [7] M. Cibrario, *Sulla riduzione a forma delle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine di tipo misto*, Accademia di Scienze e Lettere, Istituto Lombardo Redicconti, **65** (1932), 889–906.
- [8] A. A. Davydov, *Qualitative Control Theory*, Translations of Mathematical Monographs 142, AMS, Providence, R.I., 1994.
- [9] F. Dumortier, J. Llibre, J. C. Artés, *Qualitative theory of planar differential systems*. Berlin: Springer, 2006.

- [10] R. Garcia, J. Sotomayor, *Differential Equations of Classical Geometry, a Qualitative Theory*, Brazilian 27<sup>th</sup> Math. Coll., IMPA, 2009.
- [11] B. Guilfoyle, W. Klingenberg, *Proof of the Carathéodory conjecture*, arXiv: 0808.0851v3 [math.DG], (2013).
- [12] C. Gutierrez, J. Sotomayor, *Structurally stable configurations of lines of principal curvature*, *Asterisque* (1982), 195–215.
- [13] C. Gutierrez, J. Sotomayor, *Lines of Curvature and Umbilical Points on Surfaces*, Brazilian 18<sup>th</sup> Math. Coll., IMPA, 1991. Reprinted as *Structurally Stable Configurations of Lines of Curvature and Umbilic Points on Surfaces*, Monografias del IMCA, Lima, Peru, 1998.
- [14] H. Hamburger, *Berliner Mathematische Gesellschaft*, Berlin, 26th March (1924).
- [15] H. Hamburger, *Beweis einer Carathéodoryschen Vermutung I*, *Ann. of Math.*, **41** (1940), 63–86; II and III, *Acta Math.*, **73** (1941), 174–332.
- [16] V. V. Ivanov, *The analytic Carathéodory conjecture*, *Siberian Math. J.*, **43** (2002), 251–322.
- [17] S. Izumiya, F. Tari, *Self-adjoint operators on surfaces with a singular metric*. *J. Dyn. Control Syst.*, **16** (2010), 329–353.
- [18] T. Klotz, *On Bol's proof of Carathéodory's conjecture*, *Comm. Pure Appl. Math.*, **12** (1959), 277–311.
- [19] R. Lopez, *Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski space*, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.
- [20] L. F. Mello, J. Sotomayor, *A note on some developments on Carathéodory conjecture on umbilic points*, *Exposition. Math.*, **17** (1999), 49–58.
- [21] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. New York: Academic Press, 1983.

- [22] A. O. Remizov, *A brief introduction to singularity theory*. Trieste, (2010).
- [23] H. Scherbel, *A new proof of Hamburger's Index Theorem on umbilical points*, Dissertation number 10281, ETH, Zurich, 1993.
- [24] B. Smyth, F. Xavier, *A sharp geometric estimate for the index of an umbilic point on smooth surface*, Bull. London Math. Soc., **24** (1992), 176–180.
- [25] B. Smyth, *The nature of elliptic sectors in the principal foliations of surface theory*, EQUADIFF 2003, (2005), 957–959.
- [26] F. Tari, *Umbilics of surfaces in the Minkowski 3-space*. J. Math. Soc. Japan, **65** (2013), 723–731.
- [27] C. J. Titus , *A proof of a conjecture of Loewner and of the conjecture of Carathéodory on umbilics points*, Acta Math., **131** (1973), 43–77.