Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Matemática

Skew Loops e Superfícies Quádricas

Joél Faria Junior

Orientador: Prof. Dr. Fábio Scalco Dias
co-Orientador: Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

Itajubá, 8 de março de 2017

Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Matemática

Skew Loops e Superfícies Quádricas

Joél Faria Junior

Orientador: Prof. Dr. Fábio Scalco Dias
co-Orientador: Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello

Dissertação submetida ao Programa de Pós–Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Matemática.

Área de Concentração: Topologia/Geometria

Itajubá – MG
8 de março de 2017

Dedico este trabalho à Deus e aos meus familiares, pois estes, são peças fundamentais nesta minha jornada.

Agradecimentos

À Deus que, mesmo eu tendo grandes defeitos e fraquezas, tem me conduzido até aqui.

À minha família que, mesmo de longe, me apoiaram e incentivaram neste caminho. Em especial Elizene e Joél, meus pais queridos.

Ao professor Fábio, meu orientador e amigo, pela paciência e infinitas contribuições ao longo deste trabalho.

Ao professor Luis Fernando, meu co-orientador e amigo, por suas grandes contribuições neste trabalho.

Aos professores do IMC, em especial ao Antônio, Bráulio, e Leandro.

À minha família de Itajubá, amigos de grande consideração, dentre eles Afonso e Minelvina que foram meus pais postiços durante o período de estudos, à Marcela pelas enormes contribuições para digitação deste trabalho e ainda menciono Debora, Felipe e Matheus.

À todos que, de alguma forma, direta ou indiretamente, colaboraram com este trabalho.

“[...]A sabedoria é a coisa principal: adquire pois a sabedoria; sim, com tudo o que possuis adquire o conhecimento[...]” (Provérbios 4 : 7*)*

Resumo

O objetivo deste trabalho é o estudo da relação entre *skew loops* e superfícies quádricas. Mostramos que as únicas superfícies do $\mathbb{R}^3$ com um ponto onde a curvatura é positiva e que não possuem *skew loops* são as quádricas. Em particular: os elipsóides são as únicas superfícies fechadas sem *skew loops*.

Palavras–chave: Skew-loops, Tantrix, Esfera, Superfícies Quádricas.

Abstract

The objective of this work is the study of the relationship between skew loops and quadratic surfaces. We show that the only surfaces in $\mathbb{R}^3$ with a point of positive curvature and no skew loops are the quadrics. In particular: ellipsoids are the only closed surfaces without skew loops.

Keywords: Skew-loops, Tantrix, Sphere, Quadrics surfaces.

Sumário

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

Durante uma palestra proferida por H. Steinmann (1887-1972) na Inglaterra, Universidade de Sussex, em 1966, B. Segre (1903-1977) refutou a conjectura de Steinmann, a qual propunha que toda curva fechada em $\mathbb{R}^3$ possuía um par de tangentes paralelas. O trabalho de B. Segre, que foi publicado em 1968, provou a existência de curvas fechadas em $\mathbb{R}^3$ que não possuíam tangentes paralelas, as quais são chamadas ***skew loops***. Além disso, mostrou que tais curvas não poderiam estar em elipsóides, parabolóides e em certos cilindros simétricos (veja [1]). No artigo [2], M. Ghomi e B. Solomon, adicionaram os hiperbolóides de duas folhas na lista que Segre havia feito, e ainda mostraram que os cilindros, construídos a partir de bases assimétricas, admitem *skew loops*.

"As únicas superfícies em $\mathbb{R}^3$ com ao menos um ponto onde a curvatura Gaussiana é positiva, e que não possuem skew loops, são as quádricas."

Este trabalho tem como objetivo principal, apresentar com detalhes a demonstração do resultado acima encontrado em [2], que posteriormente será enunciado com mais rigor. Para tanto, primeiramente faremos um estudo da indicatriz tangente.

No Capítulo 2 será apresentado um resumo sobre alguns aspectos da Geometria Diferencial de Curvas em $\mathbb{S}^2$, contendo algumas definições, propriedades e observações que, posteriormente, facilitarão a leitura e compreensão do texto.

Já no Capítulo 3, definiremos a indicatriz tangente, que passaremos a chamar de *tantrix*, de uma curva regular fechada em $\mathbb{S}^2$. Posteriormente, mostraremos que a *tantrix* de uma curva regular fechada em $\mathbb{S}^2$ também é uma curva regular fechada em $\mathbb{S}^2$, além disso, nesse mesmo capítulo, provaremos que, dada uma curva regular fechada em $\mathbb{S}^2$, se a *tantrix* dessa curva for simples, então a *tantrix* limita na esfera, duas regiões de áreas iguais a 2π.

No Capítulo 4 estudaremos as relações entre superfícies do $\mathbb{R}^3$ e *skew loops*. A caracterização dos elipsóides tem uma longa e farta história (ver [3] e [4]). Aqui, essa caracterização será feita através da ausência de *skew loops*.

A seguir enunciamos o principal teorema deste trabalho

Teorema 4.0.1 [2]. *Seja M uma variedade bidimensional diferenciável conexa, e $F : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão $\mathcal{C}^\infty$. Suponha que $F(M)$ possua curvatura Gaussiana positiva em ao menos um ponto de M. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *$F(M)$ é parte de uma superfície quádrica.*

(2) *$F(M)$ não contém skew loops.*

A prova deste teorema será feita com o auxílio de diversos resultados intermediários, por exemplo, iremos usar o conceito de homotopia regular para mostrar que superfícies positivamente curvadas não admitem figuras-oito que sejam *skews* (Proposição 4.1.1), e aplicando esse resultado, provaremos que superfícies quádricas convexas não admitem *skew loops*.

Além disso, provaremos que "*todo cilindro de base assimétrica e estritamente convexa contém uma skew loop*", conhecido como Lema do Cilindro (Proposição 4.3.1), e com o auxílio deste resultado mostraremos que "superfícies sem *skew loops* admitem uma seção local simétrica" (Lema 4.4.1), que juntamente com o Teorema de W. Blaschke [5] nos garantirá que a ausência de *skew loops* caracteriza as superfícies quádricas que possuem um ponto onde a curvatura Gaussiana é positiva.

Todas as figuras deste trabalho foram feitas utilizando o software Geogebra.

Capítulo 2

Conceitos Iniciais

Neste capítulo, apresentaremos um breve resumo de Geometria Diferencial de Curvas em $\mathbb{R}^3$, dando enfoque para curvas na esfera $\mathbb{S}^2$, para posteriormente estudarmos as propriedades de uma *tantrix* contida em $\mathbb{S}^2$. Este estudo é indispensável, uma vez que, os resultados desse capítulo serão essenciais no decorrer deste texto.

Ao longo deste trabalho denotaremos por $\mathbb{R}^3$ o espaço vetorial euclidiano com sua estrutura usual, e adotaremos $\mathbb{S}^2$ como sendo a esfera unitária centrada na origem, além disso, dada uma superfície regular S qualquer, o plano tangente a S em um dado ponto $p \in S$ será denotado por T_pS. Consideraremos como métrica na esfera $\mathbb{S}^2$ a métrica induzida do espaço $\mathbb{R}^3$. O presente texto tem como pré-requisito o curso de Geometria Diferencial.

2.1 Curvas em $\mathbb{R}^3$

Definição 2.1.1. *Uma* ***curva parametrizada diferenciável*** *de $\mathbb{R}^3$ é uma aplicação cuja imagem é da forma*

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ t \in I \subset \mathbb{R},$$

onde $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ são funções diferenciáveis de classe C^∞.

Definição 2.1.2. *Seja $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)),\quad t \in I \subset \mathbb{R}$, uma curva parametrizada* *diferenciável, o* ***vetor tangente*** *a α em $s \in I$ é o vetor*

$$\alpha'(s) = (x'(s), y'(s), z'(s)).$$

Além disso, a curva α é ***regular*** *se para todo $t \in I$, tem-se $\alpha'(t) \neq 0$.*

Definição 2.1.3. *Uma curva regular $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é dita* ***parametrizada pelo comprimento de arco*** *se, para cada $t_0, t_1 \in I$ com $t_0 \leq t_1$, o comprimento de arco da curva α de t_0 a t_1 for igual a $t_1 - t_0$, isto é,*

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)|\, dt = t_1 - t_0.$$

Proposição 2.1.1. *Uma curva regular $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se, para todo $t \in I$, vale*

$$|\alpha'(t)| = 1.$$

Demonstração: Primeiramente, suponha α parametrizada pelo comprimento de arco e fixe $t_0 \in I$. Além disso, considere a função $s : I \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada $t \in I$ associa um $s(t) = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(t)|\, dt$. Se $t_0 \leq t$, então, por hipótese segue que

$$\int_{t_0}^{t} |\alpha'(t)|\, dt = t - t_0.$$

Por outro lado, se $t \leq t_0$, então

$$-s(t) = \int_{t}^{t_0} |\alpha'(t)|\, dt = t_0 - t.$$

Portanto, para todo $t \in I$, temos $s(t) = t - t_0$, e isso implica que $s'(t) = 1$. Como $s'(t) = |\alpha'(t)|$, concluímos que

$$|\alpha'(t)| = 1, \quad \forall t \in I.$$

A recíproca é imediata. ∎

Nas definições a seguir, iremos assumir, sem perda de generalidade, curvas parametrizadas por comprimentos de arco pois toda curva parametrizada regular pode ser reparametrizada por comprimento de arco, e os conceitos envolvidos neste trabalho independem da reparametrização considerada.

Definição 2.1.4. *Se $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco s, então a* ***curvatura*** *de α em $s \in I$ é o número real*

$$k(s) = |\alpha''(s)|.$$

Definição 2.1.5. *Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco s, tal que $k(s) \neq 0$. O vetor*

$$\eta(s) = \frac{\alpha''(s)}{k(s)}$$

é denominado ***vetor normal*** *a α em s. A* ***reta normal*** *a α em $s_0 \in I$ é a reta que passa pelo ponto $\alpha(s_0)$ e tem a direção do vetor normal $\eta(s_0)$.*

Denotando por $t(s)$ o vetor unitário $\alpha'(s)$, temos que $t(s)$ e $\eta(s)$ são ortonormais e

$$t'(s) = k(s)\eta(s).$$

Agora, definiremos um terceiro vetor que, junto com t e η, formarão uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

Definição 2.1.6. *Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco s, tal que $k(s) \neq 0$. O* ***vetor binormal*** *a α em s é dado pelo produto vetorial entre $t(s)$ e $\eta(s)$, ou seja*

$$b(s) = t(s) \times \eta(s).$$

O referencial ortonormal $\{t(s), \eta(s), b(s)\}$ é o ***Triedro de Frenet*** da curva α em s.

Derivando $b(s) = t(s) \times \eta(s)$, obtemos:

$$\begin{aligned} b'(s) &= t'(s) \times \eta(s) + t(s) \times \eta'(s) \\ &= t(s) \times \eta'(s), \end{aligned}$$

ou seja, $b'(s)$ é ortogonal a $t(s)$. Como $|b(s)| = 1$, temos que $b'(s)$ é ortogonal a $b(s)$. Logo, concluímos que $b'(s)$ é paralelo a $\eta(s)$, isto é, $b'(s)$ pode ser escrito como o produto de $\eta(s)$ por um número real.

Definição 2.1.7. *O número real* $\tau(s)$ *definido por*

$$b'(s) = \tau(s)\eta(s),$$

é denominado ***torção*** *da curva em* s*.*

Observação 2.1.1. *Se* $\alpha(s)$ *é uma curva regular de* $\mathbb{R}^3$*, então* $k(s) \geq 0$*, enquanto que a torção pode ser negativa ou positiva.*

Para uma curva regular em $\mathbb{R}^3$, temos que o módulo da torção mede a velocidade com que varia o plano osculador. Além disso, se $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco s, tal que $k(s) \neq 0$, para todo $s \in I$, então o triedro de Frenet da curva α em s é um referencial ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Portanto, podemos obter os vetores $t'(s), \eta'(s)$ e $b'(s)$ como combinações lineares de $t(s), \eta(s)$ e $b(s)$.

Já sabemos que

$$t'(s) = k(s)\eta(s) \quad \text{e} \quad b'(s) = \tau(s)\eta(s).$$

Assim, derivando $\eta(s) = b(s) \times t(s)$, obtemos

$$\eta'(s) = b'(s) \times t(s) + b(s) \times t'(s).$$

E substituindo os valores de t' e b', chegamos em

$$\eta'(s) = -\tau(s)b(s) - k(s)t(s).$$

Portanto, se $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco s, tal que para todo $s \in I$ tem-se $k(s) \neq 0$, então o triedro de Frenet definido por $t(s) = \alpha'(s)$, $\eta(s) = \alpha''(s)/|\alpha''(s)|$, $b(s) = t(s) \times \eta(s)$ satisfaz as equações a seguir:

$$t'(s) = k(s)\eta(s),$$

$$\eta'(s) = -k(s)t(s) - \tau(s)b(s) \quad e$$

$$b'(s) = \tau(s)\eta(s),$$

que são denominadas **Fórmulas de Frenet**.

A demonstração do resultado a seguir pode ser encontrada em [6].

Proposição 2.1.2. *Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular de parâmetro t e $\beta : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma reparametrização de α pelo comprimento de arco s, isto é, $\beta(s(t)) = \alpha(t)$, para todo $t \in I$. Sejam $k(s) \neq 0$ e $\tau(s)$ a curvatura e a torção de β em s. Então,*

$$k(s(t)) = \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3} \qquad e \qquad \tau(s(t)) = \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha'''(t)\,,\, \alpha''(t)\rangle}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2}.$$

2.2 Geometria Diferencial de Curvas em $\mathbb{S}^2$

Nesta seção apresentaremos um breve resumo sobre geometria diferencial de curvas em $\mathbb{S}^2$. Os detalhes, bem como as demonstrações dos resultados que aqui serão apresentados, podem ser encontrados em [7]. Os resultados e as definições aqui apresentadas são análogos aos apresentados na seção anterior, uma vez que aqui trataremos de curvas que estão em $\mathbb{S}^2$. Seja

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

a esfera contida em $\mathbb{R}^3$ e seja $[a, b]$ um intervalo real.

Definição 2.2.1. *Uma **curva regular na esfera** $\mathbb{S}^2$ é uma aplicação $\mathcal{C}^\infty$, $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$, tal que $\alpha'(t) \neq 0$, para todo $t \in [a, b]$.*

Definição 2.2.2. *Uma **curva regular fechada em** $\mathbb{S}^2$ é uma curva regular $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$, tal que ela e todas as suas derivadas coincidam em a e b, isto é, $\alpha(a) = \alpha(b)$, $\alpha'(a) = \alpha'(b)$, $\alpha''(a) = \alpha''(b)$, e assim por diante.*

Definição 2.2.3. *Uma curva regular fechada $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ é dita **simples** se não possuir auto-intersecções além de $\alpha(a) = \alpha(b)$, ou seja, se $c, d \in [a, b)$ com $c \neq d$ então $\alpha(c) \neq \alpha(d)$.*

Observação 2.2.1.

- *O **traço** de uma curva regular fechada em $\mathbb{S}^2$ também é chamado de **círculo imerso em** $\mathbb{S}^2$.*
- *O traço de uma curva regular fechada simples em $\mathbb{S}^2$ também é chamado de **círculo mergulhado** em $\mathbb{S}^2$.*

Agora considerando $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ uma curva regular. A função $s : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(r)| dr$$

é chamada de *função comprimento de arco* s de uma curva α a partir de $t_0 \in [a,b]$.

Definição 2.2.4. *Dizemos que uma curva $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ está **parametrizada pelo comprimento de arco** quando $|\alpha'(s)| = 1$, para todo $s \in [a,b]$, isto é, se a velocidade escalar da curva é constante e igual a 1.*

O resultado a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [7], nos permitirá considerar, sempre que conveniente, a curva α parametrizada pelo comprimento de arco.

Proposição 2.2.1. *Seja $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ uma curva regular. Então α pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco, ou seja, existem $\ell > 0$ e uma função diferenciável $h : [0,\ell] \longrightarrow [a,b]$ com $h' > 0$ tal que $\bar{\alpha}(s) = \alpha(h(s))$ e $|\bar{\alpha}'(s)| = 1$, para todo $s \in [0,\ell]$.*

2.3 Campos de Vetores e Curvaturas em $\mathbb{S}^2$

Definição 2.3.1. *Dada uma curva regular $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$, chamaremos de um **campo de vetores ao longo da curva α em $\mathbb{S}^2$** uma aplicação $v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que, $v(t) \in T_{\alpha(t)}\mathbb{S}^2$ para todo $t \in [a,b]$, isto é*

$$\langle v(t), \alpha(t) \rangle = 0, \quad \forall t \in [a,b].$$

*Dizemos ainda que v é um **campo diferenciável de vetores**, se v for uma aplicação diferenciável. Caso a curva α seja fechada, precisamos adicionar a condição $v(a) = v(b)$, $v'(a) = v'(b)$, $v''(a) = v''(b)$, e assim por diante.*

Observação 2.3.1. *O fato de que na esfera o vetor posição $\alpha(t)$ é normal à esfera, em $\alpha(t)$, nos permite dar uma definição bastante particular para o **Campo de Vetores Paralelos ao longo de curvas em $\mathbb{S}^2$**, como proposto a seguir.*

Definição 2.3.2. *Um campo diferenciável de vetores v, ao longo de uma curva α em $\mathbb{S}^2$ é dito um* ***campo paralelo*** *se satisfaz*

$$\frac{dv}{dt} = f(t)\alpha(t),$$

para alguma função escalar $f(t)$.

Deve-se observar que esta definição coincide com a definição de campo paralelo da Geometria Riemanniana, pois

$$\frac{Dv}{dt} = \left(\frac{dv}{dt}\right)^T = \frac{dv}{dt} - \left\langle \frac{dv}{dt}, \alpha(t) \right\rangle \alpha(t),$$

onde Dv/dt é a derivada covariante do campo de vetores v em $\mathbb{S}^2$, sendo $(dv/dt)^T$ a projeção ortogonal de dv/dt no plano tangente $T_{\alpha(t)}\mathbb{S}^2$.

Sendo assim,

$$\frac{Dv}{dt} = 0 \Longleftrightarrow \frac{dv}{dt} = f(t)\alpha(t),$$

onde $f(t) = \left\langle \frac{dv}{dt}, \alpha(t) \right\rangle$.

Definição 2.3.3. *Seja $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco s. O valor $k_g(s) = \langle \alpha''(s), \eta(s) \rangle$, onde $\eta(s) = \alpha(s) \times \alpha'(s)$, é chamado* ***curvatura geodésica*** *da curva α no ponto $\alpha(s)$.*

Definição 2.3.4. *Seja $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ uma curva regular, parametrizada pelo comprimento de arco s. A* ***curvatura geodésica total*** *de α é dada pela integral*

$$\int_a^b k_g(s)ds,$$

onde $k_g(s)$ é a curvatura geodésica de α em $\alpha(s)$ como na Definição 2.3.3.

Definição 2.3.5. *Dada uma função contínua $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos a* ***integral de** f* ***sobre*** *$\mathbb{S}^1$, denotada por $\int_{\mathbb{S}^1} f$, como sendo*

$$\int_{\mathbb{S}^1} f := \int_0^{2\pi} f(\cos s,\ \mathrm{sen} s)ds.$$

Definição 2.3.6. *Dizemos que a função $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$* ***possui antiderivada****, se existe $g : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que a função*

$$h(s) = g(\cos s,\ \text{sen} s), \quad s \in \mathbb{R}$$

é derivável e satisfaz $f(\cos s,\ \text{sen} s) = h'(s)$ para todo $s \in \mathbb{R}$. A função g é dita uma ***antiderivada*** *de f.*

Uma vez que g está definida em $\mathbb{S}^1$, a função h satisfaz $h(0) = h(2\pi)$.

Proposição 2.3.1. *Seja $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então*

$$f \text{ tem antiderivada} \iff \int_{\mathbb{S}^1} f = 0.$$

Demonstração: Suponhamos inicialmente que f possua antiderivada, e denotemos por g uma antiderivada de f. Tome $h(s) = g(\cos s,\ \text{sen} s)$, assim temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^1} f &= \int_0^{2\pi} f(\cos s,\ \text{sen} s) ds \\ &= \int_0^{2\pi} h'(s) ds \\ &= h(2\pi) - h(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ou seja, $\int_{\mathbb{S}^1} f = 0$.

Reciprocamente, suponha que $\int_{\mathbb{S}^1} f = 0$, e defina

$$h(s) := \int_0^s f(\cos t,\ \text{sen} t) dt.$$

Pondo $g(\cos s,\ \text{sen} s) = h(s)$, vamos mostrar que g define uma função de $\mathbb{S}^1$ em $\mathbb{R}$. Por hipótese temos,

$$h(0) = \int_0^0 f(\cos t,\ \text{sen} t) dt = 0,$$

e

$$h(2\pi) = \int_0^{2\pi} f(\cos t,\ \text{sen} t) dt = 0,$$

assim temos que $h(0) = h(2\pi) = 0$ e , portanto,

$$g(\cos 0,\ \text{sen} 0) = g(\cos 2\pi,\ \text{sen} 2\pi).$$

Como temos que

$$g(\cos 0,\ \text{sen}0) = h(0) \qquad \text{e} \qquad g(\cos 2\pi,\ \text{sen}2\pi) = h(2\pi),$$

segue que g está bem definida e então, pelo *Teorema Fundamental do Cálculo* (veja [8], página 134), $h'(s) = f(\cos s,\ \text{sen}s)$, isto é, g é uma antiderivada da função f. ■

Capítulo 3

Indicatriz Tangente em $\mathbb{S}^2$ e Skew Loops

Neste capítulo, definiremos a indicatriz tangente de uma curva regular fechada σ em $\mathbb{S}^2$, a qual chamaremos de ***tantrix***, que é uma expressão comum na literatura especializada, como, por exemplo, em [2] e [9], sendo utilizada para referir de forma simples o termo ***"indicatriz tangente"*** de uma curva.

Ao provarmos que toda curva em $\mathbb{S}^2$ possui curvatura maior ou igual a 1, obteremos o argumento principal para garantir que a *tantrix* também é um círculo imerso em $\mathbb{S}^2$.

Além disso, mostraremos que a curva σ pode ser identificada como um campo de vetores paralelo em $\mathbb{S}^2$ ao longo de sua *tantrix* τ, e este resultado será usado na demonstração de que a curvatura geodésica total da *tantrix* τ é igual a 0. E por fim, mostraremos que se a indicatriz tangente τ é simples, então as regiões da esfera limitadas por τ têm áreas iguais, cujo valor é 2π.

Ainda, definiremos ***loop***, ***skew*** e consequentemente ***skew loop***. Com isso mostraremos que todo loop em $\mathbb{S}^2$ é regularmente homotópico à sua tantrix em $\mathbb{S}^2$.

A parte inicial deste capítulo pode ser encontrada em [10].

3.1 A Indicatriz Tangente

Dada uma curva regular $\sigma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, a aplicação $\tau : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\tau(s) = \frac{\sigma'(s)}{|\sigma'(s)|},$$

é denominada indicatriz tangente (tantrix) da curva σ. Em particular, vamos restringir este conceito para curvas σ na esfera $\mathbb{S}^2$.

Definição 3.1.1. *Seja $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ uma curva regular fechada. Considere também a aplicação $\tau : [a,b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ dada por*

$$\tau(s) = \frac{\sigma'(s)}{|\sigma'(s)|}.$$

*A curva τ é chamada de **tantrix** da curva σ.*

Apesar da notação adotada para *tantrix* ser a mesma usada para torção, vamos deixar desta maneira pois daqui em diante o termo torção não será mencionado novamente. Sendo assim, daqui pra frente, quando mencionarmos τ, estaremos nos referindo à *tantrix* de uma curva regular qualquer.

A partir daqui, com o objetivo de simplificar a linguagem, diremos apenas que τ é a ***tantrix*** da curva σ.

Exemplo 3.1.1. *Seja $\sigma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ a curva dada por*

$$\sigma(s) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos s - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{sen} s, \frac{1}{2}\cos s - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen} s, \frac{1}{2}\cos s - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen} s\right). \quad \textit{Veja Figura 3.1.} \tag{3.1}$$

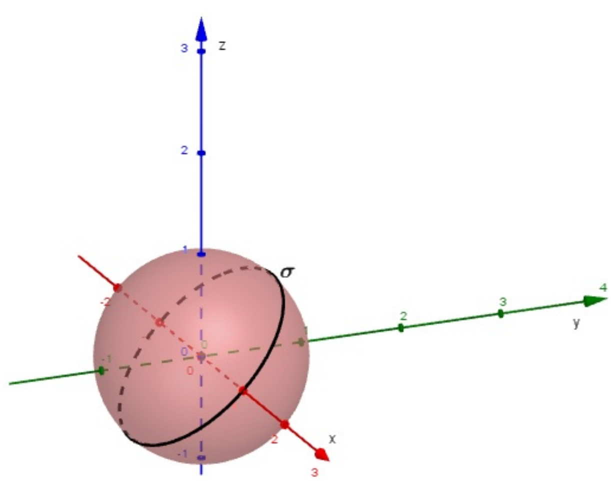

Figura 3.1: Curva σ como descrita na equação (3.1).

Temos que

$$\sigma'(s) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{sen}s - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos s, -\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}s - \frac{1}{2}\cos s, -\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}s - \frac{1}{2}\cos s\right),$$

e $|\sigma'(s)| = 1$*, com isso temos*

$$\begin{aligned} \tau(s) &= \frac{\sigma'(s)}{|\sigma'(s)|} \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{sen}s - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos s, -\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}s - \frac{1}{2}\cos s, -\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}s - \frac{1}{2}\cos s\right). \end{aligned}$$

A curva $\tau(s)$ *está exibida na Figura 3.2.*

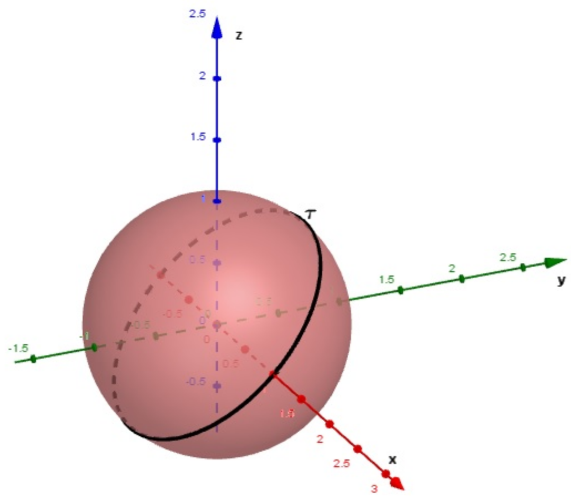

Figura 3.2: *Tantrix* da curva σ definida na equação (3.1).

Lema 3.1.1. *Seja* $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ *uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco* s*, e seja* τ *sua tantrix, também parametrizada por* s*. Então,*

$$\left|\frac{d\tau}{ds}\right| \geq 1.$$

Demonstração: Como $|\sigma|^2 = \langle \sigma, \sigma \rangle$, temos

$$\frac{d}{ds}(|\sigma|^2) = \frac{d}{ds}(\langle \sigma, \sigma \rangle) = 2\left\langle \sigma, \frac{d\sigma}{ds}\right\rangle.$$

Derivando, novamente, com relação a s obtemos

$$\frac{d^2}{ds^2}(|\sigma|^2) = 2\left(\left\langle \sigma, \frac{d^2\sigma}{ds^2}\right\rangle + \left\langle \frac{d\sigma}{ds}, \frac{d\sigma}{ds}\right\rangle\right).$$

E com isso,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}(|\sigma|^2) &= \left\langle \sigma, \frac{d^2\sigma}{ds^2} \right\rangle + \left| \frac{d\sigma}{ds} \right|^2 \\ &= \left\langle \frac{d^2\sigma}{ds^2}, \sigma \right\rangle + 1. \end{aligned}$$

Mas, $\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}(|\sigma|^2) \equiv 0$, pois σ está em $\mathbb{S}^2$ e $|\sigma| = 1$. E portanto,

$$\left\langle \frac{d^2\sigma}{ds^2}, \sigma \right\rangle = \left\langle \frac{d\tau}{ds}, \sigma \right\rangle = -1.$$

Agora, usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz,

$$\left| \frac{d\tau}{ds} \right| = \left| \frac{d\tau}{ds} \right| |\sigma| \geq \left| \left\langle \frac{d\tau}{ds}, \sigma \right\rangle \right| = 1.$$

Donde $\left|\frac{d\tau}{ds}\right| \geq 1$. ■

Sendo $\frac{d\tau}{ds} = \sigma''$, e considerando o fato de que $|\sigma''|$ é a curvatura de σ em $\sigma(s)$ no $\mathbb{R}^3$, podemos concluir que toda curva na esfera, possui curvatura de no mínimo 1.

Proposição 3.1.1. *Se τ é a tantrix de uma curva regular fechada σ em $\mathbb{S}^2$, então τ é também uma curva regular em $\mathbb{S}^2$. Além disso τ é fechada e portanto um círculo imerso em $\mathbb{S}^2$.*

Demonstração: Considere a curva σ parametrizada pelo comprimento de arco s e τ também parametrizadas por s, que é o comprimento de arco da curva σ. Então,

$$\tau(s) = \frac{\sigma'(s)}{|\sigma'(s)|} = \sigma'(s).$$

Assim,

$$\tau'(s) = \sigma''(s).$$

Como σ está parametrizada pelo comprimento de arco s, a expressão $|\sigma''(s)|$ é a curvatura da curva σ em $\sigma(s)$. O Lema 3.1.1 afirma que, dada uma curva na esfera, esta tem, em qualquer de seus pontos, curvatura maior ou igual a 1.

Sendo assim,

$$|\tau'(s)| = |\sigma''(s)| \geq 1, \quad \forall s \in [a, b].$$

Portanto,

$$\tau'(s) \neq 0, \quad \forall s \in [a,b],$$

o que caracteriza a regularidade da curva τ.

Além disso como $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ é fechada, valem as seguintes igualdades

$$\sigma(a) = \sigma(b), \sigma'(a) = \sigma'(b), \sigma''(a) = \sigma''(b), \dots,$$

portanto, τ e todas as suas derivadas, coincidem nos pontos a e b. Logo, τ é uma curva fechada. ■

3.2 As Fórmulas de Frenet Para Curvas na Esfera $\mathbb{S}^2$

Seja σ uma curva regular fechada parametrizada pelo comprimento de arco s em $\mathbb{S}^2$. Assim, $|\sigma'(s)| = 1$ para todo s. Omitindo o parâmetro s, defina

$$v := \sigma \times \sigma'.$$

Observe que v é unitário e simultaneamente ortogonal a σ e a σ'.

Ainda, como σ é uma curva em $\mathbb{S}^2$, o vetor posição $\sigma(s)$ é ortogonal ao vetor tangente $\sigma'(s)$, e com isso, o conjunto $\{\sigma, \sigma', v\}$ é um referencial ortonormal em $\sigma(s)$.

Ao considerar a derivada segunda σ'', existem a, b e c únicos, tais que

$$\sigma'' = a\sigma + b\sigma' + cv, \tag{3.2}$$

a saber, $a = \langle \sigma'', \sigma \rangle$, $b = \langle \sigma'', \sigma' \rangle$ e $c = \langle \sigma'', v \rangle$.

Lema 3.2.1. *Os valores de a, b e c dados na equação (3.2) são*

$$a = \langle \sigma'', \sigma \rangle = -1, \qquad b = \langle \sigma'', \sigma' \rangle = 0, \qquad c = \langle \sigma'', v \rangle = k_g.$$

Demonstração: Como σ é ortogonal a σ' temos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\langle \sigma, \sigma' \rangle \\ &= \langle \sigma', \sigma' \rangle + \langle \sigma, \sigma'' \rangle \\ &= 1 + \langle \sigma, \sigma'' \rangle, \end{aligned}$$

ou seja, $a = \langle \sigma'', \sigma \rangle = \langle \sigma, \sigma'' \rangle = -1$.

Por outro lado, como σ está parametrizada pelo comprimento de arco, temos que $|\sigma'| = 1$ e, portanto,

$$\langle \sigma', \sigma' \rangle = 1.$$

Derivando ambos os membros da igualdade acima temos

$$2\langle \sigma'', \sigma' \rangle = 0,$$

o que nos dá $b = \langle \sigma'', \sigma' \rangle = 0$.

Por fim, $c = \langle \sigma'', v \rangle = \langle \sigma'', \sigma \times \sigma' \rangle$ é a expressão para a curvatura geodésica da curva σ em $\sigma(t)$ pois, como já foi visto, $\langle \sigma'', \sigma' \rangle = 0$.

Portanto, temos que $c = \langle \sigma'', v \rangle = k_g$. ■

Com este resultado, se σ está parametrizada pelo comprimento de arco, podemos escrever, através do referencial ortonormal $\{\sigma, \sigma', v\}$,

$$\sigma'' = -\sigma + k_g v. \tag{3.3}$$

Por outro lado, como $v = \sigma \times \sigma'$, temos que

$$\begin{aligned} v' &= \frac{d}{dt} v \\ &= \frac{d}{dt}(\sigma \times \sigma') \\ &= \sigma \times \sigma'' + \sigma' \times \sigma' \\ &= \sigma \times \sigma'', \end{aligned}$$

usando a igualdade (3.3),

$$\begin{aligned} v' &= \sigma \times \sigma'' \\ &= \sigma \times (k_g v - \sigma) \\ &= (\sigma \times k_g v) - (\sigma \times \sigma) \\ &= \sigma \times k_g v \\ &= k_g(\sigma \times v) \\ &= -k_g \sigma'. \end{aligned}$$

Assim, as igualdades

$$\sigma'' = -\sigma + k_g v \quad \text{e} \quad v' = -k_g \sigma' \tag{3.4}$$

são chamadas ***Fórmulas de Frenet*** para curvas em $\mathbb{S}^2$.

3.3 Campo de Vetores Paralelo e Curvatura Geodésica Total

Proposição 3.3.1. *Seja σ uma curva regular fechada em $\mathbb{S}^2$, parametrizada pelo comprimento de arco s, e seja τ sua tantrix, parametrizada pelo comprimento de arco t. Então*

$$\sigma' = \frac{d\sigma}{dt} = \tau\frac{ds}{dt} \qquad e \qquad \frac{ds}{dt} > 0.$$

Demonstração: Primeiramente, escreva t em função de s utilizando a função comprimento de arco, isto é,

$$t(s) = \pm\int_0^s \left|\frac{d\tau}{ds}\right| ds.$$

Com isso, temos

$$\frac{dt}{ds} = \left|\frac{d\tau}{ds}\right|.$$

Aplicando o Lema 3.1.1 obtemos,

$$\frac{dt}{ds} = \left|\frac{d\tau}{ds}\right| \geq 1.$$

Portanto, $\frac{dt}{ds} \neq 0$, além disso, $\frac{dt}{ds}$ é contínua, pois σ é $\mathcal{C}^\infty$ e

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{d^2\sigma}{ds^2}.$$

Aplicando o *Teorema da Função Inversa* (veja [8], página 221), que garante a existência e diferenciabilidade da inversa de $\frac{dt}{ds}$, temos

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)^{-1} = \frac{ds}{dt} > 0,$$

que pela regra da cadeia, nos dá

$$\sigma' = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma}{ds}\frac{ds}{dt} = \tau\frac{ds}{dt},$$

que é o que queríamos demonstrar. ■

Observação 3.3.1. *Como $\sigma(t)$ pertence à $T_{\tau(t)}\mathbb{S}^2$, pois $\langle \sigma(t), \tau(t)\rangle = 0$, e pela definição de campo de vetores paralelo, ao escrever*

$$\sigma' = \tau\frac{ds}{dt}, \text{ sendo } \frac{ds}{dt} \text{ uma função escalar,}$$

σ fica caracterizada como um campo de vetores paralelo ao longo de sua tantrix τ em $\mathbb{S}^2$, uma vez que $\sigma'(t) = f(t)\tau(t)$, onde $f(t) = \frac{ds}{dt}(t)$.

Seja $\sigma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ uma curva regular fechada parametrizada pelo comprimento de arco s, e seja $X : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ um campo diferenciável de vetores unitários ao longo de σ em $\mathbb{S}^2$.

Suponha, ainda, que os vetores $X(s)$ e $\sigma'(s)$ sejam linearmente independentes, para todo $s \in [a, b]$. Então a função $\phi(s)$ dada por

$$\phi(s) := \arccos \frac{\langle X(s), -\sigma'(s)\rangle}{|X(s)|.| - \sigma'(s)|}$$

está bem definida.

Note que, como os vetores $X(s)$ e $-\sigma'(s)$ são unitários, podemos escrever simplesmente $\phi(s) = \arccos\langle X(s), -\sigma'(s)\rangle$.

Além disso, a função ϕ é diferenciável, pois, como os vetores $X(s)$ e $-\sigma(s)$ são linearmente independentes, tem-se que $0 < \phi(s) < \pi$. Assim, ao derivar ambos os membros de $\cos\phi(s) = \langle X(s), -\sigma'(s)\rangle$, obtemos

$$-\phi'(s)\,\text{sen}\phi(s) = \langle X(s), -\sigma''(s)\rangle + \langle -\sigma'(s), X'(s)\rangle,$$

e assim,

$$\phi'(s) = -\frac{\langle X(s), -\sigma''(s)\rangle + \langle -\sigma'(s), X'(s)\rangle}{\text{sen}\phi(s)}.$$

Visto que $\{\sigma', v\}$ é um referencial ortonormal, onde $v = \sigma \times \sigma'$, no plano tangente $T_{\sigma(s)}\mathbb{S}^2$, conforme visto em (3.4), temos que $\{-\sigma', v\}$ também constitui um referencial ortonormal em $T_{\sigma(s)}\mathbb{S}^2$. Sendo assim, existem números reais β_1 e β_2 únicos, tais que

$$X(t) = \beta_1[-\sigma'(s)] + \beta_2 v(s).$$

Mas, como $X(s)$ é unitário e $\phi(s)$ é o ângulo determinado pelos vetores $X(s)$ e $-\sigma'(s)$, temos que

$$\beta_1 = \cos\phi(s) \qquad \text{e} \qquad \beta_2 = \operatorname{sen}\phi(s),$$

e portanto, $X(s)$ pode ser escrito da seguinte maneira:

$$X(s) = -\cos\phi(s)\sigma'(s) + \operatorname{sen}\phi(s)v(s). \tag{3.5}$$

Proposição 3.3.2. *Seja $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ uma curva regular fechada parametrizada pelo comprimento de arco s. Seja $X : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ um campo diferenciável de vetores unitários ao longo de σ em $\mathbb{S}^2$ e tal que os vetores $X(s)$ e $\sigma'(s)$ são linearmente independentes para todo $s \in [a,b]$. Então, da igualdade (3.5), tem-se*

$$X'(s) = (\phi'(s) - k_g(s))[\operatorname{sen}\phi(s)\sigma'(s) + \cos\phi(s)v(s)] + \cos\phi(s)\sigma(s), \tag{3.6}$$

onde $k_g(s)$ é a curvatura geodésica da curva σ em $\sigma(s)$.

Demonstração: Derivando ambos os lados da igualdade (3.5) com relação a s, obtemos

$$\begin{aligned} X'(s) &= -\cos\phi(s)\sigma''(s) + \sigma'(s)\phi'(s)\operatorname{sen}\phi(s) + \operatorname{sen}\phi(s)v'(s) + v(s)\phi'(s)\cos\phi(s) \\ &= -\cos\phi(s)[\sigma''(s) - \phi'(s)v(s)] + \operatorname{sen}\phi(s)[\phi'(s)\sigma'(s) + v'(s)]. \end{aligned}$$

Usando as Fórmulas de Frenet para curvas em $\mathbb{S}^2$, obtemos

$$\begin{aligned} X'(s) &= -\cos\phi(s)[k_g(s)v(s) - \sigma(s)] + \sigma'(s)\phi'(s)\operatorname{sen}\phi(s) + \\ &\quad + \operatorname{sen}\phi(s)[-k_g(s)\sigma'(s)] + v(s)\phi'(s)\cos\phi(s) \\ &= [\phi'(s)\operatorname{sen}\phi(s) - k_g(s)\operatorname{sen}\phi(s)]\sigma'(s) + \cos\phi(s)\sigma(s) + \\ &\quad [\phi'(s)\cos\phi(s) - k_g(s)\cos\phi(s)]v(s) \\ &= [\phi'(s) - k_g(s)][\operatorname{sen}\phi(s)\sigma'(s) + \cos\phi(s)v(s)] + \cos\phi(s)\sigma(s). \end{aligned}$$

■

Corolário 3.3.1. *Seja $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ uma curva regular fechada e seja X um campo diferenciável de vetores unitários paralelo em $\mathbb{S}^2$ ao longo da curva σ, tal que, os vetores $X(t)$ e $\sigma'(t)$ são linearmente independentes para todo $t \in [a,b]$. Se $\phi(t)$ é o ângulo entre os vetores $X(t)$ e $-\sigma'(t)$, então*

$$\phi'(t) = k_g(t), \quad \forall t.$$

Demonstração: Segue da definição de paralelismo que X' é um múltiplo de $\sigma(t)$ e, então, de (3.6), segue que

$$\phi'(t) - k_g(t) = 0,$$

ou seja, $\phi'(t) = k_g(t)$, para todo t. ∎

Observação 3.3.2. *Note que ϕ' independe do particular campo diferenciável de vetores unitários ao longo da curva σ considerada.*

Teorema 3.3.1. *A tantrix τ de uma curva regular fechada σ em $\mathbb{S}^2$ sempre tem curvatura geodésica total igual a zero e, se a tantrix τ é simples, então τ limita, na esfera, duas regiões de áreas iguais a 2π.*

Demonstração: Seja $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ como descrita acima e parametrizada pelo comprimento de arco s, e seja τ sua *tantrix* parametrizada pelo comprimento de arco t. Pela Observação 3.3.1, σ é um campo de vetores paralelo ao longo da curva τ. Fixe t e denote por $\phi(t)$ o ângulo entre os vetores $\sigma(t)$ e $-\tau(t)$. Por (3.6) temos,

$$\sigma'(t) = (\phi'(t) - k_g(t))[\,\mathrm{sen}\phi(t)\tau'(t) + \cos\phi(t)v(t)] + \cos\phi(t)\tau(t). \tag{3.7}$$

Da Proposição 3.3.1, podemos concluir que

$$\sigma'(t) = \tau(t)\frac{ds}{dt} \qquad \text{e} \qquad \frac{ds}{dt} > 0.$$

Comparando com a igualdade (3.7), obtemos

$$\phi'(t) - k_g(t) = 0 \qquad \text{e} \qquad \cos\phi(t) = \frac{ds}{dt} > 0.$$

Assim,

$$\phi'(t) = k_g(t) \qquad \text{e} \qquad \cos\phi(t) > 0.$$

Observe que, como σ é fechada, e além disso, a função ϕ é periódica de período L, onde L é o comprimento da tantrix τ, podemos então, escrever

$$\int_0^L \phi'(t)dt = \phi(L) - \phi(0),$$

e portanto,

$$\int_a^b k_g(t)dt = \int_0^L \phi'(t)dt = 0.$$

Visto que, $\int_a^b k_g(t)dt$ denota a curvatura geodésica total de τ, isso implica que a tantrix de uma curva regular fechada em $\mathbb{S}^2$, sempre tem curvatura geodésica total nula.

Além disso, se τ é simples, isto é, τ não possui auto-intersecções, sem perda de generalidade, denotemos por Ω uma das duas regiões da esfera delimitada pela curva τ, e ainda, denotemos por K a curvatura Gaussiana da esfera. Agora, aplicando o Corolário 1 do *Teorema de Gauss-Bonnet* (veja [7], página 330) para essa região simples de $\mathbb{S}^2$, obtemos a seguinte igualdade

$$\int_\tau k_g + \int_\Omega K dA = 2\pi,$$

onde dA representa o elemento de área. Na esfera, temos $K = 1$, e isso implica que

$$\text{área de } \Omega = \int_\Omega 1 \; dA = 2\pi - \int_\tau k_g = 2\pi - 0 = 2\pi.$$

Sendo assim, concluímos que, como a área da esfera unitária é 4π, se a *tantrix* τ é simples, τ divide a esfera em duas regiões de áreas iguais. ∎

3.4 Skew Loops

O estudo aqui apresentado, está baseado no artigo [2]. Nesse artigo, os autores M. Ghomi e B. Solomon consideram *loops* de classe $\mathcal{C}^k$ com um enfoque no estudo de *loops* $\mathcal{C}^2$. Neste texto consideraremos apenas *loops* de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Definição 3.4.1. *Um **loop** imerso $\mathcal{C}^\infty$ é uma aplicação $\gamma : \mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}/2\pi \longrightarrow \mathbb{R}^3$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ cuja velocidade γ' não se anula. Dizemos que γ é uma **skew** se,*

$$\gamma'(t) \times \gamma'(s) \neq 0 \tag{3.8}$$

*para todo $t \neq s$ com $t, s \in \mathbb{R}/2\pi$. Ou seja, um **skew loop** $\mathcal{C}^\infty$ é uma curva fechada, cuja velocidade não se anula e não possui tangentes paralelas.*

Destacaremos na observação a seguir duas propriedades de skew loops que serão utilizadas no decorrer deste trabalho, suas demonstrações são imediatas e omitiremos aqui.

Observação 3.4.1. • *Bijeções afins do* $\mathbb{R}^3$ *levam skew loops em skew loops.*

- *A aplicação* $\gamma : \mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}/2\pi \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *é uma skew se, e somente se,* $\tau(\mathbb{S}^1)$ *é um mergulho e está disjunta de sua imagem antipodal, isto é,* $\tau(t) \neq \pm\tau(s)$ *com* $t \neq s$ *e* $t, s \in \mathbb{R}/2\pi$.

A curvatura de um *loop* imerso $\alpha(s)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ parametrizado pelo comprimento de arco s, é a velocidade de sua *tantrix* ($|\tau'(s)|$), visto que a curvatura $k(s)$ é dada por $k(s) = |\alpha''(s)|$ (Definição 2.1.4). O resultado a seguir nos permitirá perturbar uma *skew loop* sem que ela deixe de ser uma *skew loop*.

Lema 3.4.1. *O conjunto das skew loops de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *com curvatura não nula é um subconjunto aberto no espaço de todos os loops* $\mathcal{C}^\infty$ *imersos em* $\mathbb{R}^3$*, relativos à topologia* $\mathcal{C}^\infty$.

Demonstração: Daremos aqui apenas uma ideia da prova deste resultado. Seja γ uma *skew loop* $\mathcal{C}^\infty$ com curvatura positiva e seja τ sua *tantrix*. Como γ é uma imersão $\mathcal{C}^\infty$ isso implica que τ é uma imersão $\mathcal{C}^\infty$.

Suponhamos que $\tilde{\gamma}$ é um *loop* próximo a γ no sentido da métrica $\mathcal{C}^\infty$ no espaço dos *loops* de classe $\mathcal{C}^\infty$, sendo assim $\tilde{\gamma}$ também possui curvatura positiva, e portanto sua *tantrix* $\tilde{\tau}$ é uma imersão $\mathcal{C}^\infty$. Além disso, como $\tilde{\gamma}$ está próximo de γ na métrica $\mathcal{C}^\infty$ temos que $\tilde{\tau}$ está próxima de τ na métrica $\mathcal{C}^\infty$.

Como τ é um mergulho, e os mergulhos são abertos no espaço dos *loops* imersos de classe $\mathcal{C}^\infty$, temos que, $\tilde{\tau}$ também é um mergulho (veja [11], página 37).

Por fim, como τ evita sua imagem antipodal, temos que τ também evita uma certa vizinhança dessa imagem. Desta forma, $\tilde{\tau}$ também evita sua imagem antipodal, e pela Observação 3.4.1, segue que $\tilde{\gamma}$ é uma *skew loop*, o que completa a prova. ■

A grosso modo, duas curvas γ e σ são regularmente homotópicas se uma pode ser deformada na outra por uma sequência de curvas regulares, quando isso ocorre, dizemos que há uma homotopia regular entre γ e σ, denotada por $\gamma \sim \sigma$.

As deformações de *loops* através de imersões *(homotopias regulares)* surgem naturalmente uma vez que elas também deformam continuamente a *tantrix* de um *loop*. O teorema de H. Whitney, que pode ser encontrado em [12], diz que em $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, todo *loop* é regularmente homotópico a uma figura-oito padrão

$$\gamma_0(e^{it}) := \cos t(1 + i\,\mathrm{sen} t),$$

ou a um k-círculo dado por

$$\gamma_k(e^{it}) := e^{ikt}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

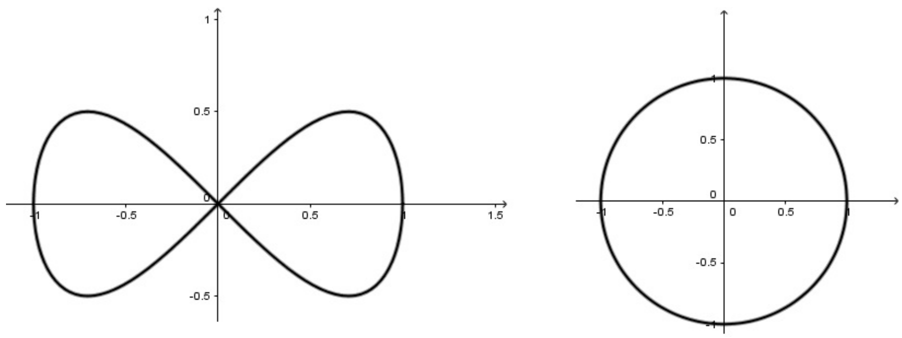

Figura 3.3: Figura-oito padrão e k-círculo.

Em $\mathbb{S}^2 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, já foi provado que existem apenas duas classes regulares de homotopias: a classe da figura-oito γ_0 (Figura 3.3 esquerda), e a classe do equador γ_1 (Figura 3.3 direita), tal fato pode ser visto com mais detalhes em [13].

Lema 3.4.2. *Todo loop σ em $\mathbb{S}^2$ é regularmente homotópico à sua tantrix em $\mathbb{S}^2$.*

Demonstração: Seja $\sigma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ um *loop* parametrizado pelo comprimento de arco s, e seja $\tau : [a, b] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ sua *tantrix*.

Considere a aplicação $h : [a, b] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ dada por

$$h(s, \theta) = \sigma(s) \cos\theta + \tau(s)\,\mathrm{sen}\theta.$$

Esta aplicação está bem definida, é diferenciável e satisfaz:

$$h(s, 0) = \sigma(s) \quad \text{e} \quad h\left(s, \frac{\pi}{2}\right) = \tau(s), \quad \forall s \in [a, b]$$

e

$$h(a,\theta) = h(b,\theta), \quad \forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Fixe θ e defina

$$\sigma_\theta(s) := h(s,\theta).$$

Temos

$$\begin{aligned} \sigma'_\theta(s) &= \tfrac{\partial}{\partial s} h(s,\theta) \\ &= \sigma'(s)\cos\theta + \tau'(s)\,\mathrm{sen}\theta. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Considerando o referencial ortonormal $\{\sigma, \sigma', v\}$ onde $v = \sigma \times \sigma'$, é possível escrevermos as Fórmulas de Frenet (3.4) para o *loop* σ

$$\sigma'' = -\sigma + k_g v \qquad \text{e} \qquad v' = -k_g \sigma',$$

onde k_g é a curvatura geodésica de σ no ponto $\sigma(s)$. Como

$$\sigma'(s) = \tau(s) \qquad \text{e} \qquad \sigma''(s) = \tau'(s),$$

pois τ é a *tantrix* do *loop* σ, temos que

$$\tau' = -\sigma + k_g v \qquad \text{e} \qquad v' = -k_g \tau,$$

que substituindo em (3.9) nos dá

$$\begin{aligned} \sigma'_\theta(s) &= \sigma'(s)\cos\theta + \tau'(s)\,\mathrm{sen}\theta \\ &= \tau(s)\cos\theta + [k_g(s)v(s) - \sigma(s)]\,\mathrm{sen}\theta \\ &= \tau(s)\cos\theta - \sigma(s)\,\mathrm{sen}\theta + k_g(s)v(s)\,\mathrm{sen}\theta. \end{aligned}$$

Visto que $\tau(s)$, $\sigma(s)$ e $v(s)$ são linearmente independentes e, além disso, $\cos\theta$ e $\mathrm{sen}\theta$ não se anulam simultaneamente, temos que, para cada $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\sigma'_\theta(s) \neq 0, \quad \forall s \in [a,b].$$

Isso caracteriza a homotopia h como regular, e com isso, o *loop* σ é regularmente homotópico a τ que é a sua *tantrix*, em outras palavras, a tantrix de um loop também é um loop. $\blacksquare$

Capítulo 4

Skew Loops e Superfícies Quádricas

Neste capítulo estudaremos a relação entre superfícies em $\mathbb{R}^3$ e curvas fechadas que não possuem retas tangentes paralelas (*skew loops*), este estudo é baseado em [2]. Como já dissemos, exemplos dessas curvas foram construídos pela primeira vez em [1] a fim de refutar a conjectura de H. Steinmann.

A construção de *skew loops* em todas as classes de nós pode ser encontrada em [14]. Além disso, pode-se encontrar exemplos explícitos de *skew loops* em superfícies convexas em [15]. Mesmo com a descoberta da falha da conjectura de H. Steinmann, B. Segre notou que o resultado se sustentava para *loops* que estavam em elipsóides, parabolóides e certos cilindros simétricos.

Neste capítulo, primeiramente, provaremos que superfícies quádricas com pelo menos um ponto de curvatura Gaussiana positiva não contém *skew loops*. Posteriormente, provaremos que cilindros construídos a partir de bases assimétricas, contém *skew loops*, tal prova será feita com o auxílio de três resultados. E por fim, provaremos que se a superfície não possui *skew loops*, então ela é parte de uma quádrica.

Como já mencionado anteriormente, o foco deste trabalho é a demonstração do seguinte teorema que pode ser encontrado em [2]

Teorema 4.0.1 (**[2]**). *Seja M uma variedade bidimensional diferenciável conexa, e $F : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão $\mathcal{C}^\infty$. Suponha que $F(M)$ possua curvatura Gaussiana positiva ao menos em um ponto de M. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *$F(M)$ é parte de uma superfície quádrica.*

(2) *$F(M)$ não contém skew loops.*

Observação 4.0.2. *A hipótese de um ponto de curvatura Gaussiana positiva de M não pode ser retirada. No Apêndice 1, daremos um exemplo de um cilindro reto, sobre uma curva específica, o qual não possui skew loops. Tal cilindro não é parte de uma quádrica e não contém skew loops, mas possui curvatura Gaussiana igual a zero em todos os pontos.*

4.1 Skew Loops e suas tantrices

Uma curva σ em uma superfície M com curvatura Gaussiana positiva em todos os pontos, tem curvatura não nula em todos os pontos, pois sabe-se que

$$k_n(t) = k(t)\langle n(t), N(t)\rangle,$$

onde k_n denota a curvatura normal na direção de $\sigma'(t)$, $k(t)$ é a curvatura da curva σ em $\sigma(t)$, $n(t)$ é o vetor unitário normal à curva $\sigma(t)$ e $N(t)$ é o vetor unitário normal à superfície M em $\sigma(t)$. Visto que a curvatura Gaussiana é positiva em todos os pontos, temos que a curvatura normal k_n é sempre não nula. Disto, concluímos que $k(t)$ é sempre não nula.

O Lema 3.4.2 nos diz que a *tantrix* de qualquer *loop* $\mathcal{C}^\infty$ em $\mathbb{S}^2$ também é um *loop* $\mathcal{C}^\infty$, pois são regularmente homotópicos. O lema seguinte, é uma generalização deste fato para superfícies cuja curvatura Gaussiana é positiva em todos os pontos.

Lema 4.1.1. *Seja σ uma curva imersa em uma superfície M cuja curvatura Gaussiana é positiva em todos os pontos. Então a tantrix τ de σ está imersa em $\mathbb{S}^2$.*

Demonstração: Primeiramente parametrizamos σ pelo comprimento de arco, a fim de obter $\tau = \sigma'$. A componente de τ' na direção normal a M, denotada por $(\tau')^N$ é dada por

$$(\tau')^N = (\sigma'')^N = \langle \sigma'', N\rangle N = k_n(\sigma')N,$$

onde $k_n(\sigma')$ denota a curvatura normal na direção de σ'. Como M tem curvatura Gaussiana positiva em todos os pontos, implica que $k_n(\sigma') \neq 0$, e portanto $\tau' \neq 0$. ∎

Observação 4.1.1. *O Lema 4.1.1 e a Observação 3.4.1 nos permitem afirmar que um loop* $\gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow M$*, onde* M *é uma superfície com curvatura Gaussiana positiva em todos os pontos, é um skew loop se, e somente se,* τ *é um mergulho e* $\tau(\mathbb{S}^1)$ *é disjunto da sua imagem antipodal, isto é,* $\tau(t) \neq \pm\tau(s)$ *com* $t \neq s$ *e* $t, s \in \mathbb{R}/2\pi$*.*

Seja U uma vizinhança coordenada de uma superfície M, onde U é a imagem de um disco aberto de $\mathbb{R}^2$ por um difeomorfismo ϕ. Uma figura-oito α de classe $\mathcal{C}^\infty$ em uma superfície M, é um *loop* de classe $\mathcal{C}^\infty$ regularmente homotópico a um *loop* β, $\alpha \sim \beta$, em uma carta local (ϕ, U) de M, ou seja, $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$, onde $\phi^{-1} \circ \beta = \gamma_0$ (γ_0 é a figura-oito usual como na Figura 3.3), e $\beta \subset U$. Assim, munidos dos Lemas 3.4.2 e 4.1.1 podemos obter o seguinte resultado:

Proposição 4.1.1. *Seja* M *uma superfície* $\mathcal{C}^\infty$ *imersa em* $\mathbb{R}^3$ *com curvatura Gaussiana positiva em todos os pontos. Então a tantrix de qualquer figura-oito em* M *é uma figura-oito. Em particular,* M *não admite figuras-oito que sejam skews.*

Demonstração: Seja $\alpha \subset M$ uma figura-oito qualquer, por definição α é regularmente homotópica a uma cópia β da figura-oito usual γ_0 em uma carta local (ϕ, U) de M. O Lema 3.4.2 afirma que a *tantrix* τ_α de uma curva α é regularmente homotópica à *tantrix* τ_β da curva β, isso ocorre por transitividade e pelo fato de α ser regularmente homotópica a β, assim temos que $\tau_\alpha \sim \tau_\beta$. Portanto, é suficiente mostrarmos que τ_β é uma figura-oito em $\mathbb{S}^2$.

Após uma homotopia regular de β, podemos assumir que U é tão pequeno que $f(U)$ é um gráfico sobre um de seus planos tangentes. Deste modo, após uma transformação afim, teremos que β está na carta local de $U \subset M$ cuja imagem $f(U)$ está contida no gráfico de uma função h_0 convexa de classe $\mathcal{C}^\infty$, onde $h_0 : D^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, sendo D^2 o disco aberto unitário. Assim, podemos notar que β é um gráfico, β_0, sobre uma figura-oito $\gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow D^2$

$$\beta_0(t) = \gamma(t) + h_0(\gamma(t))\mathbf{k},$$

onde $\mathbf{k} := (0, 0, 1)$. Assim, podemos assumir que os autovalores da Hessiana $D^2 h_0$ estão entre 0 e 1 ao longo de D^2. Agora, expressando o hemisfério sul da esfera $\mathbb{S}^2$ de maneira análoga, como um gráfico de uma função $h_1 : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e desta forma os autovalores de D^2h_1 serão no mínimo 1, e portanto, os gráficos dessas funções, dão uma deformação

$$h_\epsilon(x) := h_0(x) + \epsilon(h_1(x) - h_0(x))$$

de $f(U)$ em $\mathbb{S}^2$ através de superfícies cuja curvatura é positiva. Pelo Lema 4.1.1, as tantrices das figuras-oito $\beta_\epsilon(t) := \gamma(t) + h_\epsilon(\gamma(t))\mathbf{k}$ estão todas imersas. Em particular, $\beta \sim \beta_1$, pelo Lema 3.4.2 temos que $\beta_1 \sim \tau_{\beta_1}$ e $\tau_{\beta_1} \sim \tau_\beta$ sendo assim, $\tau \sim \beta_1$. ■

4.2 Não existência de Skew Loops em Quádricas

Considerando o Teorema 3.3.1, temos que, quando a *tantrix* de um *loop* está mergulhada em $\mathbb{S}^2$, ela bisecta a esfera. Disto segue que, a *tantrix* de um *loop* em $\mathbb{S}^2$ ou se intercepta, ou cruza sua imagem antipodal. Portanto, segue da Observação 3.4.1, que $\mathbb{S}^2$ não contém *skew loops*.

Segundo Segre, através de invariantes afins, este fato se estende aos elipsóides e aos parabolóides. Aqui, iremos utilizar os argumentos que podem ser encontrados em [9], para descartar a possibilidade de existência de *skew loops* nessas mesmas superfícies e além disso, criaremos uma estrutura Lorentziana para mostrar que os hiperbolóides de duas folhas também estão nessa lista.

Uma das hipóteses do Teorema 4.0.1 é que a superfície deve conter ao menos um ponto onde a curvatura Gaussiana é positiva, com isso, nosso estudo dentro das quádricas se reduz às esferas, elipsóides, hiperbolóides de duas folhas e parabolóides (exemplificados nas Figuras 4.1 e 4.2). As demais superfícies quádricas ou possuem curvatura nula em todos os pontos, ou possuem curvatura negativa em todos os pontos.

Seja Q a forma bilinear simétrica em $\mathbb{R}^3$ dada por:

$$Q(\mathrm{x}, \mathrm{x}) = x^2 + y^2 - z^2,$$

para todo $\mathrm{x} := (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Os conjuntos de níveis não singulares e conexos de $Q(\mathrm{x}, \mathrm{x})$ são hiperbolóides de revolução, que a menos de uma homotetia, podemos considerar um

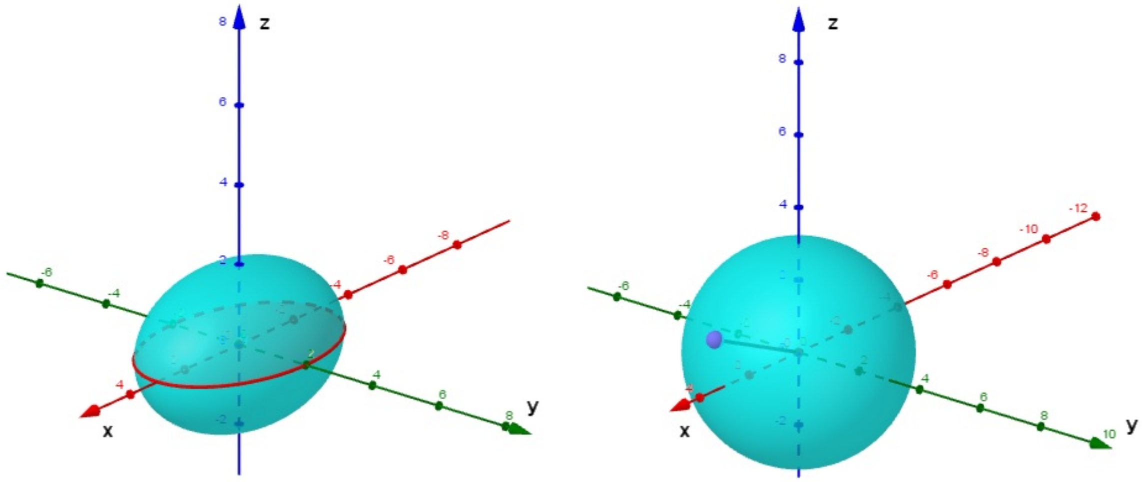

Figura 4.1: Elipsóide e Esfera.

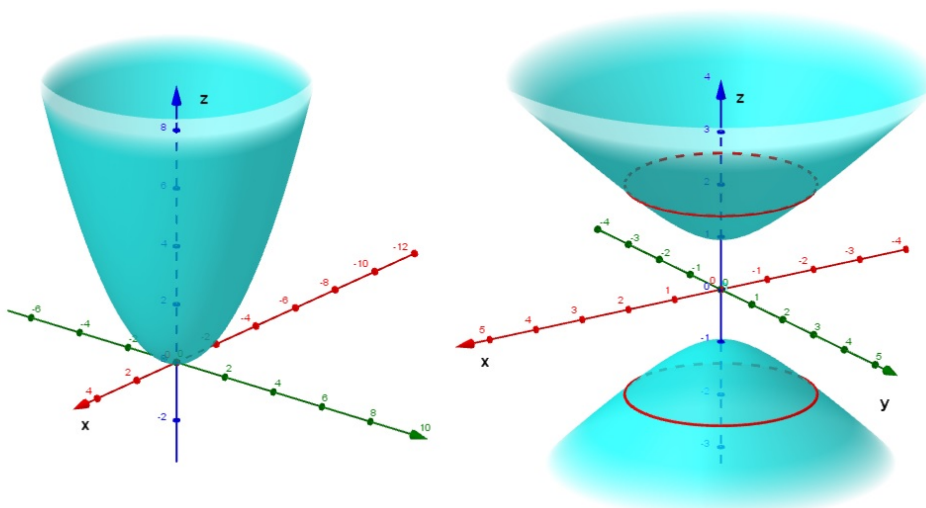

Figura 4.2: Parabolóide e Hiperbolóide de duas folhas.

dos seguintes:

$$\Sigma := \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^3 : Q(\mathrm{x}, \mathrm{x}) = -1, z > 0\} \quad \text{(uma folha do hiperbolóide de duas folhas)},$$
$$\tilde{\Sigma} := \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^3 : Q(\mathrm{x}, \mathrm{x}) = 1\} \quad \text{(hiperbolóide de uma folha)}. \tag{4.1}$$

Observação 4.2.1. *Notemos que, para* $a = (a_1, a_2, a_3)$ *e* $b = (b_1, b_2, b_3)$ *tais que* $a, b \in \mathbb{R}^3$, *temos:*

$$\begin{aligned} Q(a+b,a+b) &= Q(a,a+b)+Q(b,a+b) \\ &= Q(a,a)+Q(a,b)+Q(b,a)+Q(b,b) \\ &= Q(a,a)+2Q(a,b)+Q(b,b), \end{aligned}$$

e assim,

$$2Q(a,b) = Q(a+b,a+b) - Q(a,a) - Q(b,b),$$

ou ainda,

$$Q(a,b) = \frac{Q(a+b,a+b) - Q(a,a) - Q(b,b)}{2}. \tag{4.2}$$

Agora, diferenciando Q ao longo de um arco $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ imerso (que não possui singularidades) em Σ ou $\tilde{\Sigma}$ teremos:

$$Q(\sigma(t),\sigma(t)) = x(t)^2 + y(t)^2 - z(t)^2,$$

o que implica que

$$0 = x(t)x'(t) + y(t)y'(t) - z(t)z'(t). \tag{4.3}$$

Portanto, das Equações (4.2) e (4.3) segue que

$$\begin{aligned} Q(\sigma,\sigma') &= \frac{Q(\sigma+\sigma',\sigma+\sigma') - Q(\sigma,\sigma) - Q(\sigma',\sigma')}{2} \\ &= \frac{(x+x')^2 + (y+y')^2 - (z+z')^2 - (x^2+y^2-z^2) - (x'^2+y'^2-z'^2)}{2} \\ &= 2(xx'+yy'-zz') \\ &= 2 \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Desta análise, podemos enunciar o seguinte lema que diz que, todo ponto p em Σ ou $\tilde{\Sigma}$ é normal a essa superfície em p. Quando isso ocorre dizemos que p é $\mathbf{Q}-$***normal*** a essa superfície.

Lema 4.2.1. *Todo ponto p em Σ ou $\tilde{\Sigma}$ é* Q-*normal a essa superfície em p.*

No que segue, vamos considerar as parametrizações de Σ e $\tilde{\Sigma}$ por $X : \mathbb{R}\times(0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $\tilde{X} : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, respectivamente

$$\begin{aligned} X(u,v) &:= (\cos u \operatorname{senh} v,\ \operatorname{sen} u \operatorname{senh} v, \cosh v),\\ \tilde{X}(u,v) &:= (\cos u \cosh v,\ \operatorname{sen} u \cosh v,\ \operatorname{senh} v). \end{aligned}$$

Diferenciando X e $\tilde{X}$ temos

$$\begin{aligned} X_u &= (-\operatorname{sen} u \operatorname{senh} v, \cos u \operatorname{senh} v, 0),\\ X_v &= (\cos u \cosh v,\ \operatorname{sen} u \cosh v,\ \operatorname{senh} v), \end{aligned}$$

onde, X_u e X_v representam as derivadas de X com relação a u e a v, respectivamente. Calculando $Q(X_u, X_u)$ teremos

$$\begin{aligned} Q(X_u, X_u) &= (-\operatorname{sen} u \operatorname{senh} v)^2 + (\cos u \operatorname{senh} v)^2 - 0^2\\ &= \operatorname{senh}^2 v(\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u)\\ &= \operatorname{senh}^2 v. \end{aligned}$$

Da mesma forma, podemos calcular $Q(X_v, X_v)$

$$\begin{aligned} Q(X_v, X_v) &= (\cos u \cosh v)^2 + (\operatorname{sen} u \cosh v)^2 - \operatorname{senh}^2 v\\ &= \cosh^2 v(\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u) - \operatorname{senh}^2 v\\ &= \cosh^2 v - \operatorname{senh}^2 v\\ &= 1. \end{aligned}$$

Agora para obter $Q(X_u, X_v)$ vamos calcular $Q(X_u + X_v, X_u + X_v)$.

$$\begin{aligned} Q(X_u + X_v, X_u + X_v) &= (-\operatorname{sen} u \operatorname{senh} v + \cos u \cosh v)^2 +\\ &\quad + (\cos u \operatorname{senh} v + \operatorname{sen} u \cosh v)^2 - \operatorname{senh}^2 v\\ &= \operatorname{sen}^2 u \operatorname{senh}^2 v + \cos^2 u \cosh^2 v - 2(\operatorname{sen} u \operatorname{senh} v \cos u \cosh v) +\\ &\quad + \cos^2 u \operatorname{senh}^2 v + \operatorname{sen}^2 u \cosh^2 v +\\ &\quad + 2(\cos u \operatorname{senh} v \operatorname{sen} u \cosh v) - \operatorname{senh}^2 v\\ &= \operatorname{sen}^2 u \operatorname{senh}^2 v + \cos^2 u \cosh^2 v + \cos^2 u \operatorname{senh}^2 v +\\ &\quad + \operatorname{sen}^2 u \cosh^2 v - \operatorname{senh}^2 v\\ &= \operatorname{senh}^2 v(\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u) + \cosh^2 v(\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u) - \operatorname{senh}^2 v\\ &= \cosh^2 v. \end{aligned}$$

Com isso podemos calcular $Q(X_u, X_v)$ utilizando a equação obtida na Observação 4.2.1.

$$\begin{aligned} Q(X_u, X_v) &= \frac{Q(X_u + X_v, X_u + X_v) - Q(X_u, X_u) - Q(X_v, X_v)}{2} \\ &= \frac{\cosh^2 v - \text{ senh}^2 v - 1}{2} \\ &= \frac{1-1}{2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto temos que $Q(X_u, X_u)$, $Q(X_v, X_v) > 0$, e além disso, $Q(X_u, X_v) = 0$. Sendo assim, Q induz uma métrica Riemanniana sobre Σ, ou seja, a métrica hiperbólica. Então, podemos definir a $Q-$tantrix de um *loop* imerso $\sigma \subset \Sigma$.

Definição 4.2.1. *A* **Q−*tantrix*** *de um loop imerso* $\sigma \subset \Sigma$ *é dada por*

$$\tau_{\mathrm{Q}}(t) := \frac{\sigma'(t)}{\sqrt{\mathrm{Q}(\sigma'(t), \sigma'(t))}}.$$

Observação 4.2.2. *A* $Q-$*tantrix de um loop* σ *sobre* Σ *está sobre* $\tilde{\Sigma}$.

Para verificar este fato, basta notar que

$$\begin{aligned} Q(\tau_Q, \tau_Q) &= Q\left(\frac{\sigma'(t)}{\sqrt{Q(\sigma', \sigma')}}, \frac{\sigma'(t)}{\sqrt{Q(\sigma', \sigma')}}\right) \\ &= \frac{Q(\sigma'(t), \sigma'(t))}{\sqrt{Q(\sigma'(t), \sigma'(t))}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Exemplo 4.2.1. *Tome o hiperbolóide* Σ *e a curva* $\sigma : [0, 2\pi] \longrightarrow \Sigma$ *dada por* $\sigma(t) = (\sqrt{8}\cos t, \sqrt{8}\,\mathrm{sen} t, 3)$ *como na Figura 4.3 esquerda, abaixo.*

Note que σ *realmente está em* Σ*, uma vez que*

$$\mathrm{Q}(\sigma(t), \sigma(t)) = 8(\,\mathrm{sen}^2(t) + \cos^2(t)) - 9 = -1, \quad \forall t \in [0, 2\pi].$$

Calculando $\tau_{\mathrm{Q}}(t)$ *temos,*

$$\begin{aligned} \tau_{\mathrm{Q}}(t) &= \frac{\sigma'(t)}{\sqrt{\mathrm{Q}(\sigma'(t), \sigma'(t))}} \\ &= \frac{(-\sqrt{8}\,\mathrm{sen} t, \sqrt{8}\cos t, 0)}{\sqrt{8(\,\mathrm{sen}^2(t) + \cos^2(t))}} \\ &= (-\,\mathrm{sen} t, \cos t, 0). \end{aligned}$$

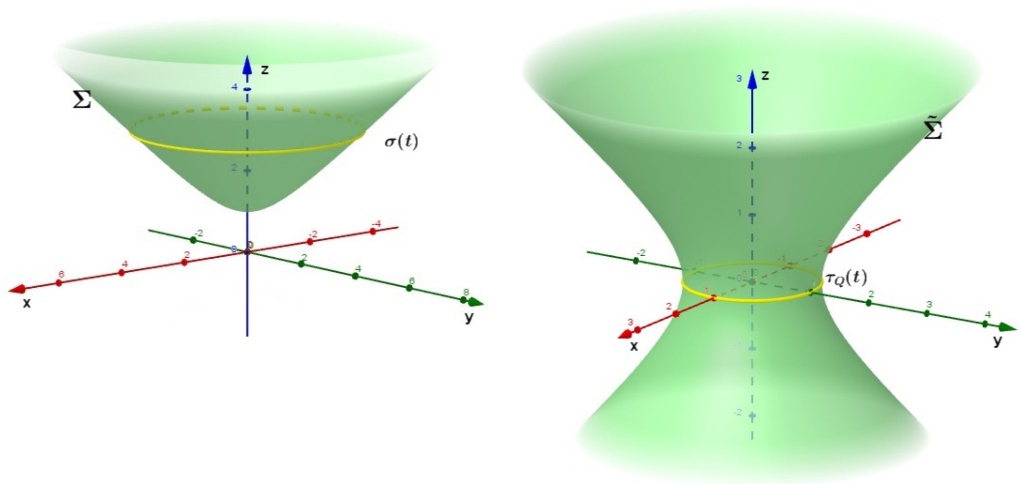

Figura 4.3: Curva σ sobre Σ e curva τ_Q sobre $\tilde{\Sigma}$.

Portanto, $\tau_{\mathrm{Q}}(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)$ *(ver Figura 4.3 direita), e de fato* $\tau_{\mathrm{Q}}(t)$ *está contido em* $\tilde{\Sigma}$*, basta ver que*

$$\mathrm{Q}(\tau_{\mathrm{Q}}(t), \tau_{\mathrm{Q}}(t)) = \operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t) = 1, \quad \forall t \in [0, 2\pi].$$

Observação 4.2.3. *Note que* τ_{Q} *é a projeção radial da tantrix* τ *em* $\tilde{\Sigma}$*. Portanto, podemos afirmar que a* Q*−tantrix de uma skew loop em* Σ *é um mergulho e, além disso, não passa pela sua imagem antipodal.*

Em contraste com Σ, $\tilde{\Sigma}$ herda uma estrutura *Lorentziana* de Q. De fato, os vetores

$$e^+ := \frac{\tilde{X}_u}{\cosh v}, \qquad e^- := \tilde{X}_v \tag{4.4}$$

formam um referencial global sobre $\tilde{\Sigma}$. Agora, a fim de obter $Q(e^+, e^+)$, $Q(e^-, e^-)$ e $Q(e^+, e^-)$, iremos calcular $\tilde{X}_u$ e $\tilde{X}_v$, resultando em

$$\begin{aligned} \tilde{X}_u &= (-\operatorname{sen} u \cosh v, \cos u \cosh v, 0), \\ \tilde{X}_v &= (\cos u \operatorname{senh} v,\ \operatorname{sen} u \operatorname{senh} v, \cosh v). \end{aligned}$$

Portanto,

$$e^+ = (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0) \quad \text{e} \quad e^- = (\cos u \operatorname{senh} v,\ \operatorname{sen} u \operatorname{senh} v, \cosh v).$$

Além disso,

$$e^+ + e^- = (-\operatorname{sen} u + \cos u \operatorname{senh} v, \cos u + \operatorname{sen} u \operatorname{senh} v, \cosh v).$$

Sendo assim, passamos a obter as seguintes relações

$$\begin{aligned} Q(e^+, e^+) &= \operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u - 0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(e^-, e^-) &= \cos^2 u \operatorname{senh}^2 v + \operatorname{sen}^2 u \operatorname{senh}^2 v - \cosh^2 v \\ &= \operatorname{senh}^2 v(\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u) - \cosh^2 v \\ &= -1. \end{aligned}$$

Agora iremos calcular $Q(e^+ + e^-, e^+ + e^-)$, para posteriormente obtermos $Q(e^+, e^-)$.

$$\begin{aligned} Q(e^+ + e^-, e^+ + e^-) &= (-\operatorname{sen} u + \cos u \operatorname{senh} v)^2 + (\cos u + \operatorname{sen} u \operatorname{senh} v)^2 - \cosh^2 v \\ &= \operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u \operatorname{senh}^2 v - 2(\operatorname{sen} u \cos u \operatorname{senh} v) + \\ &\quad + \cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u \operatorname{senh}^2 v + 2(\cos u \operatorname{sen} u \operatorname{senh} v) - \cosh^2 v \\ &= \operatorname{sen}^2 u + \cos^2 + u \operatorname{senh}^2 v(\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u) - \cosh^2 v \\ &= 1 - 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

E disto segue que

$$\begin{aligned} Q(e^+, e^-) &= \frac{Q(e^+ + e^-, e^+ + e^-) - Q(e^+, e^+) - Q(e^-, e^-)}{2} \\ &= \frac{0 - 1 + 1}{2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, acabamos de obter

$$Q(e^+, e^+) = +1, \quad Q(e^-, e^-) = -1, \quad \text{e} \quad Q(e^+, e^-) = 0. \tag{4.5}$$

Chamemos de ω a 1-forma proveniente da conexão ∇_z, isto é, um funcional linear do espaço tangente na reta, associada ao referencial $\{e^+, e^-\}$ dada por

$$\omega(z) := Q(\nabla_z e^+, e^-), \tag{4.6}$$

para todo $z \in T\tilde{\Sigma}$, onde ∇_z é a conexão em $\tilde{\Sigma}$.

Segundo [16] (página 61 Teorema 3.6 (Levi-Civita)), a conexão mencionada acima é única e será obtida na proposição a seguir.

Proposição 4.2.1. *No sistema de coordenadas associado a $\tilde{X}$ vale*

$$\omega := \omega(z) = -\operatorname{senh} v du. \tag{4.7}$$

Demonstração: Como $z \in T_z\tilde{\Sigma}$, temos que z pode ser escrito $z = z_1 e^+ + z_2 e^-$. Agora notemos que

$$\begin{aligned} \omega(\tilde{X}_u) &= Q(\nabla_{\tilde{X}_u} e^+, e^-) \\ &= Q(\nabla_{\tilde{X}_u} \frac{1}{\cosh v} \tilde{X}_u, \tilde{X}_v) \\ &= \frac{1}{\cosh v} Q(\nabla_{\tilde{X}_u} \tilde{X}_u, \tilde{X}_v) \\ &= \frac{1}{\cosh v} \Gamma^v{}_{uu} Q(\tilde{X}_v, \tilde{X}_v) \\ &= -\frac{1}{\cosh v} \Gamma^v_{uu}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

onde Γ^v_{uu} é um dos símbolos de *Christoffel*. De maneira análoga temos

$$\begin{aligned} \omega(\tilde{X}_v) &= Q(\nabla_{\tilde{X}_v} e^+, e^-) \\ &= -\frac{1}{\cosh v} \Gamma^v_{uv}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Precisamos, agora, calcular os símbolos de *Christoffel*. Da primeira forma fundamental temos

$$I = ds^2 = g_{11} du^2 + 2 g_{12} du dv + g_{22} dv^2,$$

onde g_{ij} são as entradas da matriz

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} Q(\tilde{X}_u, \tilde{X}_u) & Q(\tilde{X}_u, \tilde{X}_v) \\ Q(\tilde{X}_v, \tilde{X}_u) & Q(\tilde{X}_v, \tilde{X}_v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh^2 v & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por convenção, denotamos por (g^{ij}) a inversa da matriz (g_{ij})

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cosh^2 v} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dando continuidade, para o cálculo dos símbolos de *Christoffel* iremos considerar

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{2} g^{kl} (\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}).$$

Sendo assim, por comodidade iremos considerar $u = 1$ e $v = 2$,

$$\begin{aligned}
\Gamma^v_{uu} &= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2} g^{2l}(\partial_1 g_{l1} + \partial_1 g_{l1} - \partial_l g_{11}) \\
&= \frac{1}{2}\left[g^{21}(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) + g^{22}(\partial_1 g_{21} + \partial_1 g_{21} - \partial_2 g_{11}\right] \\
&= \frac{1}{2}[-1(-\partial_2 \cosh v)] \\
&= \frac{1}{2}[2\,\mathrm{senh} v \cosh v] \\
&= \mathrm{senh} v \cosh v. \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

Donde, das Equações (4.8) e (4.10) temos que

$$\omega(\tilde{X}_u) = -\frac{1}{\cosh v}\Gamma^v_{uu} \Longrightarrow \omega(\tilde{X}_u) = -\,\mathrm{senh} v.$$

Por outro lado temos

$$\begin{aligned}
\Gamma^v_{uv} &= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2} g^{2l}(\partial_1 g_{l2} + \partial_2 g_{l1} - \partial_l g_{12}) \\
&= \frac{1}{2}[g^{21}(\partial_1 g_{12} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{12}) + g^{22}(\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{21} - \partial_2 g_{12})] \\
&= \frac{1}{2}[-1(-1\cdot 0)] \\
&= 0. \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

Portanto, das Equações (4.9) e (4.11) temos,

$$\omega(\tilde{X}_v) = \frac{-1}{\cosh v}\cdot 0 = 0.$$

Agora, visto que $\omega(z) = \omega(du, dv)$ obtemos,

$$\begin{aligned}
\omega(z) &= \omega(du, dv) \\
&= du\omega(\tilde{X}_u) + dv\omega(\tilde{X}_v) \\
&= -\,\mathrm{senh} v du. \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

■

Da Proposição 4.2.1 e do Lema 4.2.1 segue, diferenciando as expressões em (4.5), que

$$\begin{aligned} \nabla_z e^+ &= -Q(\nabla_z e^+, e^-)e^- = -\omega(z)e^-, \\ \nabla_z e^- &= +Q(\nabla_z e^-, e^+)e^- = -\omega(z)e^+. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Lema 4.2.2. *Se um loop α em $\tilde{\Sigma}$ é a* Q*−tantrix de um loop sobre Σ, então $\int_\alpha \omega = 0$.*

Demonstração: Suponha $\alpha = \tau_Q$, a $Q-$tantrix de um arco σ imerso em Σ. Como τ_Q é um múltiplo de σ', pois

$$\tau_Q = \frac{\sigma'}{\sqrt{Q(\sigma', \sigma')}},$$

segue da Equação (4.4) que $Q(\tau_Q, \sigma) \equiv 0$. O Lema 4.2.1 garante que $\sigma(t)$ é tangente à $\tilde{\Sigma}$ em $\tau_Q(t)$. Assim podemos expandir σ com relação ao referencial $\{e^+, e^-\}$ (Equações (4.4)). Como $Q(\sigma, \sigma) \equiv -1$, e σ é $\mathcal{C}^\infty$, isso determina uma única função $\theta : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\sigma(t) = \operatorname{senh}\theta(t)e^+ + \cosh\theta(t)e^-.$$

Diferenciando a expressão acima com respeito à t e usando as Equações (4.13) temos

$$\nabla_{\tau_Q'}\sigma = (\theta' - \omega(\tau_Q'))(\cosh\theta e^+ + \operatorname{senh}\theta e^-).$$

Por outro lado, pelo Lema 4.2.1, $\tau_Q(t)$ é $Q-$normal a superfície $\tilde{\Sigma}$ no ponto $\tau_Q(t)$, e assim teremos

$$0 = (\sqrt{Q(\sigma', \sigma')}\tau_Q)^T = (\sigma')^T = (D_{\tau_Q'}\sigma)^T = \nabla_{\tau_Q'}\sigma,$$

que implica que $\omega(\tau_Q') \equiv 0$ ao longo de τ_Q. Mas, a integral de θ' se anula ao longo de τ_Q, pois θ é contínua e τ_Q é um loop. Sendo assim, temos que

$$\int_\alpha \omega = \int_{\tau_Q} = 0.$$

■

A Proposição 4.2.1 e o Lema 4.2.2 continuam sendo válidos também para $\mathbb{S}^2$ (com a diferença de que, na esfera, $\omega = \operatorname{sen} v du$), suas demonstrações são análogas, mas iremos repetí-las aqui, por uma questão de completude.

Se considerarmos

$$X(u,v) = (\cos v \cos u, \cos v \,\mathrm{sen} u,\ \mathrm{sen} v),$$

onde $-\pi < u < \pi$ e $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$ uma parametrização de $\mathbb{S}^2$, temos que X cobre toda $\mathbb{S}^2$, exceto os pólos $(0,0,\pm 1)$ e o semicírculo que passa por esses dois pólos e por $(-1,0,0)$.

Após alguns cálculos obtemos

$$\begin{aligned}
X_u &= (-\cos v \,\mathrm{sen} u, \cos v \cos u, 0),\\
X_v &= (-\,\mathrm{sen} v \cos u, -\,\mathrm{sen} v \,\mathrm{sen} u, \cos v),\\
\langle X_u, X_u\rangle &= \cos^2 v,\\
\langle X_u, X_v\rangle &= 0,\\
\langle X_v, X_v\rangle &= 1.
\end{aligned}$$

Denotemos por e^+ e e^- os vetores em $T_p\mathbb{S}^2$, definidos por

$$e^+ = \frac{X_u}{\cos v} \quad \text{e} \quad e^- = X_v.$$

Como $\langle e^+, e^+\rangle = 1, \langle e^+, e^-\rangle = 0$ e $\langle e^+, e^-\rangle = 1$, onde $\langle \ \ , \ \ \rangle$ é o produto interno usual, temos que $\{e^+, e^-\}$ é um referencial ortonormal em $T_p\mathbb{S}^2$.

Chamaremos de $\nabla_z e^+$ a derivada covariante em $\mathbb{S}^2$ do campo de vetores e^+ em relação ao vetor z de $T_p\mathbb{S}^2$ e assim definimos a $1-$forma associada ao referencial ortonormal $\{e^+, e^-\}$ dada por

$$\omega(z) = \langle \nabla_z e^+, e^-\rangle, \qquad \forall z \in T_p\mathbb{S}^2. \tag{4.14}$$

Proposição 4.2.2. *Neste sistema de coordenadas associado a X vale*

$$\omega = \mathrm{sen} v du. \tag{4.15}$$

Demonstração: Escrevendo ω em função de du e dv, e também em função de X_u e X_v, temos

$$\begin{aligned}
\omega &= \omega(X_u)du + \omega(X_v)dv\\
&= \langle \nabla_{X_u} e^+, e^-\rangle du + \langle \nabla_{X_v} e^+, e^-\rangle dv\\
&= \left\langle \nabla_{X_u} \frac{X_u}{\cos v}, X_v \right\rangle du + \left\langle \nabla_{X_v} \frac{X_u}{\cos v}, X_v \right\rangle dv\\
&= \frac{1}{\cos v}\langle \nabla_{X_u} X_u, X_v\rangle du + \frac{1}{\cos v}\langle \nabla_{X_v} X_u, X_v\rangle dv.
\end{aligned}$$

Visto que,

$$\begin{aligned}\nabla_{X_u} X_u &= X_{uu} = (-\cos v \cos u, -\cos v \operatorname{sen} u, 0)\\ \nabla_{X_v} X_u &= X_{uv} = (\operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, -\operatorname{sen} v \cos u, 0),\end{aligned}$$

isso implica que,

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{1}{\cos v}\langle(-\cos v \cos u, -\cos v \operatorname{sen} u, 0), (-\operatorname{sen} v \cos u, -\operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, \cos v)\rangle\, du +\\ &+\frac{1}{\cos v}\langle(\operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, -\operatorname{sen} v \cos u, 0), (-\operatorname{sen} v \cos u, -\operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, \cos v)\rangle\, dv,\end{aligned}$$

e com isso temos que

$$\omega = \operatorname{sen} v du.$$

■

Note que,

$$\begin{aligned}\langle e^+, e^+\rangle = 1 &\implies \langle\nabla_z e^+, e^+\rangle = 0,\\ \langle e^-, e^-\rangle = 1 &\implies \langle\nabla_z e^-, e^-\rangle = 0,\\ \langle e^+, e^-\rangle = 0 &\implies \langle\nabla_z e^+, e^-\rangle + \langle\nabla_z e^-, e^+\rangle.\end{aligned}$$

Agora, escrevendo $\nabla_z e^+$ e $\nabla_z e^-$ no referencial $\{e^+, e^-\}$ e usando a Equação (4.14) temos que

$$\nabla_z e^+ = \langle\nabla_z e^+, e^+\rangle e^+ + \langle\nabla_z e^+, e^-\rangle e^- = \omega(z) e^-, \tag{4.16}$$

$$\nabla_z e^- = \langle\nabla_z e^-, e^+\rangle e^+ + \langle\nabla_z e^-, e^-\rangle e^- = -\omega(z) e^+. \tag{4.17}$$

Lema 4.2.3. *Seja σ um loop $\mathcal{C}^\infty$ em $\mathbb{S}^2$, e seja τ sua tantrix. Então*

$$\int_\tau \omega = 0.$$

Demonstração: Como $\langle\sigma(t), \sigma(t)\rangle = 1$, isso implica que $\langle\sigma'(t), \sigma(t)\rangle = 0$, e disto segue que

$$\left\langle \frac{\sigma'(t)}{|\sigma'(t)|}, \sigma(t)\right\rangle = 0,$$

que é o mesmo que

$$\langle\tau(t), \sigma(t)\rangle = 0.$$

Por conta do vetor posição $\tau(t)$ ser também o vetor unitário normal em $T_{\tau(t)}\mathbb{S}^2$ isso implica que, $\sigma(t)$ é um campo tangente de classe $\mathcal{C}^\infty$ em $\mathbb{S}^2$ sobre $\tau(t)$. Seja $\theta(t)$ o ângulo orientado formado pelos vetores e^- e $\sigma(t)$, é possível escrever σ no referencial ortonormal $\{e^+, e^-\}$ da seguinte forma

$$\sigma(t) = \operatorname{sen}\theta(t)e^+ + \cos\theta(t)e^-. \tag{4.18}$$

Uma vez que $\sigma(t)$ é de classe $\mathcal{C}^\infty$, é possível afirmarmos que, $\theta(t)$ é também uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$. Agora, visto que, $\sigma(t)$ é fechada, temos que $\theta(t)$ é $L-$periódica, e o mesmo ocorre com sua tantrix $\tau(t)$. Tomando a derivada covariante em relação a τ' em ambos os lados da Equação (4.18) e usando as Equações (4.16) e (4.17) obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla_{\tau'}\sigma &= (\cos\theta)\theta' e^+ - (\operatorname{sen}\theta)\theta' e^- + \operatorname{sen}\theta\nabla_{\tau'}e^+ + \cos\theta\nabla_{\tau'}e^- \\
&= (\cos\theta)\theta' e^+ - (\operatorname{sen}\theta)\theta' e^- + \operatorname{sen}\theta\omega(\tau')e^-(\cos\theta)\omega(\tau')e^+ \\
&= (\theta' - \omega(\tau'))(\cos\theta e^+ - \operatorname{sen}\theta e^-).
\end{aligned}$$

Mas, $\nabla_{\tau'}\sigma$ é a componente tangente de σ', que é a derivada usual no $\mathbb{R}^3$, e disto temos,

$$\nabla_{\tau'}\sigma = (\sigma')^T = (\tau)^T = 0.$$

Portanto temos que $\theta' = \omega(\tau')$, e com isso

$$\int_\tau^{\prime} \omega = \int_0^L \omega(\tau') = \int_0^L \theta' = \theta(L) - \theta(0) = 0.$$

■

Agora, temos tudo que precisamos para provar que *"quádricas com curvatura Gaussiana positiva em pelo menos um ponto não admitem skew loops"* e, com isso, provar uma das implicações do nosso teorema principal, que enunciaremos novamente a seguir.

Teorema 4.0.1. [2] *Seja M uma variedade bidimensional diferenciável conexa, e $F : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão $\mathcal{C}^\infty$. Suponha que $F(M)$ possua curvatura Gaussiana positiva em ao menos um ponto de M. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *$F(M)$ é parte de uma superfície quádrica.*

(2) *$F(M)$ não contém skew loops.*

Demonstração: da implicação (1) $\Longrightarrow$ (2)**.** Por hipótese, $F(M)$ é parte de uma superfície quádrica e precisa ter pelo menos um ponto de curvatura positiva, sendo assim, precisamos analisar três casos, a saber; os hiperbolóides de duas folhas, os elipsóides e os parabolóides.

Caso 1: Hiperbolóides: Cada hiperbolóide de duas folhas é isomorfo (de maneira afim) ao hiperbolóide $A := x^2+y^2-z^2 = -1$, além disso, sabemos que Σ é a componente conexa superior do hiperbolóide A, sendo assim, é suficiente mostrarmos que Σ não admite *skew loops*, pois se a outra componente conexa tiver um *skew loop* $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t), \sigma_3(t))$, a Observação 3.4.1 garante que $\tilde{\sigma}(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t), -\sigma_3(t))$ é um *skew loop*, mas $\tilde{\sigma}(t) \subset \Sigma$.

Suponhamos que exista uma *skew loop* $\sigma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \Sigma$, onde τ_Q é sua $Q-$*tantrix*. Como Σ é difeomorfo ao plano, e σ não pode ser uma figura-oito (Proposição 4.1.1), o Teorema de *Whitney*, comentado na página 24 desta dissertação, faz com que σ seja regularmente homotópico a um $k-$círculo γ_k, como na Figura 3.3 direita, de algum círculo horizontal, $k \neq 0$. A $Q-$*tantrix* de γ_k é, também, um $k-$círculo do círculo $z \equiv 0$ em $\tilde{\Sigma}$, e como Σ possui curvatura positiva, pelo Lema 4.1.1, a homotopia $\sigma \sim c_k$ induz uma homotopia regular $\tau_Q \sim \tau_k$.

Pela Observação 4.2.3, τ_Q é um mergulho e é disjunta de sua imagem antipodal. Por ser mergulho, temos que $k = 1$, pois não pode ter auto-intersecções. Por outro lado, por ser disjunta da sua imagem antipodal, temos que $\tau_Q(\mathbb{S}^1) \cup -\tau_Q(\mathbb{S}^1)$ limita um domínio anelar $\Omega \in \tilde{\Sigma}$ (veja Figura 4.4).

Agora, combinando o *Teorema de Stokes* (veja [8], página 273) com o Lema 4.2.2 temos então que

$$\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega = 0.$$

Pela equação (4.12), temos que $d\omega = \cosh v du dv$, uma $2-$forma que não se anula em nenhum ponto. Portanto como a integral de $d\omega$ se anula, temos uma contradição. Assim, podemos concluir que os hiperbolóides de duas folhas não possuem skew loops.

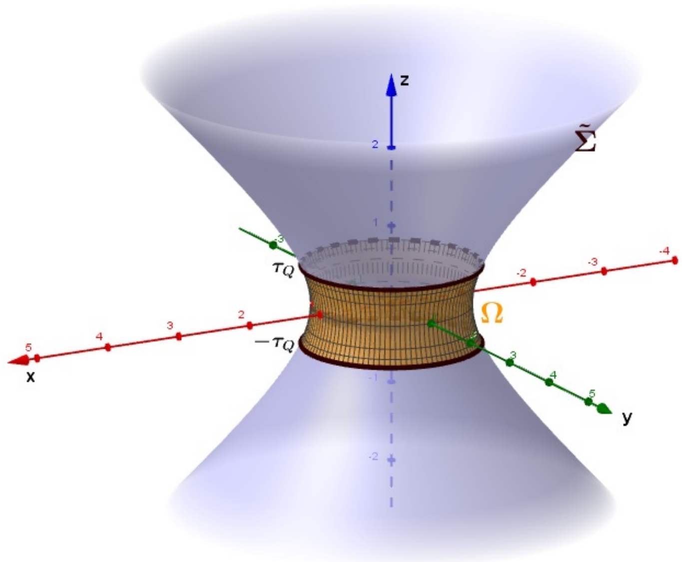

Figura 4.4: Domínio anelar $\Omega \subset \tilde{\Sigma}$ limitado por $\tau_Q(\mathbb{S}^1) \cup -\tau_Q(\mathbb{S}^1)$.

Caso 2: Elipsóides: Todos os elipsóides são equivalentes (de maneira afim), sendo assim, é suficiente mostrarmos apenas para a esfera, o qual já foi discutido por Segre [1] e White [17]. Já discutimos isto no começo deste capítulo, no entanto, apresentaremos uma prova alternativa, seguindo os mesmos passos do caso anterior.

Suponhamos que $\sigma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^2$ seja um *skew loop* de classe $\mathcal{C}^\infty$ e seja τ sua *tantrix*. A esfera não possui *skew loop* do tipo figura-oito (Proposição 4.1.1), pois tem curvatura Gaussiana positiva em todos os pontos, portanto τ não possui auto-intersecções, uma vez que é homotopicamente regular a σ. Sendo assim, τ limita uma região $\Omega_1 \subset \mathbb{S}^2$.

Usando o *Teorema de Stokes* temos que

$$\int_{\Omega_1} d\omega = \int_\tau \omega.$$

Mas, pelo Lema 4.2.3 temos que,

$$\int_{\Omega_1} d\omega = 0.$$

Como $\omega = \text{sen} v du$, isso implica que $d\omega = \cos v du dv$. A forma que fornece o elemento de área de uma superfície é dada por $\tilde{\omega} = \sqrt{EG - F^2} du dv$, onde E, F e G são os coeficientes da Primeira Forma Fundamental (veja [7], página 116), e sendo assim, temos que

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\cos^2 v.1 - 0}dudv = \cos v dudv,$$

mas $\cos v > 0$, pois $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$. Com isso, temos que o elemento de área de $\mathbb{S}^2$ é $d\omega$. No entanto o problema a ser resolvido é a questão dos pólos $(0,0,1)$, $(0,0,-1)$ e do semicírculo que passa por esses dois pólos e pelo ponto $(-1,0,0)$ (veja Figura 4.5), pois v não está definido em $\pm\frac{\pi}{2}$ e $u \neq \pi$.

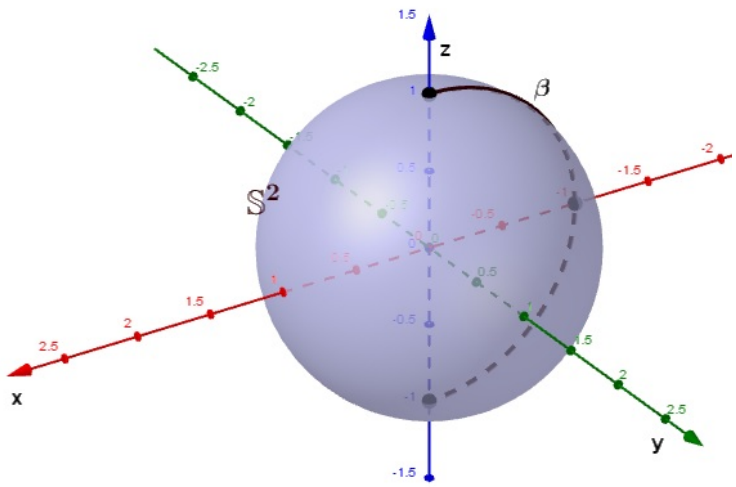

Figura 4.5: Semicírculo β na esfera $\mathbb{S}^2$.

No entanto, esse semicírculo tem medida nula em $\mathbb{S}^2$, portanto se chamarmos de $\Omega_2 = \Omega_1 - \beta$, onde β é o semi-círculo em questão, temos que

$$\int_{\Omega_1} d\omega = \int_{\Omega_2} d\omega > 0.$$

Mas teremos que $\Omega = 0$, o que é um absurdo. Portanto, $\mathbb{S}^2$ não possui *skew loops* $\mathcal{C}^\infty$.

Caso 3: Parabolóides: Novamente, por equivalência afim, é suficiente mostrar que a superfície P dada pelo gráfico $z = x^2 + y^2$ não possui *skew loops*. Suponhamos que $\alpha : \mathbb{S}^1 \longrightarrow P$ seja um skew loop $\mathcal{C}^\infty$. Como P tem curvatura positiva em todos os pontos o Lema 3.4.1 garante que, existe $\epsilon > 0$ tal que, se $\tilde{\sigma} : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é um *loop* $\mathcal{C}^\infty$ tal que

$$\begin{aligned} |\sigma(t) - \tilde{\sigma}(t)| &< \epsilon, \\ |\sigma^{(i)}(t) - \tilde{\sigma}^{(i)}(t)| &< \epsilon, \end{aligned}$$

qualquer $t \in \mathbb{S}^1$ e $i \geq 1$ onde $\sigma^{(i)}(t)$ representa a $i-$ésima derivada de $\sigma(t)$, então $\tilde{\sigma}(t)$ é um *skew loop*.

É possível, aproximar o parabolóide P por elipsóides da forma

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{z}{2r} - r\right)^2 = r^2. \tag{4.19}$$

A estratégia é construir um *loop* σ_r num elipsóide, de tal modo que este *loop* esteja suficientemente próximo de σ na topologia $\mathcal{C}^\infty$, com isso teríamos que σ_r seria um *skew loop* e isso acarretaria numa contradição.

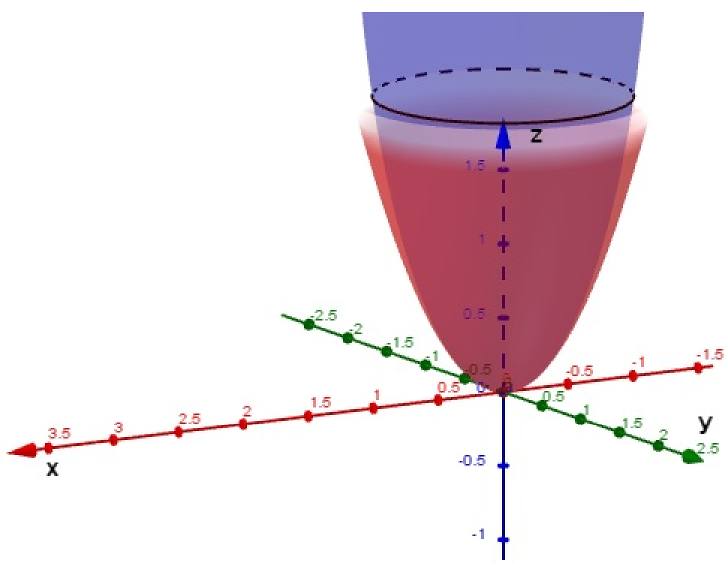

Figura 4.6: Elipsóide no interior de um Parabolóide.

Seja $r \in \mathbb{R}, r > 1$, chamemos de E_r o elipsóide

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{z}{2r} - r\right)^2 = r^2. \tag{4.20}$$

Agora, consideremos o conjunto compacto A_r dado por

$$A_r = \{(x, y, z) \in E_r; z \leq r\}.$$

É possível escrever A_r como o gráfico de uma função $f : D_0^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, onde D_0^2 é o disco fechado centrado na origem do plano $\mathbb{R}^2$ e cujo raio é r. Da Equação (4.20) podemos obter

$$f(x,y) = 2r(r - \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}).$$

Como σ é um *loop* em P, podemos escrever $\sigma(t)$ como

$$\sigma(t) = (x(t), y(t), x^2(t) + y^2(t)).$$

Agora, para todo t tome $r > x^2(t) + y^2(t)$, isso implica que o *loop*

$$\sigma_r(t) = \left(x(t), y(t), 2r\left(r - \sqrt{r^2 - (x^2(t) + y^2(t))}\right)\right),$$

é um loop em A_r. Fazendo $z(t) = 2r\left(r - \sqrt{r^2 - (x^2(t) + y^2(t))}\right)$, temos

$$x^2(t) + y^2(t) + \left(\frac{z(t)}{2r} - r\right)^2 = r^2,$$

que é o mesmo que,

$$x^2(t) + y^2(t) + \frac{z^2(t)}{4r^2} - z(t) = 0. \tag{4.21}$$

Quando $r \longrightarrow \infty$ na Equação (4.21) temos que, para todo $t \in \mathbb{S}^1$ ocorre,

$$\begin{aligned} z(t) &\longrightarrow x^2(t) + y^2(t), \\ z^{(i)}(t) &\longrightarrow (x^2(t) + y^2(t))^{(i)}, \end{aligned} \tag{4.22}$$

para qualquer $i \geq 1$. Ora, mas isso implica que,

$$\begin{aligned} |\sigma(t) - \sigma_r(t)| &< \epsilon, \\ |\sigma^{(i)}(t) - \sigma_r^{(i)}(t)| &< \epsilon, \end{aligned}$$

qualquer $i \geq 1$, e vale para cada $t \in \mathbb{S}^1$ sendo r suficientemente grande. Portanto, concluímos que, para r suficientemente grande, σ_r passa a ser um *skew loop* de classe $\mathcal{C}^\infty$ no elipsóide E_r, mas isso é um absurdo, uma vez que contraria o que provamos no *Caso 2*.■

A demonstração da implicação $2 \Longrightarrow 1$ será feita na seção 4.4 pois usa a secão a seguir.

4.3 Cilindros Convexos Assimétricos

O foco principal desta seção é demonstrar o seguinte resultado

Proposição 4.3.1 (Lema do Cilindro). *Um cilindro que tem como base uma oval $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, assimétrica e estritamente convexa, contém uma skew loop estritamente convexa.*

Para tal, definiremos uma parametrização suporte e além disso demonstraremos três lemas que utilizaremos na demonstração da Proposição 4.3.1. Antes de apresentarmos tais lemas, passamos a definir os novos conceitos que apareceram no enunciado do Lema do Cilindro.

Quando um *loop* $\mathcal{C}^\infty$, $\gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ limita um domínio convexo, dizemos que $\Gamma := \gamma(\mathbb{S}^1)$ é uma ***oval*** $\mathcal{C}^\infty$. Diremos que Γ é (centralmente) ***simétrica*** quando a reflexão por um ponto a deixa invariante. Caso contrário, diremos que Γ é ***assimétrica***. Além disso, diremos que Γ é ***estritamente convexa*** se γ é $\mathcal{C}^\infty$ e sua curvatura não se anula. O traço da curva dada pela equação

$$\gamma(t) = (-\cos(t) - \frac{1}{40}\cos 4t,\ \mathrm{sen} t + \frac{1}{10}\mathrm{sen} 2t), \tag{4.23}$$

é uma oval assimétrica e estritamente convexa, (Ver Figura 4.7).

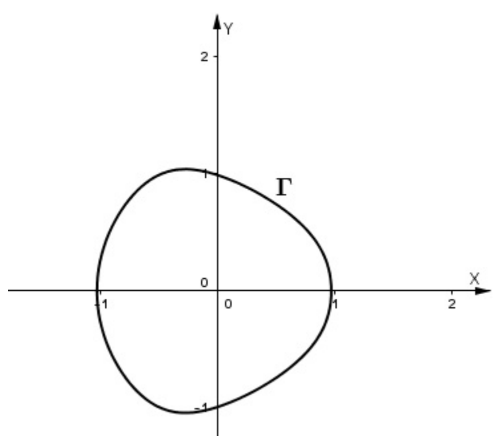

Figura 4.7: Oval assimétrica $\Gamma(t)$.

Como já mencionado, a demonstração da Proposição 4.3.1 será feita a partir de três lemas. Primeiramente, tomemos $\gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um *loop* $\mathcal{C}^\infty$ e $\Gamma = \gamma(\mathbb{S}^1)$ uma oval estritamente convexa. Existe uma bijeção n que associa a cada ponto de Γ o seu vetor unitário normal em $\mathbb{S}^1$ (veja Figura 4.8). Como $\mathbb{S}^1$ é uma curva plana simples e fechada o número de voltas (ou índice de rotação) que o vetor tangente $t(s)$ dá em $\mathbb{S}^1$ é ± 1 (veja [7], página 476), além disso, como o vetor unitário tangente $t(s)$ percorre todo $\mathbb{S}^1$, o mesmo ocorre para o vetor normal $n(s)$, e isso implica que n é sobrejetiva.

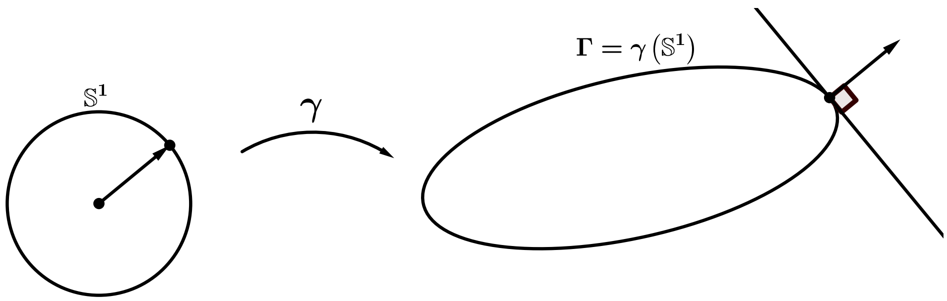

Figura 4.8: Parametrização suporte.

Agora, tomemos $\phi(s)$ o ângulo orientado que $t(s)$ faz com a parte positiva do eixo x, assim, sendo $\phi(s)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ podemos escrever

$$\begin{aligned} t(s) &= (\cos\phi(s),\ \mathrm{sen}\phi(s)), \\ n(s) &= (-\,\mathrm{sen}\phi(s), \cos\phi(s)), \\ t'(s) &= \phi'(s)(-\,\mathrm{sen}\phi(s), \cos\phi(s)). \end{aligned}$$

Mas visto que $t'(s) = k(s)n(s)$ isso implica que

$$k(s) = \langle t'(s), n(s)\rangle = \phi'(s).$$

Logo, como a curvatura de γ é não nula em todos os pontos, ocorre, para todo s, $k(s) > 0$ ou $k(s) < 0$. Suponhamos que ocorra $k(s) > 0$, temos que $\phi'(s) > 0$, assim ϕ é uma função estritamente crescente, portanto injetiva e, deste fato decorre que, $n(s)$ é injetiva, e como $|n(s)| = 1$, temos que $n(s)$ é o vetor unitário normal. Se supormos $\phi'(s) < 0$ o raciocínio é análogo e o resultado é o mesmo. Portanto, temos uma bijeção $n : \Gamma \longrightarrow \mathbb{S}^1$, ou seja, existe a inversa $n^{-1} : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \Gamma$.

Definiremos como ***parametrização suporte*** de Γ a função $\gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$\gamma(t) := n^{-1}(e^{it}). \tag{4.24}$$

Lema 4.3.1. *Seja* $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ *uma oval, estritamente convexa* $\mathcal{C}^\infty$*, com parametrização suporte* γ*. Então* $v := \|\gamma'\| \neq 0$*. E ainda,* Γ *é simétrica se, e somente se,* v *é* $\pi-$*periódica.*

Demonstração: Mostremos, primeiramente, que $v(t) \neq 0$, para todo $t \in \mathbb{S}^2$. Vamos definir uma função suporte de Γ via

$$h(t) := \langle e^{it}, \gamma(t)\rangle \tag{4.25}$$

onde $\langle a, b\rangle$ representa o produto interno usual entre a e b. Como $\{e^{it}, ie^{it}\}$ é uma base para $\mathbb{R}^2$, podemos escrever γ nessa base,

$$\gamma(t) = \langle e^{it}, \gamma(t)\rangle e^{it} + \langle ie^{it}, \gamma(t)\rangle ie^{it},$$

com isso consideremos a função $2\pi-$periódica $\mu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $\mu(t) = \langle ie^{it}, \gamma(t)\rangle$, tal que,

$$\gamma(t) = [h(t) + i\mu(t)]e^{it}. \tag{4.26}$$

Note que a função μ é $2\pi-$periódica, pois γ e h são $2\pi-$periódica.

Pela equação (4.24), podemos notar que e^{it} é normal à curva Γ em $\gamma(t)$, e com isso temos

$$\gamma'(t) = v(t)ie^{it}. \tag{4.27}$$

Agora, diferenciando (4.26) temos

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= [h'(t) + i\mu'(t)]e^{it} + i[h(t) + i\mu(t)]e^{it}\\ &= [h'(t) - \mu(t)]e^{it} + i[\mu'(t) + h(t)]e^{it},\end{aligned}$$

que comparando com (4.27) nos dá

$$v(t)ie^{it} = [h'(t) - \mu(t)]e^{it} + i[\mu'(t) + h(t)]e^{it},$$

ou seja, a parte real da equação acima deve ser 0, sendo assim $h'(t) = \mu(t)$. Além disso, se substituirmos $h'(t) = \mu(t)$ em (4.26) teremos

$$\gamma(t) = [h(t) + ih'(t)]e^{it}. \tag{4.28}$$

Como γ é $\mathcal{C}^\infty$, temos que h também é $\mathcal{C}^\infty$. Então, diferenciando (4.28) e usando (4.27) teremos

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= [h'(t) + ih''(t)]e^{it} + i[h(t) + ih'(t)]e^{it},\\ v(t)ie^{it} &= i[h(t) + h''(t)]e^{it} + h'(t)e^{it} - h'(t)e^{it},\\ v(t) &= h''(t) + h(t).\end{aligned}$$

A fórmula que fornece a curvatura de uma curva plana $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, para um parâmetro qualquer t (veja [7], página 30), é dada por

$$k(t) = \frac{-x''y' + x'y''}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}.$$

Ao associarmos $\mathbb{R}^2$ com os números complexos, podemos reescrever a fórmula da curvatura acima como

$$k := \frac{\langle \gamma'', i\gamma' \rangle}{\|\gamma'\|^3}.$$

Como γ é $\mathcal{C}^\infty$, podemos diferenciar (4.27) e obtermos

$$\gamma''(t) = v'(t)ie^{it} - v(t)e^{it}.$$

Desta forma, calculando $\langle \gamma'', i\gamma' \rangle$, obtemos

$$\begin{aligned}\langle \gamma'', i\gamma' \rangle &= \langle v'(t)ie^{it} - v(t)e^{it}, -v(t)e^{it} \rangle\\ &= -v(t)v'(t)e^{2it} + \| - v(t)e^{it}\|^2\\ &= \| - v(t)e^{it}\|^2.\end{aligned}$$

Portanto,

$$k(\gamma(t))\|v(t)\| = 1,$$

logo, $kv = 1$. Como, para todo t temos que $k(t) \neq 0$, isso implica que $v(t) \neq 0$, para todo $t \in \mathbb{S}^1$.

Passamos agora ao passo de provar a segunda parte do lema. Suponha que Γ é simétrica (veja Figura 4.9). Para provar que v é $\pi-$periódica tomemos um ponto em $\mathbb{R}^2$ tal que γ

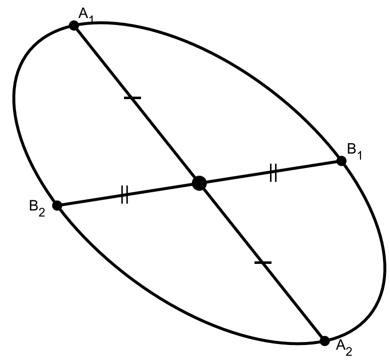

Figura 4.9: Oval simétrica.

seja invariante por reflexão, sem perda de generalidade, consideremos esse ponto como a origem num novo sistema de coordenadas.

Se reparametrizarmos γ pelo comprimento de arco s teremos $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, sendo assim, o vetor unitário normal no ponto $(x(s), y(s))$ é da forma $(-y'(s), x'(s))$. Por outro lado, o vetor unitário normal no ponto $(-x(s), -y(s))$ é da forma $(y'(s), x'(s))$. Se tomarmos $e^{it} = (-y(s), x'(s))$, onde t é uma variável dependente do parâmetro s, temos que

$$\begin{aligned} n^{-1}(e^{it}) &= (x(s), y(s)), \\ -n^{-1}(-e^{it}) &= -(-x(s), -y(s)) = (x(s), y(s)). \end{aligned}$$

Portanto, é válida a relação

$$n^{-1}(-e^{it}) = -n^{-1}(e^{it}),$$

e com isso, temos que,

$$\begin{aligned} \gamma(t + \pi) &= n^{-1}(e^{i(t+\pi)}) \\ &= n^{-1}(-e^{it}) \\ &= -n^{-1}(e^{it}) \\ &= -\gamma(t). \end{aligned}$$

Mas, visto que $h(t) = \langle e^{it}, \gamma(t)\rangle$, temos que

$$
\begin{aligned}
h(t+\pi) &= \langle e^{i(t+\pi)}, \gamma(t+\pi)\rangle \\
&= \langle -e^{it}, -\gamma(t)\rangle \\
&= h(t).
\end{aligned}
$$

Portanto, h é $\pi-$periódica e, como $v = h'' + h$, temos que v, também é π-periódica.

Reciprocamente, suponhamos que v seja $\pi-$periódica, queremos mostrar que Γ é simétrica. Para isso, expressemos v como uma série de Fourier da seguinte maneira:

$$v(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos 2kt + b_k \operatorname{sen} 2kt).$$

Como, h é $2\pi-$periódica, a série de Fourier nos dá

$$
\begin{aligned}
h(t) &= c_0 + c_1 \cos t + d_1 \operatorname{sen} t + \sum_{k=2}^{\infty}(c_k \cos kt + d_k \operatorname{sen} kt), \\
h''(t) &= -c_1 \cos t - d_1 \operatorname{sen} t - \sum_{k=2}^{\infty} k^2(c_k \cos kt + d_k \operatorname{sen} kt), \\
h(t) + h''(t) &= c_0 + \sum_{k=2}^{\infty}(1-k^2)(c_k \cos kt + d_k \operatorname{sen} kt).
\end{aligned}
$$

Sendo $h(t) + h''(t) = v(t)$, pela unicidade da série de Fourier e π-periodicidade, temos que $c_k = 0$ e $d_k = 0$, para $k = 3, 5, 7, ...$, e disto segue que

$$h(t) = c_0 + c_1 \cos t + d_1 \operatorname{sen} t + \sum_{k=2}^{\infty}(c_k \cos 2kt + d_k \operatorname{sen} 2kt).$$

Agora, seja $\lambda = (c_1, d_1)$, considere $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ onde $g(t) = h(t) - \langle e^{it}, \lambda\rangle$ disto concluímos que

$$g(t) = c_0 + \sum_{k=2}^{\infty}(c_k \cos 2kt + d_k \operatorname{sen} 2kt),$$

o que implica que g é $\pi-$periódica. No entanto, g é a função suporte de $\Gamma_g = \Gamma - \lambda$, cuja parametrização suporte é dada por $\gamma_g(t) = \gamma(t) - \lambda$.

Sendo assim, para mostrar que Γ é simétrica, basta mostrar que Γ_g é simétrica. Trocando γ e h por γ_g e g respectivamente na Equação (4.28) temos que

$$\begin{aligned}\gamma_g(t) &= (g(t)+ig'(t))e^{it},\\ \gamma_g(t+\pi) &= (g(t+\pi)+ig'(t+\pi))e^{i(t+\pi)},\\ &= -\gamma_g(t).\end{aligned}$$

Portanto, quando $\gamma_g(t)$ é um ponto em Γ_g, o ponto $-\gamma_g(t)$ também é um ponto em Γ_g, e disto, podemos concluir que Γ_g é simétrica, logo Γ também é simétrica. ■

Dada uma função $f:\mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$, chamaremos de ***parte par*** e ***parte ímpar*** as relações definidas, respectivamente, por

$$f_+(t) := \frac{f(t)+f(t+\pi)}{2}, \quad \text{e} \quad f_-(t) := \frac{f(t)-f(t+\pi)}{2},$$

identificando $\mathbb{S}^1$ com $\mathbb{R}^2/2\pi$ através de $e^{it} \leftrightarrow t$. Para qualquer função $f:\mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ é possível verificar as identidades abaixo, sem muita dificuldade,

$$\begin{aligned}f(t) &= f_+(t)+f_-(t), &(4.29)\\ f(t+\pi) &= f_+(t)-f_-(t), &(4.30)\\ f_+(t+\pi) &= f_+(t), &(4.31)\\ f_-(t+\pi) &= -f_-(t). &(4.32)\end{aligned}$$

Lema 4.3.2. *Suponha $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ uma oval $\mathcal{C}^\infty$, estritamente convexa, com parametrização suporte γ. Sejam $z:\mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, $v := \|\gamma'\|$ e $\boldsymbol{k} := (0,0,1)$. Então $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(t)+z(t)\boldsymbol{k}$ é um skew loop se, e somente se, para todo $t \in \mathbb{R}$ tem-se*

$$v_+(t)z'_+(t) - v_-(t)z'_-(t) \neq 0.$$

Além disso, $\tilde{\gamma}$ é estritamente convexa.

Demonstração: Escrevendo γ' como na equação (4.27), e usando a relação $ie^{i\tau}\times\boldsymbol{k} = e^{i\tau}$, onde $\tau \in \mathbb{R}$, e considere $e^{it} = (\cos t,\ \mathrm{sen} t, 0)$, teremos

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}'(t) \times \tilde{\gamma}'(s) &= [\gamma'(t) + z'(t)\boldsymbol{k}] \times [\gamma'(s) + z'(s)\boldsymbol{k}] \\
&= [\gamma'(t) \times \gamma'(s)] + [z'(t)\boldsymbol{k} \times \gamma'(s)] + [\gamma'(t) \times z'(s)\boldsymbol{k}] + 0 \\
&= [\gamma'(t) \times \gamma'(s)] + z'(s)\gamma'(t) \times \boldsymbol{k} - z'(t)\gamma'(s) \times \boldsymbol{k} \\
&= [v(t)e^{it} \times v(s)e^{is}] + [z'(s)\gamma'(t) - z'(t)\gamma'(s)] \times \boldsymbol{k} \\
&= v(t)v(s)e^{it} \times e^{is} + [v(t)z'(s)ie^{it} - v(s)z'(t)ie^{is}] \times \boldsymbol{k} \\
&= v(t)v(s)\,\mathrm{sen}(t-s)\boldsymbol{k} + v(t)z'(s)e^{it} - v(s)z'(t)e^{is}. \qquad (4.33)
\end{aligned}$$

A curva $\tilde{\gamma}$ é um *skew loop* quando ocorre $\tilde{\gamma}'(t) \times \tilde{\gamma}'(s) \neq 0$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$ com $s \not\equiv t \bmod 2\pi$. Ainda, a componente $\boldsymbol{k}$ é nula se, e somente se, $s \equiv (t+\pi) \bmod 2\pi$. Portanto, para que $\tilde{\gamma}$ seja um *skew loop*, devemos observar somente esses termos em (4.33), e isso implica que, $\tilde{\gamma}$ será um *skew loop* se, e somente se,

$$v(t)z'(t+\pi)e^{it} - v(t+\pi)z'(t)e^{i(t+\pi)} \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

que é o mesmo que

$$v(t)z'(t+\pi) + v(t+\pi)z'(t) \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Agora, suprimindo a variável t e aplicando as Equações (4.29) e (4.30) para v e z' obtemos:

$$(v_+ + v_-)(z'_+ - z'_-) + (v_+ - v_-)(z'_+ - z'_-) \neq 0,$$

a qual simplificando, resulta em

$$v_+(t)z'_-(t) - v_-(t)z'_-(t) \neq 0.$$

Por fim, como γ é estritamente convexa, isso implica que a curvatura k_γ é diferente de zero, ou seja, para todo $t \in \mathbb{R}$, com isso temos que $|\gamma''(t)| \neq 0$ para todo valor de $t \in \mathbb{R}$, isso ocorre pois $k_\gamma(t) = 0 \iff \gamma''(t) = 0$. Logo, sendo z de classe $\mathcal{C}^\infty$ temos que

$$\tilde{\gamma}''(t) = \gamma''(t) + z''(t)\boldsymbol{k}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Mas $\gamma''(t)$ e $z''(t)\boldsymbol{k}$ são linearmente independentes, e isso implica que $\tilde{\gamma}''(t) \neq 0$ e isso faz com que $\tilde{\gamma}$ possua curvatura não nula em todos os pontos. ■

O próximo resultado que será apresentado, nos dá uma ferramenta de suma importância para demonstrar a Proposição 4.3.1, que é o Lema do Cilindro.

Lema 4.3.3. *Sejam $e, o : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas, que são par e ímpar, respectivamente, e suponha que $e + o > 0$. Então, uma das alternativas ocorre*

(i) $o \equiv 0$, ou

(ii) é possível obter uma função $\mu : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que:

$$(1) \int_{\mathbb{S}^1} \mu = 0, \qquad (2) \quad \mu \text{ é par} \quad \text{e} \quad (3) \quad e\mu > -o^2.$$

Demonstração: Vamos assumir que $o \not\equiv 0$, e identificar $\mathbb{S}^1$ com $\mathbb{R}/2\pi$ como fizemos anteriormente. Para demonstrar o resultado, iremos construir uma função contínua $\mu : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ com:

(1') $\int_0^\pi \mu(t)dt = 0$,

(2') $\mu(\pi) = \mu(0)$,

(3') $e\mu > -o^2$ em $[0, \pi]$.

Note que a extensão par da função μ para $\mathbb{S}^1$ satisfaz claramente $(1), (2)$ e (3).

Primeiramente, observe que nossas hipóteses, implicam que $e > 0$ em $\mathbb{S}^1$, caso contrário, a paridade de e implicaria que $e \leq 0$ em um par de pontos $t, -t \in \mathbb{S}^1$, como assumimos que $e + o > 0$ em todo $\mathbb{S}^1$, isso força com que $o > 0$ em t e em $-t$ também, contradizendo o fato de o ser ímpar. Portanto, e é positiva, e assim podemos definir:

$$\tau := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{o(t)^2}{1 + e(t)} \right) dt > 0.$$

Agora, note que o conjunto de zeros da função ímpar é não vazio e além disso, é invariante com relação a uma reflexão na origem. Após uma simples rotação, podemos assumir que $o(0) = o(\pi) = 0$, e assim podemos definir a função que estamos buscando:

$$\mu(t) := \tau - \frac{o^2(t)}{1 + e(t)}.$$

Passamos então, ao passo de mostrar que μ satisfaz as condições $(1'), (2')$ e $(3')$.

Claramente μ satisfaz $(1')$, basta observar que

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \mu(t)dt &= \int_0^\pi \left(\tau - \frac{o^2(t)}{1+e(t)}\right)dt \\
&= \int_0^\pi \tau dt - \int_0^\pi \frac{o^2(t)}{1+e(t)}dt \\
&= \tau\pi - \int_0^\pi \frac{o^2(t)}{1+e(t)}dt \\
&= \int_0^\pi \frac{o(t)^2}{1+e(t)}dt - \int_0^\pi \frac{o^2(t)}{1+e(t)}dt \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Após a rotação que nos dá $o(0) = o(\pi) = 0$, teremos $\mu(0) = \mu(\pi) = \tau$, e isso nos dá $(2')$. Finalmente, usando a positividade de e e τ juntamente com a definição de μ teremos:

$$\begin{aligned}
e(t)\mu(t) &= e(t)\left(\tau - \frac{o^2(t)}{1+e(t)}\right) \\
&= e(t)\tau - \left(\frac{e(t)}{1+e(t)}\right)o^2(t) > -\left(\frac{e(t)}{1+e(t)}\right)o^2(t) > -o^2(t),
\end{aligned}$$

portanto $e(t)\mu(t) > -o^2(t)$ nos dá $(3')$, e isso prova o lema. ■

Agora, utilizando os Lemas 4.3.1, 4.3.2 e 4.3.3 iremos provar o Lema do Cilindro. Para isso iremos enunciá-lo novamente.

Proposição 4.3.1. *Um cilindro que tem como base uma oval $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, assimétrica e estritamente convexa, contém uma skew loop estritamente convexa.*

Demonstração: Pelo Lema 4.3.2 é suficiente produzirmos uma função altura $z : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que, para todo valor de $t \in \mathbb{R}$, tem-se

$$v_+(t)z'_+(t) > v_-(t)z'_-(t), \tag{4.34}$$

onde v é a velocidade da parametrização suporte de Γ. Primeiramente, notemos que a hipótese de assimetria de Γ, juntamente com o Lema 4.3.1, nos garante que v não é $\pi-$periódica, sendo assim, existe $t_0 \in \mathbb{S}^1$ tal que, $v(t_0) \neq v(t_0 + \pi)$. Ainda, como $v_-(t) = [v(t) - v(t+\pi)]/2$, a função v_- não pode ser identicamente nula.

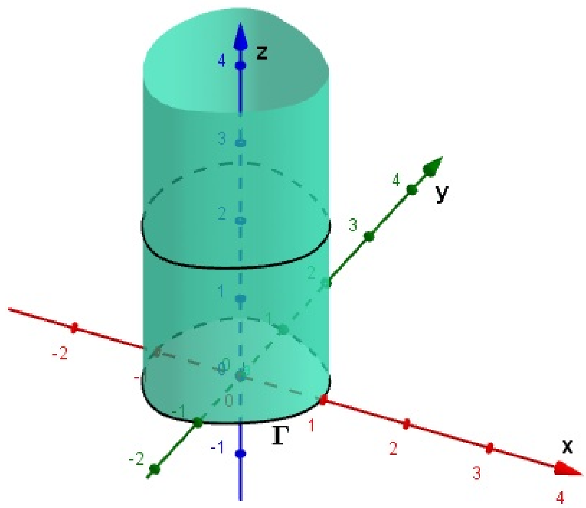

Figura 4.10: Cilindro construído a partir da oval assimétrica descrita em (4.23).

Além disso, como $v_-(t) = [v(t) - v(t+\pi)]/2$, decorre que $v_-(t) = [v(t) - v(-t)]/2$, sendo assim $v_-(t)$ é ímpar, e também é contínua, portanto possui antiderivada bem definida em $\mathbb{S}^1$. Tomemos então $z_- : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ da seguinte maneira,

$$z_-(s) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} v_-(t)dt - \int_0^{s} v_-(t)dt. \tag{4.35}$$

Afirmação: z_- é uma função ímpar. De fato,

$$\begin{aligned} z_-(s+\pi) &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} v_-(t)dt - \int_0^{s} v_-(t)dt, \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} v_-(t)dt - \int_0^{\pi} v_-(t)dt - \int_{\pi}^{\pi+s} v_-(t)dt, \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} v_-(t)dt, \end{aligned}$$

pois, visto que v_- é ímpar e contínua vale

$$\int_{\pi}^{\pi+s} v_-(t)dt = -\int_0^{s} v_-(t)dt.$$

Portanto, concluímos que

$$z_-(s+\pi) = -z_-(s),$$

ou seja,

$$z_-(-s) = -z_-(s).$$

Sabemos que z_- não é a função nula, caso contrário, se tomássemos $s = \pi$ na Equação (4.35) teríamos $\int_0^\pi v_-(t)dt = 0$, que é um absurdo, uma vez que v_- é ímpar, contínua e não é a função nula.

Agora, como $z'_-(t) = -v_-(t)$ para concluirmos a prova da proposição, basta encontrarmos uma função z'_+ que satisfaça a desigualdade

$$v_+(t)z'_+(t) > -(v_-(t))^2. \tag{4.36}$$

Ou seja, iremos construir uma função par $\mathcal{C}^\infty$, $z_+ : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ cuja derivada satisfaça (4.36). O Lema 4.3.3 nos dá exatamente isso, basta tomarmos

$$e := v_+, o := v_- \not\equiv 0, \quad \text{e} \quad z'_+ := \mu.$$

Sendo assim o Lema 4.3.1 garante que

$$e + o = v_+ + v_- = v > 0,$$

logo o Lema 4.3.3 pode ser aplicado. Portanto, as conclusões (1) e (2) nos garantem que z'_+ possui uma antiderivada par z_+ em $\mathbb{S}^1$, e a conclusão (3) está em (4.36). Então, é possível obter uma *skew loop* em um cilindro construído a partir de uma oval $\Gamma \in \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ assimétrica e estritamente convexa. ■

4.4 Quadricidade de Superfícies sem Skew Loops

Nosso intuito nessa seção, é usar a existência de *skew loops* em cilindros convexos assimétricos (Proposição 4.3.1) para restringir a simetria de superfícies sem *skew loops*.

Lema 4.4.1. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície $\mathcal{C}^\infty$ mergulhada e sem skew loops. Suponha que exista um plano $H \subset \mathbb{R}^3$ que intersecta S transversalmente ao longo de uma oval $\Gamma := S \cap H$ estritamente convexa. Então Γ é simétrica.*

Demonstração: Após um movimento rígido, podemos assumir que H coincide com o plano xy. Como S é intersectado transversalmente por H ao longo de Γ, podemos escolher

$\epsilon > 0$ suficientemente pequeno a fim de formar

$$S' := \{(x, y, z) \in S : |z| < \epsilon\}$$

um anel topológico, que é cortado transversalmente por H, onde $\partial S' \cap H = \emptyset$. Denotemos por C o cilindro, perpendicular a H, cuja base é Γ, então podemos representar S' como um gráfico sobre C, isto é, existe uma vizinhança aberta A de Γ, em C, e uma função $\mathcal{C}^\infty$ $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que, $S' = \{a + g(a)v(a) : a \in A\}$, onde v é o vetor normal externo unitário em C.

Agora, usaremos as dilatações $\mu_c : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definidas para cada $c \geq 1$ por $\mu_c(x, y, z) := (x, y, cz)$, ou seja, a alteração ocorre apenas na terceira coordenada. Através dessas dilatações podemos definir uma família 1−parâmetro de funções $\mathcal{C}^\infty$

$$g_c : A \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad g := g \circ \mu_{1/c.}$$

Note que, quando $c \longrightarrow \infty$, g_c e suas derivadas, tendem uniformemente a 0 em A. Isto decorre da continuidade de g e da regra da cadeia, além disso, por termos $g = 0$ em Γ e perto de Γ, as derivadas de g são contínuas pois S' intersecta H transversalmente.

Agora, suponha que Γ não é simétrica, sendo assim a Proposição 4.3.1 garante que existe uma *skew loop* $\gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow C$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, cuja curvatura é positiva. Após uma dilatação (encolher), podemos assumir que $\gamma(\mathbb{S}^1) \subset A$, e assim para todo $c \geq 1$, definimos um *loop* γ_c, contido na superfície dilatada $\mu_c(\mathbb{S}^1)$, através de:

$$\gamma_c(t) := \gamma(t) + g_c(\gamma(t))v(\gamma(t)).$$

Uma vez que $g_c \longrightarrow 0$ uniformemente em $\gamma(\mathbb{S}^1)$, e o mesmo ocorre para suas derivadas, quando $c \longrightarrow \infty$, isso implica que $\gamma_c \longrightarrow \gamma$ no sentido $\mathcal{C}^\infty$. Segue então, pelo Lema 3.4.1, que γ_c se torna uma *skew*. Assim, para $c > 0$ suficientemente grande, a superfície dilatada $\mu_c(S')$ admite uma *skew loop*, mas como aplicações afins levam *skew loops* em *skew loops* (Lema 3.4.1), temos que μ_c leva uma *skew loop* em outra *skew loop*, portanto podemos concluir que S' admite uma *skew loop*, mas isso é impossível por hipótese. ∎

Definição 4.4.1. *Diremos que $K \subset \mathbb{R}^3$ é um corpo convexo, se K for um subconjunto convexo, compacto cujo interior é não vazio. Além disso, diremos que dois planos P_1, P_2 estão $\epsilon-$próximos se pudermos representá-los através de equações lineares $\langle n_1, x\rangle = h_1$ e $\langle n_2, x\rangle = h_2$, com $|n_1 - n_2|^2 + |h_1 - h_2|^2 < \epsilon$ para algum $\epsilon > 0$.*

O seguinte resultado, o qual admitiremos sem prova, será essencial para a prova do Teorema 4.0.1.

Teorema 4.4.1 (Blaschke [5])**.** *Seja $K \subset \mathbb{R}^3$ um corpo convexo, cuja fronteira é $\mathcal{C}^\infty$ perto de um ponto $p \in \partial K$. Suponha que, sempre que um plano suficientemente próximo à $T_p\partial K$ intersecta K, essa intersecção com ∂K é centralmente simétrica. Então, a vizinhança de p em ∂K está contida em uma superfície quádrica.*

Com esses resultados podemos demonstrar $2 \Longrightarrow 1$ do Teorema 4.0.1.

Demonstração: da implicação $2 \Longrightarrow 1$ **do Teorema 4.0.1 [2]** Seja $X \subset M$ subconjunto aberto maximal cuja imagem $F(X)$ está contida em uma superfície quádrica descrita pelo conjunto $\phi^{-1}(0)$ onde $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\phi(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j$, onde a, b, c, d, e, f, g, h, i e j são números reais fixos com $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Como ϕ é contínua temos que $\phi^{-1}(0)$ é fechado, além disso X também é fechado, pois se $p_n \in X$, $p_n \longrightarrow p_0 \in M$. Suponha que $p_0 \notin X$, sendo assim existe uma vizinhança aberta V de $F(p_0)$ em $\mathbb{R}^3$ tal que $F^{-1}(F(X) \cup (V \cap \phi^{-1}(0)))$ é um aberto de M que contém X e $F(X) \cup (V \cap \phi^{-1}(0)) \subset \phi^{-1}(0)$. Ora, mas isto contradiz o fato de que X é maximal. Portanto $p_0 \in X$ e com isso X é fechado em M, sendo assim nos resta mostrar que X é todo o conjunto M, ou seja, $X \neq \emptyset$.

Para isso, tomemos U uma vizinhança aberta de um ponto p em M cuja curvatura é positiva. É possível escolher U tão pequeno de tal forma que $S := F(U)$ seja o gráfico de uma função no plano tangente $T_{F(p)}\partial K$. Uma vez que a curvatura é positiva em p, essa função possui Hessiana positiva definida e é, portanto, convexa.

Assim, S está contido na fronteira de um corpo convexo $K \subset \mathbb{R}^3$, e como S possui curvatura positiva em $F(p)$, o plano tangente $T_{F(p)}\partial K$ intersecta K somente em $F(p)$.

Isto nos fornece um $\epsilon > 0$, de modo que, todo plano $H \subset \mathbb{R}^3$ a uma distância ϵ de $T_{F(p)}\partial K$ satisfaça $H \cap \partial S = \emptyset$. Então, $\Gamma := H \cap \partial K$ está em S.

Sempre que a intersecção é transversal Γ é uma oval estritamente convexa de classe $\mathcal{C}^\infty$, pois S é positivamente curvada. O Lema 4.4.1 força Γ ser simétrica, mas Γ é uma seção de um corte transversal qualquer de S em p, sendo assim, pelo Teorema de Blaschke temos que uma vizinhança de p está contida em uma superfície quádrica. $\blacksquare$

Uma superfície compacta sempre tem um ponto de curvatura Gaussiana positiva, portanto temos o seguinte corolário do Teorema 4.0.1,

Corolário 4.4.1. *As únicas superfícies fechadas (compacta sem bordo), imersas em $\mathbb{R}^3$, que não admitem skew loops $\mathcal{C}^\infty$, são os elipsóides.*

Apêndice 1

Superfícies sem Skew Loops que não são Quádricas

Tome C o cilindro reto sobre a curva $y = x^3$, com $0 < x < 1$ (veja Figura 4.11). É fácil ver que C não é parte de uma quádrica, uma vez que os pontos de C satisfazem a equação $y - x^3 = 0$. Além disso, sabemos que a curvatura Gaussiana de C é identicamente nula. Podemos parametrizar C por

$$G(u, v) = (u^3, u, v),$$

onde $0 < u < 1$ e $v \in \mathbb{R}$.

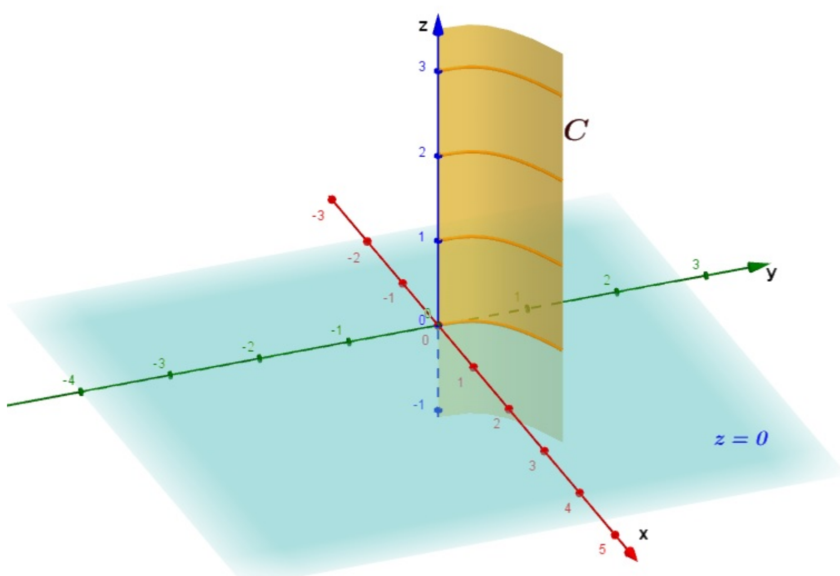

Figura 4.11: Cilindro sobre $y = x^3$, com $0 < x < 1$.

Seja $\gamma : [a, b] \longrightarrow C$ um *loop* de classe $\mathcal{C}^\infty$ sobre C, com $\gamma(a) = \gamma(b)$, $\gamma'(a) = \gamma'(b)$,

$\gamma''(a) = \gamma''(b), \ldots$ e $\gamma(t) = G(u(t), v(t))$. Vamos mostrar que γ possui pelo menos um par de vetores tangentes verticais.

Considere o vetor $e_1 = (1, 0, 0)$ e a função $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(t) = \langle \gamma(t), e_1 \rangle.$$

A função h está bem definida num compacto, portanto possui um máximo e um mínimo, nos pontos t_1 e t_2 respectivamente. Estes pontos de máximo e mínimo, podem ocorrer nos pontos a e b, pois $\gamma'(a)$ e $\gamma'(b)$ existem. Como esses pontos são pontos críticos da função h, derivando h temos

$$\langle \gamma'(t_1), e_1 \rangle \quad \text{e} \quad \langle \gamma'(t_2), e_1 \rangle.$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned} G_u &= (3u^2, 1, 0), \\ G_v &= (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Como $\gamma(t_1)$ está no plano tangente a C no ponto $G(u(t_1), v(t_1))$, temos que $\gamma(t_1)$ é combinação linear de G_u e G_v nesse ponto, ou seja,

$$\gamma'(t_1) = a(3u^2(t_1), 1, 0) + b(0, 0, 1).$$

Desde que $\gamma'(t_1)$ está no plano $x = 0$, temos que $3au^2(t_1) = 0$, e isso implica que $a = 0$ pois, da definição de C temos $u(t_1) > 0$. Sendo assim, $\gamma'(t_1)$ é um múltiplo de $(0, 0, 1)$, ou seja, $\gamma'(t_1)$ é um vetor vertical. De modo análogo prova-se que $\gamma'(t_2)$ também é um vetor vertical.

No caso em que $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$, a questão está provada. Já no caso em que $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, isso implica que h é uma função constante, e disto temos que $\langle \gamma'(t), e_1 \rangle = \lambda$, onde λ é uma constante, logo γ é um loop no plano e portanto possui tangentes paralelas.

Conclusões e Trabalhos Futuros

Nesta dissertação estudamos a relação entre *skew loops* e as superfícies quádricas, além disso mostramos que as únicas superfíciesem $\mathbb{R}^3$ com um ponto onde a curvatura Gaussiana é positiva, e que não possuem *skew loops*, são as quádricas. Em particular: os elipsóides são as únicas superfícies quádricas fechadas sem skew loops.

Como sugestão para trabalho futuro podemos citar o seguinte problema.

Quais superfícies em $\mathbb{R}^3$ possuem skew loops?

O Teorema 4.0.1 resolve esta questão para superfícies com um ponto onde a curvatura Gaussiana é positiva, assim nos resta a seguinte questão.

Problema 4.4.1. *Quais superfícies com curvatura Gaussiana negativa em todos os pontos admitem skew loops?*

Referências Bibliográficas

[1] SEGRE, B. Sulle coppie di tangenti fra ioro parallele relative ad una curve chuisa sghemba. *Hommage au Professeur Lucien Godeaux*, **141167** (1968), p. 141–167.

[2] GHOMI, M.; SOLOMON, B. Skew loops and quadric surfaces. *Commentarii Mathematici Helvetici*, **77** (2002), p. 767–782.

[3] PETTY, C. M. Ellipsoids. In: *Convexity and its applications*. Basel: Springer. p. 264–276, 1983.

[4] HEIL, E.; MARTINI, H. Special convex bodies. *Handbook of convex geometry*, **A** (1993), p. 347–385.

[5] BLASCHKE, W. Gesammelte werke. *Affine Differentialgeometrie*, **4** (1985).

[6] ARAÚJO, P. V. *Geometria Diferencial*. Rio de Janeiro: IMPA, 1998.

[7] CARMO, M. P. do. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

[8] RUDIN, W. et al. *Principles of mathematical analysis*. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 1976.

[9] SOLOMON, B. Tantrices of spherical curves. *American Mathematical Monthly*, **103** (1996), p. 30–39.

[10] NHUCH, J. A indicatriz tangente de uma curva regular fechada na esfera s^2. 2007.

[11] HIRSCH, M. W. *Differential topology*. New York, Heildelberg, Berlin: Springer-Verlag. **33**, 1976.

[12] WHITNEY, H. On regular closed curves in the plane. *Compositio Mathematica*, **4** (1937), p. 276–284.

[13] SMALE, S. Regular curves on riemannian manifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, **87** (1958), p. 492–512.

[14] WU, Y.-Q. Knots and links without parallel tangents. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **34** (2002), p. 681–690.

[15] GHOMI, M. Shadows and convexity of surfaces. *Annals of mathematics*, **155** (2002), p. 281–293.

[16] CARMO, M. P. do. *Geometria Riemanniana*. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[17] WHITE, J. H. Global properties of immersions into euclidean spheres. *Indiana University Mathematics Journal*, **20** (1971), p. 1187.