

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA ELÉTRICA

Princípio de Recuperação da Malha Objetivo Aplicado ao
Controle LQG/LTR em Sistemas de Fase Não-Mínima

Cleverson Faria de Oliveira

Itajubá, Janeiro de 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA ELÉTRICA

Princípio de Recuperação da Malha Objetivo Aplicado ao Controle LQG/LTR em Sistemas de Fase Não-Mínima

Cleverson Faria de Oliveira

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Elétrica como parte dos requisitos para obtenção
do Título de Mestre em Ciência em Engenharia Elétrica

Área de Concentração: Automação e Sistemas Elétri-
cos Industriais

Orientador: Prof. Dr. Luís Henrique de Carvalho Fer-
reira

Coorientador: Prof. Dr. Fernando Henrique Duarte Guaracy

Janeiro de 2017
Itajubá - MG

Este trabalho é dedicado aos meus pais, Francisco e Eliane, a minha esposa Danúbia e aos amigos que durante os trabalhos estiveram sempre presentes em todos os momentos.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus pelas oportunidades que obtive e que me permitiram chegar onde estou.

Aos meus pais e a minha esposa pelo suporte, paciência e dedicação que tiveram para proporcionar as condições necessárias para mais uma conquista.

Aos professores Luís Henrique e Fernando Henrique pelo apoio, amizade, dedicação e ajuda ao longo do desenvolvimento do trabalho.

Aos colegas de trabalho pela ajuda nos diversos desafios.

A FAPEMIG pelo apoio financeiro para desenvolvimento deste trabalho.

Ao Grupo de Microeletrônica pelo acolhimento.

A todos que, de forma direta ou indireta, contribuíram para a realização deste trabalho.

*"Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito.
Não sou o que deveria ser, mas Graças a Deus, não sou o que era antes."*

Marthin Luther King

Resumo

Este trabalho tem por objetivo apresentar uma abordagem sobre o comportamento do Princípio de Recuperação da Malha Objetivo em sistemas de fase não-mínima na síntese LQG. O Princípio de Recuperação da Malha Objetivo é uma abordagem que visa recuperar as propriedades de robustez do Regulador Linear Quadrático ou do Filtro de Kalman-Bucy para a síntese de controladores LQG, onde consolidou-se o controlador LQG/LTR.

Neste trabalho será mostrado que, expandindo-se o sistema através de integradores e fazendo-se as devidas escolhas dos parâmetros de projeto, o formato exato dos valores singulares da malha fechada pode ser determinado. Serão investigados os limites de desempenho impostos pelo zero de fase não-mínima. Aplicações do controle LQG/LTR em um exemplo numérico e também em um modelo de uma planta real, ambos com um zero de fase não-mínima, serão apresentadas. Estas aplicações tem por objetivo comprovar a influência dos parâmetros de projeto sobre o desempenho do sistema em questão e sobre o comportamento do sistema quando se faz as devidas alterações nestes parâmetros.

Palavras-chaves: Controle LQG/LTR em tempo contínuo e discreto, Sistema de Fase Não-Mínima, Controle Robusto, Limites de Desempenho.

Abstract

This work presents a new approach on the behavior of Loop Transfer Recovery Principle in nonminimum phase systems on LQG synthesis. Loop Transfer Recovery Principle is an approach that aims to recover the robust properties of Linear Quadratic Regulator or Kalman-Bucy Filter to LQG controllers synthesis, known as LQG/LTR controller.

In this work it will be shown that with a system augmented by integrators and specific choices of design parameters the exact shape of feedback loop singular values and the performance bounds imposed by nonminimum phase zero can be known. It will be presented an application of LQG/LTR methodology in a numeric example and in a model of a real plant system, both with one nonminimum phase zero, to prove the influence of design parameters on system bounds and the behavior of maximum peak values of system outputs when certain changes are made on these parameters.

Key-words: Discrete and Continuous-time LQG/LTR Control, Nonminimum Phase System, Robust Control, Performance Bounds

Lista de ilustrações

Figura 1 – Sistema de malha fechada.	18
Figura 2 – Diagrama de blocos geral.	23
Figura 3 – Planta expandida pela entrada.	26
Figura 4 – Sistema de malha fechada.	34
Figura 5 – Valores singulares do exemplo numérico em malha aberta.	41
Figura 6 – Resposta ao degrau aplicado a primeira entrada do exemplo numérico.	41
Figura 7 – Resposta ao degrau aplicado a segunda entrada do exemplo numérico.	42
Figura 8 – Resposta ao degrau aplicado às entradas da malha objetivo do exemplo numérico.	43
Figura 9 – Resposta ao degrau aplicado às entradas do observador e do exemplo numérico.	43
Figura 10 – Valores singulares da sensibilidade do exemplo numérico.	44
Figura 11 – Valores singulares da função de sensibilidade complementar do exemplo numérico.	44
Figura 12 – Resposta ao degrau aplicado a primeira entrada da malha compensada.	45
Figura 13 – Resposta ao degrau aplicado a segunda entrada da malha compensada.	45
Figura 14 – Valores singulares do exemplo numérico discreto em malha aberta.	46
Figura 15 – Resposta ao degrau aplicado às entradas da malha objetivo discreta.	48
Figura 16 – Resposta ao degrau aplicado às entradas do observador e da malha de controle do exemplo numérico.	48
Figura 17 – Valores singulares da sensibilidade do exemplo numérico.	49
Figura 18 – Valores singulares da função de sensibilidade do exemplo numérico.	49
Figura 19 – Resposta ao degrau aplicado a primeira entrada do exemplo numérico discreto compensado.	50
Figura 20 – Resposta ao degrau aplicado a segunda entrada do exemplo numérico discreto compensado.	50
Figura 21 – Valores singulares do modelo AH-64 em malha aberta.	52
Figura 22 – Resposta ao degrau aplicado a primeira entrada do modelo AH-64.	52
Figura 23 – Resposta ao degrau aplicado a segunda entrada do modelo AH-64.	53
Figura 24 – Resposta ao degrau aplicado às entradas da malha objetivo.	53
Figura 25 – Resposta ao degrau aplicado às entradas do observador e da malha de controle.	54
Figura 26 – Valores singulares da sensibilidade da malha de controle.	55
Figura 27 – Valores singulares da função de sensibilidade complementar da malha de controle.	55
Figura 28 – Resposta ao degrau aplicado a primeira entrada da malha compensada.	56

Figura 29 – Resposta ao degrau aplicado a segunda entrada da malha compensada.	56
Figura 30 – Valores singulares da função de sensibilidade da malha de controle discreta.	57
Figura 31 – Resposta ao degrau aplicado às entradas da malha objetivo discreta.	58
Figura 32 – Resposta ao degrau aplicado às entradas do observador e da malha de controle discretos.	59
Figura 33 – Valores singulares da sensibilidade da malha discreta de controle. . .	60
Figura 34 – Valores singulares da função de sensibilidade complementar da malha discreta de controle.	60
Figura 35 – Resposta ao degrau aplicado a primeira entrada da malha discreta compensada.	61
Figura 36 – Resposta ao degrau aplicado a segunda entrada da malha discreta compensada.	61

Lista de tabelas

Tabela 1 – Polos e zero do exemplo numérico.	40
Tabela 2 – Polos e zeros do exemplo numérico discreto.	46
Tabela 3 – Polos e zero do modelo AH-64.	51
Tabela 4 – Polos e zero do modelo AH-64 discreto.	56

Lista de abreviaturas e siglas

EAR	Equação Algébrica de Riccati
EARG	Equação Algébrica de Riccati Generalizada
LQG	Linear Quadratic Gaussian
LQR	Linear Quadratic Regulator
LTR	Loop Transfer recovery
PRMO	Princípio de Recuperação da Malha Objetivo
LITDF	Linear, invariante no tempo e de dimensão finita
SPD	Semiplano direito
SISO	Single input single output
MIMO	Multiple input multiple output

Lista de símbolos

\mathcal{H}_∞	Norma \mathcal{H}_∞
\mathcal{H}_2	Norma \mathcal{H}_2
P	Planta Generalizada
A, B, C, D	Matrizes da representação em espaço de estado da planta G
'	Matriz Transposta
*	Matriz Complexo-conjugada Transposta
\triangleq	Igual por Definição
$:=$	Definição
$\stackrel{s}{=}$	Conversão da representação de um modelo em variáveis de estado para função de transferência no tempo contínuo
$\stackrel{z}{=}$	Conversão da representação de um modelo em variáveis de estado para função de transferência no tempo discreto
T	Período de Amostragem
\max	Máximo
\min	Mínimo
I	Matriz identidade
G	Planta de processo (planta a ser controlada)
K	Controlador
N	Vetor de ruídos de medição
R	Vetor de entradas de referência
E	Vetor de erros de rastreamento
D	Vetor de distúrbios
Y	Vetor de saídas
u	Vetor de entradas da planta

x	Vetor de estados de um sistema dinâmico
w	Vetor de perturbações
z	Vetor de saídas auxiliares
L_O	Função da malha aberta vista na saída da planta
L_I	Função da malha aberta vista na entrada da planta
S_O	Função de sensibilidade na saída
S_I	Função de sensibilidade na entrada
\mathcal{T}_O	Função de sensibilidade complementar na saída
\mathcal{T}_I	Função de sensibilidade complementar na entrada
K_C	Matriz de ganhos do regulador de estados
K_F	Matriz de ganhos do observador de estados
X	Solução da Equação Algébrica de Riccati associada ao regulador de estados
Y	Solução da Equação Algébrica de Riccati associada ao observador de estados
\mathcal{T}_{zw}	Matriz de malha fechada que relaciona a saída z à entrada w
σ	Valor singular de uma matriz
W_P	Função de ponderação sobre a sensibilidade

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Considerações Iniciais	15
1.2	Justificativas	16
1.3	Objetivos	17
1.4	Organização do Trabalho	17
2	CONTROLE LQG/LTR EM TEMPO CONTÍNUO E EM TEMPO DISCRETO	18
2.1	Controle Multivariável	18
2.2	A Planta em Variáveis de Estado	21
2.3	Controle LQG	22
2.3.1	Otimização \mathcal{H}_2	23
2.4	Controle LQG/LTR no tempo contínuo	24
2.4.1	A Escolha da Matriz L em Tempo Contínuo	26
2.5	Controle LQG/LTR em Tempo Discreto	28
2.5.1	A Escolha da Matriz L em Tempo Discreto	30
3	PARAMETRIZAÇÃO PARA SISTEMAS DE FASE NÃO-MÍNIMA	33
3.1	Considerações Gerais	33
3.2	Controle LQG/LTR	33
3.2.1	Domínio do Tempo Contínuo	36
3.2.2	Domínio do Tempo Discreto	37
4	EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	40
4.1	Exemplo Numérico no Tempo Contínuo	40
4.1.1	Definição da Malha Objetivo	40
4.1.2	A Recuperação da Malha Objetivo	42
4.1.3	Controle LQG/LTR	43
4.2	Exemplo Numérico no Tempo Discreto	46
4.2.1	Definição da Malha Objetivo	47
4.2.2	A Recuperação da Malha Objetivo	47
4.2.3	Controle LQG/LTR	47
4.3	Helicóptero AH-64 no Tempo Contínuo	50
4.3.1	Definição da Malha Objetivo	51
4.3.2	A Recuperação da Malha Objetivo	53
4.3.3	Controle LQG/LTR	54

4.4	Helicóptero AH-64 no Tempo Discreto	55
4.4.1	Definição da Malha Objetivo	57
4.4.2	A Recuperação da Malha Objetivo	58
4.4.3	Controle LQG/LTR	59
5	CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS	62
	REFERÊNCIAS	63

1 Introdução

1.1 Considerações Iniciais

Na década de 1940 vários métodos de controle foram desenvolvidos, principalmente os relacionados aos métodos baseados em análise do diagrama de Bode (1). No final desta década Evans divulgou o método de controle por lugar das raízes, uma nova metodologia para a síntese de controladores (2). Essas técnicas, aliadas às regras criadas por Ziegler e Nichols para ajuste empírico de controladores PID, permitiram ampla utilização desses controladores no meio industrial (3). Mas do ponto de vista de robustez, os métodos clássicos eram limitados.

Sistemas de controle baseados em resposta em frequência e lugar das raízes possuem bons rendimentos, porém, não são ótimos no sentido estrito desse termo (4). Então, por conta disto, desde o final da década de 1950, a ênfase no projeto de sistemas de controle foi alterada de um sistema funcional para um sistema ótimo em algum ponto relevante para o projetista, o que levou à inserção de métodos de variáveis de estado com retroação de estados, estimadores de estados e os sistemas de controle ótimo que ficaram conhecidos como teoria de controle moderno.

O controle ótimo teve seu início na década de 1940, desenvolvendo-se de forma intensa até a década de 1960 com o controle LQG – Linear Quadratic Gaussian. O controle LQG se baseia na combinação de um regulador LQR – Linear Quadratic Regulator e um observador de estados chamado Filtro de Kalman, o controle LQG foi muito utilizado nos programas aeroespaciais, em aplicações aeronáuticas e problemas de minimização. O LQR e o Filtro de Kalman são robustos quando analisados separadamente, porém, combinados no controle LQG, essas propriedades não são recuperadas. O controle robusto considera que há uma diferença entre o modelo matemático da planta (processo a ser controlado) e o modelo matemático real da planta. Então requisitos de estabilidade e desempenho do sistema de controle devem ser mantidos em face às incertezas no modelo da planta (5).

A falha no quesito de robustez gerou a necessidade de um estudo mais aprofundado do controlador LQG nas décadas de 1970 e 1980, e com isso foi proposto então o Princípio de Recuperação da Malha Objetivo, ou LTR - Loop Transfer Recovery. O procedimento LTR, que teve seu início com Doyle e Stein (6) baseados nas idéias de Kwakernaak e Sivan (7), recupera a robustez do controlador LQG levando a uma melhor formatação da malha objetivo e, além de fornecer boas características de robustez e sensibilidade, simplifica o projeto LQG, porque a aplicação do controle LQG/LTR pre-

cisa apenas da especificação do regulador, se aplicado pela entrada, ou do observador, se aplicado pela saída.

Para o procedimento LTR, um bom desempenho se traduz numa malha objetivo satisfatória, obtida a partir de uma função sensibilidade com comportamento de um sistema de primeira ordem, com polo finito-real ou até mesmo na origem. Baseado nesses conceitos, na década de 1980, Athans (8) propôs como escolher os parâmetros no controle LQG/LTR a fim de que os valores singulares da sensibilidade e da sensibilidade complementar tivessem os formatos desejados em frequências extremas. A procedência dos resultados de Athans pode ser verificada em (8), (9) e (10). Nesse mesmo âmbito de análise em (11) foi realizada a generalização da expansão de uma planta por qualquer polo real-finito estável.

Baseados nos resultados de Stein e Athans (12), Zhang e Freudenberg (9) apresentaram a aplicação do controle LQG/LTR a uma classe de sistemas de fase não-mínima através da expansão da planta por integradores e a escolha específica de parâmetros de projeto.

1.2 Justificativas

O procedimento LTR proposto por Doyle e Stein (13), (6), provou ser um método efetivo para projeto de sistemas escalares e multivariáveis (14), (15), pois permite o projeto da malha objetivo com especificações desejadas de robustez e estabilidade através da escolha específica de parâmetros e ganho do observador. Mas, como o processo de recuperação depende da inversa da planta (12), (6) é necessário que esta planta seja de fase mínima. Como a presença de sistemas com zeros de fase não-mínima é bastante frequente, a questão da fase não-mínima representa um limitador para a aplicação da metodologia ((16), (17)).

Vários autores já discutiram sobre o efeito dos zeros de fase não-mínima sobre o procedimento LTR. Os autores de (18) propuseram um procedimento para recuperar as propriedades da malha, para uma classe de controladores, por realimentação de estados que realimentam apenas os "estados de fase-mínima" (*all pass minimum phase*). Já Stein e Athans (12) propõem diversas abordagens para estes problemas, entre os quais está a incorporação dos efeitos dos zeros de transmissão no SPD como uma restrição na otimização \mathcal{H}_2 . Em (8) é sugerido que é possível obter recuperação da malha em direções ortogonais às dos zeros de transmissão no SPD.

1.3 Objetivos

Em (9) um procedimento sistemático de recuperação da malha objetivo para sistemas de fase não-mínima é apresentado, o qual consiste em fatorar o modelo da planta em uma parte de fase-mínima com um fator "passa tudo" (*all pass*) estável que contém os zeros de transmissão no SPD. Com isso, concluíram que a qualidade da recuperação ficará em função do erro provocado na frequência do zero.

Utilizando-se dos resultados obtidos em (9), este trabalho tem como objetivo analisar a aplicação da metodologia LQG em sistemas de fase não-mínima a fim de avaliar o comportamento e o formato dos valores singulares da função sensibilidade, sensibilidade complementar bem como do erro, provocado em função do zero de fase não-mínima. A avaliação do comportamento do sistema será feita através da comparação dos limites de desempenho das funções sensibilidade do sistema controlado com o formato exato dos limitantes de desempenho (equações), proposto por este trabalho.

1.4 Organização do Trabalho

Este trabalho está organizado em cinco capítulos, sendo um de introdução, um de conclusão e trabalhos futuros e os demais referentes ao desenvolvimento do trabalho.

O segundo capítulo traz uma revisão acerca da teoria do controle LQG, apresentando suas principais características, propriedades e implicações; trata ainda da planta generalizada P utilizada para o caso LQG. Além disso, apresenta o Princípio de Recuperação da Malha para o controlador LQG/LTR no tempo contínuo e discreto.

O terceiro capítulo trata da aplicação do controle LQG/LTR sobre um sistema com um zero de fase não-mínima, onde serão feitas abordagens a respeito dos limites de desempenho do sistema, análise do valor singular das funções sensibilidade e sensibilidade complementar bem como a influência de parâmetros de projeto sobre o comportamento do sistema. O quarto capítulo apresenta uma simulação de um exemplo numérico e do modelo de uma planta do helicóptero AH-64. O quinto capítulo é dedicado às conclusões e trabalhos futuros.

2 Controle LQG/LTR em Tempo Contínuo e em Tempo Discreto

Neste capítulo será feita uma breve revisão teórica a respeito do controle multivariável e do controle LQG/LTR em tempo contínuo e em tempo discreto, onde serão elencados resultados e conceitos provenientes de trabalhos já finalizados ((19), (20), (11)).

2.1 Controle Multivariável

Considere o diagrama de blocos de uma malha de controle com realimentação negativa e unitária, representado na Figura 1.

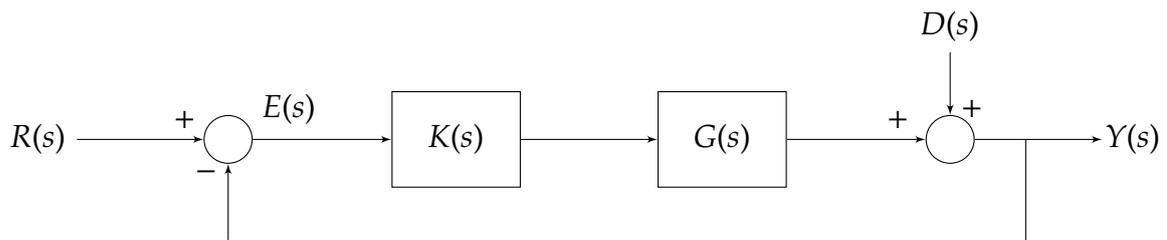


Figura 1 – Sistema de malha fechada.

Os sinais e sistemas presentes no diagrama, são:

- $G(s)$ planta linear, LITDF e com dimensão m ;
- $K(s)$ matriz de transferência do controlador, também LITDF e dimensão m ;
- $R(s)$ vetor de entradas de referência;
- $E(s)$ vetor de erros de rastreamento;
- $Y(s)$ vetor de saída da planta;
- $D(s)$ vetor de distúrbios refletidos na saída da planta.

A planta considerada é multivariável de múltiplas entradas, múltiplas saídas e é quadrada, ou seja, possui o mesmo número de entradas e saídas. O projeto de um controlador abrange a necessidade de se incluir requisitos como estabilidade, desempenho e robustez. A estabilidade estabelece que as saídas não podem ir ao infinito

quando o sistema é submetido a uma excitação finita. Um conceito mais amplo de estabilidade, conhecido como estabilidade interna, requer que, além da saída, outras variáveis internas, como o sinal gerado pelo controlador e o erro, devem ser levadas em consideração. O desempenho garante que os erros de rastreamento devem permanecer pequenos em magnitude em virtude da presença das entradas de referência, das entradas de distúrbios e dos ruídos de medição. A robustez assegura a estabilidade e o desempenho frente às incertezas no modelo deste processo ou dos sinais forçantes.

A matriz de transferência da malha aberta $L_O(s)$, ou matriz de transferência vista pela saída é dada por

$$L_O(s) \triangleq G(s)K(s) \quad (2.1)$$

A matriz de transferência da malha aberta $L_I(s)$, ou matriz de transferência vista pela entrada é dada por

$$L_I(s) \triangleq K(s)G(s) \quad (2.2)$$

A partir dessas malhas abertas podem-se definir as seguintes matrizes de transferência em malha fechada:

- Matriz de transferência sensibilidade na saída

$$S_O(s) \triangleq (I + L_O(s))^{-1} \quad (2.3)$$

- Matriz de transferência sensibilidade complementar (ou rastreamento) na saída

$$\mathcal{T}_O(s) \triangleq L_O(s)(I + L_O(s))^{-1} = (I + L_O(s))^{-1}L_O(s) \quad (2.4)$$

- Matriz de transferência sensibilidade na entrada

$$S_I(s) \triangleq (I + L_I(s))^{-1} \quad (2.5)$$

- Matriz de transferência sensibilidade complementar (ou rastreamento) na entrada

$$\mathcal{T}_I(s) \triangleq L_I(s)(I + L_I(s))^{-1} = (I + L_I(s))^{-1}L_I(s) \quad (2.6)$$

O termo complementar da função \mathcal{T} deve-se ao fato de que $S + \mathcal{T} = I$. A função de sensibilidade complementar permite a avaliação do sistema do ponto de vista do rastreamento do sinal de referência, já a função de sensibilidade avalia o sistema do ponto de vista de rejeição a distúrbios. O processo de formação de matrizes de transferência em malha fechada objetiva minimizar cada matriz de transferência

em malha fechada, na faixa de frequência onde a perturbação externa relacionada diretamente a ela é mais crítica.

Observando-se a Figura 1 obtém-se para a equação da saída

$$Y(s) = \mathcal{T}(s)R(s) + \mathcal{S}(s)D(s) - \mathcal{T}(s)N(s) \quad (2.7)$$

em que $N(s)$ é o ruído de medição que incide na saída do sistema.

É desejável que a saída rastreie com perfeição a entrada de referência, ou seja, $y = r$. Para isso, é necessário que $\mathcal{T}(s) \rightarrow 1$. Também é desejável que a saída rejeite os distúrbios, e para isso é necessário que $\mathcal{S}(s) \rightarrow 0$. Uma vez que

$$\mathcal{S}(s) + \mathcal{T}(s) = 1 \quad (2.8)$$

então se a magnitude de $L(s)$ for grande, a magnitude de $\mathcal{S}(s)$ será pequena e a magnitude de $\mathcal{T}(s)$ será próxima a unidade. Para que o ruído não apareça na saída, é necessário que $\mathcal{T} \rightarrow 0$, ou seja, a magnitude de L seja pequena. Felizmente, as frequências nas quais a magnitude de $L(s)$ deve ser feita grande ou pequena são diferentes. Nos limites da magnitude de $L(s)$, ou seja, magnitude de $L(s)$ muito grande ou muito pequena, as seguintes aproximações, no caso de sistemas SISO, são válidas (5):

$$|L(j\omega)| \gg 1 \Rightarrow \mathcal{S}(j\omega) \approx L^{-1}(j\omega) \text{ e } \mathcal{T}(j\omega) \approx 1 \quad (2.9)$$

$$|L(j\omega)| \ll 1 \Rightarrow \mathcal{S}(j\omega) \approx 1 \text{ e } \mathcal{T}(j\omega) \approx L(j\omega) \quad (2.10)$$

No entanto, nas frequências onde a magnitude de $L(s)$ é intermediária, como, por exemplo, perto da frequência de cruzamento de ganho (em sistemas SISO), as magnitudes de $\mathcal{S}(s)$ e $\mathcal{T}(s)$ não podem ser inferidas a partir da magnitude de $L(s)$. Uma estratégia para isso é dar forma diretamente às funções de malha fechada e não à malha aberta $L(s)$. Então o processo em geral envolve escolher uma função de ponderação $W_p(s)$ de forma que

$$|\mathcal{S}(j\omega)| < \frac{1}{|W_p(j\omega)|} \quad (2.11)$$

$$|\mathcal{S}(j\omega)W_p(j\omega)| < 1, \quad (2.12)$$

para $\omega \in [0, \infty)$.

No entanto, em muitos problemas de controle a serem considerados, dar forma somente à sensibilidade não é suficiente, pois outros requisitos como redução da ultra-

passagem máxima, diminuição da taxa de atenuação em altas frequências ou limitação dos sinais de controle podem ser desejados.

2.2 A Planta em Variáveis de Estado

Considere o sistema dinâmico linear invariante no tempo representado em variáveis de estado de uma planta P real-racional e própria,

$$P := \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Lw_x(t) \\ z_x(t) = Hx(t) \\ z_u(t) = \rho Iu(t) \\ y(t) = Cx(t) + \mu Iw_y(t) \end{cases} \quad (2.13)$$

na qual x é o vetor de estados, u é o vetor das entradas manipuladas de dimensão p e y é o vetor das saídas medidas, w_x e w_y estão relacionados às entradas exógenas e z_x e z_u estão relacionados às respostas auxiliares. Todas as matrizes utilizadas em (2.13) possuem dimensões compatíveis.

As matrizes A , B e C formam a representação em variáveis de estado do que é conhecido como planta de processo G_p , como mostrado a seguir

$$G_p(s) := \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right]. \quad (2.14)$$

Convertendo-se a representação em variáveis de estado em (2.14) em uma representação em matriz de transferência, tem-se

$$G_p(s) = C\phi(s)B \quad (2.15)$$

em que

$$\phi(s) = (sI - A)^{-1}. \quad (2.16)$$

De acordo com as dimensões de A , B e C e as equações (2.14) e (2.15), pode-se inferir que a planta G_p possui n estados, m saídas e m entradas sendo $G_p(s)$, portanto, uma matriz de transferência composta por $m \times n$ funções de transferência com n polos

multivariáveis.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z_x \\ z_u \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & L & 0 & B \\ H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho I \\ C & 0 & \mu I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w_x \\ w_y \\ u \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Em aplicações típicas do controle LQG, sob o ponto de vista de controle ótimo estocástico, os parâmetros μ , ρ , L e H possuem interpretação física clara. A matriz H está correlacionada com a dinâmica da malha, o escalar ρ com o consumo de energia e L e μ estão correlacionados com propriedades estatísticas dos ruídos de processo e medição, respectivamente.

2.3 Controle LQG

Em aplicações típicas do controle LQG, sob o ponto de vista do controle ótimo, os parâmetros H , ρ , L e μ estão correlacionados com a dinâmica da malha. Portanto, a solução ótima fornece os ganhos do regulador e do observador baseados nas interpretações físicas destes parâmetros (20).

O controlador LQG consiste na combinação de um controle ótimo, chamado de LQR e um observador de estados conhecido como Filtro de Kalman. O primeiro possui o objetivo de minimizar uma função de custo que apresenta duas matrizes de ponderação (uma visando o gasto de energia R e a outra a dinâmica do sistema Q). Essa metodologia, em sistemas SISO, tem como vantagem a característica de possuir margem de ganho situada entre 6 [dB] e ∞ [dB] e, margem de fase igual a 60° (21), as quais são consideradas como boas propriedades garantidoras de robustez (em termos de margens de estabilidade). Entretanto, as desvantagens apresentadas são em relação à necessidade de que não haja ruídos e perturbações no sistema e a acessibilidade dos estados para medições para realimentação do sinal de controle. Já o Filtro de Kalman fornece um processo eficiente na estimação de estados quando do acoplamento de ruídos tanto na entrada como na saída do sistema.

Assim, chegou-se à conclusão de que se ambas as metodologias fossem combinadas para dar origem ao controlador LQG, as desvantagens do LQR seriam superadas, pois o Filtro de Kalman poderia estimar os estados para serem utilizados na realimentação da malha de controle e ainda rejeitar os distúrbios inseridos no sistema. Porém, quando essas duas metodologias foram combinadas no controle LQG, constatou-se que as propriedades de robustez não eram garantidas, pois a inclusão do Filtro de Kalman poderia resultar na degradação das propriedades do LQR (13). Por esse motivo, Kwa-

kernaak (22) e Doyle e Stein (23) propuseram o Princípio de Recuperação da Malha Objetivo.

Segundo Zames (24), a falta de robustez do controle LQG pode ser atribuída ao critério integral quadrático da norma \mathcal{H}_2 e a representação dos distúrbios como ruídos brancos. Em 1989, Doyle et. al. (25) consagraram as soluções para o controle \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ no espaço de estados.

Dentre as diversas formas de se formular um problema de controle a ser descrito na forma de otimização via \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ , o caso mais geral é o de Realimentação da Saída. O diagrama de blocos geral de um sistema de controle para o problema denominado realimentação da saída é o visto na Figura 2.

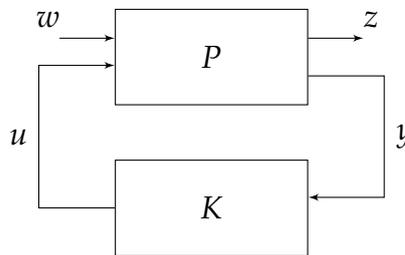


Figura 2 – Diagrama de blocos geral.

Na Figura 2, o bloco P representa a planta generalizada, real-racional e própria, que inclui a planta de processo G e todas as funções de ponderação acerca dela. O bloco K representa o controlador, real-racional e próprio. A matriz de transferência resultante de w para z é denotada por \mathcal{T}_{zw} e é obtida através de uma transformação linear fracional inferior (5). O problema de controle então passa a ser o de como encontrar um controlador K que, baseado nas informações do vetor y , diminua a influência do vetor w em z através da minimização de uma norma da matriz de malha fechada \mathcal{T}_{zw} .

2.3.1 Otimização \mathcal{H}_2

Uma maneira adotada para realizar a minimização de \mathcal{T}_{zw} foi a norma \mathcal{H}_2 , definida conforme Doyle (25) como

$$\|\mathcal{T}_{zw}(s)\|_2 := \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}(\mathcal{T}_{zw}^*(j\omega)\mathcal{T}_{zw}(j\omega))} \quad (2.18)$$

Para o caso \mathcal{H}_2 , uma representação em variáveis de estado para o controlador K é dada por

$$K := \left[\begin{array}{c|c} A - BK_C - K_F C & K_F \\ \hline K_C & 0 \end{array} \right], \quad (2.19)$$

em que

$$K_C = \rho^{-2} B' X \quad (2.20a)$$

$$K_F = \mu^{-2} Y C' \quad (2.20b)$$

sendo K_C e K_F , respectivamente os ganhos da retroação de estados e do observador de estados; e X e Y , respectivamente, as matrizes simétricas das soluções da retroação de estados e do observador de estados dadas pelas Equações Algébricas de Riccati (EAR)

$$A' X + X A - \rho^{-2} X B B' X + H' H = 0 \quad (2.21a)$$

$$Y A' + A Y - \mu^{-2} Y C' C Y + L L' = 0 \quad (2.21b)$$

As condições para a existência do controlador em (2.19) são que as matrizes simétricas X e Y sejam positivas semidefinidas (25).

2.4 Controle LQG/LTR no tempo contínuo

Considere a planta descrita em (2.13). A matriz de transferência do controlador LQG, aplicado a esta planta é dada por (8)

$$K(s) = K_c (sI - A + B K_c + K_F C)^{-1} K_F, \quad (2.22)$$

O controlador LQG existe, e é único, se as matrizes X e Y forem positivas semidefinidas e se os pares (A, B) e (A, L) forem estabilizáveis e os pares (C, A) e (H, A) forem detectáveis.

Sabe-se que, isoladamente, o Regulador Linear Quadrático e o Filtro de Kalman-Bucy possuem boas propriedades garantidas de robustez. No entanto, para o controle LQG tais propriedades não são garantidas. De fato, Doyle (26) mostrou através de um contraexemplo que as características de robustez não são garantidas para qualquer controlador LQG.

Em 1972, Kwakernaak e Sivan (7) motivados a estudar qual era a “máxima precisão alcançável” de reguladores lineares ótimos sem limitação na entrada (ou seja, $\rho \rightarrow 0^+$), mostraram que, para um sistema dinâmico LITDF com função de custo quadrática do tipo

$$0 \leq \min_u \int_0^\infty (z_x' z_x + \rho u' u) dt = x'(0) X x(0), \quad (2.23)$$

o custo tende a zero para qualquer $x(0)$ quando ρ tende a zero pela direita se $\dim(z_x) = \dim(u)$ e $H\Phi(s)B$ não possui zeros de transmissão no SPD, e quando isto ocorre

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} X = 0 \quad (2.24)$$

Este comportamento assintótico da solução da EAR para o regulador de estados LQG desencadeou uma teoria que é conhecida como Princípio de Recuperação da Malha Objetivo (*Loop Transfer Recovery*). Primeiramente proposto por Doyle e Stein (23) e consagrado por Stein e Athans (12), o Princípio de Recuperação da Malha Objetivo diz que, quando ρ tende a zero pela direita e o parâmetro de projeto H for feito igual a B , o controlador em (2.22) tende a

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} K(s) = (C\Phi(s)B)^{-1}C\Phi(s)K_F \quad (2.25)$$

Isto significa dizer que a matriz de transferência da malha aberta $L_O(s)$ tende a

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} G(s)K(s) = C\Phi(s)K_F \quad (2.26)$$

que é a própria matriz de transferência do observador de estados (Filtro de Kalman-Bucy); este procedimento também é conhecido como Princípio de Recuperação da Malha Objetivo pela saída, e existe também o procedimento conhecido como Princípio de Recuperação da Malha Objetivo pela entrada, que é dual ao procedimento LTR pela saída, no qual μ tende a zero pela direita e L é feito igual a B , resultando em:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} K(s)G(s) = K_C\Phi(s)B, \quad (2.27)$$

que é a matriz de transferência do Regulador Linear Quadrático.

A EAR em (2.21b) pode ser vista no domínio da frequência da seguinte forma

$$(I + C\Phi(j\omega)K_F)(I + C\Phi(j\omega)K_F)^* = I + \mu^{-2}C\Phi(j\omega)L(C\Phi(j\omega)L)^* \quad (2.28)$$

Como uma consequência de (2.26) e (2.28), as seguintes propriedades de *loop shaping* para o Princípio de Recuperação da Malha Objetivo pela saída podem ser obtidas

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sigma_{\max}(\mathcal{S}_O(j\omega)) \leq 1, \quad (2.29a)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sigma_{\max}(\mathcal{T}_O(j\omega)) \leq 2, \quad (2.29b)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sigma_{\max}(\mathcal{S}_O(j\omega)) \leq \mu \sigma_{\max} \left[(C\Phi(j\omega)L)^{-1} \right], \quad (2.29c)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sigma_{\max}(\mathcal{T}_O(j\omega)) \leq \sigma_{\max}(C\Phi(j\omega)K_F). \quad (2.29d)$$

Para a sensibilidade é possível designar os parâmetros livres de projeto L e μ e contar com a restrição (2.29c), entretanto para o rastreamento nenhum parâmetro livre de projeto adicional (além de L e μ) pode ser utilizado e é necessário contar apenas com a restrição (2.29d) imposta pelo ganho K_F (que depende de L e μ). Se for priorizado o rastreamento na escolha de L e μ (através de K_F), a sensibilidade ficará então condicionada a estes parâmetros.

2.4.1 A Escolha da Matriz L em Tempo Contínuo

Um sistema dinâmico linear invariante no tempo e quadrado pode ter sua dinâmica expandida por um polo real-finito estável em $s = -a$, Figura 2.32. A expansão do sistema por um polo real e finito leva a uma melhor formatação da malha objetivo, além de permitir que a dinâmica expandida pela entrada seja incorporada à dinâmica do controlador (11). Para o controlador, a expansão pela entrada faz com que, agora, a planta $G(s)$ seja a dinâmica do polo expandido acrescido da dinâmica da planta de processo $G_p(s)$.

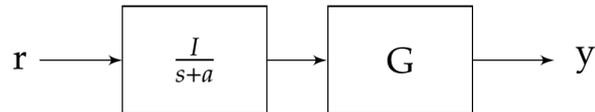


Figura 3 – Planta expandida pela entrada.

A representação no espaço de estados da planta $G(s)$ expandida pela entrada é dada por

$$G(s) \triangleq C\Phi(s)B \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{cc|c} A_p & B_p & 0 \\ 0 & -aI & I \\ \hline C_p & D_p & 0 \end{array} \right] \quad (2.30)$$

O conjunto (A_p, B_p, C_p, D_p) representa a planta de processo G_p , isto é, sem nenhuma dinâmica adicional. Observa-se que a planta G é sempre estritamente própria, mesmo se a planta de processo G_p for semiprópria (11).

Para o limitante de sensibilidade, como mostrado em (2.29c), utiliza-se a matriz de transferência $C\Phi(s)L$, oriunda do observador de estados, com a matriz L sendo classicamente particionada por Athans (8) em duas submatrizes: *high* L_H e *low* L_L .

$$G(s) \triangleq C\Phi(s)B \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{cc|c} A_P & B_P & L_H \\ 0 & -aI & L_L \\ \hline C_P & D_P & 0 \end{array} \right] \quad (2.31)$$

Para um bom *loop shaping*, é desejado que a matriz de transferência $C\Phi(s)L$ tenha sua dinâmica dada pelo polo que a planta foi expandida, ou seja,

$$C\Phi(s)L = \frac{I}{s+a} \quad (2.32)$$

As matrizes L_H e L_L que fazem com que a equação (2.32) seja válida foram determinadas em (11), onde através da expansão da planta $G(s)$ pela saída dada por

$$G(s) \triangleq C\Phi(s)B \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{cc|c} A_P & 0 & B_P \\ C_P & -aI & D_P \\ \hline 0 & I & 0 \end{array} \right] \quad (2.33)$$

foi determinado uma matriz U que realiza a transformação de similaridade que transforma a expansão da planta pela entrada em (2.30) na expansão pela saída em (2.33). Através da transformação de similaridade, para que a expansão em (2.32) aconteça a matriz L deve ser parametrizada como:

$$L = \begin{bmatrix} L_H \\ L_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-aI + A_P)^{-1}B_P W \\ W \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

em que a matriz W é dada por:

$$W = \left[D_P - C_P(aI + A_P)^{-1}B_P \right]^{-1} \quad (2.35)$$

2.5 Controle LQG/LTR em Tempo Discreto

Considere um sistema dinâmico discreto linear e invariante no tempo expresso pela seguinte representação em variáveis de estado

$$P := \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Lw_x(k) \\ z_x(k) = Hx(k) \\ z_u(k) = \rho Iu(k) \\ y(k) = Cx(k) + \mu Iw_y(k) \end{cases} \quad (2.36)$$

na qual x é o vetor de estados de dimensão n , u é o vetor das entradas manipuladas de dimensão m e y é o vetor das saídas medidas de dimensão m , w_x e w_y estão relacionados às entradas exógenas e z_x e z_u estão relacionados às respostas auxiliares.

As matrizes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ e $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ formam uma representação em variáveis de estado de uma planta de processo $G_P(z) = (A, B, C, 0)$, que também pode ser escrita como

$$G_P(z) := \begin{bmatrix} A & | & B \\ \hline C & | & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

em que os pares de matrizes (A, B) e (A, C) são, respectivamente, estabilizáveis e detectáveis. Note que a planta de processo é considerada como sendo quadrada e estritamente própria. A planta G_P também pode ser representada por sua matriz de transferência (ou função de transferência, no caso de sistemas SISO), como apresentado abaixo

$$G_P(z) = C\Phi(z)B \quad (2.38)$$

em que

$$\Phi(z) = (zI - A)^{-1}. \quad (2.39)$$

O tempo de processamento do sinal de controle é considerado desprezível quando comparado ao tempo amostrado. Desse modo, um estimador de estados pode ser utilizado, ou seja, o sinal de controle $u(k)$ pode depender das medidas até $y(k)$.

A representação em espaço de estados do controlador K (27) é dada por

$$G_P(z) := \left[\begin{array}{c|c} (A - BK_C)(I - K_F C) & (A - BK_C)K_F \\ \hline K_C(I - K_F C) & K_C K_F \end{array} \right], \quad (2.40)$$

em que K_C e K_F são, respectivamente, as matrizes de ganho do regulador e do observador de estados, dados por

$$K_C = (\rho^2 I + B'XB)^{-1}B'XA, \quad (2.41)$$

$$K_F = YC'(\mu^2 I + CYC')^{-1}, \quad (2.42)$$

sendo X e Y as matrizes simétricas soluções das seguintes equações algébricas de Riccati

$$A'XA - X - A'XB(\rho^2 I + B'XB)^{-1}B'XA + H'H = 0, \quad (2.43)$$

$$AYA' - Y - AYC'(\mu^2 I + CYC')^{-1}CYA' + LL' = 0. \quad (2.44)$$

Particularizando para o controle LQG/LTR, considera-se que $G_P(z)$ é de fase mínima e que o posto da matriz CB é igual a m , sendo importante notar que essa última restrição é exclusiva para o caso em tempo discreto (28).

A matriz de ganhos do regulador de estados K_C é projetada de modo que a matriz de transferência em malha aberta $G_P(z)K(z)$ seja igual a $C\phi(z)AK_F$. Portanto, assume-se que w_x e w_y são entradas fictícias e, z_x e z_u são saídas fictícias, de modo que os parâmetros ρ, H, μ e L podem ser escolhidos livremente para fazer com que o sistema resultante tenha as características desejadas. Se a matriz H for escolhida igual a matriz C e se o escalar ρ for escolhido com valor igual a zero, a matriz de ganhos do regulador de estados resulta em (28)

$$K_C = (CB)^{-1}CA \quad (2.45)$$

e a matriz de transferência em malha aberta em

$$G_P(z)K(z) = C\Phi(z)AK_F. \quad (2.46)$$

Nesse caso, obtém-se uma recuperação exata da malha objetivo. Porém, quando o tempo de processamento do sinal de controle é considerável e não pode ser desprezado, deve-se utilizar um estimador preditivo, no qual $u(k)$ pode depender apenas das medições até $y(k-1)$. No caso da utilização do estimador preditivo, a recuperação da malha objetivo ocorre apenas de maneira aproximada (29).

Como a matriz H deve ser feita igual a matriz C e o escalar ρ deve ser feito igual a zero para que o procedimento LTR ocorra, os parâmetros livres da especificação das propriedades da malha objetivo são o escalar μ e a matriz L , os quais são os parâmetros

que definem (2.44). Baseado nisso, (2.44) pode ser reescrito como a Identidade de Kalman para o observador de estados (30)

$$(I + C\Phi(z)AK_F)(I + \mu^{-2}CYC')(I + C\Phi(z)AK_F)^* = I + \mu^{-2}C\Phi(z)L(C\Phi(z)L)^* \quad (2.47)$$

A sensibilidade $\mathcal{S}(z)$ e a sensibilidade complementar (ou rastreamento) $\mathcal{T}(z)$ são definidas como

$$\mathcal{S}(z) = (I + G_P(z)K(z))^{-1} \quad (2.48)$$

$$\mathcal{T}(z) = G_P(z)K(z)(I + G(z)K(z))^{-1} \quad (2.49)$$

A partir de 2.46 e 2.47, os limitantes do desempenho no controle LQG/LTR em tempo discreto são dados por

$$\sigma_{\max}(\mathcal{S}_O(z)) \leq 1 + \alpha, \quad (2.50a)$$

$$\sigma_{\max}(\mathcal{T}_O(z)) \leq 2 + \alpha, \quad (2.50b)$$

$$\sigma_{\max}(\mathcal{S}_O(z)) \leq \mu(1 + \alpha)\sigma_{\max}[(C\Phi(z)L)^{-1}], \quad (2.50c)$$

pode-se concluir que o controle LQG/LTR em tempo discreto apresenta características de desempenho semelhantes às do controle LQG/LTR em tempo contínuo na análise da sensibilidade mista, as quais são degeneradas em função do escalar α .

2.5.1 A Escolha da Matriz L em Tempo Discreto

O trabalho desenvolvido por Guaracy, da Silva e Ferreira em (27) apresenta a expansão da dinâmica de uma planta por integradores no controle LQG/LTR em tempo discreto de forma a permitir ao projetista definir uma malha objetivo com bom desempenho na análise de sensibilidade mista. Entretanto, (27) também relata que o método de integração utilizado na expansão da planta de processo pode inviabilizar a aplicação do procedimento LTR. E, que para evitar esse problema, a matriz de transferência de integradores backward Euler é utilizada na expansão da planta de forma a permitir que a parametrização da matriz L siga as diretrizes propostas pelos autores e resulte na recuperação da matriz de transferência de integradores *forward* Euler de modo a ser a dinâmica da matriz $C\Phi(z)L$. Nesse contexto, o trabalho de (27) é restrito à expansão por integradores, ou seja, não aborda a possibilidade de utilização de um polo real finito estável qualquer na expansão da dinâmica da planta.

Dado um sistema linear invariante no tempo, quadrado e no domínio discreto, pode-se expandir a dinâmica da planta por um polo real finito estável em e^{-aT} .

A representação no espaço de estados da planta $G_P(z)$ expandida por sistema de primeira ordem pela entrada é dada por

$$G(z) = T \frac{z}{z - e^{-aT}} G_P(z) = \left[\begin{array}{cc|c} A_P & B_P & TB_P \\ 0 & e^{-aT}I & Te^{-aT}I \\ \hline C_P & D_P & 0 \end{array} \right]. \quad (2.51)$$

O conjunto (A_P, B_P, C_P, D_P) representa a planta de processo G_P , isto é, sem nenhuma dinâmica adicional. Observa-se que a planta G é sempre estritamente própria, mesmo se a planta de processo G_P for semiprópria.

Para o limitante de sensibilidade, como mostrado em (2.50c), utiliza-se a matriz de transferência $C\Phi(z)L$, oriunda do observador de estados, com a matriz L sendo classicamente particionada por Athans (8) em duas submatrizes: *high* L_H e *low* L_L .

$$G(z) = C\Phi(z)L \stackrel{z}{=} \left[\begin{array}{cc|c} A_P & B_P & L_H \\ 0 & e^{-aT}I & L_L \\ \hline C_P & D_P & 0 \end{array} \right] \quad (2.52)$$

Para um bom *loop shaping* (bom desempenho), é desejado que a matriz de transferência $C\Phi(z)L$ tenha sua dinâmica dada pelo polo que a planta foi expandida, ou seja,

$$C\Phi(z)L = T \frac{I}{z - e^{-aT}}. \quad (2.53)$$

As matrizes L_H e L_L que fazem com que a equação (2.32) seja válida foram determinadas em (19), onde através da expansão da planta $G_P(z)$ pela saída dada por

$$G(z) = \left[\begin{array}{cc|c} A_P & 0 & B_P \\ Te^{-aT}I & e^{-aT}I & D_P \\ \hline TC_P & I & 0 \end{array} \right] \quad (2.54)$$

foi determinado uma matriz U que realiza a transformação de similaridade que transforma a expansão da planta pela entrada em (2.51) na expansão pela saída em (2.54). Através da transformação de similaridade, para que a expansão em (2.53) aconteça a matriz L deve ser parametrizada como:

$$L = \begin{bmatrix} L_H \\ L_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(A_P - e^{-aT}I)^{-1}B_P W_E \\ W_E \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

em que a matriz W_E é dada por:

$$W_E = -T \left[C_P (A_P - e^{-aT} I)^{-1} B_P \right]^{-1} \quad (2.56)$$

desde que $(A_P - e^{-aT} I)^{-1}$ e W_E existam.

3 Parametrização para Sistemas de Fase Não-Mínima

3.1 Considerações Gerais

O processo de recuperação da malha objetivo depende do cálculo de inversas de matrizes que nem sempre têm sua existência garantida (6, 12), por isso para a recuperação da malha objetivo de sistemas de fase não-mínima deve ser observada a influência dos zeros no processo. Vários autores já discutiram o efeito dos zeros de fase não-mínima sobre o procedimento LTR. Em (8) foi mostrado sem prova que o procedimento LTR pode ser aplicado a um sistema de fase não-mínima quando os zeros de fase não-mínima estão fora da banda de frequência da malha objetivo. Em (9) uma metodologia para recuperação da malha objetivo foi apresentada, onde os zeros do lado direito do eixo imaginário são alocados em um fator "passa tudo" (*all pass*).

Este capítulo trata da análise em frequência dos valores singulares da sensibilidade e da sensibilidade complementar para sistemas de fase não-mínima na aplicação do controle LQG/LTR a um sistema com um zero de fase não-mínima. Serão apresentadas algumas novas propriedades que podem ser garantidas na aplicação do controle LQG/LTR, no tempo discreto e contínuo, quando uma planta estável em malha aberta com apenas um zero de fase não-mínima é expandida por integradores e uma escolha específica de parâmetros de projeto é feita. Será mostrado que, nestas condições específicas, a forma exata dos valores singulares da função de transferência de malha fechada é conhecida. Além disso, os limites da função sensibilidade podem ser expressos através de uma expressão escrita diretamente em função da planta do processo e parâmetros de projeto, fornecendo mais informações a respeito dos limites impostos pelas características de fase não-mínima.

3.2 Controle LQG/LTR

Considere a malha fechada da Figura 4 em que $G(\lambda)$ é a planta do processo e $K(\lambda)$ é o controlador, o qual pode fazer a planta de malha fechada internamente estável. O símbolo λ indica que a malha fechada pode estar no domínio do tempo contínuo (s) ou tempo discreto (z). Ademais, a planta do processo $G(s)$ (que pode ou não ter sido expandida por integradores) é considerada real racional, estritamente própria e

quadrada, e pode ser expressa por

$$G_P(s) = C\phi(s)B := \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right] \quad (3.1)$$

em que

$$\phi(s) = (sI - A)^{-1} \quad (3.2)$$

e o par (A, B) é estabilizável e (A, C) é detectável (12). No caso do tempo discreto é assumido que a matriz CB possui posto completo e que o tempo de processamento computacional é insignificante em comparação ao tempo de amostragem, assim um observador de estados corrente (ou filtro) é utilizado (28).

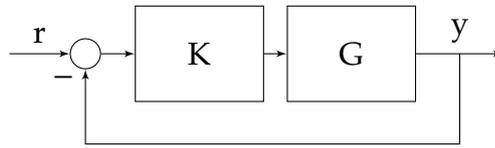


Figura 4 – Sistema de malha fechada.

A planta considerada é de fase não-mínima, no caso do tempo contínuo, se ao menos um de seus zeros está no lado direito do plano complexo e no caso do tempo discreto se ao menos um de seus zeros de transmissão estiver fora do círculo unitário. Então, dada a matriz $C\Phi(\lambda)B$ com zeros de fase não-mínima (incluindo multiplicidades), existe uma matriz \tilde{C} tal que

$$G(\lambda) = C\Phi(\lambda)B = \Lambda(\lambda)\tilde{C}\Phi(\lambda)B \quad (3.3)$$

em que $\tilde{C}\Phi(\lambda)B$ é de fase mínima e $\Lambda(\lambda)$ é o fator *all pass* (9). Além disso, se v é um zero de $C\Phi(\lambda)B$, então

$$\begin{bmatrix} x' & w' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} vI - A & -B \\ -C & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.4)$$

tem solução com $w'w = 1$ em que x é o estado de direção zero e w é a saída de direção zero.

Utilizando-se do procedimento LTR pela saída quando o processo é de fase mínima, as matrizes sensibilidade complementar e sensibilidade se tornam

$$\mathcal{T}(\lambda) = C\Phi(\lambda)K_F(I + C\Phi(\lambda)K_F)^{-1} \quad (3.5)$$

$$\mathcal{S}(\lambda) = (I + C\Phi(\lambda)K_F)^{-1} \quad (3.6)$$

respectivamente, com

$$K_F = \mu^{-2}YC' \quad (3.7)$$

em que Y é a solução da seguinte equação de Riccati :

$$YA' + AY - \mu^{-2}YC'CY + LL' = 0 \quad (3.8)$$

no domínio de tempo contínuo, ou

$$K_F = YC'(\mu^2I + CYC')^{-1} \quad (3.9)$$

em que Y é a solução da seguinte equação de Riccati :

$$AYA' - Y - AYC'(\mu^2I + CYC')^{-1}CYA' + LL' = 0 \quad (3.10)$$

no caso do domínio de tempo discreto, em que a modelagem de $C\Phi(\lambda)K_F$ pode ser feita a fim de impor características desejadas no sistema de malha fechada (12), (28).

Para entender os limites do controle LQG/LTR quando o processo é de fase não-mínima, suponha que $C\Phi(\lambda)B$ tem apenas um zero de fase não-mínima. Utilizando-se do procedimento LTR pela saída quando o sistema é de fase não-mínima as matrizes de transferência sensibilidade complementar e sensibilidade ficam respectivamente

$$\mathcal{T}(\lambda) = \Lambda(\lambda)\tilde{C}\Phi(s)K_F(I + C\Phi(\lambda)K_F)^{-1} \quad (3.11)$$

$$\mathcal{S}(\lambda) = (I + \mathcal{E}(\lambda))(I + C\Phi(\lambda)K_F)^{-1} \quad (3.12)$$

com

$$\mathcal{E}(s) = \frac{2v}{s+v}ww'C\Phi(v)K_F \quad (3.13)$$

no caso do tempo contínuo, ou

$$\mathcal{E}(z) = \frac{v - v^{-1}}{z - v^{-1}}ww'C\Phi(v)K_F \quad (3.14)$$

no caso do tempo discreto, em que $\mathcal{E}(\lambda)$ é chamada função erro (9), (31). Então, se a planta é de fase não-mínima, a qualidade da recuperação numa dada frequência dependerá da dimensão do erro nesta frequência, porém, a modelagem de $C\Phi(\lambda)K_F$ ainda poderá impor as características desejadas no sistema de malha fechada.

3.2.1 Domínio do Tempo Contínuo

Considere uma planta que é descrita pela matriz de transferência $G_p(s)$ com a representação em variáveis de estado dada por

$$G_p(s) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_p & B_p \\ \hline C_p & 0 \end{array} \right] \quad (3.15)$$

Expandindo este processo através de um integrador em cada canal de entrada

$$G(s) = s^{-1}G_p(s) \stackrel{s}{=} \Lambda(s) \left[\begin{array}{cc|c} A_p & B_p & 0 \\ \hline 0 & 0 & I \\ \hline \tilde{C}_p & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (3.16)$$

o parâmetro L proposto é dado por

$$L = \left[\begin{array}{c} A_p^{-1}B_p(C_pA_p^{-1}B_p)^{-1} \\ -(C_pA_p^{-1}B_p)^{-1} \end{array} \right] \quad (3.17)$$

que existe se a inversa de A_p e $C_pA_p^{-1}B_p$ existir (32). Esta escolha associa os valores singulares de

$$C\Phi(s)L = s^{-1}I \quad (3.18a)$$

$$\Lambda(s)\tilde{C}\Phi(s)L = s^{-1}\Lambda(s)\tilde{C}_pA_p^{-1}B_p(C_pA_p^{-1}B_p)^{-1} \quad (3.18b)$$

sobre todas as frequências, correspondendo ao comportamento de um integrador. Consequentemente, os resultados do valor singular máximo da função sensibilidade é dado por

$$\sigma_{max}(\mathcal{S}(j\omega)) \leq \mu\omega \left[1 + \frac{2v}{\sqrt{v^2 + \omega^2}} \sigma_{max}(C\Phi(v)K_F) \right] \quad (3.19)$$

em que σ_{max} é o valor singular máximo. Note que os valores singulares da função sensibilidade cresce a +20[dB/dec] sobre todas as frequências mais um erro dado pelo zero de fase não-mínima. Como novo resultado, o seguinte teorema mostra que quando a planta é estável em malha aberta, a parametrização (3.17) resulta em uma formatação exata para os valores singulares da função de transferência da malha fechada e a função sensibilidade pode ser conhecida pela planta do processo e parâmetros de projeto.

Teorema 1 *Considere a planta expandida em (3.16), que possui apenas um zero de fase não-mínima em $s = a$. Se o procedimento LTR for aplicado, a matriz L for escolhida como em (3.17) e A_p for Hurwitz, então a formatação dos valores singulares da matriz de transferência da malha fechada será dada por*

$$\sigma_{max}(\mathcal{T}(j\omega)) = \sigma_{min}(\mathcal{T}(j\omega)) = \frac{\mu^{-1}}{\sqrt{\mu^{-2} + \omega^2}} \quad (3.20)$$

e o resultado dos valores singulares da matriz de transferência da sensibilidade será

$$\sigma_{\max}(\mathcal{S}(j\omega)) \leq \left(\mu + \frac{2}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \right) \omega \quad (3.21)$$

Prova : Sob as mesmas hipóteses, é possível concluir que

$$C\Phi(s)K_F = \mu^{-1}C\Phi(s)L \quad (3.22)$$

usando o Corolário 1 de (32) e também, substituindo (3.22) em (3.18), a matriz de transferência da sensibilidade complementar pode ser escrita como

$$\mathcal{T}(s) = \frac{\mu^{-1}}{s + \mu^{-1}} \Lambda(s) \tilde{C}_P A_P^{-1} B_P (C_P A_P^{-1} B_P)^{-1} \quad (3.23)$$

usando (3.11), da qual é possível concluir (3.20). Além disso, substituindo (3.22) em (3.19) e fazendo v igual a a , é possível concluir (3.21).

Pode-se perceber que as respostas em cada saída do sistema não estão desacopladas, como acontece no caso de sistema de fase mínima (32), por causa do efeito do zero de fase não-mínima. Entretanto, os ganhos da matriz de transferência de malha fechada estão equalizados mesmo quando a planta do processo é de fase não-mínima e são equivalentes aos sistemas de primeira ordem. Pode ser visto também que quanto mais lento for o zero (ou seja, quanto mais próximo da origem do plano complexo), mais distante o comportamento da sensibilidade está do esperado +20[dB/dec], especialmente nas baixas frequências. Finalmente, note que o valor do zero afeta os resultados dos valores singulares da matriz de transferência sensibilidade, mas não altera os valores singulares da matriz de transferência sensibilidade complementar.

3.2.2 Domínio do Tempo Discreto

Considere a planta a seguir, que não foi expandida através de integradores e possui apenas um zero de fase não-mínima, discretizada através de um processo de amostragem com período de amostragem T , essa planta é descrita pela matriz de transferência $G_P(z)$ com a representação em espaço de estados dada por

$$G_P(z) \stackrel{z}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_P & B_P \\ \hline C_P & 0 \end{array} \right] \quad (3.24)$$

Repare que a representação em espaço de estados do sistema no tempo discreto será semelhante à notação do tempo contínuo para comparações. Porém, as matrizes A_P , B_P , C_P e D_P discutidas nesta seção são versões discretizadas das matrizes em espaço de estado da seção anterior.

Expandindo a planta do processo através de um integrador *backward Euler* em cada canal de entrada

$$G(z) = T \frac{z}{z-1} G_P(z) \stackrel{z}{=} \left[\begin{array}{cc|c} A_P & B_P & TB_P \\ 0 & I & TI \\ \hline C_P & 0 & 0 \end{array} \right] \stackrel{z}{=} \Lambda(z) \left[\begin{array}{cc|c} A_P & B_P & TB_P \\ 0 & I & TI \\ \hline \tilde{C}_P & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (3.25)$$

o parâmetro L proposto é dado por

$$L = \left[\begin{array}{c} T(A_P - I)^{-1} B_P [C_P (A_P - I)^{-1} B_P]^{-1} \\ -T [C_P (A_P - I)^{-1} B_P]^{-1} \end{array} \right]', \quad (3.26)$$

que existe se a inversa de $A_P - I$ e $C_P (A_P - I)^{-1} B_P$ existir (32). Esta escolha associa os valores singulares de

$$C\Phi(z)L = T \frac{1}{z-1} I \quad (3.27a)$$

$$\Lambda(z)\tilde{C}\Phi(z)L = T \frac{1}{z-1} \Lambda(z)\tilde{C}_P (A_P - I)^{-1} B_P [C_P (A_P - I)^{-1} B_P]^{-1} \quad (3.27b)$$

sobre todas as frequências, correspondendo ao comportamento de um integrador *forward Euler*. Consequentemente, os limites do valor singular máximo da função sensibilidade é dado por

$$\sigma_{\max}(\mathcal{S}(e^{j\omega T})) \leq \sqrt{\mu^2 + \rho(CYC')} \frac{2}{T} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega T}{2}\right) \left[1 + \frac{v^2 - 1}{\sqrt{v^2 - 2v\cos(\omega T) + 1}} \sigma_{\max}(C\Phi(v)K_F) \right] \quad (3.28)$$

em que ρ é o raio espectral. Note que se o período de amostragem é tal que em baixas frequências a aproximação angular da função seno é válida, o limite dos valores singulares da função sensibilidade crescem a uma taxa de +20[dB/dec] sobre todas as frequências mais um erro dado pelo zero de fase não-mínima, exatamente como no caso do tempo contínuo. Assim como no tempo contínuo, o seguinte teorema mostra que quando a planta do processo em tempo discreto é estável em malha aberta, a parametrização (3.26) resulta em um formato exato para os valores singulares da função de transferência de malha fechada e os limites da função sensibilidade podem ser concebidos em função da planta do processo e parâmetros de projeto.

Teorema 2 Considere a planta em tempo discreto expandida em (3.25), que possui apenas um zero de fase não-mínima em $z = e^{aT}$. Se o procedimento LTR for aplicado, a matriz L for escolhida como em (3.26) e A_P for Hurwitz, então a formatação dos valores singulares da matriz de transferência da malha fechada será dada por

$$\sigma_{\max}(\mathcal{T}(e^{j\omega T})) = \sigma_{\min}(\mathcal{T}(e^{j\omega T})) = \frac{\mu^{-1}}{\sqrt{\mu^{-2} + \left(\frac{2}{T} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right)^2}} \quad (3.29)$$

e o limite dos valores singulares da matriz de transferência da sensibilidade será

$$\sigma_{\max}(\mathcal{S}(e^{j\omega T})) \leq 2 \left(\frac{\mu_T}{T} + \frac{\cosh\left(\frac{aT}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{\sinh^2\left(\frac{aT}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)}} \right) \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) \quad (3.30)$$

em que μ_T é dado por

$$\mu_T = \frac{\sqrt{4\mu^2 + T^2} + T}{2} \quad (3.31)$$

Prova : Sob as mesmas hipóteses, é possível concluir que

$$C\Phi(z)K_F = \mu_T^{-1}C\Phi(z)L \quad (3.32)$$

usando o Corolário 2 e

$$\sqrt{\mu^2 + \rho(CYC')} = \mu_T \quad (3.33)$$

usando o Teorema 2 de (32). Então, substituindo (3.32) em (3.27), a matriz de transferência da sensibilidade complementar pode ser escrita como

$$\mathcal{T}(z) = \frac{\mu_T^{-1}T}{z - (1 - \mu_T^{-1}T)} \Lambda(z) \tilde{C}_P(A_P - I)^{-1} B_P [C_P(A_P - I)^{-1} B_P]^{-1} \quad (3.34)$$

usando (3.11), da qual é possível concluir (3.29). Além disso, substituindo (3.32) e (3.33) em (3.28) e fazendo v igual a e^{aT} , é possível concluir (3.30).

Assim como no caso de tempo contínuo, pode-se perceber que, apesar do comportamento do zero de fase não-mínima, o formato exato dos valores singulares da sensibilidade complementar são conhecidos. Além disso, um limite na matriz de transferência sensibilidade é definido. Note que se o período de amostragem é suficientemente pequeno tal que a aproximação angular para a função seno seja válida, a equação (3.29) tende para a equação (3.20) e a equação (3.30) tende para a equação (3.21).

4 Exemplos de Aplicação

4.1 Exemplo Numérico no Tempo Contínuo

Para ilustrar a teoria comentada no capítulo anterior, será utilizado nesta seção um exemplo numérico retirado de (9). Considere a planta a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -0,5 & 1,25 \\ -2,5 & -2,5 \\ 0,3 & -1,25 \\ 1,5 & 3,5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

A tabela 1 contém os polos e o zero do modelo. O sistema é estável em malha aberta e possui apenas um zero de fase não-mínima.

Polos	$s_{1,2} = -1$ $s_{3,4} = -0,2$
Zeros	$s = 1$

Tabela 1 – Polos e zero do exemplo numérico.

A Figura 5 apresenta o diagrama de valores singulares da planta em malha aberta. Analisando os polos do sistema, conclui-se que ele é estável em malha aberta, como pode ser observado nas Figuras 6 e 7, as quais mostram o comportamento do sistema em malha aberta para um degrau aplicado em cada uma das entradas do modelo. Além do mais, a representação do modelo é controlável e observável, completando os requisitos para se aplicar o controle LQG/LTR.

Analisando as Figuras 6 e 7, é possível notar que as saídas do modelo estão acopladas para cada degrau aplicado nas entradas.

4.1.1 Definição da Malha Objetivo

Será feito nesta seção a definição da malha objetivo. O parâmetro L foi escolhido conforme explicitado no capítulo anterior para um polo na origem, ou seja, $a = 0$. O valor de μ é escolhido como $\mu = 4$.

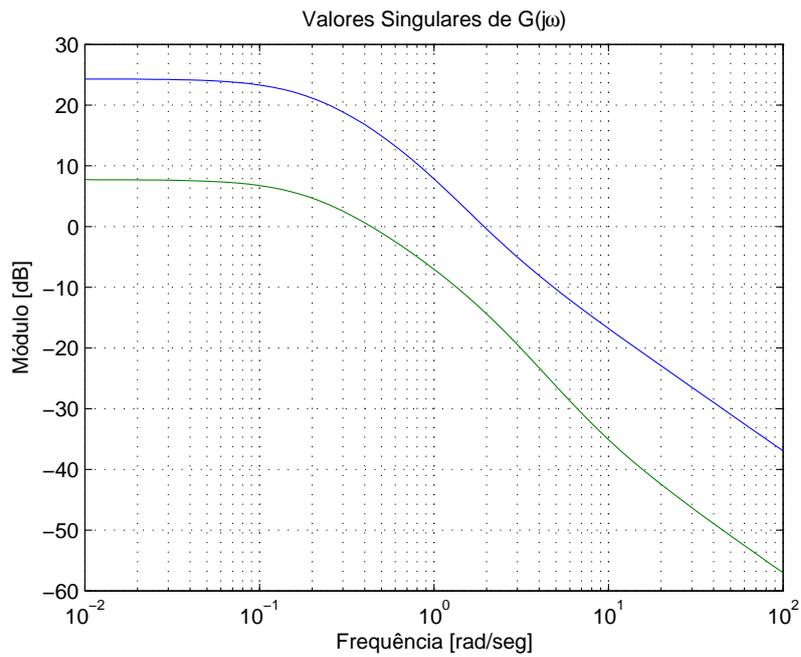


Figura 5 – Valores singulares do modelo em malha aberta.

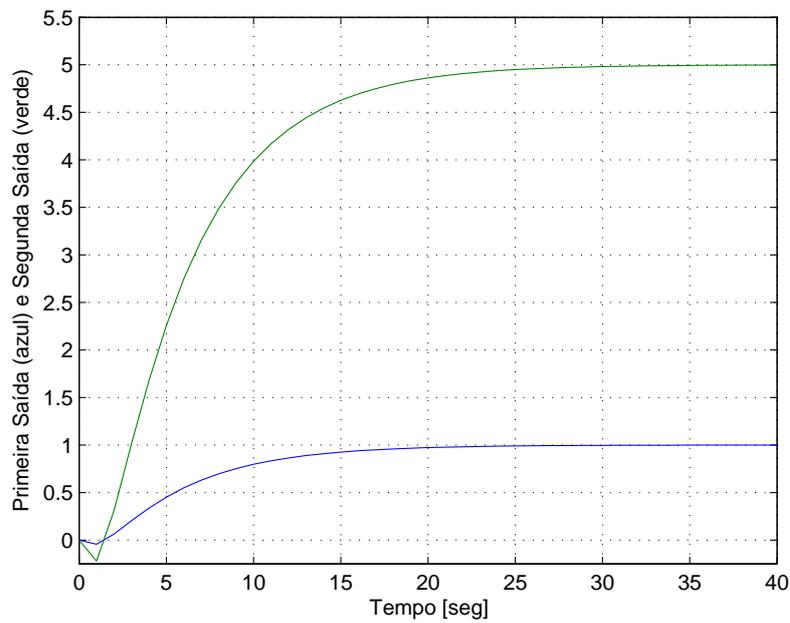


Figura 6 – Resposta ao degrau aplicado a primeira entrada do modelo.

Os parâmetros calculados para a aplicação do controle LQG/LTR são os seguintes

$$L = \begin{bmatrix} -0,3438 & -0,0313 \\ -0,6250 & -0,3750 \\ 1,3438 & 0,0313 \\ 0,6250 & 1,3750 \\ 0,3750 & 0,1250 \\ -0,1250 & 0,0250 \end{bmatrix} \quad \mu = 4 \quad (4.2)$$

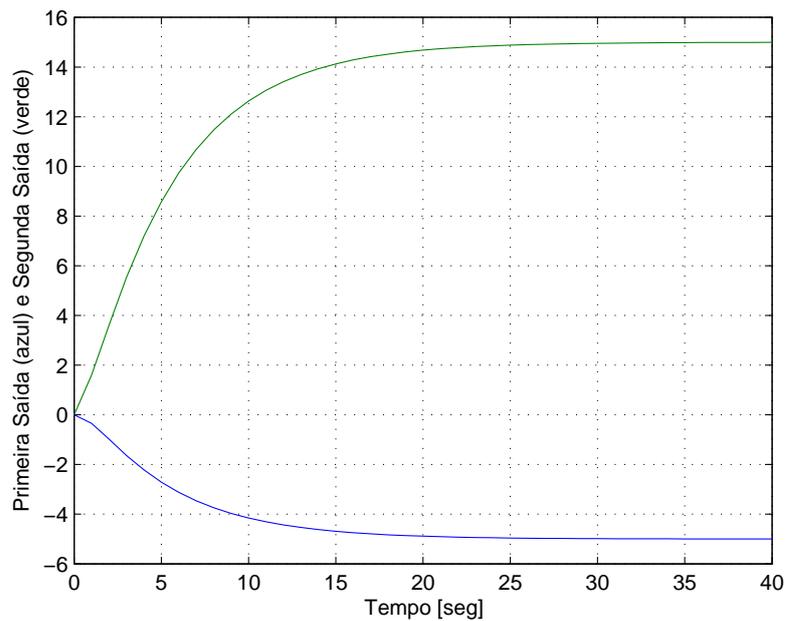


Figura 7 – Resposta ao degrau aplicado a segunda entrada do modelo.

em que os ganhos do observador e do controlador são dados respectivamente por:

$$K_F = \begin{bmatrix} -0,0859 & -0,0078 \\ -0,1562 & -0,0937 \\ 0,3359 & 0,0078 \\ 0,1562 & 0,3437 \\ 0,0938 & 0,0312 \\ -0,0313 & 0,0062 \end{bmatrix} \quad K'_C = 10^3 \begin{bmatrix} 1,0477 & -2,1479 \\ -4,1910 & 8,5917 \\ 6,8462 & 0,5796 \\ -2,7344 & 9,4107 \\ 0,1132 & -0,0547 \\ -0,0547 & 0,1145 \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Na Figura 8 é mostrada a resposta ao degrau em ambas as entradas de referência da malha objetivo projetada.

4.1.2 A Recuperação da Malha Objetivo

Nesta seção será realizada a verificação da recuperação da malha objetivo, comparando-se a resposta ao degrau unitário da malha fechada objetivo $C\Phi(s)K_F$ com a resposta ao degrau unitário da malha fechada de controle $G(s)K(s)$.

Para a performance da recuperação obtida com o controle LQG/LTR além dos parâmetros L e μ adotados anteriormente, o parâmetro ρ foi feito igual a 0,0001. De posse destes parâmetros foi traçada a resposta ao degrau unitário da malha objetivo e da malha de controle $G(s)K(s)$ na Figura 9.

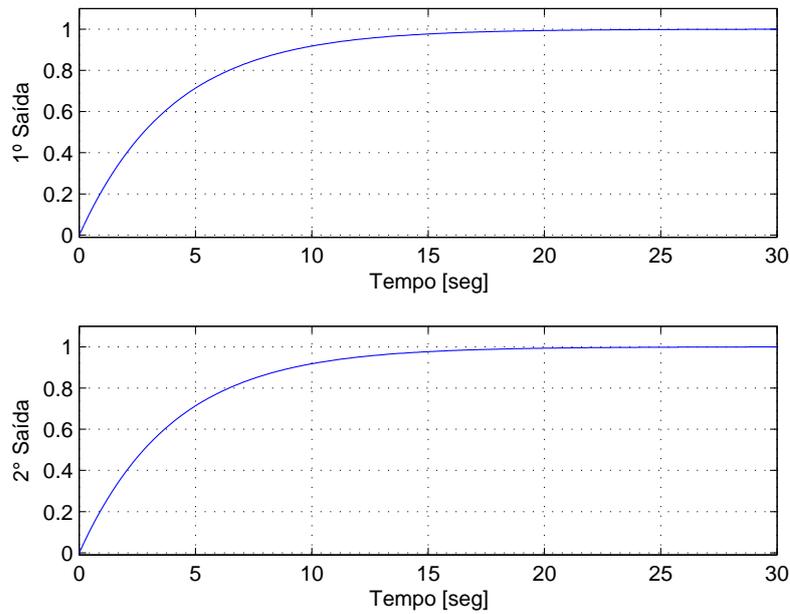


Figura 8 – Resposta ao degrau aplicado às entradas da malha objetivo.

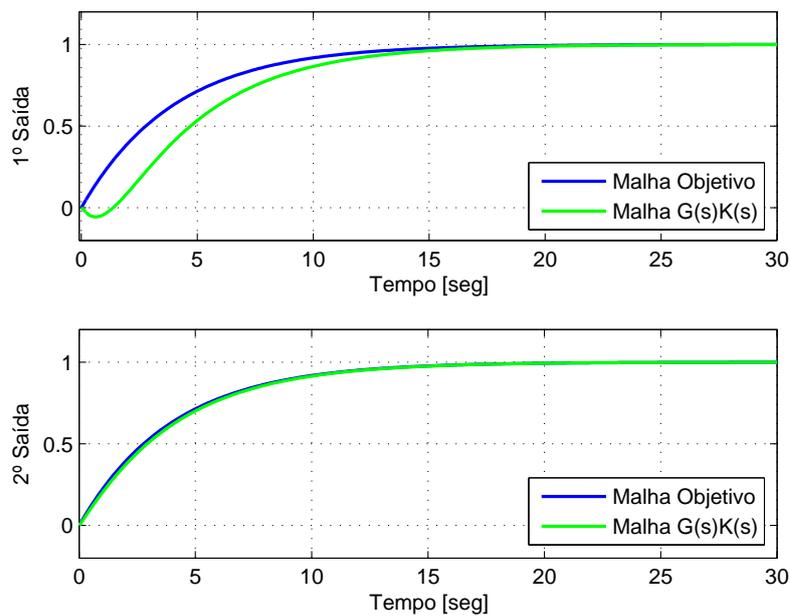


Figura 9 – Resposta ao degrau aplicado às entradas do observador e da malha de controle.

4.1.3 Controle LQG/LTR

Considere a matriz L escolhida como em (3.17) e $\mu = 4$. As Figuras 10 e 11 mostram os valores singulares da função sensibilidade e sensibilidade complementar e as Figuras 12 e 13 a resposta ao degrau utilizando-se do controle LQG/LTR, onde a referência para a entrada 1 é aplicada em 0 segundo e a referência para a entrada 2

em 30 segundos.

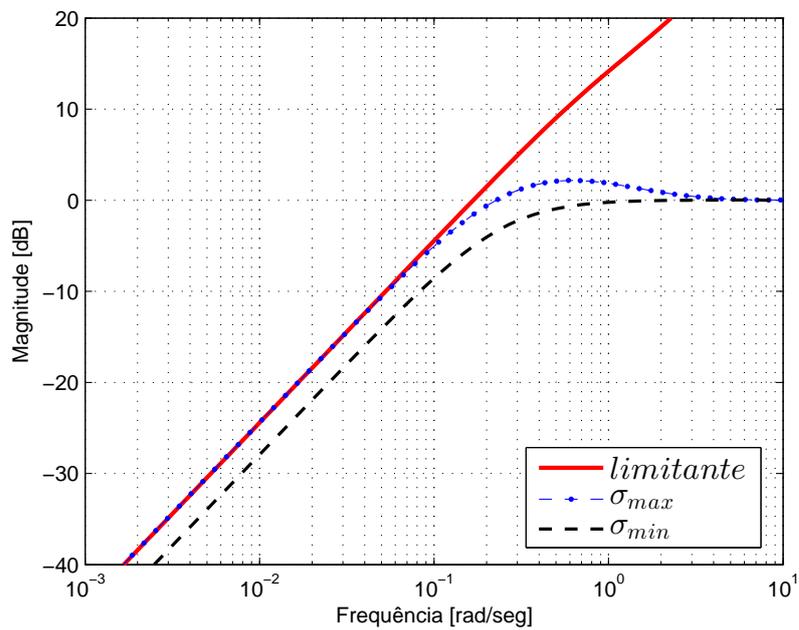


Figura 10 – Valores singulares da sensibilidade.

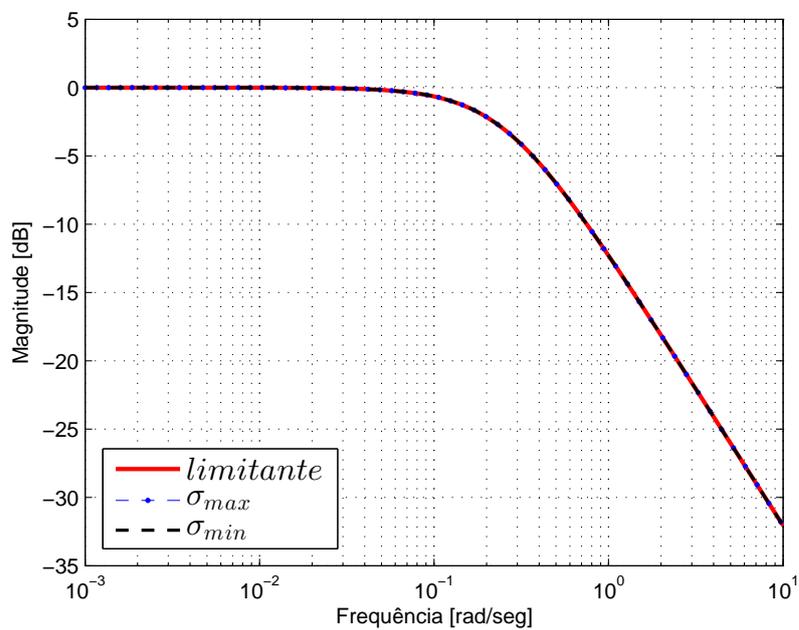


Figura 11 – Valores singulares da sensibilidade complementar.

Observando as Figuras 10 e 11, nota-se que o sistema foi limitado pelo limitante de sensibilidade e limitante de rastreamento, portanto possui boas propriedades de *loop shaping*.

Analisando-se as Figuras 12 e 13, pode ser notado que a resposta em cada saída tende ao comportamento de um sistema de primeira ordem.

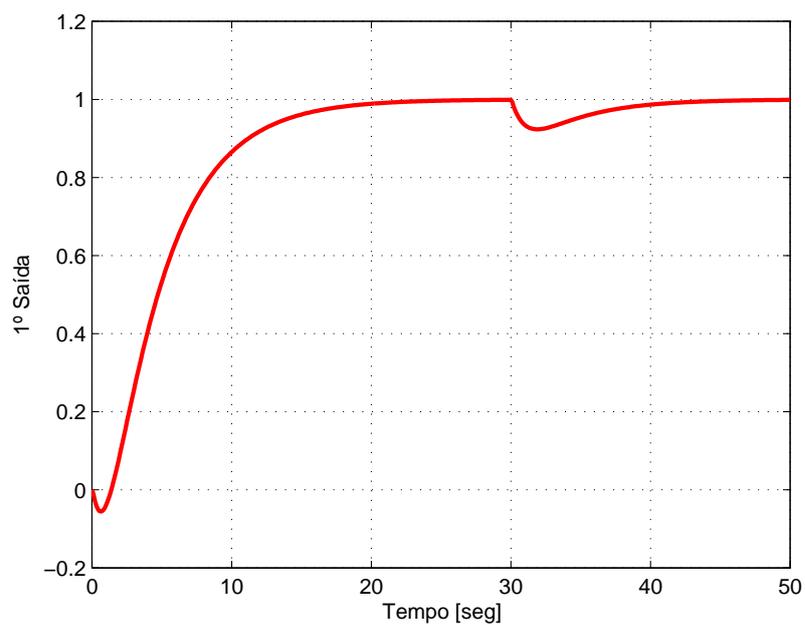


Figura 12 – Resposta ao degrau aplicado a primeira entrada da malha compensada.

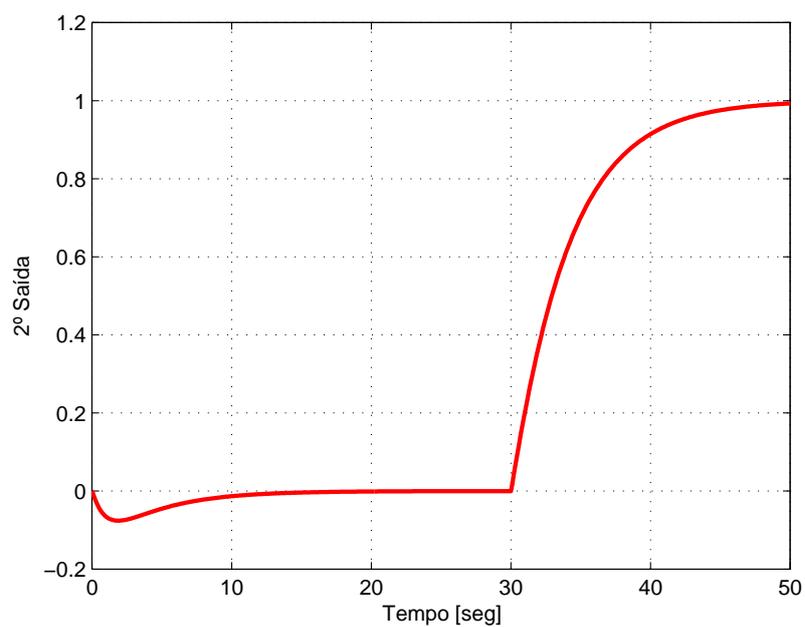


Figura 13 – Resposta ao degrau aplicado a segunda entrada da malha compensada.

4.2 Exemplo Numérico no Tempo Discreto

Considere que a planta da seção anterior foi amostrada com um período de amostragem de 1s. A equação (4.2) mostra as matrizes do sistema discretizado:

$$A = \begin{bmatrix} 0,3679 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3679 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8187 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8187 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -0,3161 & 0,7902 \\ -1,5803 & -1,5803 \\ 0,2719 & -1,1329 \\ 1,3595 & 3,1722 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A tabela 2 contém os polos e os zeros do modelo.

Polos	$z_{1,2} = 0,3679$ $z_{3,4} = 0,8187$
Zeros	$z = -0,3865$ $z = 3,5950$

Tabela 2 – Polos e zeros do exemplo numérico discreto.

A Figura 14 apresenta o diagrama de valores singulares da planta em malha aberta a representação do modelo é controlável e observável, completando os requisitos para se aplicar o controle LQG/LTR.

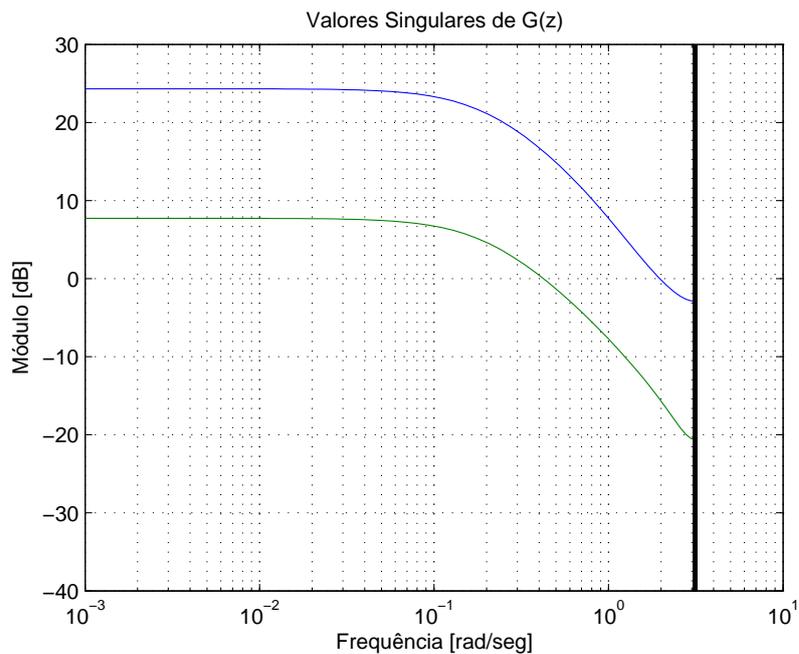


Figura 14 – Valores singulares do modelo em malha aberta.

4.2.1 Definição da Malha Objetivo

Será apresentada nesta seção a definição da malha objetivo. O parâmetro L foi escolhido conforme explicitado no capítulo anterior para um polo na origem, ou seja, $e^{aT} = 1$. O valor de μ é escolhido como $\mu = 2\sqrt{3}$.

Os parâmetros escolhidos para a aplicação do controle LQG/LTR são os seguintes

$$L = \begin{bmatrix} -0,3438 & -0,0313 \\ -0,6250 & -0,3750 \\ 1,3438 & 0,0313 \\ 0,6250 & 1,3750 \\ 0,3750 & 0,1250 \\ -0,1250 & 0,0250 \end{bmatrix}, \quad \mu = 2\sqrt{3}, \quad \mu_T = 4 \quad (4.5)$$

em que os ganhos do observador e do controlador são dados respectivamente por:

$$K_F = \begin{bmatrix} -0,0859 & -0,0078 \\ -0,1562 & -0,0937 \\ 0,3359 & 0,0078 \\ 0,1562 & 0,3437 \\ 0,0938 & 0,0312 \\ -0,0313 & 0,0062 \end{bmatrix} \quad K'_C = 10^3 \begin{bmatrix} 1,0477 & -2,1479 \\ -4,1910 & 8,5917 \\ 6,8462 & 0,5796 \\ -2,7344 & 9,4107 \\ 0,1132 & -0,0547 \\ -0,0547 & 0,1145 \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Na Figura 15 é mostrada a resposta ao degrau em ambas as entradas de referência da malha objetivo projetada.

4.2.2 A Recuperação da Malha Objetivo

Nesta seção será realizada a verificação da recuperação da malha objetivo, comparando-se a resposta ao degrau unitário da malha objetivo $C\Phi(z)K_F$ com a resposta ao degrau unitário da malha de controle $G(z)K(z)$.

Para a performance da recuperação obtida com o controle LQG/LTR além dos parâmetros L e μ adotados anteriormente o parâmetro ρ foi feito igual a 0,0001. De posse destes parâmetros foi traçada a resposta ao degrau unitário da malha objetivo e da malha de controle $G(z)K(z)$ na Figura 16.

4.2.3 Controle LQG/LTR

Considere a matriz L escolhida como em (3.26) e $\mu_T = 4$. As Figuras 17 e 18 mostram os valores singulares da função sensibilidade e sensibilidade complementar e as Figuras 19 e 20 a resposta ao degrau utilizando-se do controle LQG/LTR, onde a

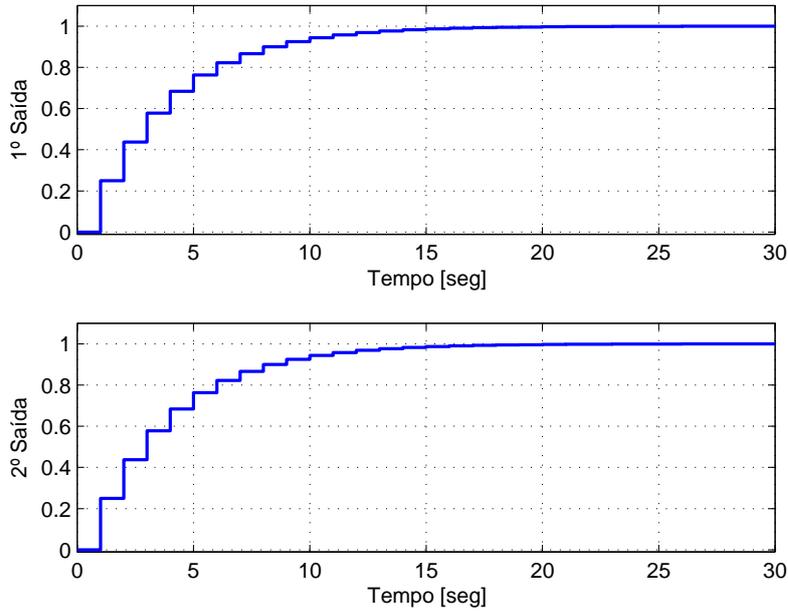


Figura 15 – Resposta ao degrau aplicado às entradas da malha objetivo.

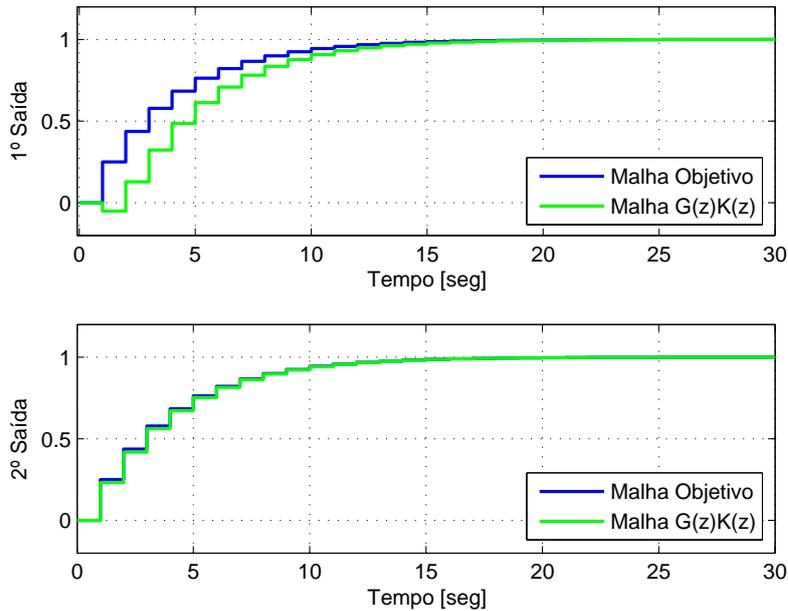


Figura 16 – Resposta ao degrau aplicado às entradas do observador e da malha de controle.

referência para a a entrada 1 é aplicada em 0 segundo e a referência para a entrada 2 em 30 segundos.

Observando-se as Figuras 17 e 18, nota-se que os valores singulares de sensibilidade do sistema respeitaram o limitante de sensibilidade e o limitante de rastreamento, portanto possui boas propriedades de *loop shaping*. Note que em baixas frequências o sistema no tempo discreto se comporta como o sistema no tempo contínuo. Nas altas

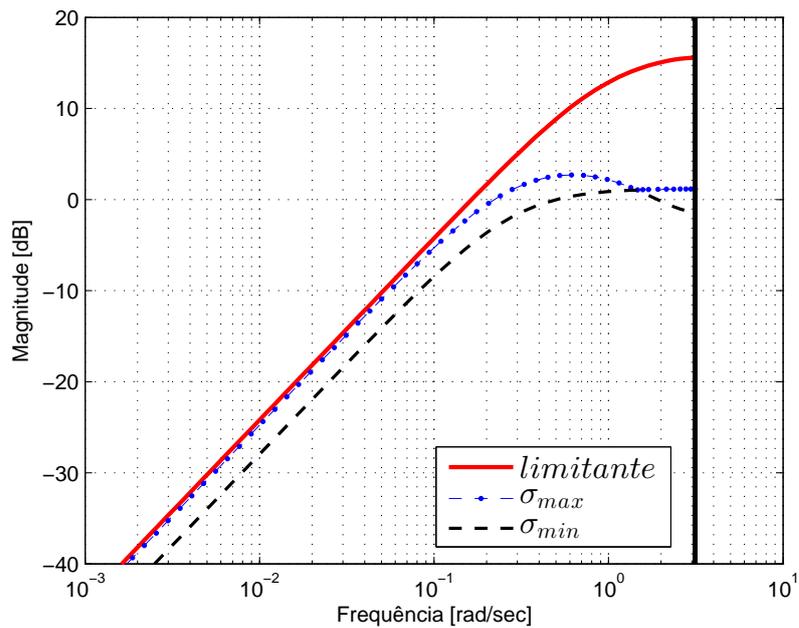


Figura 17 – Valores singulares da sensibilidade.

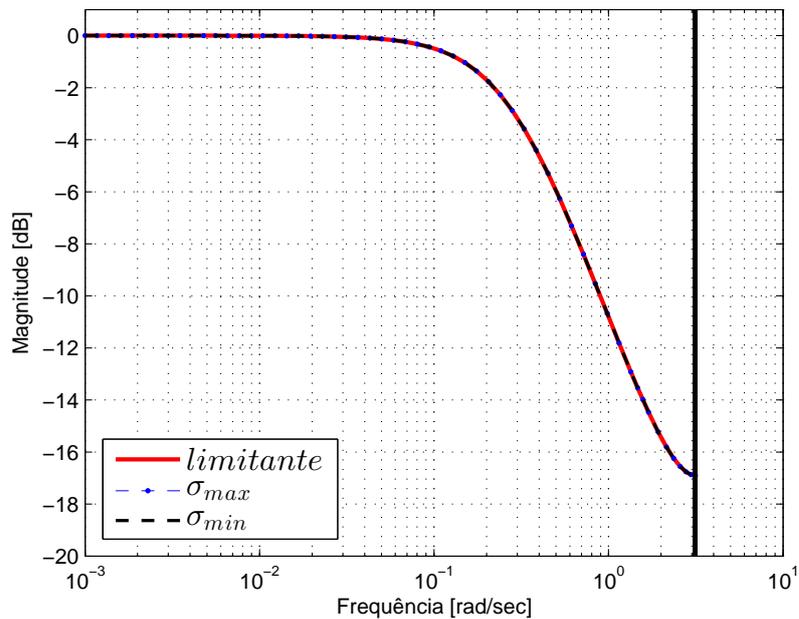


Figura 18 – Valores singulares da sensibilidade complementar.

frequências a aproximação angular para a função seno se torna inválida e o comportamento do sistema discreto difere do contínuo após a frequência de cruzamento. O gráfico dos valores singulares no tempo discreto está interrompido na frequência de Nyquist para o período de amostragem adotado.

Analisando-se as figuras 19 e 20 pode ser notado que a resposta em cada saída tende ao comportamento de um sistema de primeira ordem.

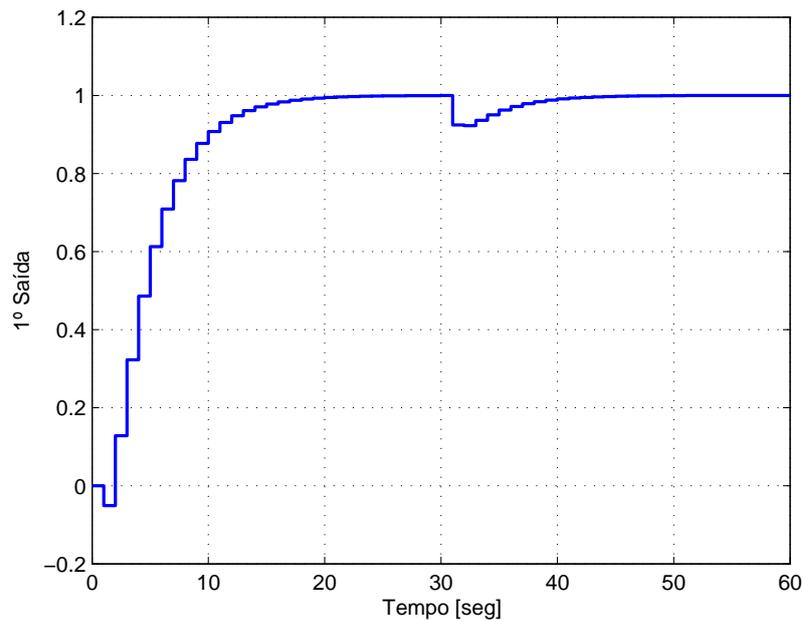


Figura 19 – Resposta ao degrau aplicado a primeira entrada da malha compensada.

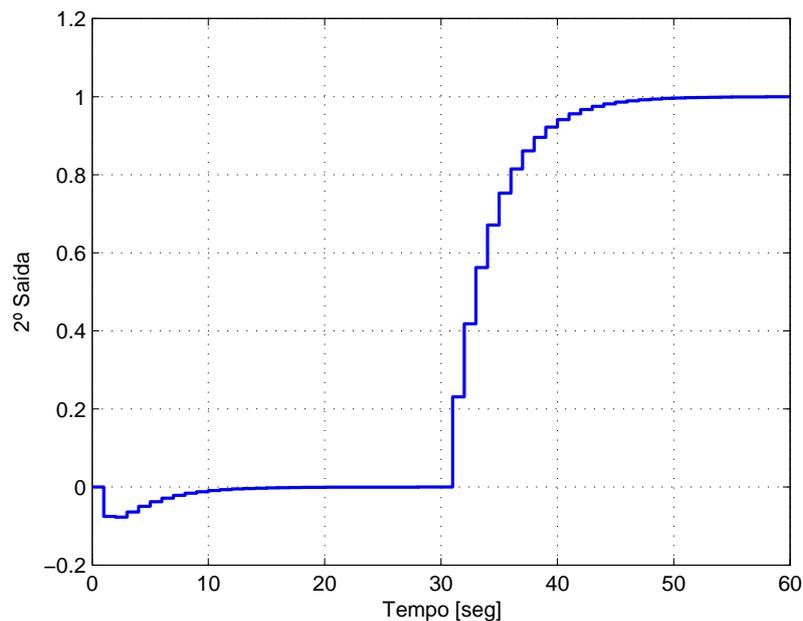


Figura 20 – Resposta ao degrau aplicado a segunda entrada da malha compensada.

4.3 Helicóptero AH-64 no Tempo Contínuo

Nesta seção será apresentada uma simulação de um modelo de uma planta real de uma aeronave. A modelagem em variáveis de estado do helicóptero AH-64 linearizado em 240 km/h está em (33), e é dada por (4.7), em que $u(t)$ é a velocidade longitudinal (em pés/s), $w(t)$ é a velocidade vertical (em pés/s), q é a velocidade angular de inclinação (em graus/s) e $\theta(t)$ é o ângulo de inclinação (em graus). As entradas de

controle são o cíclico longitudinal $\delta_l(t)$ e o coletivo $\delta_c(t)$ ambos em polegadas. As saídas controladas são a velocidade longitudinal e o ângulo de inclinação.

$$\begin{bmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{w}(t) \\ \dot{q}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0649 & 0,0787 & 0,1705 & -0,5616 \\ 0,0386 & -0,9390 & 4,2277 & 0,0198 \\ 0,1121 & -0,4254 & -0,7968 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ w(t) \\ q(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,9454 & 0,5313 \\ -8,6476 & -10,7690 \\ 19,0824 & -2,8959 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_l(t) \\ \delta_c(t) \end{bmatrix} \quad (4.7a)$$

$$\begin{bmatrix} w(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ w(t) \\ q(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} \quad (4.7b)$$

A tabela 3 contém os polos e o zero do modelo. O sistema é estável em malha aberta e possui apenas um zero de fase não-mínima.

Polos	$s_1 = -0,8711 \pm j1,3253$ $s_2 = -0,0292 \pm j0,1383$
Zeros	$s = 0,6633$

Tabela 3 – Polos e zero do modelo AH-64.

A Figura 21 apresenta o diagrama de valores singulares da planta em malha aberta. Analisando os polos do sistema, conclui-se que ele é estável em malha aberta, como pode ser observado nas Figuras 22 e 23, as quais mostram o comportamento do sistema em malha aberta para um degrau aplicado em cada uma das entradas do modelo. Além do mais, a representação do modelo é controlável e observável, completando os requisitos para se aplicar o controle LQG/LTR.

Analisando-se as Figuras 22 e 23, é possível notar que as saídas do modelo estão acopladas para cada degrau aplicado nas entradas.

4.3.1 Definição da Malha Objetivo

Será feito nesta seção a definição da malha objetivo. O parâmetro L foi escolhido conforme explicitado no capítulo anterior para um polo na origem, ou seja, $a = 0$.

Os parâmetros escolhidos para a aplicação do controle LQG/LTR são os seguintes

$$L = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0 \\ 2,6524 & 26,3454 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1,0000 \\ 0,0167 & 0,2130 \\ -0,2411 & -2,4664 \end{bmatrix} \quad \mu = 4 \quad (4.8)$$

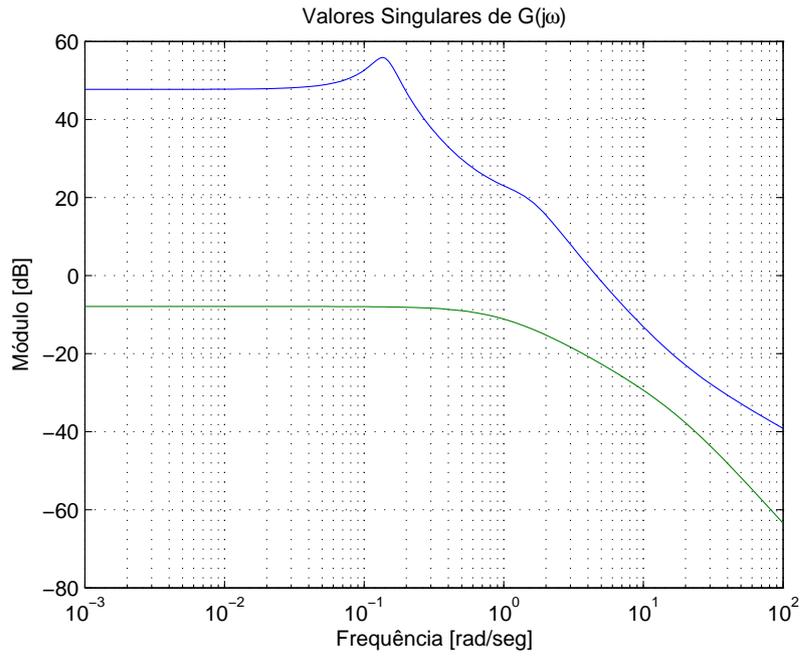


Figura 21 – Valores singulares do modelo em malha aberta.

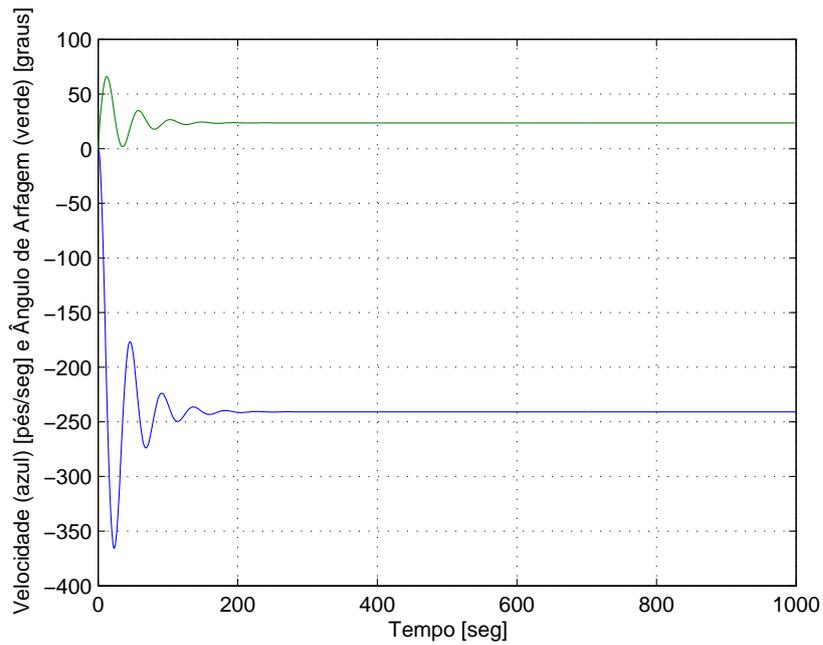


Figura 22 – Resposta ao degrau aplicado a primeira entrada do modelo.

em que os ganhos do observador e do controlador são dados respectivamente por:

$$K_F = \begin{bmatrix} 0,2500 & 0 \\ 0,6631 & 6,5864 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0,2500 \\ 0,0042 & 0,0533 \\ -0,0603 & -0,6166 \end{bmatrix} \quad K'_C = 10^3 \begin{bmatrix} -5,1224 & -7,1951 \\ -0,0165 & -0,5097 \\ 0,3193 & -0,7132 \\ 8,9068 & 8,4803 \\ 0,1466 & -0,0256 \\ -0,0256 & 0,0825 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

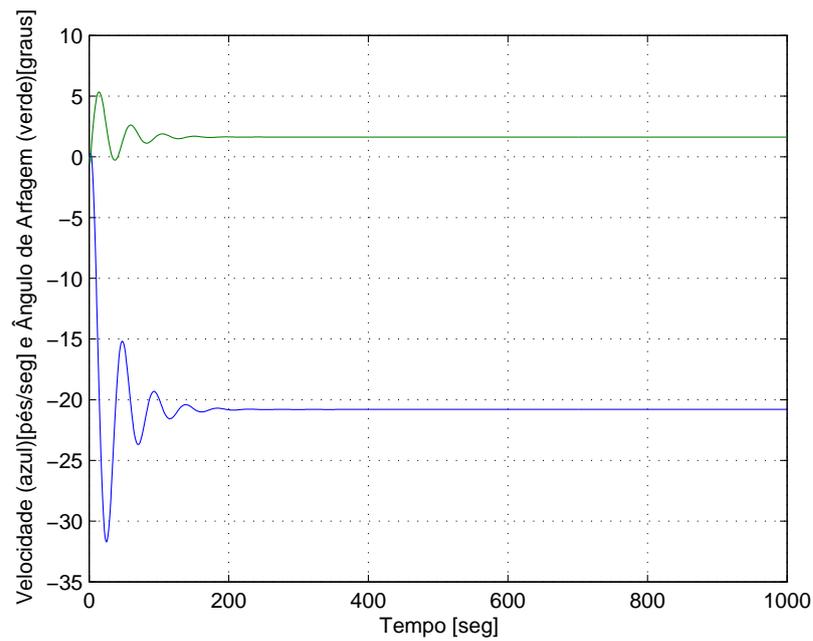


Figura 23 – Resposta ao degrau aplicado a segunda entrada do modelo.

Na Figura 24 é mostrado a resposta ao degrau em ambas entradas de referência da malha objetivo projetada.

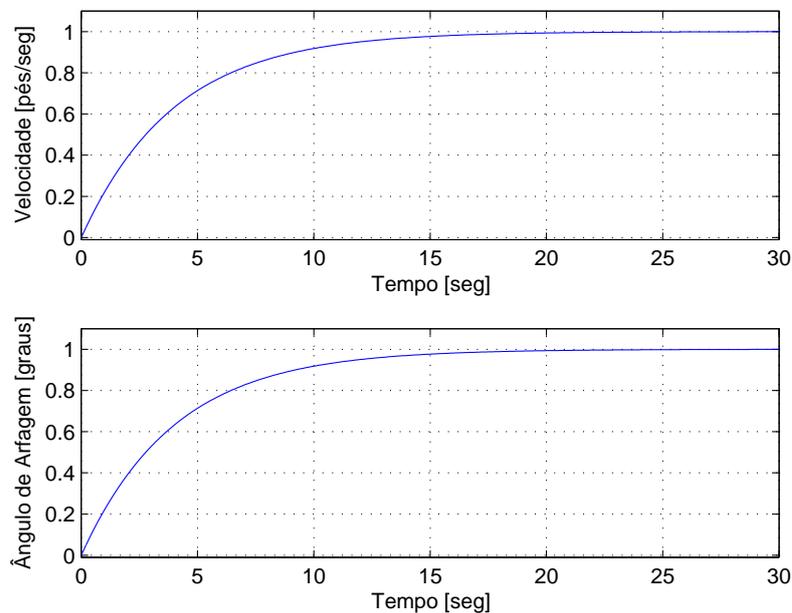


Figura 24 – Resposta ao degrau aplicado às entradas da malha objetivo.

4.3.2 A Recuperação da Malha Objetivo

Nesta seção será apresentado a verificação da recuperação da malha objetivo, comparando-se a resposta ao degrau unitário da malha objetivo $C\Phi(s)K_F$ com a resposta

ao degrau unitário da malha de controle $G(s)K(s)$.

Para a performance da recuperação obtida com o controle LQG/LTR além dos parâmetros L e μ adotados anteriormente, o parâmetro ρ foi feito igual a 0,0001. De posse destes parâmetros foi traçada a resposta ao degrau unitário da malha objetivo e da malha de controle $G(s)K(s)$ na Figura 25.

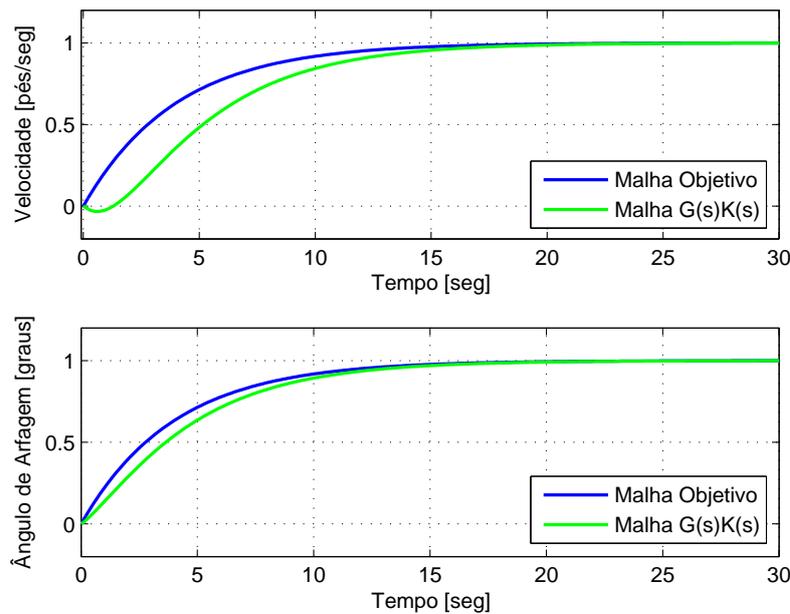


Figura 25 – Resposta ao degrau aplicado às entradas do observador e da malha de controle.

4.3.3 Controle LQG/LTR

Considere a matriz L escolhida como em (3.17) e $\mu = 4$. As Figuras 26 e 27 mostram os valores singulares da função sensibilidade e sensibilidade complementar e as Figuras 28 e 29 a resposta ao degrau utilizando-se do controle LQG/LTR, onde a referência para a velocidade é aplicada em 0 segundo e a referência para o ângulo de arfagem em 30 segundos.

Observando-se as Figuras 26 e 27, nota-se que o sistema foi limitado pelo limitante de sensibilidade e limitante de rastreamento, portanto possui boas propriedades de *loop shaping*.

Analisando-se as figuras 28 e 29 pode ser notado que a resposta em cada saída tende ao comportamento de um sistema de primeira ordem. É importante notar que o objetivo deste exemplo não é projetar um controlador para uma aplicação aeronáutica real, mas ilustrar os resultados obtidos no capítulo anterior.

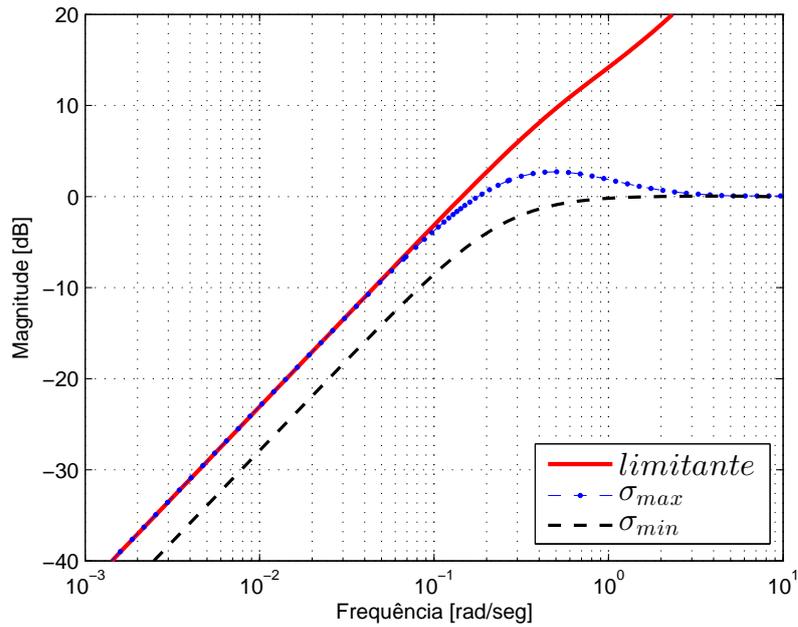


Figura 26 – Valores singulares da sensibilidade.

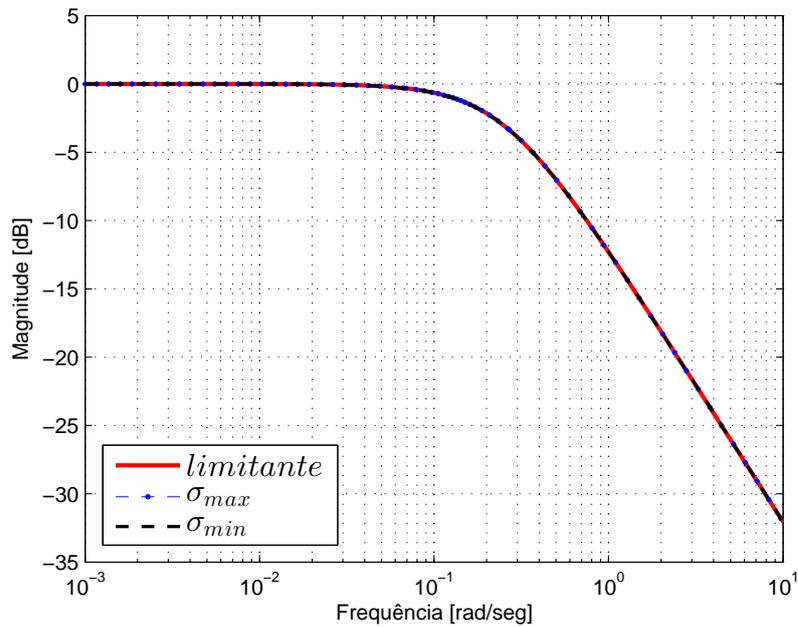


Figura 27 – Valores singulares da sensibilidade complementar.

4.4 Helicóptero AH-64 no Tempo Discreto

Nesta seção será apresentada uma simulação de um modelo discreto (com período de amostragem de 1 segundo) de uma planta real de uma aeronave. A modelagem em variáveis de estado do helicóptero AH-64 linearizado em 240 km/h está em (33), e é dada por (4.10).

A tabela 4 contém os polos e os zeros do modelo que possui apenas um zero de

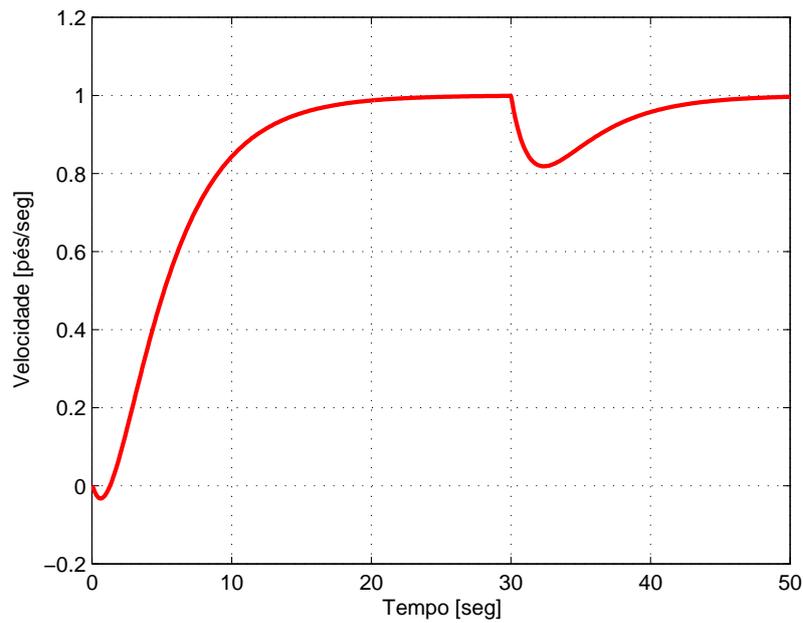


Figura 28 – Resposta ao degrau aplicado a primeira entrada da malha compensada.

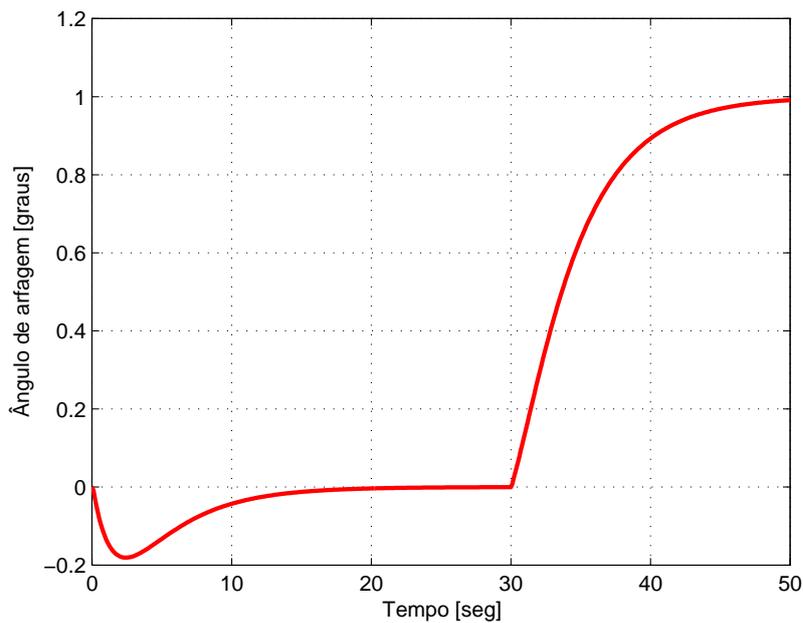


Figura 29 – Resposta ao degrau aplicado a segunda entrada da malha compensada.

fase não-mínima.

Polos	$z = 0,5100 \pm j0,3980$ $z = 0,9831 \pm j 0,0681$
Zeros	$z = -0,9852$ $z = 1,4098$

Tabela 4 – Polos e zero do modelo AH-64 discreto.

$$\begin{bmatrix} u(k+1) \\ w(k+1) \\ q(k+1) \\ \theta(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9403 & 0,0443 & -0,0200 & -0,5442 \\ 0,1349 & 0,0772 & 1,2975 & -0,0237 \\ 0,0542 & -0,1280 & 0,1183 & -0,0225 \\ 0,0363 & -0,1060 & 0,5414 & 0,9914 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k) \\ w(k) \\ q(k) \\ \theta(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,7494 & 0,1883 \\ 15,8691 & -8,4960 \\ 11,2128 & -0,4075 \\ 6,9776 & -0,5326 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_l(k) \\ \delta_c(k) \end{bmatrix} \quad (4.10a)$$

$$\begin{bmatrix} w(k) \\ \theta(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k) \\ w(k) \\ q(k) \\ \theta(k) \end{bmatrix} \quad (4.10b)$$

A Figura 30 apresenta o diagrama de valores singulares da planta em malha aberta, a representação do modelo é controlável e observável, completando os requisitos para se aplicar o controle LQG/LTR.

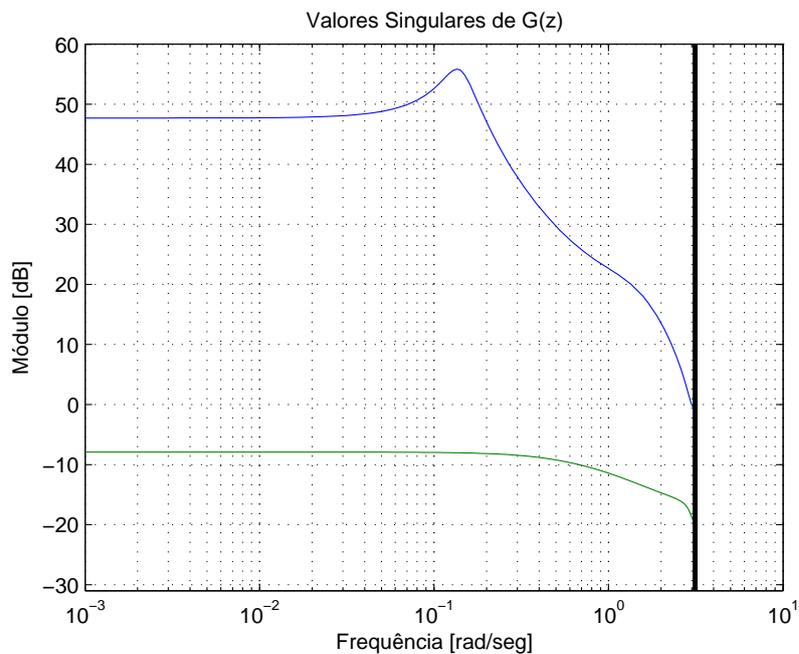


Figura 30 – Valores singulares do modelo em malha aberta.

4.4.1 Definição da Malha Objetivo

Nesta seção será feita a definição da malha objetivo. O parâmetro L foi escolhido conforme explicitado no capítulo anterior para um polo na origem, ou seja, $e^{aT} = 1$.

Os parâmetros escolhidos para a aplicação do controle LQG/LTR são os seguintes

$$L = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0 \\ 2,6524 & 26,3454 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1,0000 \\ 0,0167 & 0,2130 \\ -0,2411 & -2,4664 \end{bmatrix}, \quad \mu = 2\sqrt{3}, \quad \mu_T = 4 \quad (4.11)$$

em que os ganhos do observador e do controlador são dados respectivamente por:

$$K_F = \begin{bmatrix} 0,2500 & 0 \\ 0,6631 & 6,5864 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0,2500 \\ 0,0042 & 0,0533 \\ -0,0603 & -0,6166 \end{bmatrix} \quad K'_C = 10^3 \begin{bmatrix} -5,1224 & -7,1951 \\ -0,0165 & -0,5097 \\ 0,3193 & -0,7132 \\ 8,9068 & 8,4803 \\ 0,1466 & -0,0256 \\ -0,0256 & 0,0825 \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Na Figura 31 é mostrado a resposta ao degrau em ambas entradas de referência da malha objetivo projetada.

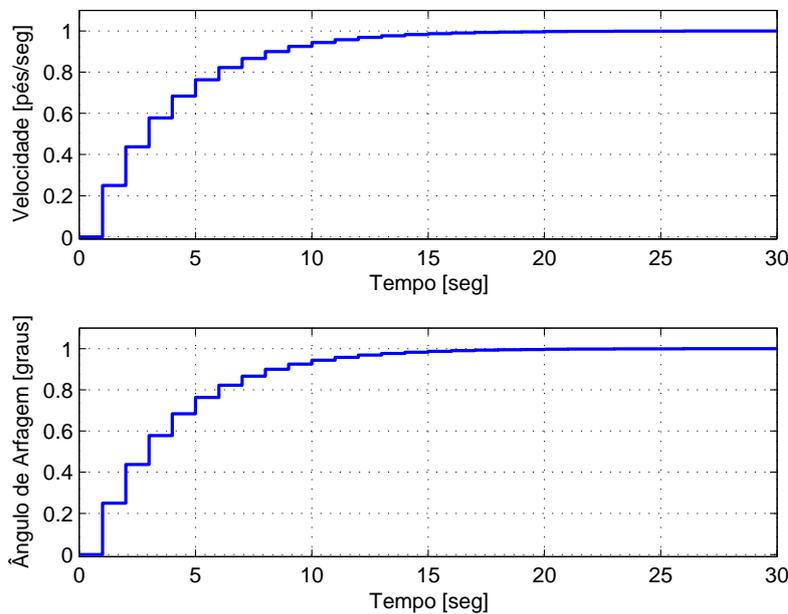


Figura 31 – Resposta ao degrau aplicado às entradas da malha objetivo.

4.4.2 A Recuperação da Malha Objetivo

Nesta seção será feito a verificação da recuperação da malha objetivo, comparando-se a resposta ao degrau unitário da malha objetivo $C\Phi(z)K_F$ com a resposta ao degrau

unitário da malha de controle $G(z)K(z)$.

Para a performance da recuperação obtida com o controle LQG/LTR além dos parâmetros L e μ adotados anteriormente o parâmetro ρ foi feito igual a 0,0001. De posse destes parâmetros foi traçada a resposta ao degrau unitário da malha objetivo e da malha de controle $G(z)K(z)$ na Figura 32

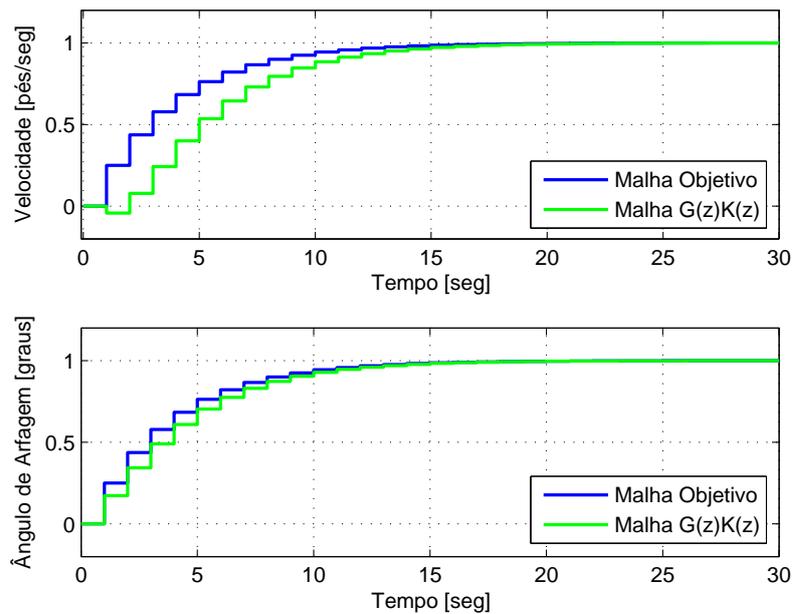


Figura 32 – Resposta ao degrau aplicado às entradas do observador e da malha de controle.

4.4.3 Controle LQG/LTR

Considere a matriz L escolhida como em (3.26) e $\mu = 4$. As Figuras 33 e 34 mostram os valores singulares da função sensibilidade e sensibilidade complementar e as Figuras 35 e 36 a resposta ao degrau utilizando-se do controle LQG/LTR, onde a referência para a velocidade é aplicada em 0 segundo e a referência para o ângulo de arfagem em 30 segundos.

Observando-se as Figuras 33 e 34, nota-se que o sistema foi limitado pelo limitante de sensibilidade e limitante de rastreamento, portanto possui boas propriedades de *loop shaping*.

Analisando-se as Figuras 35 e 36 pode ser notado que a resposta em cada saída tende ao comportamento de um sistema de primeira ordem.

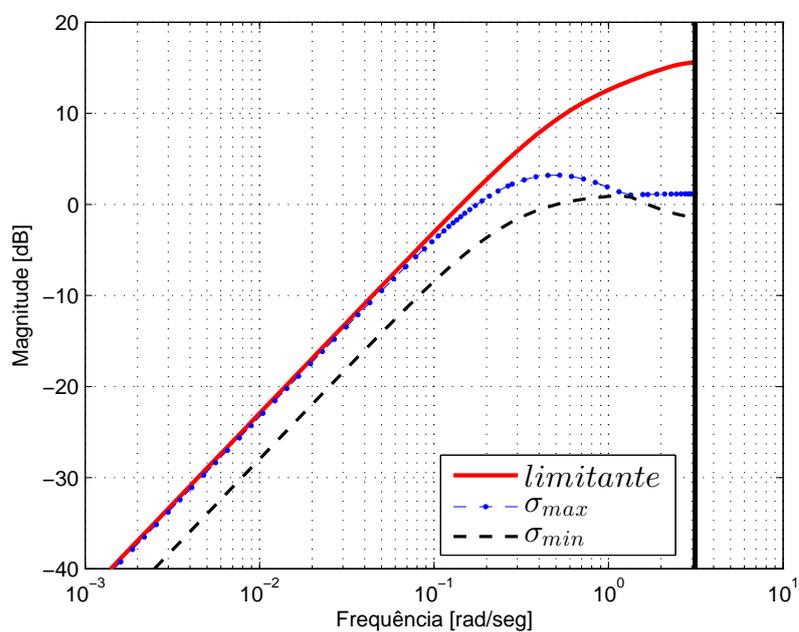


Figura 33 – Valores singulares da sensibilidade.

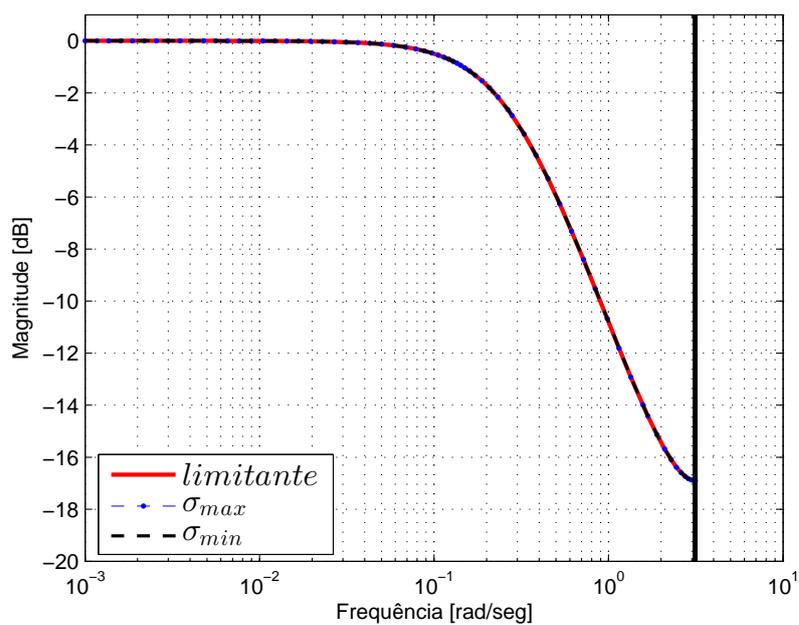


Figura 34 – Valores singulares da sensibilidade complementar.

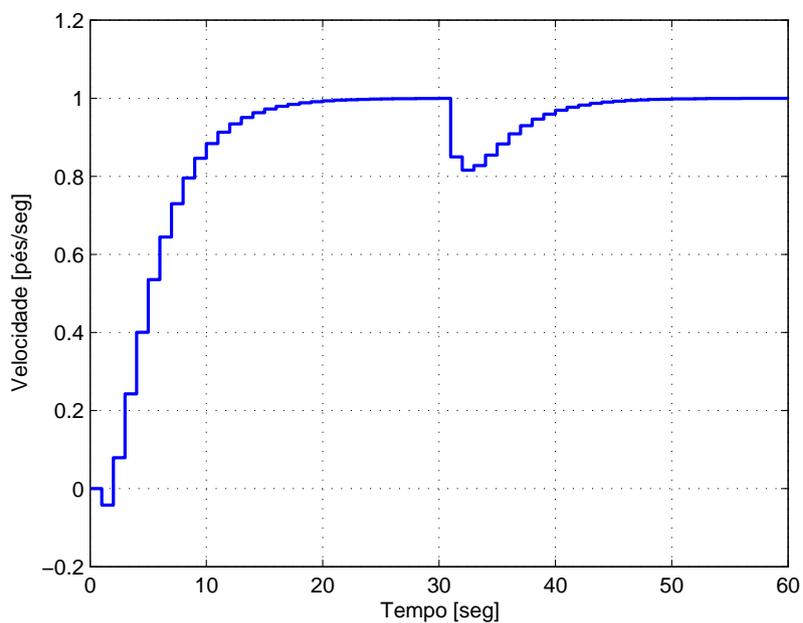


Figura 35 – Resposta ao degrau aplicado a primeira entrada da malha compensada.

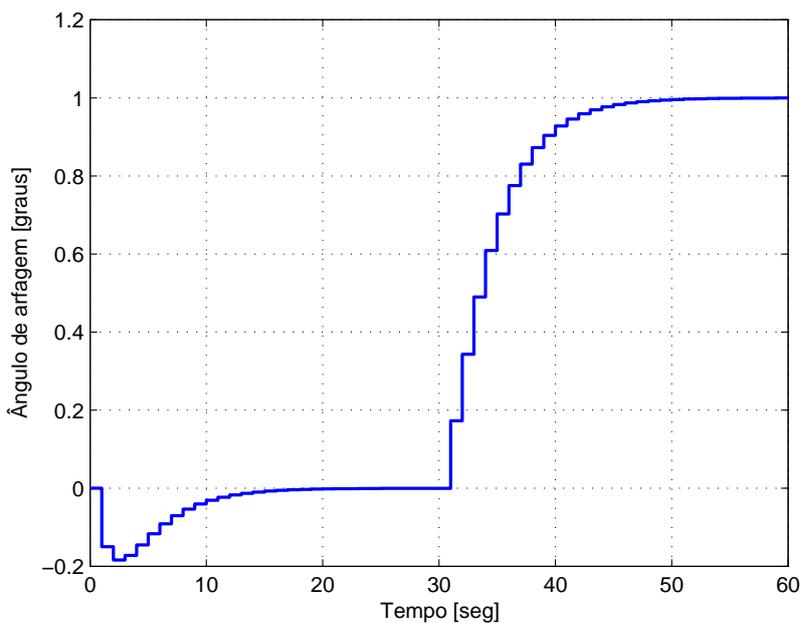


Figura 36 – Resposta ao degrau aplicado a segunda entrada da malha compensada.

5 Conclusão e Trabalhos Futuros

Nesta dissertação foi apresentado uma o comportamento do Princípio de Recuperação da Malha Objetivo em sistemas de fase não-mínima na síntese LQG. A aplicabilidade do procedimento LTR está sujeita às restrições apresentadas para o *loop shaping* da malha objetivo. Como foi visto, o controle aplicado a sistemas de fase não-mínima encontra algumas limitações adicionais.

Foi apresentado o já conhecido sistema de controle LQG/LTR aplicado a um sistema de fase não-mínima, onde foi justificada a eficácia de controle dessa metodologia para esse tipo de sistema. Nesta abordagem, através da aplicação de um fator *all pass*, foi possível realizar a modelagem e projeto de um sistema de controle LQG/LTR para um sistema de fase não-mínima. Foi mostrado que a forma exata dos valores singulares da matriz de transferência de malha fechada e da matriz de transferência sensibilidade é conhecida. Além disso, os limites da função sensibilidade podem ser expressos através de uma expressão escrita diretamente em função da planta do processo e parâmetros de projeto, fornecendo mais informações a respeito dos limites impostos pelas características de fase não-mínima. Para a análise de frequência dos valores singulares, foi visto que o zero de fase não-mínima não influencia os limites da função sensibilidade complementar, mas influencia apenas os limites da função sensibilidade.

A simulação através do controle LQG/LTR deixou clara a semelhança da malha objetivo projetada a um sistema de primeira ordem, nessa simulação o controle LQG/LTR impôs as restrições de desempenho com sucesso.

Em 1981, Safonov et al. concluíram que a síntese LQG era um caso específico da otimização \mathcal{H}_2 (34); já em 1989 Doyle et al. constataram que as otimizações \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ diferiam por apenas um parâmetro que, quando tende ao infinito, leva a otimização \mathcal{H}_∞ a se igualar à \mathcal{H}_2 (25). Baseados nessas ideias, de Paula e Ferreira constataram que a recuperação da malha objetivo ocorria para a otimização \mathcal{H}_∞ da mesma forma que para a otimização \mathcal{H}_2 , chegando com êxito a uma nova metodologia de controle chamada então de \mathcal{H}_∞ /LTR (35). Sugere-se então, como trabalhos futuros, estender os resultados obtidos neste trabalho com o controle LQG/LTR para a metodologia \mathcal{H}_∞ /LTR, de forma a representar os limites de desempenho com a síntese \mathcal{H}_∞ da mesma maneira como foi mostrado com a síntese LQG, ou seja, representar o formato exato dos limites dos valores singulares das funções sensibilidade e sensibilidade complementar através de equações, na síntese \mathcal{H}_∞ /LTR.

Referências

- 1 BODE, H. W. et al. Network analysis and feedback amplifier design. van Nostrand, 1945. Citado na página 15.
- 2 EVANS, W. R. Control system synthesis by root locus method. *American Institute of Electrical Engineers, Transactions of the, IEEE*, v. 69, n. 1, p. 66–69, 1950. Citado na página 15.
- 3 ZIEGLER, J. G.; NICHOLS, N. B. Optimum settings for automatic controllers. *trans. ASME*, v. 64, n. 11, 1942. Citado na página 15.
- 4 OGATA, K. *Modern control engineering*. [S.l.]: Prentice Hall PTR, 2010. Citado na página 15.
- 5 SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*. [S.l.]: Wiley, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 15, 20 e 23.
- 6 DOYLE, J. C.; STEIN, G. Multivariable feedback design: Concepts for a classical/modern synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 24, p. 4–16, 1981. Citado 3 vezes nas páginas 15, 16 e 33.
- 7 KWAKERNAAK, H.; SIVAN, R. The maximally achievable accuracy of linear optimal regulators and linear optimal filters. *Automatic Control, IEEE Transactions on, IEEE*, v. 17, n. 1, p. 79–86, 1972. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 24.
- 8 ATHANS, M. A tutorial on the LQG/LTR method. In: *Proc. of the American Control Conference*. [S.l.: s.n.], 1986. p. 1289–1296. Citado 5 vezes nas páginas 16, 24, 27, 31 e 33.
- 9 ZHANG, Z.; FREUDENBERG, J. S. Loop transfer recovery for nonminimum phase plants. *Automatic Control, IEEE Transactions on, IEEE*, v. 35, n. 5, p. 547–553, 1990. Citado 6 vezes nas páginas 16, 17, 33, 34, 35 e 40.
- 10 TZOU, Y.-Y.; WU, H.-J. LQG/LTR control of an ac induction servo drive. *Power Electronics, IEEE Transactions on, IEEE*, v. 10, n. 2, p. 214–221, 1995. Citado na página 16.
- 11 SILVA, D. L. F. da; PAULA, C. F. de; FERREIRA, L. H. C. Sobre a parametrização da malha objetivo no controle \mathcal{H}_∞ /LTR. In: *Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automatica*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 80–85. Citado 4 vezes nas páginas 16, 18, 26 e 27.
- 12 STEIN, G.; ATHANS, M. The LQG/LTR procedure for multivariable feedback control design. *Automatic Control, IEEE Transactions on, IEEE*, v. 32, n. 2, p. 105–114, 1987. Citado 5 vezes nas páginas 16, 25, 33, 34 e 35.
- 13 DOYLE, I.; STEIN, G. Robustness with observers. *IEEE Trans. Aut. Control*, v. 24, p. 607–611, 1979. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 22.
- 14 ATHANS, M. et al. Linear-quadratic gaussian with loop-transfer recovery methodology for the f-100 engine. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 9, n. 1, p. 45–52, 1986. Citado na página 16.

- 15 RIDGELY, D. B. et al. Linear-quadratic-gaussian with loop-transfer recovery methodology for an unmanned aircraft. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 10, n. 1, p. 82–89, 1987. Citado na página 16.
- 16 SHEPERD, C. L.; VALAVANI, L. Autopilot design for bank-to-turn missiles using lqg/ltr methodology. In: IEEE. *American Control Conference, 1988*. [S.l.], 1988. p. 579–586. Citado na página 16.
- 17 JR, J. W.; DOYLE, J.; HARVEY, C. *Tradeoffs in the design of multivariable feedback systems*. [S.l.], 1981. Citado na página 16.
- 18 MOORE, J.; XIA, L. Loop recovery and robust state estimate feedback designs. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, v. 32, n. 6, p. 512–517, 1987. Citado na página 16.
- 19 SILVA, J. L. V. P. d. Sobre a parametrização da malha objetivo no controle LQG/LTR em tempo discreto. 2015. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 31.
- 20 PAULA, C. F. de. Princípio de recuperação da malha objetivo aplicado ao controle \mathcal{H}_∞ . Citado 2 vezes nas páginas 18 e 22.
- 21 LEWIS, F. L.; SYRMOS, V. L. *Optimal control*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1995. Citado na página 22.
- 22 KWAKERNAAK, H. Optimal low-sensitivity linear feedback systems. *Automatica*, Elsevier, v. 5, n. 3, p. 279–285, 1969. Citado na página 23.
- 23 DOYLE, J. C.; STEIN, G. Multivariable feedback design: Concepts for a classical/modern synthesis. In: *IEEE Trans. on Auto. Control*. [S.l.: s.n.], 1981. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 25.
- 24 ZAMES, G. Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. *Automatic Control, IEEE Transactions on, IEEE*, v. 26, n. 2, p. 301–320, 1981. Citado na página 23.
- 25 DOYLE, J. C. et al. State-space solutions to standard \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control problems. *Automatic Control, IEEE Transactions on, IEEE*, v. 34, n. 8, p. 831–847, 1989. Citado 3 vezes nas páginas 23, 24 e 62.
- 26 DOYLE, J. C. Guaranteed margins for LQG regulators. *Automatic Control, IEEE Transactions on, IEEE*, v. 23, n. 4, p. 756–757, 1978. Citado na página 24.
- 27 GUARACY, F. H.; SILVA, D. L. da; FERREIRA, L. H. On the plant augmentation by integrators in the discrete-time LQG/LTR control. In: IEEE. *2014 IEEE Conference on Control Applications (CCA)*. [S.l.], 2014. p. 1152–1157. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 30.
- 28 MACIEJOWSKI, J. Asymptotic recovery for discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control, IEEE*, v. 30, n. 6, p. 602–605, 1985. Citado 3 vezes nas páginas 29, 34 e 35.
- 29 GOODMAN, G. C. The LQG/LTR method and discrete-time control systems. 1984. Citado na página 29.

- 30 ARCASOY, C. Return-difference-matrix properties for optimal stationary discrete Kalman filter. *Electrical Engineers, Proceedings of the Institution of, IET*, v. 118, n. 12, p. 1831–1834, 1971. Citado na página 30.
- 31 ZHANG, Z.; FREUDENBERG, J. S. Discrete-time loop transfer recovery for systems with nonminimum phase zeros and time delays. *Automatica*, Elsevier, v. 29, n. 2, p. 351–363, 1993. Citado na página 35.
- 32 GUARACY, F. H.; SILVA, D. L. da; FERREIRA, L. H. On the properties of augmented open-loop stable plants using LQG/LTR control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 24, p. 4–16, 2015. Citado 4 vezes nas páginas 36, 37, 38 e 39.
- 33 FITZSIMONS, P. M. Reducing the computation required to solve a standard minimax problem. *Automatica*, Elsevier, v. 31, n. 12, p. 1885–1887, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 55.
- 34 SAFONOV, M. G.; LAUB, A. J.; HARTMANN, G. L. Feedback properties of multivariable systems: the role and use of the return difference matrix. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 26, n. 1, p. 47–65, 1981. Citado na página 62.
- 35 PAULA, C. F. D.; FERREIRA, D.; CARVALHO, L. H. An easy-to-use/LTR control solution with mixed-sensitivity properties. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 56, n. 7, p. 1709–1713, 2011. Citado na página 62.