Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Matemática

Soluções Renormalizadas para uma Equação Parabólica com Expoentes Variáveis e Dados Iniciais em L^1

Eveline Lara Oliveira Reis

Orientadora: Prof a. Dra. Mariza Stefanello Simsen

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

Itajubá, 3 de março de 2017

Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Matemática

Soluções Renormalizadas para uma Equação Parabólica com Expoentes Variáveis e Dados Iniciais em L^1

Eveline Lara Oliveira Reis

Orientadora: Prof a. Dra. Mariza Stefanello Simsen

Dissertação submetida ao Programa de Pós–Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Matemática

Área de Concentração: Análise Matemática

Itajubá – MG
3 de março de 2017

Dedico este trabalho aos meus pais, Ana Maria Lara Reis e Gilberto Oliveira Reis (in memoriam) e também ao meu pai de todo coração, Onofre Figueiredo de Lara, meus maiores exemplos de perseverança na busca do conhecimento e que apesar das dificuldades, souberam transmitir toda sua sabedoria e apoio constante.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, que me guiou e concedeu persistência e sabedoria para continuar, coragem para acreditar, força para não desistir e proteção para me amparar nos dias difíceis.

Aos meus pais, Ana Maria Lara Reis, Gilberto Oliveira Reis *(in memoriam)* e Onofre Figueiredo de Lara, pelo imenso apoio, confiança, força transmitida e motivação incondicional.

Ao meu namorado, Diego Morais Junqueira, pelo carinho, amor, compreensão e paciência, por sempre estar ao meu lado, me incentivando e amparando da melhor forma.

À minha orientadora, Prof^{a}. Dr^{a}. Mariza Stefanello Simsen, primeiramente pela pessoa amiga que sempre representou, apesar de todo profissionalismo. Obrigada pela paciência e disponibilidade, por todo suporte didático e direcionamento para que este trabalho fosse concluído.

Ao Prof. Dr. Jacson Simsen, pelos ensinamentos e pelas conversas produtivas que incentivaram minha evolução como estudante e profissional.

Aos colegas do mestrado e principalmente aos amigos, Marco Antônio, Marcos e Karine, pelo companheirismo e pela amizade ao longo desses dois anos de mestrado.

Aos funcionários e ao corpo docente do Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Itajubá, em especial aos professores que puderam transmitir um pouco do seu conhecimento contribuindo para minha formação.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

"O sucesso nasce do querer, da determinação e persistência em se chegar a um objetivo. Mesmo não atingindo o alvo, quem busca e vence obstáculos, no mínimo fará coisas admiráveis."

José de Alencar

Resumo

Este trabalho apresenta resultados de existência de solução renormalizada u para a equação parabólica não-linear com expoente variável

$$\begin{cases} \partial_t u - div(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = f & \text{em} \quad Q_T, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma_T, \\ u(0,\cdot) = u_0(\cdot) & \text{em} \quad \Omega, \end{cases}$$

em que $div(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) := \Delta_{p(x)}$ denota o operador p(x)-Laplaciano, os dados iniciais f e u_0 são não-regulares, isto é, $u_0 \in L^1(\Omega)$ e $f \in L^1(Q_T)$, e $p : \overline{\Omega} \longrightarrow (1, +\infty)$ é uma função contínua. Aqui, Ω denota um domínio espacial aberto limitado em $\mathbb{R}^N$ com $N \geq 2$, cuja fronteira é dada por $\partial\Omega$, $Q_T = (0,T) \times \Omega$ com $T > 0$ e $\Sigma_T = (0,T) \times \partial\Omega$. Usando a teoria de semigrupos não-lineares, esse tipo de solução é comparado com outros tipos de soluções, tais como solução integral e solução mild, para problemas de evolução envolvendo operadores acretivos em espaços de Banach. A partir da dedução de existência de uma única solução mild para o problema parabólico acima, nas condições iniciais dadas, verifica-se a unicidade de uma solução renormalizada para o mesmo.

Palavras–chave: Equação parabólica, Expoentes variáveis, Solução renormalizada, Existência, Unicidade.

Abstract

This study presents results about existence of renormalized solution u for a nonlinear parabolic equation with variable exponent

$$\begin{cases} \partial_t u - div(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = f & \text{in} \quad Q_T, \\ u = 0 & \text{on} \quad \Sigma_T, \\ u(0,\cdot) = u_0(\cdot) & \text{in} \quad \Omega, \end{cases}$$

where $div(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) := \Delta_{p(x)}$ denotes the p(x)-Laplacian operator, the initial data f and u_0 are non-regular, i.e., $u_0 \in L^1(\Omega)$ e $f \in L^1(Q_T)$, and $p : \overline{\Omega} \longrightarrow (1, +\infty)$ is a continuous function. Here, Ω denotes an open limited domain in $\mathbb{R}^N$ with $N \geq 2$, whose boundary is given by $\partial\Omega$, $Q_T = (0,T) \times \Omega$ with $T > 0$ and $\Sigma_T = (0,T) \times \partial\Omega$. Using nonlinear semigroup theory, this solution is compared to other solutions, such as integral solution and mild solution to problems involving the evolution of accretive operators in Banach space. From the deduction of the existence of a single mild solution to the above parabolic problem, in the initial conditions, it is possible to verify the uniqueness of a renormalized solution.

Keywords: Parabolic equation, Variable exponents, Renormalized solution, Existence, Uniqueness.

Sumário

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

O estudo de problemas com expoente variável é um novo e interessante tópico que impõe dificuldades matemáticas maiores do que quando tratamos de um problema com expoente constante.

Neste trabalho estudamos resultados de existência, regularidade, e posteriormente, unicidade de solução renormalizada u para a equação parabólica não-linear com expoente variável

$$\begin{cases} \partial_t u - div(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = f & \text{em} \quad Q_T, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma_T, \\ u(0,\cdot) = u_0(\cdot) & \text{em} \quad \Omega, \end{cases}$$

sendo $\Delta_{p(x)} := div(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)$ o operador $p(x)$-Laplaciano, $p : \overline{\Omega} \longrightarrow (1, +\infty)$ uma função contínua, Ω um domínio espacial aberto limitado em $\mathbb{R}^N$ com $N \geq 2$, cuja fronteira é dada por $\partial\Omega$. Também, os dados iniciais f e u_0 são não-regulares, isto é, $u_0 \in L^1(\Omega)$ e $f \in L^1(Q_T)$, $Q_T = (0,T) \times \Omega$ com $T > 0$ e $\Sigma_T = (0,T) \times \partial\Omega$.

A noção de solução renormalizada foi introduzida em [16] por DiPerna e Lions em seus estudos sobre a equação de Boltzmann. Essa noção foi adaptada ao estudo de alguns problemas elípticos não-lineares com condições de fronteira Dirichlet e mais tarde estendida a problemas parabólicos e hiperbólicos mais gerais.

Algumas motivações físicas que incentivam o estudo de problemas desse tipo, ou seja, de equações parabólicas envolvendo o $p(x)$-Laplaciano, provem de aplicações para fluidos eletro-reológicos como uma classe importante de fluidos não-Newtonianos. Outras aplicações notáveis estão relacionadas ao processamento de imagem e elasticidade.

Inicialmente, os Capítulos 2 e 3 foram propostos a fim de oferecer base para o desenvolvimento do Capítulo 4. Assim, no Capítulo 2 apresentamos algumas definições e resultados importantes da teoria de Análise Funcional, Medida e Integração e também sobre distribuição e aproximação por funções suaves.

Já no Capítulo 3, apresentamos definições e resultados cruciais, encontrados principalmente em [19] e [28], sobre produtos semi-internos, operadores acretivos, evoluções governadas por operadores acretivos, teoria de semigrupos não-lineares e espaços de Lebesgue e Sobolev com expoente variável.

Por fim, no Capítulo 4, baseado em [6], consideramos o problema parabólico mencionado e apresentamos a definição de solução renormalizada, tal como as propriedades cabíveis a ela e a demonstração do teorema principal, o Teorema 4.1.1, que aborda a existência e regularidade da solução renormalizada u. Usando argumentos da teoria de semigrupos não-lineares, deduzimos que uma solução mild u com dados suaves, ou seja, $u_0 \in L^1(\Omega)$ e $f \in W^{1,1}(0,T;L^1(\Omega))$, é uma solução forte, fraca e também renormalizada do problema. Embasado nessas deduções, a prova de existência do Teorema 4.1.1 é feita via renormalização e utiliza a aproximação de soluções, mostrando cada condição exigida para ser uma solução renormalizada. A regularidade é consequência direta de um resultado técnico apresentado. Por fim, temos a unicidade de u como solução renormalizada.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo serão apresentados algumas definições e resultados que serão mencionados ao longo deste trabalho.

2.1 Uma coletânea de resultados

As definições e resultados desta seção podem ser encontrados em [4, 6, 7, 9, 10, 12, 19, 21, 26, 28, 30, 31].

Definição 2.1.1. *Seja E um espaço vetorial. A função $||\cdot|| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma norma se as seguintes propriedades estiverem satisfeitas:*

(i) $||x|| \geq 0$ *para todo* $x \in E$ *e* $||x|| = 0$ *se, e somente se,* $x = 0$*;*

(ii) $||ax|| = |a|.||x||$ *para todo escalar* a *e todo* $x \in E$*;*

(iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ *para quaisquer* $x, y \in E$*.*

Definição 2.1.2. *Um espaço vetorial munido de uma norma será chamado de espaço vetorial normado, ou simplesmente espaço normado.*

Definição 2.1.3. *Um espaço normado E é chamado de espaço de Banach quando for um espaço métrico completo, ou seja, toda sequência de Cauchy é convergente, com a métrica induzida pela norma.*

Definição 2.1.4. *Um espaço normado E que contém um subconjunto enumerável e denso em E é dito separável.*

Definição 2.1.5. *O conjunto de todos os operadores lineares de E em F é denotado por L(E,F) e o conjunto de todos os operadores lineares contínuos de E em F é denotado por B(E,F). Quando F é o corpo dos escalares, ou seja,* $E^* = B(E, \mathbb{K})$ *chamamos esse espaço de dual topológico de E, ou simplesmente dual de E, e dizemos que seus elementos são funcionais lineares contínuos.*

Definição 2.1.6. *Um espaço normado E é dito reflexivo se o mergulho canônico* $J : E \longrightarrow E^{**}$ *for sobrejetor, ou seja,* $J_E(E) = E^{**}$.

Definição 2.1.7. *Um espaço de Banach real X é chamado uniformemente convexo se para cada* $\varepsilon \in (0, 2]$ *existe* $\delta(\varepsilon) > 0$ *tal que se* $||x|| \leq 1$, $||y|| \leq 1$ *e* $||x - y|| \geq \varepsilon$, *então* $||x + y|| \leq 2(1 - \delta(\varepsilon))$.

Observação 2.1.1. *Note que o espaço de Hilbert é uniformemente convexo.*

Teorema 2.1.1. *(Milman) Todo espaço de Banach real uniformemente convexo é reflexivo.*

Corolário 2.1.1. *Um espaço de Banach real no qual seu dual topológico é uniformemente convexo, é reflexivo.*

Teorema 2.1.2. *(Clarkson) Se M é um subconjunto mensurável limitado em* $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ *e* $p \in (1, \infty)$, *então* $L^p(M)$ *dotado com a norma usual é uniformemente convexo.*

Teorema 2.1.3. *Se X é um espaço de Banach uniformemente convexo e* $p \in (1, 2]$, *então* $L^p([a, b]; X)$ *dotado com a norma usual é uniformemente convexo.*

Teorema 2.1.4. *(Teorema de Hahn-Banach) Seja G um subespaço de um espaço normado E sobre* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *e seja* $\phi : G \longrightarrow \mathbb{K}$ *um funcional linear contínuo. Então existe um funcional linear contínuo* $\psi : E \longrightarrow \mathbb{K}$ *cuja restrição a G coincide com* ϕ *e* $||\phi|| = ||\psi||$.

Teorema 2.1.5. *Sejam E um espaço vetorial normado separável e* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência limitada em* E^*. *Então,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *possui subsequência convergente na topologia fraca-*.*

Proposição 2.1.1. **(a)** *(Desigualdade de Hölder para expoentes constantes para séries) Sejam $p, q \in \mathbb{R}$ índices conjugados, ou seja, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, com $1 < p, q < \infty$. Se $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^p$, $(b_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^q$ são sequências, então $(a_j b_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^1$ e*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j b_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Adicionalmente, quando $p, q = 2$ tal desigualdade é chamada de Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

(b) *(Desigualdade de Hölder para expoentes constantes para integrais) Sejam $p, q \in \mathbb{R}$ índices conjugados, ou seja, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, com $1 < p, q < \infty$. Se $f \in L^p(X)$, $g \in L^q(X)$ são funções mensuráveis, então $fg \in L^1(X)$ e*

$$\int_X |f(x)g(x)|\, d\nu(x) \leq \left(\int_X |f(x)|^p\, d\nu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g(x)|^q\, d\nu(x)\right)^{\frac{1}{q}},$$

onde $\nu : \mu \longrightarrow [0, +\infty]$ é uma medida e μ é σ-álgebra. Adicionalmente, quando $p, q = 2$ tal desigualdade é chamada de Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Proposição 2.1.2. *(Desigualdade de Young) Sejam $p, q \in \mathbb{R}$ índices conjugados, ou seja, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, com $1 < p, q < \infty$, e a,b positivos. Então, vale a seguinte desigualdade*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Proposição 2.1.3. *(Desigualdade de Interpolação) Seja $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq r \leq q \leq \infty$. Então, $u \in L^r(\Omega)$ e obtem-se a desigualdade*

$$||u||_{L^r(\Omega)} \leq ||u||^{\alpha}_{L^p(\Omega)} ||u||^{1-\alpha}_{L^q(\Omega)},$$

onde $0 \leq \alpha \leq 1$ verifica $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\alpha}{p} + \dfrac{1-\alpha}{q}$.

Proposição 2.1.4. *(Desigualdade de Poincaré-Wirtinger) Sejam Ω um conjunto aberto e limitado de classe C^1 e $g \in L^2(\Omega)$. Então, vale a seguinte desigualdade*

$$||g - \overline{g}||_{L^\infty(\Omega)} \leq C||\nabla g||_{L^1(\Omega)} \quad \forall g \in W^{1,1}(\Omega),$$

onde $\overline{g} = \dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega g\, dx$ e C é uma constante positiva.

Lema 2.1.1. *Sejam* $a, b \in \mathbb{R}^N$. *Então,*

$$(a|a|^{p-2} - b|b|^{p-2}).(a-b) \geq \begin{cases} 2^{2-p}|a-b|^p, & se \quad p \geq 2, \\ (p-1)\dfrac{|a-b|^2}{(|a|+|b|)^{2-p}}, & se \quad 1 < p < 2. \end{cases}$$

Teorema 2.1.6. *(Rellich-Kondrachov) Suponha* Ω *aberto e limitado de classe* C^1. *Temos*

(i) *se* $1 \leq p < N$, *então* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, *para todo* $q \in [1, p')$ *onde* $\dfrac{1}{p'} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$;

(ii) *se* $p = N$, *então* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, *para todo* $q \in [1, \infty)$;

(iii) *se* $p > N$, *então* $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$

com imersões compactas. Em particular $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ *com imersões compactas para todo* $p \geq 1$.

Definição 2.1.8. *Uma função* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é dita ser absolutamente contínua se para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$\sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i) < \delta \implies \sum_{i=1}^{n} |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \varepsilon$$

sempre que, para cada n, $(\alpha_1, \beta_1), \cdots, (\alpha_n, \beta_n)$ *são segmentos disjuntos em (a,b).*

Teorema 2.1.7. *Se* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é absolutamente contínua, então f é diferenciável q.t.p.,* $f' \in L^1$ *em (a,b) e*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\, dt$$

com $a < x < b$.

Definição 2.1.9. *Seja* Y *um espaço topológico.*

(i) *A função* $f : Y \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *é chamada semicontínua inferior se para cada* $k \in \mathbb{R}$ *o conjunto* $\{x \in Y : f(x) > k\}$ *é aberto em Y.*

(ii) *A função* $g : Y \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *é chamada semicontínua superior se para cada* $k \in \mathbb{R}$ *o conjunto* $\{x \in Y : g(x) < k\}$ *é aberto em Y, ou seja, se* $(-g)$ *é semicontínua inferior.*

Proposição 2.1.5. *Seja $f : Y \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *f é semicontínua inferior;*

(ii) *Para cada $k \in \mathbb{R}$ o conjunto $\{y \in Y : f(y) \leq k\}$ é fechado;*

(iii) *Para cada $y \in Y$ temos $\liminf_{x \to y} f(x) = f(y)$.*

Proposição 2.1.6. *Se Y é compacto e $f : Y \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é semicontínua inferior, então f é limitada inferiormente e existe um elemento mínimo $y \in Y$ tal que $f(y) = \inf\{f(x) : x \in Y\}$.*

Definição 2.1.10. *Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita Lipschitz contínua, se existe uma constante $L > 0$ tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|,$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Lema 2.1.2. *Seja $\theta(t)$ uma função $C^1(\mathbb{R})$ tal que θ' é limitada. Se $u \in W^{1,s}(\Omega)$, sendo Ω um conjunto aberto e limitado em $\mathbb{R}^N$, $1 \leq s < \infty$. Então, $\theta(u) \in W^{1,s}(\Omega)$ e*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)(\theta(u)) = \theta'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

com $i = 1, 2, \cdots, N$.

Teorema 2.1.8. *(Lema de Fatou) Seja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de funções mensuráveis não-negativas definida em um conjunto mensurável X. Então,*

$$\int_X \liminf_{n \to \infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Teorema 2.1.9. *(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) Seja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de funções em $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ que converge μ-quase sempre para uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$. Se existe $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ tal que $|f_n| \leq |g|$ para todo n, então $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ e*

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

2.2 Noções de Distribuição

Esta seção, baseada em [5], tem a finalidade de esclarecer algumas notações que irão aparecer no capítulo 4.

Seja $f(x)$ uma função de valor real definida no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, e considere o suporte desta função, abreviado supp f, dado pelo fecho do conjunto $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$. Denotamos por $C^k(\Omega)$, $0 \leq k \leq \infty$, o conjunto de todas as funções definidas em Ω que possuem derivadas parciais até ordem k contínuas (e de qualquer ordem se $k = \infty$). Vamos denotar por $C_c^k(\Omega)$ o conjunto de todas as funções $\varphi \in C^k(\Omega)$ com suporte compacto em Ω.

É evidente que $C_c^\infty(\Omega)$ é um espaço linear. Podemos introduzir em $C_c^\infty(\Omega)$ uma convergência como segue. Dizemos que uma sequência $\{\varphi_k\} \subset C_c^\infty(\Omega)$ converge para φ, se

(i) existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que supp $\varphi_k \subset K$, para todo $k \in \mathbb{N}$;

(ii) $\lim\limits_{k\to\infty} D^\alpha \varphi_k = D^\alpha \varphi$ uniformemente em K, para todo $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$, onde $D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1}, \cdots, D_{x_N}^{\alpha_N}$, $D_{x_i} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \cdots, N$.

Munido destas condições, o espaço $C_c^\infty(\Omega)$ pode ser denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definição 2.2.1. *Um funcional linear contínuo u definido em $\mathcal{D}(\Omega)$ é chamado uma distribuição em Ω. Em outra palavras, uma distribuição é um funcional linear u definido em $C_c^\infty(\Omega)$ que possui a propriedade $\lim\limits_{k\to\infty} u(\varphi_k) = 0$ para cada sequência $\{\varphi_k\} \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = 0$.*

Definição 2.2.2. *O conjunto de todas as distribuições em Ω é um espaço linear, denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

A distribuição é uma extensão natural da noção de função localmente integrável em Ω, pois se $f \in L^1_{Loc}(\Omega)$, então o funcional u_f definido em $C_c^\infty(\Omega)$, definido por

$$u_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx, \ \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

é uma distribuição em Ω, isto é, $u_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Além disso, a aplicação $f \in L^1_{Loc}(\Omega) \longrightarrow u_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é injetiva.

Dado $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, por definição, a derivada de ordem $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ de u, $D^\alpha u$, é a distribuição

$$(D^\alpha u)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} u(D^\alpha \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

onde $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

2.3 Mollifiers, Aproximação por Funções Suaves

Esta seção, baseada em [1], tem a finalidade de esclarecer alguns argumentos usados no capítulo 4.

Definição 2.3.1. *Seja J uma função de valor real, não-negativa, pertencente a $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, possuindo as seguintes propriedades:*

(i) $J(x) = 0$, *se* $|x| \geq 1$;

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} J(x)\,dx = 1.$

Por exemplo, vamos tomar

$$J(x) = \begin{cases} k \quad exp\left[\dfrac{-1}{1-|x|^2}\right], & se \quad |x| < 1, \\ 0, & se \quad |x| \geq 1. \end{cases}$$

onde $k > 0$ é escolhido de modo que (ii) seja satisfeita. Se $\varepsilon > 0$, a função $J_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} J\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$ é não-negativa, pertencente a $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, e satisfaz

(i) $J_\varepsilon(x) = 0$, *se* $|x| \geq \varepsilon$;

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} J_\varepsilon(x)dx = 1.$

$J_\varepsilon(x)$ é chamada mollifier, e a convolução

$$J_\varepsilon * u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} J_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy$$

definida para funções u para as quais o lado direito da equação acima faz sentido, é chamada molificação ou regularização para u.

Valem as seguintes propriedades:

Lema 2.3.1. *Seja u uma função definida em $\mathbb{R}^N$ e identicamente nula fora do domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.*

(a) *Se $u \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^N)$, então $J_\varepsilon * u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$;*

(b) *Se $\overline{supp\ u} \subset \Omega$, $\overline{supp\ u}$ é compacto e $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$, então $J_\varepsilon * u \in C^\infty_c(\mathbb{R}^N)$, desde que $\varepsilon < dist(supp\ u, \partial\Omega)$, sendo $\partial\Omega$ a fronteira de Ω;*

(c) *Se $u \in L^p(\Omega)$, onde $1 \leq p < \infty$, então $J_\varepsilon * u \in L^p(\Omega)$. Além disso,*

$$||J_\varepsilon * u||_p \leq ||u||_p \quad e \quad \lim_{\varepsilon \to 0^+} ||J_\varepsilon * u - u||_p = 0;$$

(d) *Se $u \in C(\Omega)$, $\overline{G} \subset \Omega$ e $\overline{G}$ é compacto, então $\lim_{\varepsilon \to 0^+} J_\varepsilon * u(x) = u(x)$ uniformemente em G;*

(e) *Se $u \in C(\overline{\Omega})$, então $\lim_{\varepsilon \to 0^+} J_\varepsilon * u(x) = u(x)$ uniformemente em Ω.*

Como consequência destas propriedades, demonstra-se, por exemplo, que $C^\infty_c(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.

Capítulo 3

Evoluções Governadas por Operadores Acretivos e Espaços de Sobolev com Expoentes Variáveis

Neste capítulo serão apresentados alguns resultados encontrados em [6, 19, 28], necessários para o desenvolvimento do capítulo 4. Demonstraremos os resultados usados mais diretamente no capítulo 4, e as demonstrações dos demais resultados podem ser encontradas nas referências citadas.

3.1 Produtos Semi-Internos

Sejam X um espaço de Banach real, $h \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $x, y \in X$. Considere,

$$[x, y]_h := \frac{1}{h}(||x + hy|| - ||x||) \text{ e } (x, y)_h := \frac{1}{2h}(||x + hy||^2 - ||x||^2).$$

Tem-se que:

Lema 3.1.1. *Para cada $x, y \in X$ os limites abaixo existem e todos são finitos:*

(a) $\lim\limits_{h \to 0^+} [x, y]_h := [x, y]_+$*;*

(b) $\lim\limits_{h \to 0^-} [x, y]_h := [x, y]_-$*;*

(c) $\lim_{h\to 0^+}(x,y)_h := (x,y)_+$;

(d) $\lim_{h\to 0^-}(x,y)_h := (x,y)_-$.

Também $[\cdot,\cdot]_+$ *e* $(\cdot,\cdot)_+$ *são semicontínuos superiores de* $X\times X$ *em* $\mathbb{R}$*, enquanto* $[\cdot,\cdot]_-$ *e* $(\cdot,\cdot)_-$ *são semicontínuos inferiores de* $X\times X$ *em* $\mathbb{R}$ *e temos então que*

$$[x,y]_{-h} \leq [x,y]_- \leq [x,y]_+ \leq [x,y]_h$$

e

$$(x,y)_{-h} \leq (x,y)_- \leq (x,y)_+ \leq (x,y)_h$$

para cada $x,y\in X$ *e* $h>0$.

Demonstração. Inicialmente, mostraremos que $[x,y]_h$ é monótona não-decrescente em h. Para isso, suponha que $0<h_1<h_2$ e seja $\beta\in(0,1)$ tal que $h_1=(1-\beta)h_2$. Desde que

$$\begin{aligned} x+h_1y &= x+(1-\beta)h_2y \\ &= \beta x+(1-\beta)(x+h_2y), \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} [x,y]_{h_1} &= \frac{1}{h_1}(||x+h_1y||-||x||) \\ &= \frac{1}{h_1}[||\beta x+(1-\beta)(x+h_2y)||-||x||] \\ &\leq \frac{1}{h_1}[\beta||x||+(1-\beta)||x+h_2y||-||x||] \\ &= \frac{1}{h_1}[(1-\beta)||x+h_2y||-(1-\beta)||x||] \\ &= \frac{||x+h_2y||-||x||}{h_2} \\ &= [x,y]_{h_2}. \end{aligned}$$

Logo, $[x,y]_{h_1}\leq[x,y]_{h_2}$. De forma similar, obtemos $[x,y]_{h_1}\leq[x,y]_{h_2}$ se $h_2<h_1<0$. Agora, se $h_1<0<h_2$, considere $h=\min(-h_1,h_2)$ e note que

$$\begin{aligned} ||x||+||x|| = 2||x|| &= ||x+hy+x-hy|| \\ &\leq ||x+hy||+||x-hy|| \end{aligned}$$

ou seja, $||x|| - ||x - hy|| \leq ||x + hy|| - ||x||$. Assim,

$$\begin{aligned}
[x, y]_{-h} &= -\frac{1}{h}(||x - hy|| - ||x||) \\
&= \frac{1}{h}(||x|| - ||x - hy||) \\
&\leq \frac{1}{h}(||x + hy|| - ||x||) \\
&= [x, y]_h.
\end{aligned}$$

Logo, $[x, y]_{-h} \leq [x, y]_h$, e por sua vez, segue que $[x, y]_{h_1} \leq [x, y]_{-h} \leq [x, y]_h \leq [x, y]_{h_2}$, provando que $[x, y]_h$ é monótona. Agora, se $-1 \leq h_1 \leq h_2 \leq 1$, a monotonicidade de $[x, y]_h$ fornece que $[x, y]_{-1} \leq [x, y]_{h_1} \leq [x, y]_{h_2} \leq [x, y]_1$, o qual nos garante que os limites,

$$\lim_{h \to 0^+} [x, y]_h = [x, y]_+ \quad \text{e} \quad \lim_{h \to 0^-} [x, y]_h = [x, y]_-$$

existem. Por fim, para mostrar que $[x, y]_+$ é semicontínuo superior, considere $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ duas sequências em X tal que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ e $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = y$. Então, para $h > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, segue que

$$\begin{aligned}
[x_n, y_n]_+ &\leq [x_n, y_n]_h \\
&= \frac{1}{h}(||x_n + hy_n|| - ||x_n||).
\end{aligned}$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$\lim_{n \to \infty} \sup\, [x_n, y_n]_+ \leq \frac{1}{h}(||x + hy|| - ||x||),\ \forall h > 0.$$

Agora, fazendo $h \to 0^+$, obtemos

$$\lim_{n \to \infty} \sup\, [x_n, y_n]_+ \leq [x, y]_+.$$

Portanto, pela Definição 2.1.9, $[x, y]_+$ é semicontínuo superior, e como

$$[x, y]_- = \lim_{h \to 0^-} \frac{1}{h}(||x + hy|| - ||x||)$$

fazendo $t = -h$, obtemos

$$\begin{aligned}
[x, y]_- &= \lim_{t \to 0^-} \frac{1}{-t}(||x - ty|| - ||x||) \\
&= -\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}(||x + t(-y)|| - ||x||) \\
&= -[x, -y]_+
\end{aligned}$$

e daí, podemos concluir que $[x,y]_-$ é semicontínuo inferior. Analogamente, toda a prova pode ser reproduzida para $(\cdot,\cdot)_+$ e $(\cdot,\cdot)_-$. $\square$

Definição 3.1.1. **(a)** *A função $(\cdot,\cdot)_+$ é chamada de produto semi-interno superior em X e a função $(\cdot,\cdot)_-$ é chamada de produto semi-interno inferior em X.*

(b) *A função $[\cdot,\cdot]_+$ é chamada de produto semi-interno superior normalizado em X e a função $[\cdot,\cdot]_-$ é chamada de produto semi-interno inferior normalizado em X.*

Proposição 3.1.1. *Se H é um espaço de Hilbert real com o produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, então $(x,y)_+ = (x,y)_- = \langle x,y\rangle$, para cada $x,y \in H$.*

Demonstração. De fato, como H é um espaço de Hilbert, vem que $||x||^2 = \langle x,x\rangle$. Assim, usando a definição de produto semi-interno superior e inferior, obtemos

$$
\begin{aligned}
(x,y)_+ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2h}(||x+hy||^2 - ||x||^2) \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2h}(\langle x+hy, x+hy\rangle - \langle x,x\rangle) \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2h}(\langle x,x\rangle + h^2\langle y,y\rangle + 2h\langle x,y\rangle - \langle x,x\rangle) \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2h}(h^2\langle y,y\rangle + 2h\langle x,y\rangle) \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2}(h\langle y,y\rangle + 2\langle x,y\rangle) \\
&= \langle x,y\rangle .
\end{aligned}
$$

De forma análoga, verifica-se que $(x,y)_- = \langle x,y\rangle$. Logo, $(x,y)_+ = (x,y)_- = \langle x,y\rangle$, para cada $x,y \in H$. $\square$

Lema 3.1.2. *Os produtos semi-internos possuem as seguintes propriedades:*

(a) $(x,y)_\pm = ||x||[x,y]_\pm$;

(b) $|[x,y]_\pm| \leq ||y||$;

(c) $|[x,y]_\pm - [x,z]_\pm| \leq ||y-z||$;

(d) $[x,y]_+ = -[x,-y]_- = -[-x,y]_-$;

(e) $[ax, by]_{\pm} = b[x,y]_{\pm}$ *para* $a, b > 0$*;*

(f) $[x, y+z]_{-} \geq [x,y]_{-} + [x,z]_{-}$ *e* $[x, y+z]_{+} \leq [x,y]_{+} + [x,z]_{+}$*;*

(g) $[x, y+z]_{+} \geq [x,y]_{+} + [x,z]_{-}$ *e* $[x, y+z]_{-} \leq [x,y]_{-} + [x,z]_{+}$*;*

(h) $[x, y+ax]_{\pm} = [x,y]_{\pm} + a||x||$ *para* $a \in \mathbb{R}$*;*

(i) *Seja* $x : [a,b] \longrightarrow X$ *uma função e defina* $m : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *e* $n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *por* $m(t) := ||x(t)||$ *e* $n(t) := ||x(t)||^2$*, respectivamente, para cada* $t \in [a,b]$*. Se* x *é diferenciável pela direita (esquerda) de* $t \in [a,b]$*, então* m *e* n *são diferenciáveis pela direita (esquerda) de* $t \in [a,b]$ *e temos*

$$m'_{\pm}(t) = [x(t), x'_{\pm}(t)]_{\pm} \quad e \quad n'_{\pm}(t) = 2(x(t), x'_{\pm}(t))_{\pm}.$$

Demonstração. Usando a definição de produto semi-interno superior e inferior, temos:

$$\begin{aligned}
(a) \quad (x,y)_{+} &= \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{2h}(||x+hy||^2 - ||x||^2) \\
&= \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{2h}(||x+hy|| + ||x||)(||x+hy|| - ||x||) \\
&= \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{2}(||x+hy|| + ||x||)\frac{1}{h}(||x+hy|| - ||x||) \\
&= \frac{1}{2}(2||x||[x,y]_{+}) \\
&= ||x||[x,y]_{+}.
\end{aligned}$$

Analogamente, tem-se a prova para $(x,y)_{-} = ||x||[x,y]_{-}$.

$$\begin{aligned}
(b) \quad |[x,y]_{+}| &= \left| \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}(||x+hy|| - ||x||) \right| \\
&\leq \lim_{h \to 0^+} \left| \frac{1}{h}(||x+hy-x||) \right| \\
&= \lim_{h \to 0^+} \left| \frac{1}{h}|h|||y|| \right| \\
&= ||y||.
\end{aligned}$$

Analogamente, tem-se a prova para $|[x,y]_{-}| \leq ||y||$.

$$
\begin{aligned}
(c) \quad |[x,y]_+ - [x,z]_+| &= \left| \left[\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}(||x+hy|| - ||x||) \right] - \left[\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}(||x+hz|| - ||x||) \right] \right| \\
&= \lim_{h\to 0^+} \left| \frac{1}{h} \left[(||x+hy|| - ||x||) - (||x+hz|| - ||x||) \right] \right| \\
&= \lim_{h\to 0^+} \left| \frac{1}{h} (||x+hy|| - ||x+hz||) \right| \\
&\leq \lim_{h\to 0^+} \left| \frac{1}{h} ||x+hy-x-hz|| \right| \\
&= \lim_{h\to 0^+} \left| \frac{1}{h} |h| ||y-z|| \right| \\
&= ||y-z||.
\end{aligned}
$$

Analogamente, tem-se a prova para $|[x,y]_- - [x,z]_-| \leq ||y-z||$.

$$
(d) \quad [x,y]_+ = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}(||x+hy|| - ||x||).
$$

Fazendo $t = -h$, obtemos

$$
\begin{aligned}
[x,y]_+ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{-t}(||x-ty|| - ||x||) \\
&= -\lim_{t\to 0^-} \frac{1}{t}(||x+t(-y)|| - ||x||) \\
&= -[x,-y]_-.
\end{aligned}
$$

Analogamente, tem-se a prova para $[x,y]_+ = -[-x,y]_-$.

(e) Sejam $a, b > 0$. Então,

$$
\begin{aligned}
[ax,by]_+ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}(||ax+hby|| - ||ax||) \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{a}{h} \left(\left|\left| x + h\frac{b}{a}y \right|\right| - ||x|| \right).
\end{aligned}
$$

Fazendo $t = h\dfrac{b}{a}$, segue que

$$
\begin{aligned}
[ax,by]_+ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{ab}{at}(||x+ty|| - ||x||) \\
&= b \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(||x+ty|| - ||x||) \\
&= b[x,y]_+.
\end{aligned}
$$

Analogamente, tem-se a prova para $[ax, by]_- = b[x, y]_-$.

(f) Sabemos que

$$[x, y+z]_+ = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}(||x + h(y+z)|| - ||x||).$$

Como

$$\begin{aligned} ||x + h(y+z)|| &= \left|\left|\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}2hy + \frac{1}{2}2hz\right|\right| \\ &= \left|\left|\frac{1}{2}(x+2hy) + \frac{1}{2}(x+2hz)\right|\right| \\ &\le \frac{1}{2}||x+2hy|| + \frac{1}{2}||x+2hz|| \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} [x, y+z]_+ &\le \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{2}||x+2hy|| + \frac{1}{2}||x+2hz|| - \frac{1}{2}||x|| - \frac{1}{2}||x||\right) \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{2}||x+2hy|| - \frac{1}{2}||x||\right) + \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{2}||x+2hz|| - \frac{1}{2}||x||\right) \\ &= \frac{1}{2}[x, 2y]_+ + \frac{1}{2}[x, 2z]_+ \end{aligned}$$

e usando a propriedade (e), vem que

$$\begin{aligned} [x, y+z]_+ &\le \frac{1}{2}2[x, y]_+ + \frac{1}{2}2[x, z]_+ \\ &= [x, y]_+ + [x, z]_+. \end{aligned}$$

Analogamente, tem-se a prova para $[x, y+z]_- \ge [x, y]_- + [x, z]_-$.

(g) Observe que

$$\begin{aligned} ||x + hy|| &= \left|\left|\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}2hy + \frac{1}{2}2hz - \frac{1}{2}2hz\right|\right| \\ &= \left|\left|\frac{1}{2}(x+2hy+2hz) + \frac{1}{2}(x-2hz)\right|\right| \\ &\le \frac{1}{2}||x+2h(y+z)|| + \frac{1}{2}||x-2hz||. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
[x,y]_+ &= \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}(||x+hy||-||x||)\\
&\le \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{2}||x+2h(y+z)||+\frac{1}{2}||x-2hz||-\frac{1}{2}||x||-\frac{1}{2}||x||\right)\\
&= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}(||x+2h(y+z)||-||x||)+\frac{1}{2}\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}(||x-2hz||-||x||)\\
&= \frac{1}{2}[x,2(y+z)]_+ + \frac{1}{2}[x,-2z]_+
\end{aligned}$$

e usando as propriedades (e) e (d), respectivamente, vem que

$$\begin{aligned}
[x,y]_+ &\le [x,y+z]_+ + [x,-z]_+\\
&= [x,y+z]_+ - [x,z]_-.
\end{aligned}$$

Portanto, $[x,y+z]_+ \ge [x,y]_+ + [x,z]_-$.

Analogamente, tem-se a prova para $[x,y+z]_- \le [x,y]_- + [x,z]_+$.

(h) Observe primeiramente que

$$[x,x]_+ = [x,x]_- = ||x||.$$

Assim, dado $a\in\mathbb{R}$, $a\ge 0$ e usando as propriedades (f), (e) e (g), tem-se

$$\begin{aligned}
[x,y+ax]_+ &\le [x,y]_+ + [x,ax]_+\\
&= [x,y]_+ + a[x,x]_+\\
&= [x,y]_+ + a||x||
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
[x,y+ax]_+ &\ge [x,y]_+ + [x,ax]_-\\
&= [x,y]_+ + a[x,x]_-\\
&= [x,y]_+ + a||x||.
\end{aligned}$$

Para $a<0$ tem-se, de forma análoga, que

$$\begin{aligned}
[x, y + ax]_+ &\leq [x, y]_+ + [x, ax]_+ \\
&= [x, y]_+ + [x, -(-a)x]_+ \\
&= [x, y]_+ - a[x, -x]_+ \\
&= [x, y]_+ + a[x, x]_- \\
&= [x, y]_+ + a||x||
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
[x, y + ax]_+ &\geq [x, y]_+ + [x, ax]_- \\
&= [x, y]_+ + [x, -(-a)x]_- \\
&= [x, y]_+ - a[x, -x]_- \\
&= [x, y]_+ + a[x, x]_+ \\
&= [x, y]_+ + a||x||.
\end{aligned}$$

Portanto, $[x, y+ax]_+ = [x, y]_+ + a||x||$, e analogamente, tem-se a prova para $[x, y+ax]_- = [x, y]_- + a||x||$ com $a \in \mathbb{R}$.

(i) Como $m(t) := ||x(t)||$, temos que

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{h}(m(t+h) - m(t)) - \frac{1}{h}(||x(t) + hx'_+(t)|| - ||x(t)||)\right| \\
&= \left|\frac{1}{h}(||x(t+h)|| - ||x(t)|| - ||x(t) + hx'_+(t)|| + ||x(t)||)\right| \\
&= \left|\frac{1}{h}(||x(t+h)|| - ||x(t) + hx'_+(t)||)\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{h}||x(t+h) - x(t) - hx'_+(t)||\right| \\
&= \left|\left|\frac{1}{h}(x(t+h) - x(t)) - x'_+(t)\right|\right| \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad h \to 0^+.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{h \to 0^+} \left[\frac{1}{h}(m(t+h) - m(t)) - \frac{1}{h}(||x(t) + hx'_+(t)|| - ||x(t)||)\right] = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}(m(t+h)-m(t)) = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}(||x(t)+hx'_+(t)||-||x(t)||),$$

isto é,

$$m'_+(t) = [x(t), x'_+(t)]_+.$$

Analogamente, tem-se a prova para $m'_-(t) = [x(t), x'_-(t)]_-$.

De forma similar, mostra-se que $n'_\pm(t) = 2(x(t), x'_\pm(t))_\pm$. □

Exemplo 3.1.1. *Seja M um subconjunto limitado em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, seja $p \in (1,\infty)$ e seja $X = L^p(M)$. Então, para cada $f, g \in L^p(M)$, temos*

$$[f,g]_+ = [f,g]_- = \begin{cases} ||f||^{1-p}_{L^p(M)} \displaystyle\int_M g(x)|f(x)|^{p-1} sgn(f(x))\,dx, & se \quad f \neq 0, \\ ||g||_{L^p(M)}, & se \quad f = 0. \end{cases}$$

Demonstração. Note que para $f = 0$, pela definição de produto semi-interno superior, vem que

$$\begin{aligned} [f,g]_+ &= \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}||hg||_{L^p(M)} \\ &= \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}|h|||g||_{L^p(M)} \\ &= ||g||_{L^p(M)}, \end{aligned}$$

para $g \in L^p(M)$. Analogamente, tem-se $[f,g]_- = ||g||_{L^p(M)}$ para $f = 0$.

Agora, para $f \neq 0$, o lado direito da expressão

$$[f,g]_+ = [f,g]_- = ||f||^{1-p}_{L^p(M)} \int_M g(x)|f(x)|^{p-1} sgn(f(x))\,dx$$

é linear em g e limitada por $||g||$. Então, basta mostrar a igualdade para um subconjunto denso de g em $L^p(M)$. Dessa forma, considere g's de modo que existam constantes $c, \delta > 0$ tais que $|g(x)| \leq c$ em M e $g(x) = 0$ em $M_1 = \{x : 0 < |f(x)| < \delta\}$. Sejam também $M_0 = \{x : f(x) = 0\}$ e $M_2 = \{x : |f(x)| \geq \delta\}$. Assim, para $\varepsilon > 0$, temos

$$\begin{aligned}\int_M |f+\varepsilon g|^p\,dx &= \int_{M_0} |f+\varepsilon g|^p\,dx + \int_{M_1} |f+\varepsilon g|^p\,dx + \int_{M_2} |f+\varepsilon g|^p\,dx \\ &= \varepsilon^p \int_{M_0} |g|^p\,dx + \int_{M_1} |f|^p\,dx + \int_{M_2} |f+\varepsilon g|^p\,dx.\end{aligned}$$

Agora, temos também que

$$\begin{aligned}\int_{M_2} |f+\varepsilon g|^p\,dx &= \int_{M_2} |f|^p\left(1+\varepsilon\frac{g}{f}\right)^p\,dx \\ &= \int_{M_2} |f|^p\,dx + \varepsilon p\int_{M_2} \frac{g}{f}|f|^p\,dx + 0(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

Como $\left|\varepsilon\dfrac{g}{f}\right| = \varepsilon\dfrac{|g|}{|f|} \leq \varepsilon\dfrac{c}{\delta}$ em M_2, segue que

$$\begin{aligned}\int_M |f+\varepsilon g|^p\,dx &= \varepsilon^p \int_{M_0} |g|^p\,dx + \int_{M_1} |f|^p\,dx + \int_{M_2} |f+\varepsilon g|^p\,dx \\ &= \varepsilon^p \int_{M_0} |g|^p\,dx + \int_{M_1} |f|^p\,dx + \int_{M_2} |f|^p\,dx + \varepsilon p\int_{M_2}\frac{g}{f}|f|^p\,dx + 0(\varepsilon^2) \\ &= \int_M |f|^p\,dx + \varepsilon p\int_M g(sgn(f))|f|^{p-1}\,dx + 0(\varepsilon).\end{aligned}$$

E então

$$\frac{1}{\varepsilon}(||f+\varepsilon g||_{L^p(M)} - ||f||_{L^p(M)}) = \frac{1}{\varepsilon}\left(\left(\int_M |f+\varepsilon g|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} - ||f||_{L^p(M)}\right)$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{\varepsilon}||f||_{L^p(M)}\left(\frac{\left(\int_M |f+\varepsilon g|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}}{||f||_{L^p(M)}} - 1\right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon}||f||_{L^p(M)}\left(\frac{\left[\int_M |f|^p\,dx + \varepsilon p\int_M g(sgn(f))|f|^{p-1}\,dx + 0(\varepsilon)\right]^{\frac{1}{p}}}{||f||_{L^p(M)}} - 1\right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon}||f||_{L^p(M)}\left(\left[\frac{\int_M |f|^p\,dx + \varepsilon p\int_M g(sgn(f))|f|^{p-1}\,dx + 0(\varepsilon)}{||f||^p_{L^p(M)}}\right]^{\frac{1}{p}} - 1\right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon}||f||_{L^p(M)}\left(\left[1 + \frac{\varepsilon p\int_M g(sgn(f))|f|^{p-1}\,dx}{||f||^p_{L^p(M)}} + 0(\varepsilon)\right]^{\frac{1}{p}} - 1\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{\displaystyle\int_M g(sgn(f))|f|^{p-1}\,dx}{||f||^{p-1}_{L^p(M)}} + 0(1).$$

Daí, pela definição de produto semi-interno superior, obtemos

$$\begin{aligned}
[f,g]_+ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}(||f+\varepsilon g||_{L^p(M)} - ||f||_{L^p(M)}) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\displaystyle\int_M g(sgn(f))|f|^{p-1}\,dx}{||f||^{p-1}_{L^p(M)}} + 0(1) \\
&= ||f||^{1-p}_{L^p(M)}\int_M g|f|^{p-1}(sgn(f))\,dx.
\end{aligned}$$

Da mesma forma, aplicando a definição de produto semi-interno inferior, obtém-se que $[f,g]_- = ||f||^{1-p}_{L^p(M)}\displaystyle\int_M g|f|^{p-1}(sgn(f))\,dx$ e o resultado segue. □

Exemplo 3.1.2. *Seja M um subconjunto limitado em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ e seja $X = L^1(M)$. Então, para cada $f, g \in L^1(M)$ temos*

$$[f,g]_\pm = \int_{M_f^+} g(x)\,dx - \int_{M_f^-} g(x)\,dx + \int_{M_f^0} g(x)\,dx,$$

em que $M_f^+ = \{x \in M : f(x) > 0\}$, $M_f^- = \{x \in M : f(x) < 0\}$ e $M_f^0 = \{x \in M : f(x) = 0\}$.

Demonstração. Pelo exemplo anterior, para $\varepsilon > 0$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_M |f+\varepsilon g|\,dx &= \int_{M_f^+} |f+\varepsilon g|\,dx + \int_{M_f^-} |f+\varepsilon g|\,dx + \int_{M_f^0} |f+\varepsilon g|\,dx \\
&= \int_{M_f^+} |f+\varepsilon g|\,dx + \int_{M_f^-} |f+\varepsilon g|\,dx + \varepsilon\int_{M_f^0} |g|\,dx.
\end{aligned}$$

Agora, pela definição de produto semi-interno superior, vem que

$$\begin{aligned}
[f,g]_+ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\varepsilon}(||f+\varepsilon g|| - ||f||) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\varepsilon}\left(\int_M |f+\varepsilon g|\,dx - \int_M |f|\,dx\right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\varepsilon}\left[\left(\int_{M_f^+} |f+\varepsilon g|\,dx + \int_{M_f^-} |f+\varepsilon g|\,dx + \varepsilon\int_{M_f^0} |g|\,dx\right)\right. \\
&\qquad \left. - \left(\int_{M_f^+} |f|\,dx + \int_{M_f^-} |f|\,dx + \int_{M_f^0} |f|\,dx\right)\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{M_f^0} |g|\, dx + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\varepsilon}\Big(\int_{M_f^+} |f+\varepsilon g|\, dx + \int_{M_f^-} |f+\varepsilon g|\, dx - \int_{M_f^+} |f|\, dx - \int_{M_f^-} |f|\, dx \Big) \\
&= \int_{M_f^0} |g|\, dx + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{M_f^+\cup M_f^-} \varepsilon^{-1}(|f+\varepsilon g| - |f|)\, dx \\
&= \int_{M_f^0} |g|\, dx + \int_{M_f^+\cup M_f^-} g(sgn(f))\, dx \\
&= \int_{M_f^0} |g|\, dx + \int_{M_f^+} g \ \ dx + \int_{M_f^-} (-g)\, dx \\
&= \int_{M_f^+} g\, dx - \int_{M_f^-} g\, dx + \int_{M_f^0} |g|\, dx.
\end{aligned}
$$

Analogamente, chegamos ao mesmo resultado usando a definição de produto semi-interno inferior. Logo, o resultado segue. □

Se X é um espaço de Banach, usaremos a notação 2^X para denotar o conjunto formado por todos os subconjuntos de X.

Definição 3.1.2. *A aplicação dualidade em um espaço de Banach real é a aplicação* $J : X \longrightarrow 2^{X^*}$ *definida por* $J(x) = \{x^* \in X^* : x^*(x) = ||x||^2 = ||x^*||^2\}$ *para cada* $x \in X$.

Observação 3.1.1. *Pelo Teorema de Hanh-Banach (Teorema 2.1.4), segue que J(x) é não-vazio para cada* $x \in X$. *Além disso, J(x) é fechado, convexo e limitado em* X^* *para cada* $x \in X$. *Em algumas situações especiais, J é uma aplicação unívoca. Nestes casos, a fim de simplificar a notação, escreveremos* $J : X \longrightarrow X^*$ *e* $J(x) = x^*$ *ao invés de* $J : X \longrightarrow 2^{X^*}$ *e* $J(x) = \{x^*\}$.

O produto semi-interno e a aplicação dualidade estão relacionados pelo seguinte resultado, veja [24, 28]:

Lema 3.1.3. *Para cada* $x, y \in X$ *temos*

$$
(x, y)_+ = \sup\{x^*(y) : x^* \in J(x)\} \quad e \quad (x, y)_- = \inf\{x^*(y) : x^* \in J(x)\}.
$$

Além disso, tem-se, veja [5, 28]:

Teorema 3.1.1. *(Kato) Se o dual topológico* X^* *de um espaço de Banach real X é uniformemente convexo (Definição 2.1.7), então a aplicação dualidade em X é unívoca e uniformemente contínua em subconjuntos limitados em X.*

3.2 Operadores Acretivos

Seja X um espaço de Banach real. Por um operador entenderemos uma aplicação $A : X \longrightarrow 2^X$ em que o domínio de A é definido por $D(A) = \{x \in X : Ax \neq \emptyset\}$ e a imagem de A é definida por $R(A) = \bigcup_{x \in X} Ax$. No que segue, escreveremos $A : D(A) \subset X \longrightarrow 2^X$ ao invés de $A : X \longrightarrow 2^X$, a fim de enfatizar que somente os valores de A em D(A) nos interessa. Entretanto, quando A for um operador unívoco, escreveremos $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ e $Ax = y$ ao invés de $A : D(A) \subset X \longrightarrow 2^X$ e $Ax = \{y\}$. Observe que toda função $f : D(f) \subset X \longrightarrow X$ pode ser identificada, de forma óbvia, como um operador unívoco cujo domínio é D(f).

Observação 3.2.1. *Identificamos o operador A com seu gráfico e escrevemos $[x, y] \in A$, se $y \in Ax$. Dado os operadores A, B e $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos para $x, y \in X$,*

(i) $(A^{-1})(y) = \{x \in X : y \in Ax\}$;

(ii) $(A + B)(x) = Ax + Bx$;

(iii) $(\lambda A)(x) = \lambda(Ax)$.

Definição 3.2.1. *Um operador $A : D(A) \subset X \longrightarrow 2^X$ é chamado acretivo se*

$$[x - \hat{x}, y - \hat{y}]_+ \geq 0$$

para cada $x, \hat{x} \in D(A)$, $y \in Ax$ e $\hat{y} \in A\hat{x}$, onde $[\cdot, \cdot]_+$ é o produto semi-interno superior normalizado em X.

Observação 3.2.2. *Por (a) do Lema 3.1.2 tem-se que A é acretivo se, e somente se,*

$$(x - \hat{x}, y - \hat{y})_+ \geq 0$$

para cada $x, \hat{x} \in D(A)$, $y \in Ax$ e $\hat{y} \in A\hat{x}$, onde $(\cdot, \cdot)_+$ é o produto semi-interno superior em X.

Definição 3.2.2. *Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow 2^X$ um operador e $\lambda > 0$. Então,*

(i) *O operador* $J_\lambda : D(J_\lambda) \subset X \longrightarrow 2^X$ *definido por* $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$, *sendo* I *o operador identidade em* X *e* $D(J_\lambda) = R(I + \lambda A)$ *é chamado de resolvente de* A.

(ii) *O operador* $A_\lambda : D(A_\lambda) \subset X \longrightarrow 2^X$ *definido por* $A_\lambda = \dfrac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)$ *com* $D(A_\lambda) = R(I + \lambda A)$ *é chamado de aproximação de Yosida de* A.

Valem os seguintes resultados sobre operadores acretivos, veja [5, 24, 28]:

Lema 3.2.1. *O operador* $A : D(A) \subset X \longrightarrow 2^X$ *é acretivo se, e somente se, para cada* $\lambda > 0$, *o resolvente* J_λ *é unívoco e não-expansivo, ou seja,* $||J_\lambda(x) - J_\lambda(y)|| \leq ||x - y||$, *para cada* $x, y \in R(I + \lambda A)$.

Teorema 3.2.1. *Se* $A : D(A) \subset X \longrightarrow 2^X$ *é acretivo e* $\lambda > 0$, *então*

(i) A_λ *é unívoco, acretivo e Lipschitz contínuo em* $R(I+\lambda A)$, *com constante de Lipschitz,* $\dfrac{2}{\lambda}$;

(ii) $A_\lambda x \in AJ_\lambda x$ *para cada* $x \in R(I + \lambda A)$;

(iii) $||A_\lambda x|| \leq |Ax|$ *para cada* $x \in R(I + \lambda A) \cap D(A)$ *onde* $|Ax| = \inf\{||y|| : y \in Ax\}$ *para cada* $x \in D(A)$;

(iv) $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} J_\lambda x = x$ *fortemente em* X, *para cada* $x \in \bigcap\limits_{\lambda>0} R(I + \lambda A) \cap D(A)$;

(v) *Se* $x \in R(I + \lambda A)$ *e* $\mu > 0$, *então* $\dfrac{\mu}{\lambda}x + \dfrac{\lambda - \mu}{\lambda}J_\lambda x \in R(I + \mu A)$ *e*

$$J_\lambda x = J_\mu\left(\frac{\mu}{\lambda}x + \frac{\lambda - \mu}{\lambda}J_\lambda x\right) \quad \textit{(identidade do resolvente)};$$

vii *Se* X^* *é uniformemente convexo, então para cada* $u \in \bigcap\limits_{\lambda>0} R(I + \lambda A)$ *a função* $\lambda \mapsto ||A_\lambda u||$ *é não- crescente em* $(0, \infty)$.

Definição 3.2.3. *Um operador* $A : D(A) \subset X \longrightarrow 2^X$ *é chamado m-acretivo se ele é acretivo e também* $R(I + \lambda A) = X$ *para cada* $\lambda > 0$.

Para operadores m-acretivos, temos o seguinte resultado, veja [5, 28]:

Teorema 3.2.2. *Se o dual topológico de X é uniformemente convexo, então o gráfico de todo operador m-acretivo $A : D(A) \subset X \longrightarrow 2^X$ é fortemente $\times$ fracamente sequencialmente fechado em $X \times X$, ou seja, se $y_n \in Ax_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ fortemente em X e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ fracamente em X, então $x \in D(A)$ e $y \in Ax$.*

Definição 3.2.4. *Um operador $A : D(A) \subset X \longrightarrow 2^X$ é chamado m-completamente acretivo se ele é m-acretivo em $X = L^s(\Omega)$ com $1 \leq s \leq \infty$, ou seja, o resolvente é uma contração que preserva a ordem com respeito a L^1-norma e L^∞-norma.*

Apresentaremos um exemplo de operador m-completamente acretivo, em particular m-acretivo, no próximo capítulo. Mais exemplos podem ser encontrados em [5, 28].

3.3 Evoluções Governadas por Operadores Acretivos

Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow 2^X$ um operador m-acretivo e $f : [a, b] \longrightarrow X$ um função dada. Vamos considerar as equações de evolução

$$f(t) \in \frac{du}{dt}(t) + Au(t), \quad a \leq t \leq b. \tag{3.1}$$

Definição 3.3.1. *Seja $f \in L^1([a, b]; X)$. Uma função $u : [a, b] \longrightarrow X$ é chamada solução forte de (3.1) em $[a, b]$ se:*

(i) *$u(t) \in D(A)$ para q.t.p. $t \in (a, b)$;*

(ii) *$u(t) \in W^{1,1}_{loc}((a, b]; X) = \{u \in C([a, b]; X) : u \in W^{1,p}([c, b]; X),\ 1 \leq p \leq \infty,\ a \leq c \leq b\}$ e existe $g \in L^1_{loc}((a, b]; X)$, $g(t) \in Au(t)$ para q.t.p. $t \in (a, b)$ tal que $\frac{du}{dt}(t) + g(t) = f(t)$ para q.t.p. $t \in (a, b)$.*

Note que, na igualdade em (ii), $\frac{du}{dt}$ é a derivada forte de u, que existe em quase todo ponto de (a, b) visto que $u \in W^{1,1}_{loc}((a, b]; X)$.

Definição 3.3.2. *Seja $f \in L^1([a, b]; X)$. Uma função $u : [a, b] \longrightarrow X$ é chamada de solução forte de (3.1) em $[a, b)$ se para cada $c \in (a, b)$, a restrição de u para $[a, c]$ é uma solução forte em $[a, c]$ no sentido da definição anterior.*

Temos o seguinte resultado de existência de solução forte para (3.1), veja [5, 28]:

Teorema 3.3.1. *Seja X reflexivo e seja* $A : D(A) \subset X \longrightarrow 2^X$ *um operador m-acretivo. Então para cada* $u_0 \in D(A)$ *e* $f \in W^{1,1}([a,b];X)$, *existe uma única solução forte u para (3.1) satisfazendo:*

(i) $u(a) = u_0$*;*

(ii) $u \in W^{1,\infty}([a,b];X)$*;*

(iii) $\left|\left|\frac{du}{dt}(t)\right|\right| = |Au(t) + f(t)| \leq |Au_0 + f(a)| + \int_a^t \left|\left|\frac{df}{ds}(s)\right|\right| ds$, *para q.t.p.* $t \in (a,b)$, *onde* $|Ax + z| = \inf\{||y+z|| : y \in Ax\}$ *para cada* $x \in D(A)$.

Nos casos em que $u_0 \in \overline{D(A)}$ e $f \in L^1([a,b];X)$, ou X é não-reflexivo, existem exemplos que mostram que (3.1) pode não ter solução forte u, satisfazendo $u(a) = u_0$. Veja, por exemplo, [13]. Desta forma, fica claro que para garantir a existência de solução para equações da forma (3.1) quando os dados iniciais u_0 e f não são regulares ou quando X não é reflexivo, precisamos definir novos conceitos de solução. Introduziremos no que segue os conceitos de solução generalizada, solução integral e solução mild. No próximo capítulo, introduziremos o conceito de solução renormalizada.

Definição 3.3.3. *Seja* $f \in L^1([a,b];X)$. *Uma função* $u : [a,b] \longrightarrow X$ *é chamada solução generalizada de (3.1) em* $[a,b]$, *se existe uma sequência* $((u_n, f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *cujos termos pertencem a* $C([a,b];X) \times L^1([a,b];X)$ *tal que:*

(i) *para cada* $n \in \mathbb{N}$, u_n *é uma solução forte de (3.1) em* $[a,b]$ *com* f_n *no lugar de* f*;*

(ii) $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ *em* $C([a,b];X)$ *e* $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ *em* $L^1([a,b];X)$.

Como $W^{1,1}([a,b];X)$ é denso em $L^1([a,b];X)$, segue do Teorema 3.3.1 que:

Teorema 3.3.2. *Seja X reflexivo e seja* $A : D(A) \subset X \longrightarrow 2^X$ *um operador m-acretivo. Então, para cada* $u_0 \in \overline{D(A)}$ *e para cada* $f \in L^1([a,b];X)$ *existe uma única solução generalizada u de (3.1) em* $[a,b]$ *satisfazendo* $u(a) = u_0$.

Por [14], os Teoremas 3.3.1 e 3.3.2 não podem ser estendidos para espaços de Banach gerais. Portanto, somos forçados a procurar outro conceito de solução. Com este objetivo, observe que se u é uma solução forte de (3.1) em $[a, b]$, temos

$$-\frac{du}{d\tau}(\tau) + f(\tau) \in Au(\tau), \text{ para q.t.p. } \tau \in (a, b).$$

Como A é acretivo, isto implica que $0 \leq \left[u(\tau) - x, -\frac{du}{d\tau}(\tau) + f(\tau) - y\right]_+$ para cada $x \in D(A)$, $y \in Ax$ e para q.t.p. $\tau \in (a, b)$.

De (d) e (f) do Lema 3.1.2, temos $\left[u(\tau) - x, \frac{du}{d\tau}(\tau)\right]_- \leq [u(\tau) - x, f(\tau) - y]_+$ para cada $x \in D(A)$, $y \in Ax$ e q.t.p. $\tau \in (a, b)$, pois,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left[u(\tau) - x, -\frac{du}{d\tau}(\tau) + f(\tau) - y\right]_+ \\ &\leq \left[u(\tau) - x, -\frac{du}{d\tau}(\tau)\right]_+ + [u(\tau) - x, f(\tau) - y]_+ \\ &= -\left[u(\tau) - x, \frac{du}{d\tau}(\tau)\right]_- + [u(\tau) - x, f(\tau) - y]_+ \end{aligned}$$

ou seja, $\left[u(\tau) - x, \frac{du}{d\tau}(\tau)\right]_- \leq [u(\tau) - x, f(\tau) - y]_+$.

Claramente $\tau \mapsto ||u(\tau) - x||$ é absolutamente contínua em (a, b) e consequentemente, é diferenciável q.t.p em (a, b), devido ao Teorema 2.1.7. Logo o item (i) do Lema 3.1.2 implica que

$$\begin{aligned} \left[u(\tau) - x, \frac{du}{d\tau}(\tau)\right]_- &= \frac{d^-}{d\tau}(||u(\tau) - x)||) \\ &= \frac{d}{d\tau}(||u(\tau) - x)||) \end{aligned}$$

para cada $x \in D(A)$, $y \in Ax$ e q.t.p. $\tau \in (a, b)$.

Integrando ambos os lados da desigualdade acima sobre $[s, t] \subset [a, b]$, obtemos

$$||u(t) - x|| \leq ||u(s) - x|| + \int_s^t [u(\tau) - x, f(\tau) - y]_+ \, d\tau \tag{3.2}$$

para cada $x \in D(A)$, $y \in Ax$ e $a \leq s \leq t \leq b$.

Observação 3.3.1. *Usando o semi-produto interno superior $(\cdot, \cdot)_+$ ao invés de $[\cdot, \cdot]_+$ (que é sempre possível devido a Observação 3.2.2), chegamos à desigualdade*

$$||u(t) - x||^2 \leq ||u(s) - x||^2 + 2\int_s^t (u(\tau) - x, f(\tau) - y)_+ \, d\tau \tag{3.3}$$

para cada $x \in D(A)$, $y \in Ax$ e $a \leq s \leq t \leq b$.

Assim, é bastante natural que uma exigência para um bom candidato de solução de (3.1) é satisfazer (3.2) ou (3.3). Dessa forma, somos levados a seguinte definição:

Definição 3.3.4. *Seja $f \in L^1([a,b];X)$. Uma função $u : [a,b] \longrightarrow X$ é chamada solução integral de (3.1) em $[a,b]$, se $u \in C([a,b];X)$, $u(t) \in \overline{D(A)}$ para cada $t \in [a,b]$ e u satisfaz (3.2).*

Observação 3.3.2. *Usando que $[\cdot,\cdot]_+$ é semicontínuo superior, segue que toda solução generalizada de (3.1) em $[a,b]$ é uma solução integral de (3.1) em $[a,b]$.*

Observação 3.3.3. *Pode ser provado que uma função contínua $u : [a,b] \longrightarrow X$ satisfazendo $u(t) \in \overline{D(A)}$, para cada $t \in [a,b]$, é uma solução integral de (3.1) em $[a,b]$ se, e somente se, u verifica (3.3).*

Observação 3.3.4. *Uma das principais vantagens do conceito de solução integral é que a definição independe do método de construção de uma tal solução. Mas observe que, a noção de solução integral depende de forma essencial da norma em X.*

Vamos definir agora outro tipo de solução que é mais instrutivo e que acaba sendo equivalente ao de solução integral.

Definição 3.3.5. *Seja $f \in L^1([a,b];X)$. Uma solução mild do problema (3.1) é uma função $u \in C([a,b];X)$, em que para cada $a < c < b$ e para cada $\varepsilon > 0$, existem:*

(i) $a = t_0 < t_1 < \cdots < c \leq t_n < b$, $t_k - t_{k-1} \leq \varepsilon$, $k = 1, 2, \cdots, n$;

(ii) $f_1, f_2, \cdots f_n \in X$, *com* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} ||f(t) - f_k|| dt \leq \varepsilon$;

(iii) $v_0, v_1, \cdots, v_n \in X$, *satisfazendo* $f_k \in \dfrac{v_k - v_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} + Av_k$ *para* $k = 1, 2, \cdots, n$ *de tal modo que* $||u(t) - v_k|| \leq \varepsilon$ *para* $t \in [t_{k-1}, t_k)$, $k = 1, 2, \cdots, n$.

Observação 3.3.5. *Como A é m-acretivo, tem-se que, para cada $a = t_0 < t_1 < \cdots < c \leq t_n < b$ e $f_1, f_2, \cdots f_n \in X$, as equações $f_k \in \dfrac{v_k - v_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} + Av_k$ para $k = 1, 2, \cdots, n$, podem ser passo-a-passo resolvidas, visto que $(I + \lambda A)^{-1}$ é definido em todo X e é unívoco para cada $\lambda > 0$.*

Valem os seguintes resultados (veja [23, 28]):

Teorema 3.3.3. *Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow 2^X$ um operador m-acretivo, então para cada $u_0 \in \overline{D(A)}$ e $f \in L^1([a,b];X)$ existe uma única solução mild u de (3.1) em $[a,b]$ satisfazendo $u(a) = u_0$.*

Teorema 3.3.4. *(Benilan) Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow 2^X$ um operador m-acretivo, $f \in L^1([a,b];X)$ e $u_0 \in \overline{D(A)}$. Então, $u : [a,b] \longrightarrow X$ é uma solução mild de (3.1) em $[a,b]$ satisfazendo $u(a) = u_0$ se, e somente se, u é a única solução integral de (3.1) em $[a,b]$ satisfazendo $u(a) = u_0$.*

Proposição 3.3.1. *Seja $f \in L^1([a,b];X)$ e seja $u : [a,b] \longrightarrow X$ uma função contínua. Se $c \in (a,b)$ e as restrições de u, $u : [c,b] \subset [a,b] \longrightarrow X$ e $u : [a,c] \subset [a,b] \longrightarrow X$, são soluções mild de (3.1) em $[c,b]$ e $[a,c]$ respectivamente, então u é uma solução mild de (3.1) em $[a,b]$.*

Demonstração. Pelos Teoremas 3.3.4 e 3.3.3, basta para checar se u é solução integral de (3.1) em $[a,b]$. Assim, resta mostrar que (3.2) vale para cada $x \in D(A)$, $y \in Ax$ e $a \leq s \leq c \leq t \leq b$. Obviamente, temos

$$\begin{aligned}
||u(t) - x|| &\leq ||u(c) - x|| + \int_c^t [u(\tau) - x, f(\tau) - y]_+ \, d\tau \\
&\leq ||u(s) - x|| + \int_s^c [u(\tau) - x, f(\tau) - y]_+ \, d\tau + \int_c^t [u(\tau) - x, f(\tau) - y]_+ \, d\tau \\
&= ||u(s) - x|| + \int_s^t [u(\tau) - x, f(\tau) - y]_+ \, d\tau
\end{aligned}$$

para cada $x \in D(A)$, $y \in Ax$ e $a \leq s \leq c \leq t \leq b$. □

O próximo resultado exibe a dependência contínua das soluções mild de (3.1) com respeito aos dados iniciais (veja [5, 23, 28]):

Teorema 3.3.5. *(Benilan) Sejam $A : D(A) \subset X \longrightarrow 2^X$ um operador m-acretivo, $f, g \in L^1([a,b];X)$ e u, v duas soluções mild de (3.1) em $[a,b]$ correspondendo a f e g, respectivamente. Então,*

$$||u(t) - v(t)||^2 \leq ||u(s) - v(s)||^2 + 2 \int_s^t (u(\tau) - v(\tau), f(\tau) - g(\tau))_+ \, d\tau$$

e

$$||u(t)-v(t)|| \leq ||u(s)-v(s)|| + \int_s^t [u(\tau)-v(\tau), f(\tau)-g(\tau)]_+ \, d\tau,$$

para cada $a \leq s \leq t \leq b$.

Pelo Teorema 3.3.5 e pelo Lema 3.1.2 (item (b)), podemos deduzir o resultado abaixo:

Corolário 3.3.1. *Seja* $A : D(A) \subset X \longrightarrow 2^X$ *um operador m-acretivo,* $f, g \in L^1([a,b];X)$ *e* u, v *duas soluções mild de (3.1) em* $[a,b]$ *correspondendo a* f *e* g*, respectivamente. Então,*

$$||u(t)-v(t)|| \leq ||u(s)-v(s)|| + \int_s^t ||f(\tau)-g(\tau)|| \, d\tau,$$

para cada $a \leq s \leq t \leq b$.

Vamos introduzir agora a definição de semigrupos não-lineares.

Definição 3.3.6. *Seja* X *um espaço de Banach real e seja* C *um subconjunto não-vazio em* X*. Uma família de funções* $\{S(t); S(t) : C \longrightarrow C, t \geq 0\}$ *é chamada de semigrupo de aplicações não-expansivas em* C *se*

(i) $S(t+s) = S(t)S(s)$*, para cada* $s, t \geq 0$*;*

(ii) $S(0) = I$*, onde* I *é a identidade em* C*;*

(iii) $\lim\limits_{t \to 0^+} S(t)x = x$*, para cada* $x \in C$*;*

(iv) $||S(t)x - S(t)y|| \leq ||x-y||$*, para cada* $x, y \in C$ *e* $t \geq 0$.

Tem-se o seguinte resultado devido a CRANDALL e LIGGETT. Sua demonstração pode ser encontrada em [5]:

Teorema 3.3.6. *Seja* $A : D(A) \subset X \longrightarrow 2^X$ *um operador m-acretivo. Então,* $S_A(t)x = \lim\limits_{n \to \infty} \left(I + \frac{t}{n}A\right)^{-n} x$ *existe para cada* $x \in \overline{D(A)}$ *uniformemente em* t *em subconjuntos compactos de* $\mathbb{R}^+$*. Além disso,*

(a) $\{S_A(t); S_A(t) : \overline{D(A)} \longrightarrow \overline{D(A)}, t \geq 0\}$ *é um semigrupo de aplicações não-expansivas em* $\overline{D(A)}$ *e para cada* $x \in D(A)$ *e* $t > 0$ *temos* $||S_A(t)x - x|| \leq t|Ax|$, *onde* $|Ax| = \inf\{||y||; y \in Ax\}$*;*

(b) *Para cada* $x \in \overline{D(A)}$, *a função* $u : [a, \infty) \longrightarrow \overline{D(A)}$ *definida por* $u(t) = S_A(t-a)x$ *para cada* $t \in [a, \infty)$, *é a única solução mild para o problema de Cauchy* $0 \in \dfrac{du}{dt}(t) + Au(t)$, *satisfazendo* $u(a) = x$, *com* $a \leq t < \infty$.

Definição 3.3.7. *O semigrupo de aplicações não-expansivas definido por*

$$S_A(t)x = \lim_{n\to\infty} \left(I + \frac{t}{n}A\right)^{-n} x$$

é chamado de semigrupo gerado por $-A$ *em* $\overline{D(A)}$.

3.4 Espaços de Lebesgue e Sobolev com Expoente Variável

Nesta seção lembraremos algumas definições e propriedades básicas dos espaços de Lebesgue e Sobolev com expoente variável. As demonstrações omitidas podem ser encontradas em [15, 17, 19].

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto mensurável e $p \in L^\infty(\Omega)$ com $\inf ess\, p \geq 1$. O espaço de Lebesgue generalizado $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ é definido por

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R};\ \text{u é mensurável com} \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}\, dx < \infty \right\}.$$

A norma nesse espaço, chamada norma de Luxemburgo, é definida por

$$||u||_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = \inf \left\{ \mu > 0 : \int_\Omega \left| \frac{u(x)}{\mu} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}.$$

O espaço $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, munido da norma acima é um espaço de Banach.

Usaremos no que segue a notação

$$p^- = \inf ess\, p \quad \text{e} \quad p^+ = \sup ess\, p.$$

No caso em que a função $p(x) = p$ é constante, então $||\cdot||_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = ||\cdot||_{L^p(\Omega)}$, onde $||\cdot||_{L^p(\Omega)}$ é a norma usual do espaço $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, isto é,

$$||u||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, a norma $||u||_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$ e a modular $\displaystyle\int_\Omega |u(x)|^{p(x)} \, dx$ estão relacionadas pela desigualdade:

Lema 3.4.1. *Seja $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Então,*

$$\min\{||u||^{p-}_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}, ||u||^{p+}_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}\} \le \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} \, dx \le \max\{||u||^{p-}_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}, ||u||^{p+}_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}\}.$$

Observe que a desigualdade acima é equivalente a

$$\min\left\{\left(\int_\Omega |u(x)|^{p(x)} \, dx \right)^{\frac{1}{p^-}}, \left(\int_\Omega |u(x)|^{p(x)} \, dx \right)^{\frac{1}{p^+}}\right\} \le ||u||_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$$
$$\le \max\left\{\left(\int_\Omega |u(x)|^{p(x)} \, dx \right)^{\frac{1}{p^-}}, \left(\int_\Omega |u(x)|^{p(x)} \, dx \right)^{\frac{1}{p^+}}\right\}.$$

Proposição 3.4.1. *(Desigualdade de Hölder) Seja $p^- > 1$ e p' tal que $\dfrac{1}{p(\cdot)} + \dfrac{1}{p'(\cdot)} = 1$. Se $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ e $v \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$, então*

$$\int_\Omega |uv| \, dx \le \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{p'^-} \right) ||u||_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} ||v||_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)}.$$

Observe que na desigualdade acima $\left(\dfrac{1}{p^-} + \dfrac{1}{p'^-} \right) \le 2$ e podemos usar a desigualdade de Hölder na forma

$$\int_\Omega |uv| \, dx \le 2||u||_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} ||v||_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)}.$$

Teorema 3.4.1. *Se $p^- > 1$, então $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo e separável.*

Teorema 3.4.2. *Seja $(u_n) \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$, uma sequência de funções tal que $u_n \longrightarrow u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Então, existe uma subsequência (u_{n_k}) tal que*

(a) *$u_{n_k}(x) \longrightarrow u(x)$ q.t.p. em Ω;*

(b) *$|u_{n_k}(x)| \le h(x)$, para $k \ge 1$ q.t.p. em Ω, com $h \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$.*

Teorema 3.4.3. *(Teorema da Representação de Riesz para o espaço $L^{p(\cdot)}(\Omega)$)*
Seja $p^- > 1$, $p(\cdot)$ e $q(\cdot)$ expoentes variáveis conjugados, isto é, $\dfrac{1}{p(\cdot)} + \dfrac{1}{q(\cdot)} = 1$. Então, dado $f \in (L^{p(x)}(\Omega))^*$, existe um único $v \in L^{q(x)}(\Omega)$ tal que

$$f(v) = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx$$

para todo $u \in L^{p(x)}(\Omega)$.

Teorema 3.4.4. (i) *O espaço* $C_c(\Omega)$ *é denso em* $L^{p(\cdot)}(\Omega)$;

(ii) *O espaço* $C_c^\infty(\Omega)$ *é denso em* $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Teorema 3.4.5. *Suponha que* $|\Omega| < \infty$. *Então,* $L^{p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega)$ *se, e somente se,* $q(x) \leq p(x)$ *q.t.p. em* Ω. *E nesse caso, a imersão é contínua com constante de imersão não excedendo* $|\Omega| + 1$, *isto é,*

$$||u||_{L^{q(\cdot)}(\Omega)} \leq (|\Omega| + 1)||u||_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}.$$

Definição 3.4.1. *Estendendo o expoente variável* $p\ :\ \overline{\Omega} \to [1, \infty)$ *para*

$$\begin{array}{rrcl} p: & \overline{Q_T} = [0,T] \times \overline{\Omega} & \longrightarrow & [1,\infty) \\ & (t,x) & \longmapsto & p(t,x) := p(x) \end{array}$$

podemos também considerar o espaço de Lebesgue generalizado por

$$L^{p(\cdot)}(Q_T) = \left\{ u:\ Q_T \to \mathbb{R};\ u \text{ é mensurável com } \int_{Q_T} |u(t,x)|^{p(x)}\,dxdt < \infty \right\}.$$

A norma de $u \in L^{p(\cdot)}(Q_T)$ *é dada por*

$$||u||_{L^{p(\cdot)}(Q_T)} = \inf\left\{ \mu > 0 : \iint_{Q_T} \left| \frac{u(t,x)}{\mu} \right|^{p(x)} dxdt \leq 1 \right\},$$

o que naturalmente compartilha das mesmas propriedades do espaço $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. *Dessa forma, o espaço* $L^{p(\cdot)}(Q_T)$ *munido de sua respectiva norma torna-se um espaço de Banach.*

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio aberto e conexo. O espaço de Sobolev com expoente variável $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ é definido por

$$W^{1,p(\cdot)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p(\cdot)}(\Omega) : |\nabla u| \in L^{p(\cdot)}(\Omega) \right\},$$

onde $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N} \right)$ e $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ denota a i-ésima derivada fraca de u, ou seja,

$$-\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi\,dx = \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx$$

para toda $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$.

O espaço $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ é Banach munido da norma

$$||u||_{W^{1,p(\cdot)}(\Omega)} = \inf\left\{\mu > 0 : \int_{\Omega}\left(\left|\frac{\nabla u(x)}{\mu}\right|^{p(x)} + \left|\frac{u(x)}{\mu}\right|^{p(x)}\right) dx \leq 1\right\}$$

ou da norma equivalente

$$||u||_{W^{1,p(\cdot)}(\Omega)} = ||u||_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} + ||\nabla u||_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}.$$

O espaço de Sobolev com expoentes variáveis tem as seguintes propriedades:

Proposição 3.4.2. *Se $p^- > 1$, então o espaço $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ é reflexivo e separável.*

O espaço $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ designa o fecho de $C_c^{\infty}(\Omega)$ em $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$.

Proposição 3.4.3. *$W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ é um espaço de Banach, separável e reflexivo, se $p^- > 1$.*

Teorema 3.4.6. *(Desigualdade de Poincaré) Suponha que Ω é um aberto limitado e que $p \in C(\overline{\Omega})$ com $p^- \geq 1$. Então, existe uma constante C, dependendo da função p e da medida de Ω, tal que*

$$||u||_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq C||\nabla u||_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$$

para todo $u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$. Em particular, a expressão $||\nabla u||_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$ é uma norma sobre $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ que é equivalente a norma $||u||_{W^{1,p(\cdot)}(\Omega)}$.

Teorema 3.4.7. *Suponha que $|\Omega| < \infty$ e sejam $p(\cdot)$ e $q(\cdot)$ tais que $q(x) \leq p(x)$ q.t.p. em Ω. Então, $W^{1,p(x)}(\Omega) \subset W^{1,q(x)}(\Omega)$ e tal imersão é contínua.*

No que segue denotaremos $p^*(x) = \begin{cases} \dfrac{Np(x)}{N - p(x)}, & \text{se} \quad p(x) < N, \\ \infty, & \text{se} \quad p(x) \geq N. \end{cases}$

Teorema 3.4.8. *Suponha que $|\Omega| < \infty$ e sejam $p, q \in C(\overline{\Omega})$, tais que $p^-, q^- \geq 1$. Se $q(x) \leq p^*(x)$ para todo $x \in \overline{\Omega}$, então $W^{1,p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega)$ e tal imersão é contínua e compacta.*

Teorema 3.4.9. *Suponha que $|\Omega| < \infty$ e sejam $p, q \in C(\overline{\Omega})$, tais que $1 \leq p(x) \leq q(x) \leq p^*(x)$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Então $W^{1,p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega)$ e tal imersão é contínua.*

Observe que dos resultados acima, segue que para $p \in C(\overline{\Omega})$ com $1 < p^- \leq p^+ < N$ valem as imersões $W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \subset L^{r(\cdot)}(\Omega)$ para qualquer função mensurável $r : \Omega \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow [1, \infty)$ tal que $\inf_{x \in \Omega} ess \left(\dfrac{Np(x)}{N - p(x)} - r(x) \right) > 0$.

Observação 3.4.1. *Vale a pena observar*

$$\int_\Omega |u|^{p(x)}\, dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\, dx,$$

não vale em geral. Para mais detalhes, veja [18].

Observação 3.4.2. *O expoente variável $p : \overline{\Omega} \longrightarrow [1, \infty)$ é dito satisfazer a condição de log-continuidade se para todo $x_1, x_2 \in \overline{\Omega}$, $|x_1 - x_2| < 1$, $|p(x_1) - p(x_2)| < \omega(|x_1 - x_2|)$ onde $\omega : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função não-decrescente com*

$$\limsup_{\alpha \to 0^+} \ \omega(\alpha) \ln \left(\frac{1}{\alpha} \right) < \infty.$$

A condição de log-continuidade é usada para obter vários resultados de regularidade para espaços de Sobolev com expoentes variáveis, em particular que $C^\infty(\overline{\Omega})$ é denso em $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ e $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) = W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \cap W_0^{1,1}(\Omega)$. Além disso, se p satisfaz a condição de log-continuidade e $1 < p^- \leq p^+ < N$, então $W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \subset L^{p^*(\cdot)}(\Omega)$. Contudo, não precisamos destas propriedades de regularidade para os resultados do próximo capítulo e iremos trabalhar de forma mais seletiva com os espaços de Lebesgue e Sobolev, usando apenas expoentes variáveis contínuos $p : \overline{\Omega} \longrightarrow [1, \infty)$ tal que $p^- > 1$.

Vamos também utilizar as notações padrão para espaços de Bochner, isto é, considere V um espaço de Banach, $p \geq 1$ e $0 < T < \infty$, então $L^p(0, T; V)$ denota o espaço das funções mensuráveis $u : (0, T) \to V$ tal que $t \mapsto ||u(t)||_V \in L^p(0, T)$. Além disso, $C([0, T]; V)$ denota o espaço das funções contínuas $u : [0, T] \to V$ dotado com a norma

$$||u||_{C([0,T],V)} := \max_{0 \leq t \leq T} ||u(t)||_V.$$

Segue a demonstração de um lema técnico que fornece uma estimativa para funções em um espaço de Lebesgue apropriado. Este resultado será usado no próximo capítulo para estabelecer as propriedades das soluções renormalizadas da equação estudada.

Lema 3.4.2. *Seja* $p \in C(\overline{\Omega})$ *com* $2 - \dfrac{1}{N+1} < p^- \leq p^+ < N$ *e seja* $\beta > 0$. *Então, existe uma constante* $c > 0$, *dependendo de* β, *tal que, para cada função* $g \in L^{p^-}(0,T;W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ *com* $||g||_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} = \sup_{t\in(0,T)} ess \int_\Omega |g(t,x)|\, dx \leq \beta$ *e*

$$\sup_{\gamma\geq 0} \iint_{B_\gamma} |\nabla g|^{p(x)}\, dxdt \leq \beta \tag{3.4}$$

onde, para cada $\gamma \geq 0$, $B_\gamma = \{\gamma \leq |g| \leq \gamma+1\}$, *segue que*

$$||g||_{L^{q^-}(0,T;W_0^{1,q(\cdot)}(\Omega))} \leq c,$$

para toda função contínua $q(\cdot)$ *em* $\overline{\Omega}$ *satisfazendo* $1 \leq q(x) < \dfrac{N(p(x)-1)+p(x)}{N+1}$, *para todo* $x \in \overline{\Omega}$.

Demonstração. 1º passo: Seja q^+ uma constante satisfazendo $1 \leq q^+ < \dfrac{N(p^- - 1)+p^-}{N+1}$. Assim,

$$\begin{aligned} q^+(N+1) &< N(p^- - 1) + p^- \\ &= Np^- - N + p^- \\ &= p^-(N+1) - N \\ &< p^-(N+1) \end{aligned}$$

e, em particular, $q^+ < p^-$. Sendo $q^+ < p^- \leq p(\cdot)$, temos as inclusões contínuas $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \subset W_0^{1,p^-}(\Omega) \subset W_0^{1,q^+}(\Omega)$. Então, para cada inteiro $\gamma_0 \geq 1$, usando a desigualdade (3.4) e o Teorema 3.4.5, segue que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega |\nabla g|^{q^+}\, dxdt &= \sum_{\gamma=0}^{\gamma_0-1} \iint_{B_\gamma} |\nabla g|^{q^+}\, dxdt + \sum_{\gamma=\gamma_0}^{\infty} \iint_{B_\gamma} |\nabla g|^{q^+}\, dxdt \\ &\leq \sum_{\gamma=0}^{\gamma_0-1} (|\Omega|+1) \iint_{B_\gamma} |\nabla g|^{p(\cdot)}\, dxdt + \sum_{\gamma=\gamma_0}^{\infty} \iint_{B_\gamma} |\nabla g|^{q^+}\, dxdt \\ &\leq \sum_{\gamma=0}^{\gamma_0-1} (|\Omega|+1)\beta + \sum_{\gamma=\gamma_0}^{\infty} \iint_{B_\gamma} |\nabla g|^{q^+}\, dxdt \end{aligned}$$

$$= c_{\gamma_0} + \sum_{\gamma=\gamma_0}^{\infty} \iint\limits_{B_\gamma} |\nabla g|^{q^+}\, dxdt$$

sendo $c_{\gamma_0} = (|\Omega|+1)\beta\gamma_0 > 0$ uma constante dependente de β, Ω e γ_0. Daí, aplicando a desigualdade de Hölder e usando novamente (3.4) e o Teorema 3.4.5, sabendo que $p^- \leq p(\cdot)$, tem-se que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_\Omega |\nabla g|^{q^+}\, dxdt &\leq c_{\gamma_0} + \sum_{\gamma=\gamma_0}^{\infty} \left[\iint\limits_{B_\gamma} (|\nabla g|^{q^+})^{\frac{p^-}{q^+}}\, dxdt \right]^{\frac{q^+}{p^-}} \left[\iint\limits_{B_\gamma} (|1|^{q^+})^{1-\frac{p^-}{q^+}}\, dxdt \right]^{1-\frac{q^+}{p^-}} \\
&= c_{\gamma_0} + \sum_{\gamma=\gamma_0}^{\infty} \left[\iint\limits_{B_\gamma} |\nabla g|^{p^-}\, dxdt \right]^{\frac{q^+}{p^-}} |B_\gamma|^{1-\frac{q^+}{p^-}} \\
&\leq c_{\gamma_0} + c \sum_{\gamma=\gamma_0}^{\infty} \left[\iint\limits_{B_\gamma} |\nabla g|^{p(\cdot)}\, dxdt \right]^{\frac{q^+}{p^-}} |B_\gamma|^{1-\frac{q^+}{p^-}} \\
&\leq c_{\gamma_0} + c\beta^{\frac{q^+}{p^-}} \sum_{\gamma=\gamma_0}^{\infty} |B_\gamma|^{1-\frac{q^+}{p^-}} \\
&= c_{\gamma_0} + c_1 \sum_{\gamma=\gamma_0}^{\infty} |B_\gamma|^{1-\frac{q^+}{p^-}}
\end{aligned}$$

sendo $c_1 = c\beta^{\frac{q^+}{p^-}} > 0$ uma constante dependente de β, Ω, q^+ e p^-.

Agora, seja $r \geq 1$. Então, para $\gamma > 0$, visto que $B_\gamma = \{\gamma \leq |g| \leq \gamma + 1\}$, resulta que $|g(t,x)| \geq \gamma$ se, e somente se, $|g(t,x)|^r \geq \gamma^r$. Assim, integrando ambos os lados da desigualdade sobre B_γ, obtemos

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{B_\gamma} |g(t,x)|^r\, dxdt &\geq \int\limits_{B_\gamma} \gamma^r\, dx \\
&= \gamma^r \int\limits_{B_\gamma} dx \\
&= \gamma^r |B_\gamma|.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{\gamma^r} \iint\limits_{B_\gamma} |g(t,x)|^r\, dxdt \geq |B_\gamma|.$$

De modo que, retomando a estimativa anterior e aplicando a desigualdade de Hölder para séries, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_\Omega |\nabla g|^{q^+}\, dxdt &\leq c_{\gamma_0} + c_1 \sum_{\gamma=\gamma_0}^{\infty} \left(\frac{1}{\gamma^r} \iint\limits_{B_\gamma} |g|^r\, dxdt \right)^{1-\frac{q^+}{p^-}} \\
&= c_{\gamma_0} + c_1 \sum_{\gamma=\gamma_0}^{\infty} \frac{1}{\gamma^{r\frac{p^- - q^+}{p^-}}} \left(\iint\limits_{B_\gamma} |g|^r\, dxdt \right)^{\frac{p^- - q^+}{p^-}} \\
&\leq c_{\gamma_0} + c_1 \left[\sum_{\gamma=\gamma_0}^{\infty} \left(\frac{1}{\gamma^{r\frac{p^- - q^+}{p^-}}} \right)^{\frac{p^-}{q^+}} \right]^{\frac{q^+}{p^-}} \\
&\quad \cdot \left\{ \sum_{\gamma=\gamma_0}^{\infty} \left[\left(\iint\limits_{B_\gamma} |g|^r\, dxdt \right)^{\frac{p^- - q^+}{p^-}} \right]^{\frac{p^-}{p^- - q^+}} \right\}^{\frac{p^- - q^+}{p^-}} \\
&= c_{\gamma_0} + c_1 \left(\sum_{\gamma=\gamma_0}^{\infty} \frac{1}{\gamma^{r\frac{p^- - q^+}{q^+}}} \right)^{\frac{q^+}{p^-}} \left(\sum_{\gamma=\gamma_0}^{\infty} \iint\limits_{B_\gamma} |g|^r\, dxdt \right)^{\frac{p^- - q^+}{p^-}}.
\end{aligned}$$

Como $q^+ < p^-$, temos $q^+ < N$. Dessa forma, resulta que $q^{+^*} > 1$, onde $q^{+^*} = \dfrac{Nq^+}{N - q^+}$. Além disso, se escolhermos $r = \dfrac{q^+(N+1)}{N}$, temos $1 \leq r \leq q^{+^*}$. Aplicando agora a desigualdade de interpolação para normas L^p (Proposição 2.1.3), vem que

$$||g(t,\cdot)||_{L^r(\Omega)} \leq ||g(t,\cdot)||^{1-a}_{L^1(\Omega)} ||g(t,\cdot)||^{a}_{L^{q^{+^*}}(\Omega)} \leq c_2 ||g(t,\cdot)||^{a}_{L^{q^{+^*}}(\Omega)}$$

para quase todo $t \in (0,T)$ e uma constante $c_2 > 0$, onde $a = \dfrac{q^{+^*}(1-r)}{r(1-q^{+^*})}$. Como consequência,

$$||g||^r_{L^r(0,T;L^r(\Omega))} \leq c_2 \int_0^T ||g(t,\cdot)||^{\frac{q^{+^*}(1-r)}{(1-q^{+^*})}}_{L^{q^{+^*}}(\Omega)}$$

levando em conta o valor de "a"dado pela desigualdade de interpolação.
Substituindo os valores de $r = \dfrac{q^+(N+1)}{N}$ e $q^{+^*} = \dfrac{Nq^+}{N-q^+}$, a última estimativa pode ser simplificada e dada por

$$||g||^r_{L^r(0,T;L^r(\Omega))} \leq c_2 ||g||^{q^+}_{L^{q^+}(0,T;L^{q^{+^*}}(\Omega))}.$$

Assim, pelo Teorema 3.4.9 e pelo Teorema 3.4.5, obtemos a seguinte desigualdade

$$\left(\int_\Omega |g(t,x)|^{q^{+^*}}\, dx \right)^{\frac{1}{q^{+^*}}} \leq c_3 \left(\int_\Omega |\nabla g(t,x)|^{q^+}\, dx \right)^{\frac{1}{q^+}}$$

para alguma constante $c_3 > 0$.

Daí, usando o valor atribuído para "r", $q^+ < q^{+^*}$, as últimas estimativas e aplicando a desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned}
||g||_{L^{q^+}(0,T;L^{q^{+^*}}(\Omega))} &\leq c_4\Big(\int_0^T\int_\Omega |\nabla g(t,x)|^{q^+}\,dx\Big)^{\frac{1}{q^+}}\\
&\leq c_4\Bigg[c_{\gamma_0} + c_1\Big(\sum_{\gamma=\gamma_0}^{\infty}\frac{1}{\gamma^{r\frac{p^- - q^+}{q^+}}}\Big)^{\frac{q^+}{p^-}}\Big(\sum_{\gamma=\gamma_0}^{\infty}\iint_{B_\gamma}|g|^r\,dxdt\Big)^{\frac{p^- - q^+}{p^-}}\Bigg]^{\frac{1}{q^+}}\\
&= c_5 + c_6\Big(\sum_{\gamma=\gamma_0}^{\infty}\frac{1}{\gamma^{\frac{q^+(N+1)(p^- - q^+)}{Nq^+}}}\Big)^{\frac{1}{p^-}}\Big(\sum_{\gamma=\gamma_0}^{\infty}\iint_{B_\gamma}|g|^r\,dxdt\Big)^{\frac{p^- - q^+}{p^- q^+}}\\
&= c_5 + c_6\Big(\sum_{\gamma=\gamma_0}^{\infty}\frac{1}{\gamma^{\frac{q^+(N+1)(p^- - q^+)}{Nq^+}}}\Big)^{\frac{1}{p^-}}\Big(\int_0^T\int_\Omega |g|^r\,dxdt\Big)^{\frac{p^- - q^+}{p^- q^+}}\\
&= c_5 + c_6\Big(\sum_{\gamma=\gamma_0}^{\infty}\frac{1}{\gamma^{\frac{q^+(N+1)(p^- - q^+)}{Nq^+}}}\Big)^{\frac{1}{p^-}}\Big(||g||^r_{L^r(0,T;L^r(\Omega))}\Big)^{\frac{p^- - q^+}{p^- q^+}}\\
&\leq c_5 + c_6\Big(\sum_{\gamma=\gamma_0}^{\infty}\frac{1}{\gamma^{\frac{(N+1)(p^- - q^+)}{N}}}\Big)^{\frac{1}{p^-}}||g||^{\frac{p^- - q^+}{p^-}}_{L^{q^+}(0,T;L^{q^{+^*}}(\Omega))}
\end{aligned}$$

em que c_4, c_5 e c_6 são constantes positivas.

Mediante a teoria de séries numéricas, desde que $\dfrac{(p^- - q^+)(N+1)}{N} > 1$, nos assegura que a série

$$\sum_{\gamma=\gamma_0}^{\infty}\frac{1}{\gamma^{\frac{(N+1)(p^- - q^+)}{N}}}$$

é convergente, isto é,

$$\sum_{\gamma=\gamma_0}^{\infty}\frac{1}{\gamma^{\frac{(N+1)(p^- - q^+)}{N}}} = c_7.$$

Como $\dfrac{p^-}{p^- - q^+} > 1$, usando a desigualdade de Young (Proposição 2.1.2), obtemos

$$||g||_{L^{q^+}(0,T;L^{q^{+^*}}(\Omega))} \leq c_5 + \frac{p^- - q^+}{p^-}(||g||_{L^{q^+}(0,T;L^{q^{+^*}}(\Omega))}) + \frac{1}{(\frac{p^-}{p^- - q^+})'}\Big[c_6(c_7)^{\frac{1}{p^-}}\Big]^{\frac{p^-}{p^- - q^+}}.$$

Assim,

$$\Big(1 - \frac{p^- - q^+}{p^-}\Big)||g||_{L^{q^+}(0,T;L^{q^{+^*}}(\Omega))} \leq c_5 + c_8$$

e portanto,

$$||g||_{L^{q^+}(0,T;L^{q^{+^*}}(\Omega))} \leq \frac{c_5 + c_8}{\left(1 - \frac{p^- - q^+}{p^-}\right)} := c_9 > 0.$$

E levando em conta os resultados anteriores, resulta que

$$||\nabla g||_{L^{q^+}(Q_T)} \leq \left(c_{\gamma_0} + c_1 \left(\sum_{\gamma=\gamma_0}^{\infty} \frac{1}{\gamma^{r\frac{p^- - q^+}{q^+}}}\right)^{\frac{q^+}{p^-}} \left(\sum_{\gamma=\gamma_0}^{\infty} \iint_{B_\gamma} |g|^r \, dxdt\right)^{\frac{p^- - q^+}{p^-}}\right)^{\frac{1}{q^+}}$$

$$\leq c_{10}$$

para alguma constante $c_{10} > 0$, lembrando que

$$||g||^r_{L^r(0,T;L^r(\Omega))} \leq c_2 ||g||^{q^+}_{L^{q^+}(0,T;L^{q^{+^*}}(\Omega))} \leq c_2 c_9.$$

Em particular, existe uma constante $c_{11} > 0$ tal que $||g||_{L^1(Q_T)} \leq c_{11}$, devida à inclusão contínua dos espaços (Teorema 3.4.5), visto que $1 \leq q^+ \leq q^{+^*}$ e que $||g||_{L^{q^+}(0,T;L^{q^{+^*}}(\Omega))} \leq c_9$.

2º passo: Agora vamos considerar um expoente variável contínuo, $q \in C(\overline{\Omega})$, satisfazendo a estimativa $1 \leq q(x) < \dfrac{N(p(x)-1)+p(x)}{N+1}$, para todo $x \in \overline{\Omega}$. Como uma consequência da continuidade de $p(\cdot)$ e $q(\cdot)$ em $\overline{\Omega}$, existe uma constante $\delta > 0$ tal que

$$\max_{y \in B(x,\delta)\cap\Omega} q(y) < \min_{y \in B(x,\delta)\cap\Omega} \frac{N(p(y)-1)+p(y)}{N+1},$$

para todo $x \in \Omega$. Observe que $\overline{\Omega}$ é compacto e portanto, por definição, podemos cobri-lo com um número finito de bolas $(B_i)_{i=1,2,\cdots,k}$. Além disso, existe uma constante $\alpha > 0$ tal que $|B_i \cap \Omega| > \alpha$, para todo $i = 1, 2, \cdots, k$. Sendo assim, vamos denotar por q_i^+ e q_i^- como sendo o máximo local e o mínimo local de q em $\overline{B_i \cap \Omega}$, e do mesmo modo p_i^+ e p_i^- como sendo o máximo local e o mínimo local de p em $\overline{B_i \cap \Omega}$.

Usando agora o mesmo argumento de antes, porém localmente, vemos que a desigualdade

$$\int_0^T \int_\Omega |\nabla g|^{q^+} dxdt \leq c_{\gamma_0} + c_1 \sum_{\gamma=\gamma_0}^{\infty} |B_\gamma|^{1-\frac{q^+}{p^-}}$$

vale em $B_i \cap B_\gamma$ e $B_i \cap B_\Omega$, respectivamente. Nesse âmbito, é válido que

$$||g||_{L^{q_i^+}(0,T;L^{q_i^{+^*}}(B_i\cap\Omega))} \leq c_5 + c_6 \left(\sum_{\gamma=\gamma_0}^{\infty} \frac{1}{\gamma^{\frac{(N+1)(p_i^- - q_i^+)}{N}}}\right)^{\frac{1}{p_i^-}} ||g||^{\frac{p_i^- - q_i^+}{p_i^-}}_{L^{q_i^+}(0,T;L^{q_i^{+^*}}(B_i\cap\Omega))}.$$

Agora, denote por

$$\overline{g}_i(t) = \frac{1}{|B_i \cap \Omega|} \int_{B_i \cap \Omega} g(t,x)\, dx, \text{ para } t \in [0,T],$$

a média de g_i sobre $B_i \cap \Omega$. Como sabemos que $||g||_{L^1(B_i \cap \Omega)} \leq c_{11}$ e que $|B_i \cap \Omega| > \alpha$, para todo $i = 1, 2, \cdots, k$, segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^T |\overline{g}_i(t)|\, dt &= \int_0^T \left| \frac{1}{|B_i \cap \Omega|} \int_{B_i \cap \Omega} g(t,x)\, dx \right| \\
&= \frac{1}{|B_i \cap \Omega|} \left| \int_{B_i \cap \Omega} g(t,x)\, dx \right| \\
&\leq \frac{1}{\alpha} c_{11} \\
&= \frac{c_{11}}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Daí, pela desigualdade de Poincaré-Wirtinger (Proposição 2.1.4), obtemos que

$$||g - \overline{g}_i||_{L^{q_i^{+*}}(B_i \cap \Omega)} \leq c_{12} ||\nabla g||_{L^{q_i^+}(B_i \cap \Omega)}$$

para alguma constante $c_{12} > 0$. Tendo em mente que

$$\max_{y \in B(x,\delta) \cap \Omega} q(y) < \min_{y \in B(x,\delta) \cap \Omega} \frac{N(p(y)-1) + p(y)}{N+1},$$

para todo $x \in \Omega$, deduzimos pelos resultados anteriores que

$$||g||_{L^{q_i^+}(0,T;L^{q_i^{+*}}(B_i \cap \Omega))} \leq c_{13} + c_{14} ||g||^{\frac{p_i^- - q_i^+}{p_i^-}}_{L^{q_i^+}(0,T;L^{q_i^{+*}}(B_i \cap \Omega))}$$

para constantes c_{13}, $c_{14} > 0$. Obviamente, isso implica que para alguma constante c_{15}, dependendo de $p(\cdot)$, $q(\cdot)$, Ω,

$$||g||_{L^{q_i^+}(0,T;L^{q_i^{+*}}(B_i \cap \Omega))} \leq c_{15}$$

para todo $i = 1, 2, \cdots, k$, usando a desigualdade de Young (Proposição 2.1.2) como anteriormente. Finalmente, como $q_i^{+*} = \dfrac{N q_i^+}{N - q_i^+} \geq q^*(x) \geq q(x)$ e $q_i^+ \geq q(x)$ para todo $x \in B_i \cap \Omega$ e para todo $i = 1, 2, \cdots, k$, podemos concluir que

$$||g||_{L^{q^-}(0,T;L^{q^*(\cdot)}(\Omega))} + ||g||_{L^{q^-}(0,T;W_0^{1,q(\cdot)}(\Omega))} \leq c_{16},$$

para alguma constante $c_{16} > 0$ dependendo de $p(\cdot)$, $q(\cdot)$, Ω.

De fato, observe que, pelo Teorema 3.4.5

$$\begin{aligned}
||g||_{L^{q_i^+}(0,T;L^{q^*}(\Omega))} &\leq (|\Omega|+1)||g||_{L^{q_i^+}(0,T;L^{q_i^{+^*}}(\Omega))}\\
&\leq (|\Omega|+1)c_{15}\\
&= c_{17}
\end{aligned}$$

para todo $i = 1, 2, \cdots, k$, desde que $q^*(\cdot) \leq q_i^{+^*}$. Pelo mesmo motivo, como $q^- \leq q(\cdot) \leq q_i^+$, resulta que

$$\begin{aligned}
||g||_{L^{q^-}(0,T;L^{q^*(\cdot)}(\Omega))} &\leq (|\Omega|+1)||g||_{L^{q_i^+}(0,T;L^{q^*(\cdot)}(\Omega))}\\
&\leq (|\Omega|+1)c_{17}\\
&= c_{18}.
\end{aligned}$$

Note também que, em particular, a expressão $||\nabla g||_{L^{q(\cdot)}(\Omega)}$ é uma norma sobre $W_0^{1,q(\cdot)}(\Omega)$ que é equivalente a norma $||g||_{W_0^{1,q(\cdot)}(\Omega)}$. E como sabemos que $q^- > 1$, resulta que

$$||g||^{q^-}_{L^{q^-}(0,T;W_0^{1,q(\cdot)}(\Omega))} = \int_0^T ||\nabla g||^{q^-}_{L^{q(\cdot)}(\Omega)}.$$

Como $q(\cdot) \leq q^+$, novamente pelo Teorema 3.4.5, vem que

$$\begin{aligned}
||\nabla g||_{L^{q(\cdot)}(Q_T)} &\leq (|\Omega|+1)||\nabla g||_{L^{q^+}(Q_T)}\\
&\leq (|\Omega|+1)c_{10}\\
&\leq c_{19}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$||g||_{L^{q^-}(0,T;L^{q^*(\cdot)}(\Omega))} + ||g||_{L^{q^-}(0,T;W_0^{1,q(\cdot)}(\Omega))} \leq c_{16},$$

sendo c_{16} uma constante positiva dependendo de $p(\cdot)$, $q(\cdot)$, Ω. Portanto, isso nos garante que $||g||_{L^{q^-}(0,T;W_0^{1,q(\cdot)}(\Omega))} \leq c$ e o resultado segue. □

Observação 3.4.3. *Note que o resultado obtido no lema anterior, também é válido para cada função mensurável $q : \Omega \longrightarrow [1, +\infty]$ tal que*

$$b := \inf_{x\in\Omega} ess\left(\frac{N(p(x)-1)+p(x)}{N+1} - q(x)\right) > 0,$$

desde que uma função contínua $q(\cdot)$ *pode ser aproximada por funções mensuráveis. De fato, nesse caso existe uma função contínua* $s(\cdot)$ *tal que* $s(x) \geq q(x)$ *para quase todo* $x \in \Omega,$ *e*

$$\min_{x\in\Omega}\left(\frac{N(p(x)-1)+p(x)}{N+1}-s(x)\right)(> b/2) > 0.$$

Pelo Lema 3.4.2 e devido a inclusão contínua $L^{s^-}(0,T;W_0^{1,s(\cdot)}(\Omega)) \subset L^{q^-}(0,T;W_0^{1,q(\cdot)}(\Omega)),$ *podemos deduzir então que* $||g||_{L^{q-}(0,T;W_0^{1,q(\cdot)}(\Omega))} \leq c,$ *para alguma constante* $c > 0.$

Capítulo 4

Soluções Renormalizadas para uma Equação de Evolução Envolvendo o p(x)-Laplaciano

Neste capítulo apresentaremos a demonstração de existência e unicidade de soluções renormalizadas u para a equação não-linear parabólica

$$\begin{cases} \partial_t u - div(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = f & \text{em} \quad Q_T, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma_T, \\ u(0,\cdot) = u_0(\cdot) & \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ é um domínio limitado com fronteira Lipschitz denotada por $\partial\Omega$, $Q_T = (0,T) \times \Omega$, $\Sigma_T = (0,T) \times \partial\Omega$, $f \in L^1(Q_T)$, $u_0 \in L^1(\Omega)$ e $p : \overline{\Omega} \longrightarrow (1, +\infty)$ é uma função contínua.

4.1 Soluções Renormalizadas

Nesta seção apresentaremos a definição de solução renormalizada para o problema (4.1) e algumas observações acerca da definição. Também enunciaremos o principal resultado deste capítulo, o Teorema 4.1.1.

Definição 4.1.1. **(i)** *Para cada $\gamma > 0$, a função truncação $T_\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, é definida por*

$$T_\gamma(z) = \begin{cases} -\gamma, & se \quad z \leq -\gamma, \\ z, & se \quad -\gamma < z < \gamma, \\ \gamma, & se \quad z \geq \gamma. \end{cases}$$

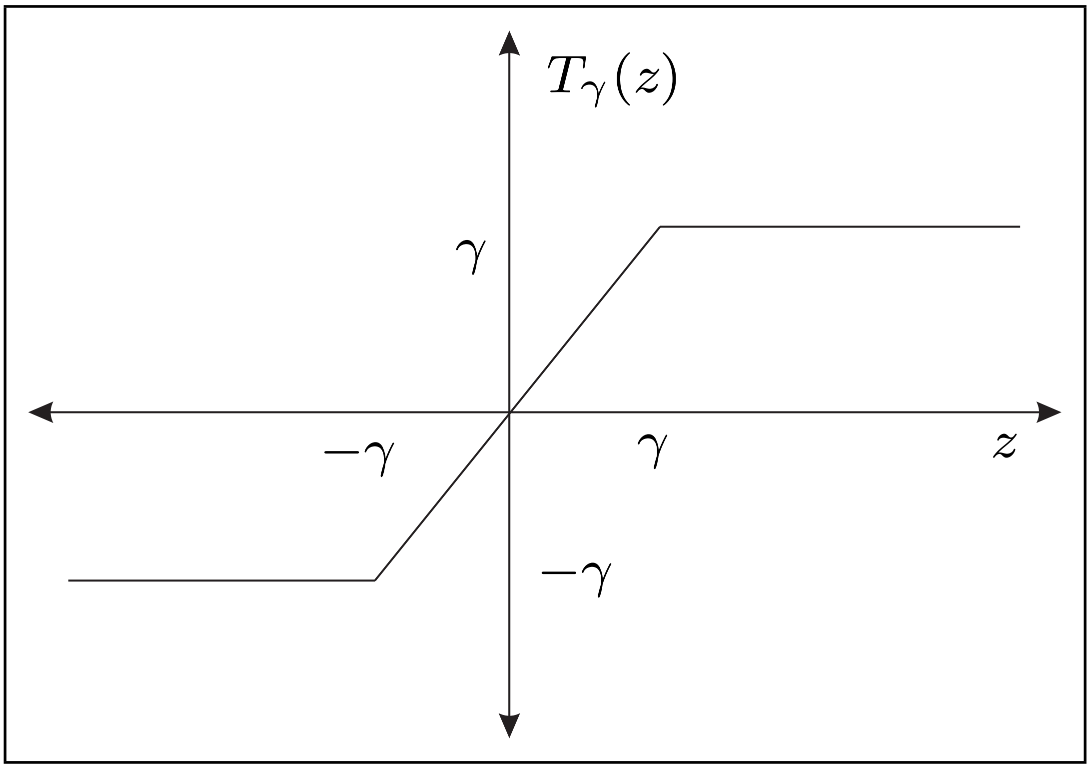

Figura 4.1: Gráfico da função truncação

(ii) *Para cada $\gamma > 0$, a função renormalização $\phi_\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, é definida por $\phi_\gamma(z) = T_{\gamma+1}(z) - T_\gamma(z)$, ou seja,*

$$\phi_\gamma(z) = \begin{cases} -1, & se \quad z \leq -(\gamma+1), \\ z+\gamma, & se \quad -(\gamma+1) < z < -\gamma, \\ 0, & se \quad -\gamma \leq z \leq \gamma, \\ z-\gamma, & se \quad \gamma < z < \gamma+1, \\ 1, & se \quad z \geq \gamma+1. \end{cases}$$

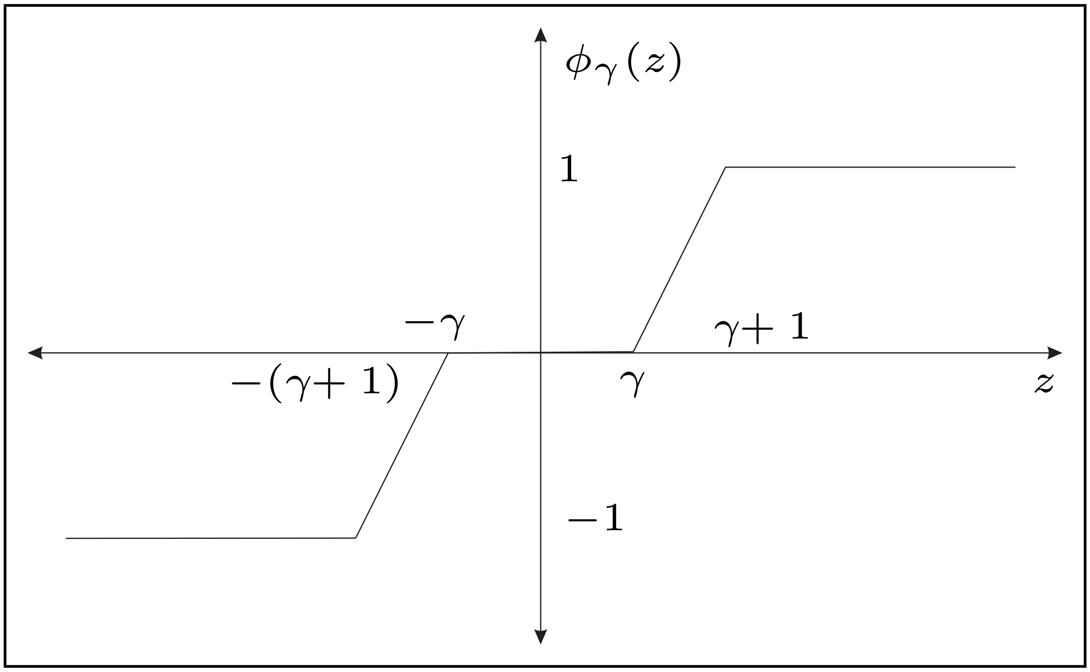

Figura 4.2: Gráfico da função renormalização

Note que T_γ e ϕ_γ são funções Lipschitz contínuas e de classe C^1 por partes, que satisfazem $|T_\gamma(\cdot)| \leq \gamma$ e $|\phi_\gamma(\cdot)| \leq 1$.

Definição 4.1.2. *Seja $s(\cdot)$ uma função não-negativa em $C^\infty(\mathbb{R})$ tal que*

$$s(z) = \begin{cases} 1, & se \quad |z| \leq 1, \\ 0, & se \quad |z| \geq 2, \\ 0 \leq s(z) \leq 1, & para\ qualquer \quad z \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Para cada inteiro $n \geq 2$, defina a função $S_n(r)$ por

$$S_n(r) = \int_0^r s_n(z)\, dz$$

onde

$$s_n(z) = \begin{cases} 1, & se \quad |z| \leq n-1, \\ s(z-(n-1)sign(z)), & se \quad |z| \geq n-1. \end{cases}$$

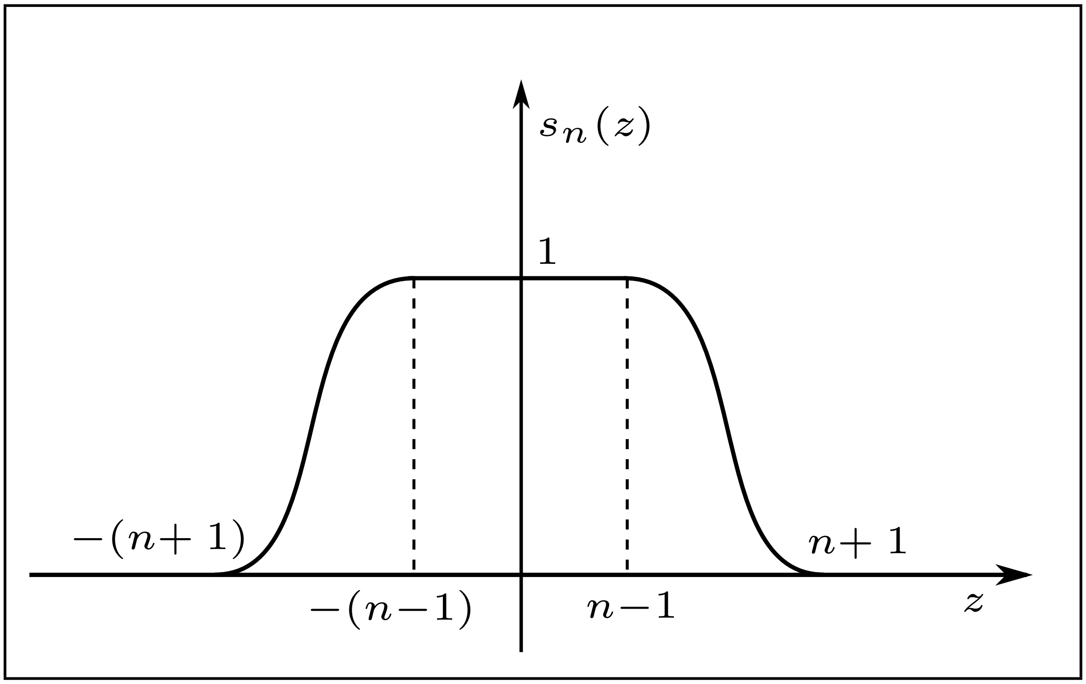

Figura 4.3: Gráfico da função $s_n(z)$, para cada $n \geq 2$

Observação 4.1.1. *Nas condições em que foi definida, a função S_n satisfaz para cada $n \geq 2$:*

(i) $S_n(r) = S_n(T_{n+1}(r))$;

De fato, como $s_n(z) = 0$ para $|z| > n+1$ e

$$T_{n+1}(r) = \begin{cases} -(n+1), & se \quad r \leq -(n+1), \\ r, & se \quad -(n+1) < r < n+1, \\ n+1, & se \quad r \geq n+1, \end{cases}$$

vem que:

Para $-(n+1) \leq r \leq n+1$,

$$S_n(T_{n+1}(r)) = S_n(r).$$

Para $r \geq n+1$,

$$\begin{aligned} S_n(T_{n+1}(r)) &= S_n(n+1) \\ &= \int_0^{n+1} s_n(z)\, dz \\ &= \int_0^{n+1} s_n(z)\, dz + \int_{n+1}^{r} s_n(z)\, dz \\ &= \int_0^{r} s_n(z)\, dz \\ &= S_n(r) \end{aligned}$$

e analogamente para $r \leq -(n+1)$ tem-se que $S_n(T_{n+1}(r)) = S_n(r)$.

(ii) $||S_n'||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq ||s||_{L^\infty(\mathbb{R})}$;

Segue da definição de S_n e do Teorema Fundamental do Cálculo.

(iii) *supp* $S_n' \subset [-(n+1), n+1]$ *e supp* $S_n'' \subset [-(n+1), -n] \cup [n, n+1]$.

Definição 4.1.3. *Sejam $f \in L^1(Q_T)$ e $u_0 \in L^1(\Omega)$. Uma solução renormalizada de*

$$\begin{cases} \partial_t u - div(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = f & em \quad Q_T, \\ u = 0 & sobre \quad \Sigma_T, \\ u(0,\cdot) = u_0(\cdot) & em \quad \Omega, \end{cases}$$

é uma função mensurável $u : Q_T \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

(i) $T_\gamma(u) \in L^{p^-}(0,T; W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega))$ *para cada* $\gamma > 0$;

(ii) $\nabla T_\gamma(u) \in (L^{p(\cdot)}(Q_T))^N$ *para cada* $\gamma > 0$;

(iii) $\displaystyle\lim_{\gamma\to\infty} \iint_{\{\gamma \leq |u| \leq \gamma+1\}} |\nabla u|^{p(x)}\, dxdt = 0$;

(iv) *Pra cada renormalização $S \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que supp $S' \subset [-M, M]$ para algum $M > 0$,*

$$\partial_t S(u) - div(S'(u)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) + S''(u)|\nabla u|^{p(x)} = fS'(u) \;\; em \;\; \mathcal{D}'(Q_T);$$

(v) *Para a condição inicial, deve-se ter $S(u)\Big|_{t=0} = S(u_0)$ quase sempre em Ω.*

Seguem algumas observações com respeito a definição de soluções renormalizadas.

Observação 4.1.2. *Na definição anterior, bem como no que segue, identificamos uma função* $v \in L^{p^-}(0,T;L^{p(\cdot)}(\Omega))$ *com a função Lebesgue mensurável real* v *definida por* $v(t,x) = v(t)(x)$ *para quase todo* $t \in (0,T)$*, para quase todo* $x \in \Omega$*. Da mesma forma associamos para cada função* $v \in L^{p(\cdot)}(Q_T)$ *uma função Bochner mensurável* $v : (0,T) \longrightarrow L^{p(\cdot)}(\Omega)$*, pondo* $v(t) := v(t,\cdot)$ *para quase todo* $t \in (0,T)$*. Note que, com esta identificação, obtemos as seguintes inclusões densas contínuas*

$$L^{p^+}(0,T;L^{p(\cdot)}(\Omega)) \hookrightarrow_d L^{p(\cdot)}(Q_T) \hookrightarrow_d L^{p^-}(0,T;L^{p(\cdot)}(\Omega)).$$

De fato, usando o Lema 3.4.1 e a desigualdade de Hölder para $v \in L^{p(\cdot)}(Q_T)$*, obtemos*

$$\begin{aligned}
\int_0^T ||v(t)||^{p^-}_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}\, dt &\le \int_0^T \max\left\{ \int_\Omega |v(t,x)|^{p(x)}\, dx, \left(\int_\Omega |v(t,x)|^{p(x)} dx\right)^{\frac{p^-}{p^+}} \right\} dt \\
&\le \int_0^T \int_\Omega |v(t,x)|^{p(x)}\, dxdt + \int_0^T \left(\int_\Omega |v(t,x)|^{p(x)}\, dx\right)^{\frac{p^-}{p^+}} dt \\
&\le \int_0^T \int_\Omega |v(t,x)|^{p(x)}\, dxdt + \left(\int_0^T \int_\Omega |v(t,x)|^{p(x)}\, dxdt\right)^{\frac{p^-}{p^+}} \left(\int_0^T dt\right)^{1-\frac{p^-}{p^+}} \\
&= \int_0^T \int_\Omega |v(t,x)|^{p(x)} dxdt + T^{1-\frac{p^-}{p^+}} \left(\int_0^T \int_\Omega |v(t,x)|^{p(x)} dxdt\right)^{\frac{p^-}{p^+}} \\
&\le \max\{||v||^{p-}_{L^{p(\cdot)}(Q_T)}, ||v||^{p+}_{L^{p(\cdot)}(Q_T)}\} + T^{1-\frac{p^-}{p^+}} \max\{||v||^{\frac{(p^-)^2}{p^+}}_{L^{p(\cdot)}(Q_T)}, ||v||^{p-}_{L^{p(\cdot)}(Q_T)}\}.
\end{aligned}$$

Portanto, $v \in L^{p^-}(0,T;L^{p(\cdot)}(\Omega))$ *e a inclusão* $L^{p(\cdot)}(Q_T) \hookrightarrow L^{p^-}(0,T;L^{p(\cdot)}(\Omega))$ *é contínua. Analogamente, pode ser mostrada a continuidade da inclusão* $L^{p^+}(0,T;L^{p(\cdot)}(\Omega)) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(Q_T)$*. De fato, para* $v \in L^{p^+}(0,T;L^{p(\cdot)}(\Omega))$ *tem-se*

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_\Omega |v(t,x)|^{p(x)}\, dxdt &\le \int_0^T \max\{||v(t)||^{p-}_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}, ||v(t)||^{p+}_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}\}\, dt \\
&\le \int_0^T ||v(t)||^{p-}_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}\, dt + \int_0^T ||v(t)||^{p+}_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}\, dt \\
&\le \left(\int_0^T ||v(t)||^{p+}_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}\, dt\right)^{\frac{p^-}{p^+}} T^{1-\frac{p^-}{p^+}} + \int_0^T ||v(t)||^{p+}_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}\, dt \\
&= ||v(t)||^{p-}_{L^{p+}(0,T;L^{p(\cdot)}(\Omega))} T^{1-\frac{p^-}{p^+}} + ||v(t)||^{p+}_{L^{p+}(0,T;L^{p(\cdot)}(\Omega))}.
\end{aligned}$$

Portanto, $v \in L^{p(\cdot)}(Q_T)$ *e a inclusão* $L^{p^+}(0,T;L^{p(\cdot)}(\Omega)) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(Q_T)$ *é contínua.*

Agora mostremos as densidades. Considere a inclusão $L^{p^+}(0,T;L^{p(\cdot)}(\Omega)) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(Q_T)$ *e fixe* $u \in L^{p(\cdot)}(Q_T)$. *Como* $\mathcal{D}(Q_T)$ *é denso em* $L^{p(\cdot)}(Q_T)$, *existe uma sequência* $u_n \subset \mathcal{D}(Q_T)$ *convergindo para* u *em* $L^{p(\cdot)}(Q_T)$ *quando* $n \to \infty$. *Mas,* $\mathcal{D}(Q_T)$ *também é denso em* $L^{p^+}(0,T;L^{p(\cdot)}(\Omega))$, *resultando que* $u_n \in L^{p^+}(0,T;L^{p(\cdot)}(\Omega))$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Para mostrar a densidade da inclusão* $L^{p(\cdot)}(Q_T) \hookrightarrow L^{p^-}(0,T;L^{p(\cdot)}(\Omega))$, *fixe* $v \in L^{p^-}(0,T;L^{p(\cdot)}(\Omega))$ *e tome uma sequência de mollifiers (seção 2.3)* $\rho_n \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ *e estenda* v *para* $\mathbb{R}$ *pondo* $v(t) = 0$ *para* $t \in \mathbb{R} - (0,T)$. *A função regularizada (no tempo)*

$$(\rho_n * v)(\cdot) := \int_{\mathbb{R}} \rho_n(\cdot - s)v(s)\,ds$$

está em $L^{p^+}(\mathbb{R};L^{p(\cdot)}(\Omega))$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$. *Consequentemente, está em* $L^{p(\cdot)}(Q_T)$ *e converge para* v *em* $L^{p^-}(0,T;L^{p(\cdot)}(\Omega))$.

Observação 4.1.3. *Note que as inclusões*

$$L^{p^+}(0,T;L^{p(\cdot)}(\Omega)) \hookrightarrow_d L^{p(\cdot)}(Q_T) \hookrightarrow_d L^{p^-}(0,T;L^{p(\cdot)}(\Omega))$$

são em geral, estritas (para expoentes não-constantes $p(\cdot)$*).*

Em particular, uma função que satisfaz a condição (i) da Definição 4.1.3, $T_\gamma(u) \in L^{p^-}(0,T;W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega))$, *com* $\gamma > 0$, *não satisfaz automaticamente a condição (ii), em que* $\nabla T_\gamma(u) \in (L^{p(\cdot)}(Q_T))^N$, *para cada* $\gamma > 0$. *Por exemplo, considere* $N = 2$, $\Omega = (-1,1)\times(-1,1)$, $p(x,y) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{|x|}{4}$, *com* $(x,y) \in \Omega$. *Então,* $p^- = \dfrac{5}{4}$, $p^+ = \dfrac{3}{2}$ *e a função* $v = v(t,x,y) = t^{-\frac{2}{3}}(1-|x|)(1-|y|)$, *com* $t \in [0,T]$ *e* $(x,y) \in \overline{\Omega}$, *é um elemento de* $L^{p^-}(0,T;W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega))$, *mas* $\dfrac{\partial}{\partial x}v$, $\dfrac{\partial}{\partial y}v \notin L^{p(\cdot)}(Q_T)$.

De fato, é claro que $v \in C([0,T]\times\overline{\Omega})$ *e que* $v = 0$ *na fronteira* $(0,T)\times\partial\Omega$. *Além disso,* $\dfrac{\partial}{\partial x}v = \dfrac{\partial}{\partial x}v(t,x,y) = -t^{-\frac{2}{3}} sign(x)(1-|y|)$ *quase sempre, e*

$$\begin{aligned}\left|\left|\frac{\partial}{\partial x}v\right|\right|^{p^-}_{L^{p^-}(0,T;L^{p^+}(\Omega))} &= \left[\int_0^T \left(\int_\Omega \left|\frac{\partial}{\partial x}v\right|^{p^+} dxdy\right)^{\frac{1}{p^+}} dt\right]^{p^-} \\ &= \left[\int_0^T \left(\int_\Omega \left| - t^{-\frac{2}{3}} sign(x)(1-|y|)\right|^{\frac{3}{2}} dxdy\right)^{\frac{2}{3}} dt\right]^{\frac{5}{4}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^T \left(\int_\Omega \left| -t^{-\frac{2}{3}} sign(x)(1-|y|) \right|^{\frac{3}{2}} dxdy \right)^{\frac{5}{6}} dt \\
&= \int_0^T \left(t^{-1} \int_\Omega (1-|y|)^{\frac{3}{2}} \, dxdy \right)^{\frac{5}{6}} dt \\
&\leq \int_0^T \left(t^{-1} \int_\Omega \, dy \right)^{\frac{5}{6}} dt \\
&= 4 \int_0^T t^{-\frac{5}{6}} \, dt < \infty
\end{aligned}
$$

quase sempre, e então $\frac{\partial}{\partial x} v \in L^{p^-}(0,T; L^{p^+}(\Omega)) \hookrightarrow L^{p^-}(0,T; L^{p(\cdot)}(\Omega))$, *pela Proposição 3.4.5, desde que* $p(\cdot) \leq p^+$. *Por simetria, o mesmo vale para* $\frac{\partial}{\partial y} v$, *ou seja,* $\frac{\partial}{\partial y} v \in L^{p^-}(0,T; L^{p^+}(\Omega)) \hookrightarrow L^{p^-}(0,T; L^{p(\cdot)}(\Omega))$. *Assim,* $v \in L^{p^-}(0,T; W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega))$.

Por outro lado, temos que $\frac{\partial}{\partial x} v \notin L^{p(\cdot)}(Q_T)$, *pois*

$$
\begin{aligned}
\left|\left| \frac{\partial}{\partial x} v \right|\right|^{p(\cdot)}_{L^{p(\cdot)}(0,T;L^{p(\cdot)}(\Omega))} &= \int_0^T \int_\Omega \left| \frac{\partial}{\partial x} v \right|^{p(x,y)} dxdydt \\
&= \int_0^T \int_\Omega | -t^{-\frac{2}{3}} sign(x)(1-|y|)|^{\frac{3}{2}-\frac{|x|}{4}} \, dxdydt \\
&= \int_0^T \int_\Omega (t^{-\frac{2}{3}}(1-|y|)^{\frac{3}{2}-\frac{|x|}{4}} \, dxdydt \\
&= \int_0^T \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 t^{-1} t^{\frac{|x|}{6}} (1-|y|)^{\frac{3}{2}-\frac{|x|}{4}} \, dxdydt \\
&\geq \int_0^T \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t^{-1} t^{\frac{|x|}{6}} (1-|y|)^{\frac{3}{2}-\frac{|x|}{4}} \, dxdydt \\
&\geq \int_0^T \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t^{-1} t^{\frac{|x|}{6}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} dxdydt \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^T \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t^{-1} t^{\frac{|x|}{6}} \, dxdt
\end{aligned}
$$

$$
= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^T t^{-1} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^0 t^{\frac{-x}{6}} \, dx + \int_0^{\frac{1}{2}} t^{\frac{x}{6}} \, dx \right) dt
$$

e por substituição simples, segue que

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^T t^{-1}\left(\int_{-\frac{1}{2}}^0 t^{\frac{-x}{6}} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} t^{\frac{x}{6}} dx\right) dt &\geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^T t^{-1}\left(\int_{\frac{1}{12}}^0 -6t^u du + \int_0^{\frac{1}{12}} 6t^v dv\right) dt \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^T 6t^{-1}\left(\left.\frac{t^u}{\ln(t)}\right|_0^{\frac{1}{12}} + \left.\frac{t^v}{\ln(t)}\right|_0^{\frac{1}{12}}\right) dt \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^T 6t^{-1}\left(\frac{t^{\frac{1}{12}}-1}{\ln(t)} + \frac{t^{\frac{1}{12}}-1}{\ln(t)}\right) dt \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^T \frac{6}{t}\left(2\frac{t^{\frac{1}{12}}-1}{\ln(t)}\right) dt \\
&= 3\sqrt{2}\int_0^T \frac{t^{\frac{1}{12}}-1}{t\ln(t)}\, dt,
\end{aligned}
$$

e a última integral imprópria diverge, resultando que $\dfrac{\partial}{\partial x}v \notin L^{p(\cdot)}(Q_T)$. *Consequentemente, por simetria,* $\dfrac{\partial}{\partial y}v \notin L^{p(\cdot)}(Q_T)$.

Observação 4.1.4. *Note que, se* $p(\cdot) = p$ *é constante no problema de evolução tratado, ou seja, considerando*

$$
\begin{cases}
\partial_t u - div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f & em \quad Q_T, \\
u = 0 & sobre \quad \Sigma_T, \\
u(0,\cdot) = u_0(\cdot) & em \quad \Omega,
\end{cases}
$$

para o p-Laplaciano, então, é claro que se $T_\gamma(u) \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, *com* $\gamma > 0$ *implica que* $\nabla T_\gamma(u) \in (L^p(Q_T))^N$. *Sendo assim, a condição (ii) não é necessária na definição de solução renormalizada neste caso. Em contra partida, como vimos na observação anterior, isso não acontece para o caso de um expoente variável* $p(\cdot)$, *sendo que* $\nabla T_\gamma(u) \in (L^{p(\cdot)}(Q_T))^N$, $\gamma > 0$, *desempenha um papel crucial a fim de obter um problema bem posto.*

Tendo em vista a definição de solução renormalizada e as observações anteriores, somos naturalmente levados a introduzir o espaço de funções

$$
V = \{f \in L^{p^-}(0,T;W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)) : |\nabla f| \in L^{p(\cdot)}(Q_T)\}
$$

que é um espaço de Banach reflexivo e separável, dotado com a norma

$$
||f||_V := ||\nabla f||_{L^{p(\cdot)}(Q_T)},
$$

ou a norma equivalente,

$$||f||_V := ||f||_{L^{p^-}(0,T;W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega))} + ||\nabla f||_{L^{p(\cdot)}(Q_T)}.$$

Observação 4.1.5. *A equivalência entre as normas é uma fácil consequência da inclusão contínua $L^{p(\cdot)}(Q_T) \hookrightarrow L^{p^-}(0,T;L^{p(\cdot)}(\Omega))$ e da desigualdade de Poincaré (Proposição 3.4.6). De fato,*

$$||\nabla f||_{L^{p(\cdot)}(Q_T)} \leq ||f||_{L^{p^-}(0,T;W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega))} + ||\nabla f||_{L^{p(\cdot)}(Q_T)}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} ||f||_{L^{p^-}(0,T;W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega))} + ||\nabla f||_{L^{p(\cdot)}(Q_T)} &\leq c_1||f||_{L^{p(\cdot)}(Q_T)} + ||\nabla f||_{L^{p(\cdot)}(Q_T)} \\ &\leq c_2||\nabla f||_{L^{p(\cdot)}(Q_T)} + ||\nabla f||_{L^{p(\cdot)}(Q_T)} \\ &= (c_2+1)||\nabla f||_{L^{p(\cdot)}(Q_T)} \end{aligned}$$

sendo $c_1, c_2 > 0$.

Segue algumas propriedades adicionais de V:

Lema 4.1.1. *Seja V como definido acima e V^* o espaço dual de V. Então:*

(i) *Temos as seguintes inclusões densas contínuas*

$$L^{p^+}(0,T;W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)) \hookrightarrow_d V \hookrightarrow_d L^{p^-}(0,T;W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)).$$

Em particular, desde que $\mathcal{D}(Q_T)$ é denso em $L^{p^+}(0,T;W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega))$, ele também é denso em V, e para os correspondentes espaços duais, temos

$$L^{(p^-)'}(0,T;(W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega))^*) \hookrightarrow V^* \hookrightarrow L^{(p^+)'}(0,T;(W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega))^*).$$

(ii) *$T \in V^*$ se, e somente se, existe $F = (f_1, f_2, \cdots, f_N) \in (L^{p'(\cdot)}(Q_T))^N$ tal que $T = div_x F$ e*

$$\langle T, \xi\rangle_{V^*,V} = \int_0^T \int_\Omega F.D\xi \, dxdt$$

para cada $\xi \in V$. Além disso,

$$||T||_{V^*} = \max\{||f_i||_{L^{p(\cdot)}(Q_T)}, i = 1, \cdots, n\}.$$

Demonstração. **(i)** A continuidade das inclusões segue da definição de V e das propriedades dos espaços com expoentes variáveis. A densidade segue os mesmos argumentos das inclusões densas dadas na Observação 4.1.2.

(ii) $(\Rightarrow)$ Assuma que $T \in V^*$ e defina a seguinte aplicação linear

$$u \in V \mapsto S(u) = \nabla u \in (L^{p(\cdot)}(Q_T))^N.$$

Como Im S é um subespaço fechado de $(L^{p(\cdot)}(Q_T))^N$, todo funcional $T \in V^*$ é identificado com $\hat{T} \in \text{Im } S^*$ por meio da igualdade

$$\langle \hat{T}, S(u) \rangle = \langle T, u \rangle, \text{ com } u \in V.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach (Teorema 2.1.4), $\hat{T}$ pode ser estendido a $[(L^{p(\cdot)}(Q_T))^N]^*$ por um funcional $\tilde{T}$. Como $(L^{p(\cdot)}(Q_T))^* = L^{p'(\cdot)}(Q_T)$, existe $F = (f_1, f_2, \cdots, f_N) \in (L^{p'(\cdot)}(Q_T))^N$ tal que $T = div_x F$ e

$$\langle T, \xi \rangle_{V^*,V} = \int_0^T \int_\Omega F.D\xi \, dxdt$$

para cada $\xi \in V$.

$(\Leftarrow)$ Assuma que existe $F = (f_1, f_2, \cdots, f_N) \in (L^{p'(\cdot)}(Q_T))^N$ e que

$$\langle T, \xi \rangle_{V^*,V} = \int_0^T \int_\Omega F.D\xi \, dxdt$$

para cada $\xi \in V$. Mostremos que $T = div_x F \in V^*$. Com efeito, aplicando a desigualdade de Hölder para expoentes variáveis (Proposição 3.4.1), note que

$$\begin{aligned}
|\langle T, \xi \rangle_{V^*,V}| &= \int_0^T \int_\Omega |F.D\xi| \, dxdt \\
&= \int_0^T \int_\Omega |\sum_{i=1}^N f_i D_{x_i}\xi| \, dxdt \\
&\leq \int_0^T \int_\Omega \sum_{i=1}^N |f_i||D_{x_i}\xi| \, dxdt \\
&\leq 2 \sum_{i=1}^N ||D_{x_i}\xi||_{L^{p(\cdot)}(Q_T)} ||f_i||_{L^{p'(\cdot)}(Q_T)}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}||T||_{V^*} &= \sup\{|\langle T,\xi\rangle_{V^*,V}| : ||\xi||_V \leq 1\}\\ &\leq 2\sum_{i=1}^{N} ||f_i||_{L^{p'(\cdot)}(Q_T)}\end{aligned}$$

e como uma consequência, deduzimos que $T = div_x F \in V^*$.

□

Note que, se u é solução renormalizada de (4.1), então $S(u) \in V \cap L^\infty(Q_T)$ para cada renormalização S.

Além disso, $V \cap L^\infty(Q_T)$ dotado com a norma

$$||v||_{V\cap L^\infty(Q_T)} := \max\{||v||_V, ||v||_{L^\infty(Q_T)}\},\ v \in V \cap L^\infty(Q_T)$$

é um espaço de Banach, e $V^* + L^1(Q_T)$ é o dual desse espaço (veja [10]), dotado com o norma

$$||v||_{V^*+L^1(Q_T)} := \inf\{||v_1||_{V^*} + ||v_2||_{L^1(Q_T)} : v = v_1 + v_2, v_1 \in V^*, v_2 \in L^1(Q_T)\}.$$

Proposição 4.1.1. *Se u é solução renormalizada de (4.1), então $S(u)_t \in V^* + L^1(Q_T)$.*

Demonstração. Para cada $\xi \in \mathcal{D}(Q_T)$, considere $\gamma > 0$ tal que supp $S' \subset [-\gamma, \gamma]$. Usando a desigualdade de Hölder e o Lema 3.4.1, temos que

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega |S'(u)||\nabla u|^{p(x)-1}|\nabla\xi|\,dxdt &= \int_0^T\int_\Omega |S'(u)||\nabla T_\gamma(u)|^{p(x)-1}|\nabla\xi|\,dxdt\\ &\leq ||S'||_{L^\infty(\mathbb{R})}\int_0^T\int_\Omega |\nabla T_\gamma(u)|^{p(x)-1}|\nabla\xi|\,dxdt\\ &\leq 2||S'||_{L^\infty(\mathbb{R})}|||T_\gamma(u)|^{p(x)-1}||_{L^{p'(\cdot)}(Q_T)}||\nabla\xi||_{L^{p(\cdot)}(Q_T)}\\ &\leq 2||S'||_{L^\infty(\mathbb{R})}\max\left\{\left(\int_{Q_T}|T_\gamma(u)|^{p(x)}\right)^{\frac{1}{p'^-}},\right.\\ &\left.\left(\int_{Q_T}|T_\gamma(u)|^{p(x)}\right)^{\frac{1}{p'^+}}\right\}||\nabla\xi||_{L^{p(\cdot)}(Q_T)}.\end{aligned}$$

Como $\mathcal{D}(Q_T)$ é denso em V e $|S'(u)||\nabla u|^{p(x)-1}| \in L^{p'(x)}(Q_T)$, deduzimos que $div(S'(u)|\nabla u|^{p(x)-1}) \in V^*$ pelo item (ii) do Lema 4.1.1. E como uma consequência do problema parabólico (4.1), segue que

$$S(u)_t - div(S'(u)|\nabla u|^{p(x)-1}) = f \text{ em } Q_T,$$

então

$$S(u)_t = div(S'(u)|\nabla u|^{p(x)-1}) + f \text{ em } Q_T,$$

sendo $f \in L^1(Q_T)$. Logo, podemos concluir que $S(u)_t \in V^* + L^1(Q_T)$. $\square$

A condição inicial $S(u)\Big|_{t=0} = S(u_0)$ q.t.p. em Ω, faz sentido, pois se u é solução renormalizada, então para cada renormalização S, $S(u) \in V \cap L^\infty(Q_T)$ e $S(u)_t \in V^* + L^1(Q_T)$, e portanto, $S(u) \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ como consequência imediata do resultado a seguir:

Lema 4.1.2. *Temos*

$$\mathcal{W} := \{u \in V; u_t \in V^* + L^1(Q_T)\} \hookrightarrow C([0,T]; L^1(\Omega))$$

e

$$\mathcal{W} \cap L^\infty(Q_T) \hookrightarrow C([0,T]; L^2(\Omega)).$$

Demonstração. Seja $V(\mathbb{R}) = \{u \in L^{p^-}(\mathbb{R}; W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)) : |\nabla u| \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R} \times \Omega)\}$ e $V^*(\mathbb{R})$ o dual de $V(\mathbb{R})$. Vamos considerar o operador contínuo

$$\begin{aligned} P: \ \mathcal{W} &\longrightarrow \mathcal{W}(\mathbb{R}) \\ u &\longmapsto Pu \end{aligned}$$

operador prolongação das funções de $[0,T]$ à $\mathbb{R}$, em que $Pu \in \mathcal{W}(\mathbb{R}) := \{u \in V(\mathbb{R}); (Pu)_t \in V^*(\mathbb{R}) + L^1(\mathbb{R} \times \Omega)\}$ é tal que $Pu = u$ em $[0,T]$.

Seja u uma função de $\mathcal{W}$ e considere uma sequência $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}; W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega))$ tal que ψ_n converge fortemente para Pu em $\mathcal{W}(\mathbb{R})$, isto é,

$$\begin{cases} \psi_n \longrightarrow Pu \quad \text{fortemente em} \quad V(\mathbb{R}), \\ (\psi_n)_t \longrightarrow (Pu)_t \quad \text{fortemente em} \quad V^*(\mathbb{R}) + L^1(\mathbb{R} \times \Omega). \end{cases}$$

Considere agora,

$$S_1(s) = \int_0^s T_1(t)\, dt$$

onde $T_1(t)$ é uma função truncação $T_\gamma(t)$ com $\gamma = 1$, ou seja,

$$T_1(t) = \begin{cases} -1, & \text{se} \quad t \leq -1, \\ t, & \text{se} \quad -1 < t < 1, \\ 1, & \text{se} \quad t \geq 1. \end{cases}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega S_1(\psi_n - \psi_m)(t)\,dx &= \int_{-\infty}^{t} \frac{d}{d\tau} \int_\Omega S_1(\psi_n - \psi_m)(\tau)\,dxd\tau \\
&= \int_{-\infty}^{t} \frac{d}{d\tau} \int_\Omega \int_0^{(\psi_n - \psi_m)(\tau)} T_1(q)\ dqdxd\tau \\
&= \int_{-\infty}^{t} \int_\Omega \frac{d}{d\tau} \int_0^{(\psi_n - \psi_m)(\tau)} T_1(q)\ dqdxd\tau \\
&= \int_{-\infty}^{t} \int_\Omega T_1(\psi_n - \psi_m)(\tau)((\psi_n)_t - (\psi_m)_t)(\tau)\,dxd\tau.
\end{aligned}$$

Como $\mathcal{W}(\mathbb{R})$ é um espaço de Banach e ψ_n converge fortemente nesse espaço, resulta que ψ_n é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{W}(\mathbb{R})$. Assim, podemos escrever

$$\int_\Omega S_1(\psi_n - \psi_m)(s)\,dx \leq \omega(n, m) \tag{4.2}$$

onde $\omega(n, m) \longrightarrow 0$ quando $m, n \longrightarrow \infty$ e $s \in \mathbb{R}$.

Por outro lado,

$$\int_\Omega S_1(\psi_n - \psi_m)(s)\,dx = \int\limits_{\{|\psi_n - \psi_m| < 1\}} S_1(\psi_n - \psi_m)(s)\,dx + \int\limits_{\{|\psi_n - \psi_m| \geq 1\}} S_1(\psi_n - \psi_m)(s)\,dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int\limits_{\{|\psi_n - \psi_m| < 1\}} \int_0^{(\psi_n - \psi_m)(s)} T_1(t)\,dtdx + \int\limits_{\{|\psi_n - \psi_m| \geq 1\}} \int_0^{(\psi_n - \psi_m)(s)} T_1(t)\,dtdx \\
&= \int\limits_{\{|\psi_n - \psi_m| < 1\}} \int_0^{(\psi_n - \psi_m)(s)} t\,dtdx + \int\limits_{\{|\psi_n - \psi_m| \geq 1\}} \left(\int_0^1 t\,dt + \int_1^{(\psi_n - \psi_m)(s)} dt \right) dx \\
&= \int\limits_{\{|\psi_n - \psi_m| < 1\}} \frac{|(\psi_n - \psi_m)(s)|^2}{2}\,dx + \int\limits_{\{|\psi_n - \psi_m| \geq 1\}} \left(\frac{1}{2} + |(\psi_n - \psi_m)(s)| - 1 \right) dx \\
&= \int\limits_{\{|\psi_n - \psi_m| < 1\}} \frac{|(\psi_n - \psi_m)(s)|^2}{2}\,dx + \int\limits_{\{|\psi_n - \psi_m| \geq 1\}} \left(|(\psi_n - \psi_m)(s)| - \frac{1}{2} \right) dx \\
&\geq \int\limits_{\{|\psi_n - \psi_m| < 1\}} \frac{|(\psi_n - \psi_m)(s)|^2}{2}\,dx + \int\limits_{\{|\psi_n - \psi_m| \geq 1\}} \frac{|(\psi_n - \psi_m)(s)|}{2}\,dx.
\end{aligned}$$

Assim, por (4.2) e desde que $(|\psi_n - \psi_m|) \in L^1(\Omega)$, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz (Proposição 2.1.1) para a integral no espaço $\{|\psi_n - \psi_m| < 1\}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\psi_n - \psi_m|(s)\, dx &= \int\limits_{\{|\psi_n - \psi_m|<1\}} |\psi_n - \psi_m|(s)\, dx + \int\limits_{\{|\psi_n - \psi_m|\geq 1\}} |\psi_n - \psi_m|(s)\, dx \\
&\leq \Bigg(\int\limits_{\{|\psi_n - \psi_m|<1\}} |\psi_n - \psi_m|^2(s)\, dx \Bigg)^{\frac{1}{2}} \Bigg(\int\limits_{\{|\psi_n - \psi_m|<1\}} dx \Bigg)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \int\limits_{\{|\psi_n - \psi_m|\geq 1\}} |\psi_n - \psi_m|(s)\, dx \\
&\leq \Bigg(\int\limits_{\{|\psi_n - \psi_m|<1\}} |\psi_n - \psi_m|^2(s)\, dx \Bigg)^{\frac{1}{2}} |\Omega|^{\frac{1}{2}} + 2\omega(n,m) \\
&\leq (2\omega(n,m))^{\frac{1}{2}} |\Omega|^{\frac{1}{2}} + 2\omega(n,m) \\
&= (2|\Omega|\omega(n,m))^{\frac{1}{2}} + 2\omega(n,m).
\end{aligned}$$

Portanto, $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $C^0_c(\mathbb{R}; L^1(\Omega))$ munido da topologia da convergência uniforme. Visto que $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n = Pu$ em $\mathcal{W}(\mathbb{R})$, resulta que $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n = Pu$ em $C^0_c(\mathbb{R}; L^1(\Omega))$. Logo, como $Pu = u$ em $[0,T]$, então $u \in C([0,T]; L^1(\Omega))$ e daí segue a primeira inclusão contínua que queríamos mostrar.

Agora, considere $u \in \mathcal{W} \cap L^\infty(Q_T)$. Assim, $u \in \mathcal{W}$ e $u \in L^\infty(Q_T)$. Como $u \in \mathcal{W}$, então $u \in C([0,T]; L^1(\Omega))$ e como $u \in L^\infty(Q_T)$, particularmente, $u \in L^2(Q_T)$ pela Proposição 3.4.5. Logo, sendo

$$\begin{array}{rccc} u: & [0,T] & \longrightarrow & L^1(\Omega) \\ & t & \longmapsto & u(t) \end{array}$$

e $L^2(Q_T) \subset L^1(Q_T)$ continuamente, podemos tomar u com a restrição

$$\begin{array}{rccc} u: & [0,T] & \longrightarrow & L^2(\Omega) \\ & t & \longmapsto & u(t) \end{array}.$$

Logo, $u \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ e a segunda inclusão contínua segue. $\square$

Usando a inclusão $W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,1}(\Omega)$, podemos associar para toda função mensurável $u : Q_T \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $T_\gamma(u) \in V$, com $\gamma > 0$, um gradiente generalizado, definido como a única função mensurável satisfazendo

$$\nabla u = \nabla T_\gamma(u) \;\; q.t.p. \; em \; \{|u| < \gamma\}, \; \forall \, \gamma > 0.$$

Assim, todos os termos de

$$\partial_t S(u) - div(S'(u)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) + S''(u)|\nabla u|^{p(x)} = fS'(u) \;\text{ em }\; \mathcal{D}'(Q_T)$$

fazem sentido.

Observação 4.1.6. *Como para qualquer função $\varphi \in V \cap L^\infty(Q_T)$ existem funções $\varphi_n \in \mathcal{D}(Q_T)$ com $\varphi_n \to \varphi$ fortemente em V e fracamente-* em $L^\infty(Q_T)$ (Teorema 2.1.5), vemos que na condição (iv) de solução renormalizada podemos não apenas usar funções teste em $\mathcal{D}(Q_T)$, mas também funções em $V \cap L^\infty(Q_T)$. Assim, podemos substituir a condição (iv) por*

$$\begin{aligned}\langle \partial_t S(u), \varphi\rangle_{V^*,V} + \int_0^T \int_\Omega S'(u)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla\varphi \, dxdt + \int_0^T \int_\Omega S''(u)|\nabla u|^{p(x)}\varphi \, dxdt \\ = \int_0^T \int_\Omega fS'(u)\varphi \, dxdt,\end{aligned}$$

para toda $\varphi \in V \cap L^\infty(Q_T)$.

Note que a condição (iii) na definição de solução renormalizada implica que

$$\lim_{\gamma\to\infty} \iint\limits_{\{\gamma \le |u| \le \gamma+c\}} |\nabla u|^{p(x)} \, dxdt = 0, \;\text{ para todo }\; c > 0.$$

De fato, para $c = 1$ o resultado é imediato. Para $0 < c < 1$, temos que $\{\gamma \le |u| \le \gamma + c\} \subset \{\gamma \le |u| \le \gamma + 1\}$, logo

$$0 \le \lim_{\gamma\to\infty} \iint\limits_{\{\gamma \le |u| \le \gamma+c\}} |\nabla u|^{p(x)} \, dxdt \le \lim_{\gamma\to\infty} \iint\limits_{\{\gamma \le |u| \le \gamma+1\}} |\nabla u|^{p(x)} \, dxdt = 0$$

e o resultado segue. Para $c > 1$ considere $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \le c < n + 1$, então obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{\gamma\to\infty} \iint\limits_{\{\gamma \le |u| \le \gamma+c\}} |\nabla u|^{p(x)} \, dxdt = \lim_{\gamma\to\infty} \Bigg[\Bigg(\sum_{i=0}^{n-1} \iint\limits_{\{\gamma+i \le |u| \le \gamma+i+1\}} |\nabla u|^{p(x)} \, dxdt \Bigg) \\ + \iint\limits_{\{\gamma+n \le |u| \le \gamma+c\}} |\nabla u|^{p(x)} \, dxdt \Bigg]\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \lim_{\gamma\to\infty} \iint\limits_{\{\gamma+i\le|u|\le\gamma+i+1\}} |\nabla u|^{p(x)}\, dxdt + \lim_{\gamma\to\infty} \iint\limits_{\{\gamma+n\le|u|\le\gamma+n+(c-n)\}} |\nabla u|^{p(x)}\, dxdt$$

$$= 0$$

em que a última igualdade acima segue da hipótese e do fato que $c - n < 1$.

O teorema seguinte é o principal resultado deste trabalho, que será demonstrado após a apresentação de alguns resultados necessários para tanto. Este trata da existência e regularidade de uma solução renormalizada para o problema de valor inicial (4.1).

Teorema 4.1.1. *Assuma que $p \in C(\overline{\Omega})$ com $1 < p^- \le p^+ < N$. Então, existe pelo menos uma solução renormalizada u do problema parabólico (4.1). Além disso, se $p^- > 2 - \dfrac{1}{N+1}$, então $u \in L^{q^-}(0,T;W_0^{1,q(\cdot)}(\Omega))$, para todo expoente variável contínuo q em $\overline{\Omega}$ satisfazendo $1 \le q(x) < \dfrac{N(p(x)-1)+p(x)}{N+1}$ para todo $x \in \overline{\Omega}$.*

Observação 4.1.7. *Se $p^- > 2 - \dfrac{1}{N+1}$, podemos aplicar o Lema 3.4.2 para obter o resultado de regularidade do Teorema 4.1.1(como veremos na demonstração do Lema 4.2.2). Nesse caso, temos $u \in L^1(0,T;W^{1,1}(\Omega))$ e então pelo Lema 2.1.2, como $|\nabla T_\gamma(u)| \le M$, $M > 0$, segue que*

$$\nabla T_\gamma(u) = \mathbf{1}_{\{|u|<\gamma\}} \nabla u \quad q.t.p \text{ em } Q_T,$$

onde $\mathbf{1}_{\{|u|<\gamma\}}$ denota a função característica do conjunto mensurável $\{|u| < \gamma\} \subset Q_T$. Em particular, o gradiente generalizado como definido anteriormente coincide com o gradiente usual no sentido das distribuições. No caso em que $1 < p^- < N$, podemos mostrar a existência de uma solução renormalizada u para (4.1), mas o gradiente de u é o gradiente generalizado.

4.2 Propriedades das Soluções Renormalizadas

A fim de encontrar mais estimativas para soluções renormalizadas e também para obter estimativas úteis de soluções aproximadas para a equação de evolução (4.1), usaremos a seguinte fórmula de integração por partes:

Lema 4.2.1. *Seja* $S \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ *com supp* S' *compacto,* $v \in L^1(Q_T)$ *com* $T_\gamma(v) \in V$*, para todo* $\gamma > 0$*, tal que* $S(v)_t \in V^* + L^1(Q_T)$*,* $S(v)(0) = S(v_0)$ *com* $v_0 \in L^1(\Omega)$*. Então,*

$$\langle S(v)_t, h(v-w)\xi\rangle_{V^*+L^1(Q_T), V\cap L^\infty(Q_T)} = -\int_{Q_T} \xi_t \int_{v_0}^{v} h(r-w)\, dS(r)\, dtdx,$$

para cada $h \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ *com supp h' compacto,* $w \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *e* $\xi \in \mathcal{D}((-\infty, T) \times \mathbb{R}^N)$ *tal que* $h(v-w)\xi \in V$*.*

A prova deste resultado segue as mesmas ideias da demonstração do resultado correspondente em [2, 3, 11]. O ponto essencial é mostrar que a média temporal de Steklov

$$v_\eta(\cdot) = \frac{1}{\eta}\int_{\cdot}^{\cdot+\eta} v(s)\, ds, \ \ \eta > 0,$$

de uma função $v \in V \cap L^\infty(Q_T)$ ainda pertence a $V \cap L^\infty(Q_T)$ e converge, quando $\eta \to 0$, fortemente para v em V e fraca-* em $L^\infty(Q_T)$.

Observação 4.2.1. *Das suposições do lema anterior, segue imediatamente que* $S(v) \in V \cap L^\infty(Q_T)$*, e portanto* $S(v) \in C([0,T]; L^2(\Omega))$*, pelo Lema 4.1.2. Assim, a condição inicial* $S(v)(0) = S(v_0)$ *faz sentido.*

Obtemos as seguintes propriedades adicionais de soluções renormalizadas:

Lema 4.2.2. *Seja u uma solução renormalizada, então*

$$||u||_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} \leq ||f||_{L^1(Q_T)} + ||u_0||_{L^1(\Omega)}, \tag{4.3}$$

$$||\nabla T_\gamma(u)||_{L^{p(\cdot)}(Q_T)} \leq \gamma \max\{(||f||_{L^1(Q_T)} + ||u_0||_{L^1(\Omega)})^{\frac{1}{p^-}}, (||f||_{L^1(Q_T)} + ||u_0||_{L^1(\Omega)})^{\frac{1}{p^+}}\}, \tag{4.4}$$

para todo $\gamma > 0$*, e*

$$\sup_{\gamma>0} \iint_{\{\gamma \leq |u| \leq \gamma+1\}} |\nabla u|^{p(x)}\, dxdt \leq ||f||_{L^1(Q_T)} + ||u_0||_{L^1(\Omega)}. \tag{4.5}$$

Além disso, se $2 - \dfrac{1}{N+1} < p(\cdot) < N$*, então* $u \in L^{q^-}(0,T; W_0^{1,q(\cdot)}(\Omega))$*, para todo expoente variável contínuo q em* $\overline{\Omega}$ *satisfazendo* $1 \leq q(x) < \dfrac{N(p(x)-1)+p(x)}{N+1}$ *para todo* $x \in \overline{\Omega}$*.*

Demonstração. Prova de (4.3): Considere a equação no sentido das distribuições, tomando $S = S_n$ e escolhendo $\varphi = \dfrac{1}{\gamma}T_\gamma(u)$, $\gamma > 0$, como função teste. Então, temos que

$$\begin{aligned}\langle \partial_t S_n(u), \frac{1}{\gamma}T_\gamma(u)\rangle_{V^*,V} &+ \frac{1}{\gamma}\int_0^T \int_\Omega S_n'(u)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla T_\gamma(u)\,dxdt \\ &+ \frac{1}{\gamma}\int_0^T \int_\Omega S_n''(u)|\nabla u|^{p(x)}T_\gamma(u)\,dxdt \\ &= \frac{1}{\gamma}\int_0^T \int_\Omega f S_n'(u)T_\gamma(u)\,dxdt.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\langle \partial_t S_n(u), \frac{1}{\gamma}T_\gamma(u)\rangle_{V^*,V} \leq \Bigg| &\frac{1}{\gamma}\int_0^T \int_\Omega f S_n'(u)T_\gamma(u)\,dxdt \\ &- \frac{1}{\gamma}\int_0^T \int_\Omega S_n'(u)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla T_\gamma(u)\,dxdt \\ &- \frac{1}{\gamma}\int_0^T \int_\Omega S_n''(u)|\nabla u|^{p(x)}T_\gamma(u)\,dxdt\Bigg|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \partial_t S_n(u), \frac{1}{\gamma}T_\gamma(u)\rangle_{V^*,V} &\leq \frac{1}{\gamma}\int_0^T \int_\Omega |f||S_n'(u)||T_\gamma(u)|\,dxdt \\ &+ \frac{1}{\gamma}\int_0^T \int_\Omega |S_n'(u)||\nabla u|^{p(x)-2}|\nabla u||\nabla T_\gamma(u)|\,dxdt \\ &+ \frac{1}{\gamma}\int_0^T \int_\Omega |S_n''(u)||\nabla u|^{p(x)}|T_\gamma(u)|\,dxdt.\end{aligned}$$

Usando a Observação 4.1.7 e lembrando que $|T_\gamma(u)| \leq \gamma$, supp $S_n'' \subset [-(n+1), -n] \cup [n, n+1]$ e que $|S_n''(u)| \leq ||S_n''||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq ||s'||_{L^\infty(\mathbb{R})} = c$ nesse suporte, obtemos

$$\begin{aligned}\langle \partial_t S_n(u), \frac{1}{\gamma}T_\gamma(u)\rangle_{V^*,V} \leq &\int_0^T \int_\Omega |f||S_n'(u)|\,dxdt + \frac{1}{\gamma}\int_0^T \int_\Omega |S_n'(u)||\nabla T_\gamma(u)|^{p(x)}\,dxdt \\ &+ c \iint\limits_{\{n\leq|u|\leq n+1\}} |\nabla u|^{p(x)}\,dxdt.\end{aligned}$$

Também, como sabemos $|S_n'(u)| \leq ||S_n'||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq ||s||_{L^\infty(\mathbb{R})} = 1$, e daí,

$$\begin{aligned}\langle \partial_t S_n(u), \frac{1}{\gamma}T_\gamma(u)\rangle_{V^*,V} \leq &\int_0^T \int_\Omega |f|\,dxdt + \frac{1}{\gamma}\int_0^T \int_\Omega |\nabla T_\gamma(u)|^{p(x)}\,dxdt \\ &+ c \iint\limits_{\{n\leq|u|\leq n+1\}} |\nabla u|^{p(x)}\,dxdt.\end{aligned}$$

Agora, aplicando a fórmula de integração por partes dada no Lema 4.2.1 para o termo de evolução, escolhendo $h(x) = 1$, para todo x, e $\xi = \dfrac{1}{\gamma}T_\gamma(u)$, obtemos

$$-\frac{1}{\gamma}\int_0^T\int_\Omega (T_\gamma(u))_t\left[\int_{u_0}^u dS_n(r)\right]dxdt \le \int_0^T ||f(t,\cdot)||_{L^1(\Omega)}\,dt + \frac{1}{\gamma}\int_0^T\int_\Omega |\nabla T_\gamma(u)|^{p(x)}\,dxdt + c\iint\limits_{\{n\le|u|\le n+1\}} |\nabla u|^{p(x)}\,dxdt$$

$$-\frac{1}{\gamma}\int_0^T\int_\Omega (T_\gamma(u))_t(S_n(u)-S_n(u_0))dxdt \le \int_0^T ||f(t,\cdot)||_{L^1(\Omega)}dt + \frac{1}{\gamma}\int_0^T\int_\Omega |\nabla T_\gamma(u)|^{p(x)}dxdt + c\iint\limits_{\{n\le|u|\le n+1\}} |\nabla u|^{p(x)}\,dxdt.$$

Fazendo $n \to \infty$ e usando que o último termo da inequação obedece à condição (iii) da definição de solução renormalizada obtemos,

$$-\frac{1}{\gamma}\int_\Omega\left[\int_0^T (T_\gamma(u))_t(u-u_0)\,dt\right]dx \le \int_0^T ||f(t,\cdot)||_{L^1(\Omega)}\,dt + \frac{1}{\gamma}\int_0^T\int_\Omega |\nabla T_\gamma(u)|^{p(x)}\,dxdt.$$

Usando integração por partes para integrar o primeiro termo e a definição de função truncação, vem que

$$\frac{1}{\gamma}\iint\limits_{\{|u|\le\gamma\}} uu_t\,dtdx + \iint\limits_{\{|u|>\gamma\}} u_t\,dtdx \le \int_0^T ||f(t,\cdot)||_{L^1(\Omega)}\,dt + \frac{1}{\gamma}\iint\limits_{\{|u|\le\gamma\}} |\nabla T_\gamma(u)|^{p(x)}\,dxdt.$$

Por fim, fazendo $\gamma \to 0$, obtemos

$$||u(t,\cdot)||_{L^1(\Omega)} \le ||u_0||_{L^1(\Omega)} + \int_0^t ||f(t,\cdot)||_{L^1(\Omega)}\,d\tau$$

para todo $t \in (0,T)$. O que implica

$$||u||_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} \le ||u_0||_{L^1(\Omega)} + ||f||_{L^1(Q_T)}.$$

Prova de (4.4): Considere a equação no sentido das distribuições, tomando $S = S_n$ e escolhendo $\varphi = T_\gamma(u)$, $\gamma > 0$, como função teste. Então, temos que

$$\begin{aligned}\langle\partial_t S_n(u), T_\gamma(u)\rangle_{V^*,V} &+ \int_0^T\int_\Omega S_n'(u)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla T_\gamma(u)\,dxdt\\ &+ \int_0^T\int_\Omega S_n''(u)|\nabla u|^{p(x)}T_\gamma(u)\,dxdt\\ &= \int_0^T\int_\Omega fS_n'(u)T_\gamma(u)\,dxdt.\end{aligned}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
&\langle \partial_t S_n(u), T_\gamma(u)\rangle_{V^*,V} + \int_0^T\int_\Omega S_n'(u)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla T_\gamma(u)\, dxdt\\
&\leq \int_0^T\int_\Omega |f||S_n'(u)||T_\gamma(u)|\, dxdt + \int_0^T\int_\Omega |S_n''(u)||\nabla u|^{p(x)}|T_\gamma(u)|\, dxdt.
\end{aligned}
$$

Usando a Observação 4.1.7 e lembrando que $|T_\gamma(u)| \leq \gamma$, supp $S_n'' \subset [-(n+1), -n] \cup [n, n+1]$ e que $|S_n''(u)| \leq ||S_n''||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq ||s'||_{L^\infty(\mathbb{R})} = c$ nesse suporte, obtemos

$$
\begin{aligned}
\langle \partial_t S_n(u), T_\gamma(u)\rangle_{V^*,V} + \int_0^T\int_\Omega S_n'(u)|\nabla T_\gamma(u)|^{p(x)}\, dxdt \leq & \iint\limits_{\{n\leq |u|\leq n+1\}} |S_n''(u)||\nabla u|^{p(x)}\gamma\, dxdt\\
&+ \int_0^T\int_\Omega |f||S_n'(u)|\gamma\, dxdt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle \partial_t S_n(u), T_\gamma(u)\rangle_{V^*,V} + \int_0^T\int_\Omega S_n'(u)|\nabla T_\gamma(u)|^{p(x)}\, dxdt \leq & \; c\gamma \iint\limits_{\{n\leq |u|\leq n+1\}} |\nabla u|^{p(x)}\, dxdt\\
&+ \gamma\int_0^T\int_\Omega |f||S_n'(u)|\, dxdt.
\end{aligned}
$$

Também, como sabemos $|S_n'(u)| \leq ||S_n'||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq ||s||_{L^\infty(\mathbb{R})} = 1$, e daí,

$$
\begin{aligned}
\langle \partial_t S_n(u), T_\gamma(u)\rangle_{V^*,V} + \int_0^T\int_\Omega S_n'(u)|\nabla T_\gamma(u)|^{p(x)}\, dxdt \leq & \; c\gamma \iint\limits_{\{n\leq |u|\leq n+1\}} |\nabla u|^{p(x)}\, dxdt\\
&+ \gamma\int_0^T\int_\Omega |f|\, dxdt.
\end{aligned}
$$

Agora, aplicando a fórmula de integração por partes dada no Lema 4.2.1 para o termo de evolução, escolhendo $h(x) = 1$, para todo x, e $\xi = T_\gamma(u)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T\int_\Omega (T_\gamma(u))_t\left[\int_{u_0}^u dS_n(r)\right] dxdt + \int_0^T\int_\Omega S_n'(u)|\nabla T_\gamma(u)|^{p(x)}\, dxdt\\
&\leq c\gamma \iint\limits_{\{n\leq |u|\leq n+1\}} |\nabla u|^{p(x)}\, dxdt + \gamma\int_0^T\int_\Omega |f|\, dxdt.
\end{aligned}
$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$
-\int_0^T\int_\Omega (T_\gamma(u))_t(u-u_0)\, dxdt + \int_0^T\int_\Omega |\nabla T_\gamma(u)|^{p(x)}\, dxdt \leq \gamma\int_0^T\int_\Omega |f|\, dxdt
$$

e assim,

$$-\int_\Omega \left[\int_0^T (T_\gamma(u))_t(u-u_0)\,dt\right] dx + \int_0^T\int_\Omega |\nabla T_\gamma(u)|^{p(x)}\,dxdt \le \gamma \int_0^T\int_\Omega |f|\,dxdt.$$

Usando integração por partes para integrar o primeiro termo e a definição de função truncação, vem que

$$\iint_{\{|u|\le\gamma\}} uu_t\,dtdx + \iint_{\{|u|>\gamma\}} \gamma u_t\,dtdx + \iint_{\{|u|\le\gamma\}} |\nabla T_\gamma(u)|^{p(x)}\,dxdt \le \gamma||f||_{L^1(Q_T)}$$

$$\iint_{\{|u|\le\gamma\}} uu_t\,dtdx + \gamma\int_\Omega \left(\int_0^T u_t\,dt\right) dx + \iint_{\{|u|\le\gamma\}} |\nabla T_\gamma(u)|^{p(x)}\,dxdt \le \gamma||f||_{L^1(Q_T)}$$

$$\iint_{\{|u|\le\gamma\}} uu_t\,dtdx + \gamma\int_\Omega (u(T)-u_0)\,dx + \iint_{\{|u|\le\gamma\}} |\nabla T_\gamma(u)|^{p(x)}\,dxdt \le \gamma||f||_{L^1(Q_T)}$$

$$\iint_{\{|u|\le\gamma\}} uu_t\,dtdx + \gamma(||u(t,\cdot)||_{L^1(\Omega)} - ||u_0||_{L^1(\Omega)}) + \iint_{\{|u|\le\gamma\}} |\nabla T_\gamma(u)|^{p(x)}\,dxdt \le \gamma||f||_{L^1(Q_T)}$$

$$\iint_{\{|u|\le\gamma\}} uu_t\,dtdx + \gamma||u(t,\cdot)||_{L^1(\Omega)} + \iint_{\{|u|\le\gamma\}} |\nabla T_\gamma(u)|^{p(x)}\,dxdt \le \gamma(||f||_{L^1(Q_T)} + ||u_0||_{L^1(\Omega)}).$$

Como $\displaystyle\iint_{\{|u|\le\gamma\}} uu_t\,dtdx + \gamma||u(t,\cdot)||_{L^1(\Omega)} \ge 0$, segue que

$$\iint_{\{|u|\le\gamma\}} |\nabla T_\gamma(u)|^{p(x)}\,dxdt \le \gamma(||f||_{L^1(Q_T)} + ||u_0||_{L^1(\Omega)}).$$

Assim, usando o Lema 3.4.1, obtemos

$$||T_\gamma(u)||_{L^{p(\cdot)}(Q_T)} \le \gamma\max\{(||f||_{L^1(Q_T)} + ||u_0||_{L^1(\Omega)})^{\frac{1}{p^-}}, (||f||_{L^1(Q_T)} + ||u_0||_{L^1(\Omega)})^{\frac{1}{p^+}}\}.$$

Prova de (4.5): Considere a equação no sentido das distribuições, tomando $S = S_n$ e escolhendo $\varphi = \phi_\gamma(u)$, $\gamma > 0$, como função teste. Então, temos que

$$\begin{aligned}\langle \partial_t S_n(u), \phi_\gamma(u)\rangle_{V^*,V} &+ \int_0^T \int_\Omega S_n'(u)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla \phi_\gamma(u)\, dxdt \\ &+ \int_0^T \int_\Omega S_n''(u)|\nabla u|^{p(x)}\phi_\gamma(u)\, dxdt \\ &= \int_0^T \int_\Omega f S_n'(u)\phi_\gamma(u)\, dxdt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\langle \partial_t S_n(u), \phi_\gamma(u)\rangle_{V^*,V} + \int_0^T \int_\Omega S_n'(u)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla \phi_\gamma(u)\, dxdt \\ &\leq \int_0^T \int_\Omega |f||S_n'(u)||\phi_\gamma(u)|\, dxdt + \int_0^T \int_\Omega |S_n''(u)||\nabla u|^{p(x)}|\phi_\gamma(u)|\, dxdt.\end{aligned}$$

Usando a definição de função renormalização e lembrando que $|\phi_\gamma(u)| \leq 1$, supp $S_n'' \subset [-(n+1), -n] \cup [n, n+1]$ e que $|S_n''(u)| \leq ||S_n''||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq ||s'||_{L^\infty(\mathbb{R})} = c$ nesse suporte, obtemos

$$\begin{aligned}\langle \partial_t S_n(u), \phi_\gamma(u)\rangle_{V^*,V} + \iint\limits_{\{\gamma \leq |u| \leq \gamma+1\}} S_n'(u)|\nabla u|^{p(x)}\, dxdt &\leq \int_0^T \int_\Omega |f||S_n'(u)|\, dxdt \\ &+ c \iint\limits_{\{n \leq |u| \leq n+1\}} |\nabla u|^{p(x)}\, dxdt.\end{aligned}$$

Também, como sabemos $|S_n'(u)| \leq ||S_n'||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq ||s||_{L^\infty(\mathbb{R})} = 1$, e daí,

$$\begin{aligned}\langle \partial_t S_n(u), \phi_\gamma(u)\rangle_{V^*,V} + \iint\limits_{\{\gamma \leq |u| \leq \gamma+1\}} S_n'(u)|\nabla u|^{p(x)}\, dxdt &\leq \int_0^T \int_\Omega |f|\, dxdt \\ &+ c \iint\limits_{\{n \leq |u| \leq n+1\}} |\nabla u|^{p(x)}\, dxdt.\end{aligned}$$

Agora, aplicando a fórmula de integração por partes dada no Lema 4.2.1 para o termo de evolução, escolhendo $h(x) = 1$, para todo x, e $\xi = \phi_\gamma(u)$, obtemos

$$\begin{aligned}&- \int_0^T \int_\Omega (\phi_\gamma(u))_t (S_n(u) - S_n(u_0))\, dxdt + \iint\limits_{\{\gamma \leq |u| \leq \gamma+1\}} S_n'(u)|\nabla u|^{p(x)}\, dxdt \\ &\leq \int_0^T \int_\Omega |f|\, dxdt + c \iint\limits_{\{n \leq |u| \leq n+1\}} |\nabla u|^{p(x)}\, dxdt.\end{aligned}$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$-\int_{\Omega}\left[\int_0^T (\phi_\gamma(u))_t(u-u_0)\,dt\right]dx + \iint\limits_{\{\gamma\le|u|\le\gamma+1\}} |\nabla u|^{p(x)}\,dxdt \le \int_0^T\int_{\Omega}|f|\,dxdt.$$

Usando integração por partes para integrar o primeiro termo e a definição de função renormalização, vem que

$$\iint\limits_{\{\gamma\le|u|\le\gamma+1\}} uu_t\,dtdx + \iint\limits_{\{|u|>\gamma+1\}} u_t\,dtdx + \iint\limits_{\{\gamma\le|u|\le\gamma+1\}} |\nabla u|^{p(x)}\,dxdt \le ||f||_{L^1(Q_T)}$$

$$\iint\limits_{\{\gamma\le|u|\le\gamma+1\}} uu_t\,dtdx + \int_{\Omega}\left(\int_0^T u_t\,dt\right)dx + \iint\limits_{\{\gamma\le|u|\le\gamma+1\}} |\nabla u|^{p(x)}\,dxdt \le ||f||_{L^1(Q_T)}$$

$$\iint\limits_{\{\gamma\le|u|\le\gamma+1\}} uu_t\,dtdx + \int_{\Omega}(u(T)-u_0)\,dx + \iint\limits_{\{\gamma\le|u|\le\gamma+1\}} |\nabla u|^{p(x)}\,dxdt \le ||f||_{L^1(Q_T)}$$

$$\iint\limits_{\{\gamma\le|u|\le\gamma+1\}} uu_t\,dtdx + (||u(t,\cdot)||_{L^1(\Omega)} - ||u_0||_{L^1(\Omega)}) + \iint\limits_{\{\gamma\le|u|\le\gamma+1\}} |\nabla u|^{p(x)}\,dxdt \le ||f||_{L^1(Q_T)}$$

$$\iint\limits_{\{\gamma\le|u|\le\gamma+1\}} uu_t\,dtdx + ||u(t,\cdot)||_{L^1(\Omega)} + \iint\limits_{\{\gamma\le|u|\le\gamma+1\}} |\nabla u|^{p(x)}\,dxdt \le ||f||_{L^1(Q_T)} + ||u_0||_{L^1(\Omega)}.$$

Como $\iint\limits_{\{\gamma\le|u|\le\gamma+1\}} uu_t\,dtdx + ||u(t,\cdot)||_{L^1(\Omega)} \ge 0$, segue que

$$\iint\limits_{\{\gamma\le|u|\le\gamma+1\}} |\nabla u|^{p(x)}\,dxdt \le ||f||_{L^1(Q_T)} + ||u_0||_{L^1(\Omega)}.$$

Logo,

$$\sup_{\gamma>0} \iint\limits_{\{\gamma\le|u|\le\gamma+1\}} |\nabla u|^{p(x)}\,dxdt \le ||f||_{L^1(Q_T)} + ||u_0||_{L^1(\Omega)}.$$

Por fim, para mostrar a regularidade da solução renormalizada u, considere a equação no sentido das distribuições, tomando $S = S_n$ e escolhendo $\varphi = \phi_\gamma(T_k(u))$, $\gamma, k > 0$, como função teste. Então, temos que

$$\begin{aligned}\langle \partial_t S_n(u), \phi_\gamma(T_k(u))\rangle_{V^*,V} &+ \int_0^T \int_\Omega S_n'(u)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla \phi_\gamma(T_k(u))\, dxdt \\ &+ \int_0^T \int_\Omega S_n''(u)|\nabla u|^{p(x)}\phi_\gamma(T_k(u))\, dxdt \\ &= \int_0^T \int_\Omega f S_n'(u)\phi_\gamma(T_k(u))\, dxdt\end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned}&\langle \partial_t S_n(u), \phi_\gamma(T_k(u))\rangle_{V^*,V} + \int_0^T \int_\Omega S_n'(u)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla \phi_\gamma(T_k(u))\, dxdt \\ &\leq \int_0^T \int_\Omega |f||S_n'(u)||\phi_\gamma(T_k(u))|\, dxdt + \int_0^T \int_\Omega |S_n''(u)||\nabla u|^{p(x)}|\phi_\gamma(T_k(u))|\, dxdt.\end{aligned}$$

Usando a definição de função renormalização e lembrando que $|\phi_\gamma(T_k(u))| \leq 1$, supp $S_n'' \subset [-(n+1), -n] \cup [n, n+1]$ e que $|S_n''(u)| \leq ||S_n''||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq ||s'||_{L^\infty(\mathbb{R})} = c$ nesse suporte, obtemos

$$\begin{aligned}\langle \partial_t S_n(u), \phi_\gamma(T_k(u))\rangle_{V^*,V} + \iint\limits_{\{\gamma \leq |T_k(u)| \leq \gamma+1\}} S_n'(u)|\nabla T_k(u)|^{p(x)}\, dxdt &\leq \int_0^T \int_\Omega |f||S_n'(u)|\, dxdt \\ &+ c \iint\limits_{\{n \leq |u| \leq n+1\}} |\nabla u|^{p(x)}\, dxdt.\end{aligned}$$

Também, como sabemos $|S_n'(u)| \leq ||S_n'||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq ||s||_{L^\infty(\mathbb{R})} = 1$, e daí,

$$\begin{aligned}\langle \partial_t S_n(u), \phi_\gamma(T_k(u))\rangle_{V^*,V} + \iint\limits_{\{\gamma \leq |T_k(u)| \leq \gamma+1\}} S_n'(u)|\nabla T_k(u)|^{p(x)}\, dxdt &\leq \int_0^T \int_\Omega |f|\, dxdt \\ &+ c \iint\limits_{\{n \leq |u| \leq n+1\}} |\nabla u|^{p(x)}\, dxdt.\end{aligned}$$

Agora, aplicando a fórmula de integração por partes dada no Lema 4.2.1 para o termo de evolução, escolhendo $h(x) = 1$, para todo x, e $\xi = \phi_\gamma(T_k(u))$, obtemos

$$\begin{aligned}&-\int_0^T \int_\Omega (\phi_\gamma(T_k(u)))_t \Big[\int_{u_0}^u dS_n(r)\Big]\, dxdt + \iint\limits_{\{\gamma \leq |T_k(u)| \leq \gamma+1\}} S_n'(u)|\nabla T_k(u)|^{p(x)}\, dxdt \\ &\leq \int_0^T \int_\Omega |f|\, dxdt + c \iint\limits_{\{n \leq |u| \leq n+1\}} |\nabla u|^{p(x)}\, dxdt.\end{aligned}$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$-\int_\Omega \left[\int_0^T (\phi_\gamma(T_k(u)))_t(u-u_0)\,dt\right]dx + \iint\limits_{\{\gamma\le|T_k(u)|\le\gamma+1\}} |\nabla T_k(u)|^{p(x)}\,dxdt \le \int_0^T\int_\Omega |f|\,dxdt$$

donde segue que

$$\iint\limits_{\{\gamma\le|T_k(u)|\le\gamma+1\}} |\nabla T_k(u)|^{p(x)}\,dxdt \le ||f||_{L^1(Q_T)} + ||u_0||_{L^1(\Omega)}$$

para todo $k > 0$. Considerando $||f||_{L^1(Q_T)} + ||u_0||_{L^1(\Omega)} = \beta$, $\beta > 0$, temos

$$\sup_{\gamma>0}\iint\limits_{B_\gamma} |\nabla T_k(u)|^{p(x)}\,dxdt \le \beta$$

onde $B_\gamma = \{\gamma \le |T_k(u)| \le \gamma+1\}$, para $\beta,\gamma,k > 0$. Logo, usando o Lema 3.4.2 resulta que $||T_k(u)||_{L^{q^-}(0,T;W_0^{1,q(\cdot)}(\Omega))} \le C$ para alguma constante positiva C, para todo $k > 0$ e todo expoente variável q contínuo em $\overline{\Omega}$ satisfazendo $1 \le q(x) < \dfrac{N(p(x)-1)+p(x)}{N+1}$, para todo $x \in \overline{\Omega}$. Finalmente, aplicando o Lema de Fatou (Teorema 2.1.8) para tal resultado, com $k \to \infty$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T ||u||^{q^-}_{W_0^{1,q(\cdot)}(\Omega)}\,dt &= \int_0^T \liminf_{k\to\infty} ||T_k(u)||^{q^-}_{W_0^{1,q(\cdot)}(\Omega)}\,dt\\ &\le \liminf_{k\to\infty}\int_0^T ||T_k(u)||^{q^-}_{W_0^{1,q(\cdot)}(\Omega)}\,dt\\ &\le C\end{aligned}$$

implicando que $u \in L^{q^-}(0,T;W_0^{1,q(\cdot)}(\Omega))$. □

Tendo em vista a regularidade provada no Lema 4.2.2, é claro que se $2 - \dfrac{1}{N+1} < p(\cdot) < N$, a solução renormalizada é também uma solução no sentido das distribuições. O próximo resultado a ser apresentado, evidencia o inverso para dados iniciais regulares, ou seja, se u é uma solução no sentido das distribuições (solução fraca), $u \in V$, $\partial_t u - div(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = f$ em $\mathcal{D}'(Q_T)$ e $u(0,\cdot) = u_0$, então u é uma solução renormalizada.

Lema 4.2.3. *Suponha $f \in V^*$ e $u_0 \in L^2(\Omega)$. Então, a solução fraca u de (4.1) é também uma solução renormalizada.*

Demonstração. Considere u uma solução fraca. Então, u satisfaz a equação

$$\partial_t u - div(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = f \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(Q_T).$$

Como $f \in V^*$, resulta que $\partial_t u \in V^*$, já que pelo Lema 4.1.1 obtemos que $div(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) \in V^*$. Devido a densidade de $\mathcal{D}(Q_T)$ em V, levando em conta o Lema 4.1.1, temos que a equação no sentido das distribuições é equivalente a

$$\langle \partial_t u, \varphi\rangle_{V^*,V} + \int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla\varphi \, dxdt = \langle f, \varphi\rangle_{V^*,V}.$$

Assim, tomando $\varphi = S'(u)\psi$ na equação acima, onde $S \in C^\infty(\mathbb{R})$, supp $S' \subset [-M, M]$ para algum $M > 0$ e $\psi \in \mathcal{D}(Q_T)$, obtemos

$$\langle \partial_t u, S'(u)\psi\rangle_{V^*,V} + \int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla(S'(u)\psi) \, dxdt = \langle f, S'(u)\psi\rangle_{V^*,V}$$

$$\langle \partial_t u, S'(u)\psi\rangle_{V^*,V} + \int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u[(\nabla S'(u))\psi + S'(u)(\nabla\psi)] \, dxdt = \langle f, S'(u)\psi\rangle_{V^*,V}$$

$$\langle \partial_t u, S'(u)\psi\rangle_{V^*,V} + \int_0^T \int_\Omega S''(u)|\nabla u|^{p(x)}\psi \, dxdt + \int_0^T \int_\Omega S'(u)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla\psi \, dxdt$$
$$= \int_0^T \int_\Omega f S'(u)\psi \, dxdt$$

e a condição (iv) de solução renormalizada vale. A condição (iii) de solução renormalizada segue do fato de como $u \in V$ termos $|\nabla u|^{p(x)} \in L^1(Q_T)$ donde $\{\gamma \leq |u| \leq \gamma + 1\} \to 0$ quando $\gamma \to \infty$. O restante das condições segue trivialmente. $\square$

4.3 Soluções Aproximadas: Uma Abordagem pela Teoria de Semigrupos

Nesta seção apresentaremos resultados baseados na teoria de semigrupos não-lineares, que nos auxiliarão na demonstração do teorema principal, o Teorema 4.1.1, que será apresentada na próxima seção.

Na referência [29] foram estudados problemas elípticos da forma

$$(E)(f) \begin{cases} \beta(u) - div(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u - F(u)) = f \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \hfill u = 0 \quad \text{na} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde β é um gráfico maximal monótono em $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ e $F:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^N$ é uma função localmente Lipschitz contínua. Para $p\in C(\overline{\Omega})$ com $1<p^-\leq p^+<N$, existência e unicidade de solução renormalizada para $(E)(f)$ foi provada para cada $f\in L^1(\Omega)$. Em particular, segue dos resultados de [29] que, para toda $f\in L^1(\Omega)$, $\lambda>0$, existe uma única solução renormalizada $u:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ do problema

$$(E)_\lambda(f)\begin{cases} u-\lambda\ div(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)=f \quad \text{em} \quad \Omega,\\ \qquad\qquad\qquad\qquad u=0 \quad \text{na} \quad \partial\Omega,\end{cases}$$

isto é, u é uma função mensurável tal que

$$T_\gamma(u)\in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega),\ \text{ para todo }\ \gamma>0,$$

$$S'(u)u-div(S'(u)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)+S''(u)|\nabla u|^{p(x)}=fS'(u)\ \text{ em }\ \mathcal{D}'(\Omega)$$

e

$$\lim_{\gamma\to\infty}\int\limits_{\{\gamma\leq|u|\leq\gamma+1\}}|\nabla u|^{p(x)}\,dx=0.$$

Além disso, temos o seguinte resultado de comparação para soluções renormalizadas referente a problemas elípticos, o qual sua demonstração pode ser encontrada em [29].

Lema 4.3.1. *Se u e v são soluções renormalizadas de $(E)_\lambda(f)$,$(E)_\lambda(g)$, $f,g\in L^1(\Omega)$, respectivamente. Então, temos as seguintes comparações:*

(a) $||(u-v)^+||_{L^1(\Omega)}\leq||(f-g)^+||_{L^1(\Omega)}$;

(b) $||(u-v)^+||_{L^\infty(\Omega)}\leq||(f-g)^+||_{L^\infty(\Omega)}$;

(c) $||u-v||_{L^s(\Omega)}\leq||f-g||_{L^s(\Omega)}$ *para todo* $1\leq s\leq\infty$.

Em termos de operadores não-lineares, o resultado anterior diz o seguinte: se A é o operador não-linear definido em $L^1(\Omega)$ por

$$A=\{(u,w)\in L^1(\Omega)\times L^1(\Omega): u \text{ é solução renormalizada de } (E)(w)\},$$

então A é m-completamente acretivo em $L^1(\Omega)$, isto é, $R(I+\lambda A)=L^1(\Omega)$ para todo $\lambda>0$ e o resolvente de A, a aplicação $f\in L^1(\Omega)\mapsto(I+\lambda A)^{-1}f\in L^1(\Omega)$, é uma contração que preserva a ordem com respeito a L^1-norma e L^∞-norma (e assim, com respeito a qualquer L^s-norma, $1 \leq s \leq \infty$). Em particular, o operador não-linear A é m-acretivo em $L^1(\Omega)$, isto é, $R(I + \lambda A) = L^1(\Omega)$ e o resolvente é uma contração na L^1-norma.

Pela teoria geral de semigrupos não-lineares, através do Teorema 3.3.3, podemos concluir que o problema de evolução abstrato correspondente à (4.1), ou seja, o problema de Cauchy para o operador não-linear A

$$(CP)(u_0, f) \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = f \quad \text{em} \quad (0, T), \\ \qquad u(0) = u_0, \end{cases}$$

admite uma única solução mild $u \in C([0,T]; L^1(\Omega))$ para qualquer dado inicial $u_0 \in \overline{D(A)}^{||\cdot||_{L^1(\Omega)}}$ ($= L^1(\Omega)$ como veremos mais adiante) e $f \in L^1(Q_T) \cong L^1(0,T; L^1(\Omega))$.

Além disso, levando em conta o Corolário 3.3.1, recordamos que se $u, v \in C([0,T]; L^1(\Omega))$ são soluções mild de $(CP)(u_0, f)$,$(CP)(v_0, g)$, respectivamente, então temos

$$||u(t) - v(t)||_{L^1(\Omega)} \leq ||u_0 - v_0||_{L^1(\Omega)} + \int_0^t ||f(s) - g(s)||_{L^1(\Omega)}\, ds$$

para cada $0 \leq t \leq T$. No caso em que o operador A é m-completamente acretivo, o princípio da contração também vale com respeito a qualquer L^r-norma, $1 \leq r \leq \infty$. Mais precisamente, nesse caso, para cada $0 \leq t \leq T$ e $1 \leq r \leq \infty$, temos

$$||(u(t) - v(t))^+||_{L^r(\Omega)} \leq ||(u_0 - v_0)^+||_{L^r(\Omega)} + \int_0^t ||(f(s) - g(s))^+||_{L^r(\Omega)}\, ds.$$

No que segue, usaremos a expressão "dados iniciais suaves"quando tivermos $u_0 \in D(A)$ e $f \in W^{1,1}(0,T; L^1(\Omega))$. Como A é m-completamente acretivo, pelos resultados de [20] temos o seguinte resultado:

Teorema 4.3.1. *Se $u_0 \in D(A)$ e $f \in W^{1,1}(0,T; L^1(\Omega))$ (dados suaves), então a solução mild u de $(CP)(u_0, f)$ é uma solução forte, isto é, $u \in W^{1,1}(0,T; L^1(\Omega))$, $u(0) = u_0$ e $\dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t)$ para quase todo $t \in (0,T)$.*

Em outras palavras, de acordo com a definição de A para dados suaves u_0 e f, a solução mild u satisfaz para quase todo $t \in (0,T)$:

(i) $T_\gamma(u(t)) \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ para cada $\gamma > 0$;

(ii) $\displaystyle\lim_{\gamma\to\infty} \int_{\{\gamma\leq|u(t)|\leq\gamma+1\}} |\nabla u(t)|^{p(x)}\, dx = 0;$

(iii) Pra cada renormalização $S \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que supp $S' \subset [-M, M]$ para algum $M > 0$, em $\mathcal{D}'(\Omega)$ temos

$$\partial_t S(u(t)) - div(S'(u(t))|\nabla u(t)|^{p(x)-2}\nabla u(t)) + S''(u(t))|\nabla u(t)|^{p(x)} = f(t)S'(u(t)).$$

Tendo como base a Definição 3.3.5, vamos definir a seguinte notação para uma solução mild $u \in C([0,T]; L^1(\Omega))$ de $(CP)(u_0, f)$, a qual é o limite uniforme das funções $u_\varepsilon = v_i^\varepsilon$ em $(t_{i-1}^\varepsilon, t_i^\varepsilon)$ com $u_\varepsilon(0) = v_0^\varepsilon$, em que para cada $0 < c < T$ e para cada $\varepsilon > 0$, existem:

(i) $0 = t_0^\varepsilon < t_1^\varepsilon < \cdots < c < t_{m_\varepsilon}^\varepsilon \leq T$, com $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$;

(ii) $f_i^\varepsilon \in L^1(\Omega)$, $i = 1, \cdots, m_\varepsilon$, tal que $\displaystyle\sum_{i=1}^{m_\varepsilon} \int_{t_{i-1}^\varepsilon}^{t_i^\varepsilon} ||f(t) - f_i^\varepsilon||_{L^1(\Omega)}\, dt$, $\displaystyle\max_{i=1,\cdots,m_\varepsilon}(t_i^\varepsilon - t_{i-1}^\varepsilon)$, $T - t_{m_\varepsilon}^\varepsilon$, $||u_0 - v_0^\varepsilon||_{L^1(\Omega)} \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$;

(iii) $v_0^\varepsilon, v_1^\varepsilon, \cdots, v_{m_\varepsilon}^\varepsilon \in X$ satisfazendo $\dfrac{v_i^\varepsilon - v_{i-1}^\varepsilon}{t_i^\varepsilon - t_{i-1}^\varepsilon} + Av_i^\varepsilon = f_i^\varepsilon$ para $i = 1, 2, \cdots, m_\varepsilon$ de tal modo que $||u(t) - v_i^\varepsilon|| \leq \varepsilon$ para $t \in [t_{i-1}^\varepsilon, t_i^\varepsilon)$, $i = 1, \cdots, m_\varepsilon$.

Veremos a seguir algumas propriedades de solução mild u de $(CP)(u_0, f)$ que é uma solução forte para dados suaves.

Proposição 4.3.1. *A solução mild u de $(CP)(u_0, f)$ obtida como o limite em $L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$ das soluções aproximadas u_ε satisfaz*

$$T_\gamma(u) \in L^{p^-}(0, T; W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)), \ \ \textit{para todo } \gamma > 0$$

e

$$\nabla T_\gamma(u) \in (L^{p(\cdot)}(Q_T))^N, \ \ \textit{para todo } \gamma > 0.$$

Demonstração. Considere as funções constantes por partes $u_\varepsilon = v_i^\varepsilon$ em $(t_{i-1}^\varepsilon, t_i^\varepsilon)$, $u_\varepsilon(0) = v_0^\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, soluções de

$$\frac{v_i^\varepsilon - v_{i-1}^\varepsilon}{t_i^\varepsilon - t_{i-1}^\varepsilon} + Av_i^\varepsilon = f_i^\varepsilon, \ \ i = 1, 2, \cdots, m_\varepsilon. \tag{4.6}$$

Pela definição de A, usando (4.6), a renormalização $S = S_n$ e a função teste $T_\gamma(v_i^\varepsilon)$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{t_i^\varepsilon - t_{i-1}^\varepsilon}\int_\Omega S_n'(v_i^\varepsilon)(v_i^\varepsilon - v_{i-1}^\varepsilon)T_\gamma(v_i^\varepsilon)\,dx + \int_\Omega S_n'(v_i^\varepsilon)|\nabla v_i^\varepsilon|^{p(x)-2}\nabla v_i^\varepsilon \nabla T_\gamma(v_i^\varepsilon)\,dx \\ + \int_\Omega S_n''(v_i^\varepsilon)|\nabla v_i^\varepsilon|^{p(x)}T_\gamma(v_i^\varepsilon)\,dx \\ = \int_\Omega S_n'(v_i^\varepsilon) f_i^\varepsilon T_\gamma(v_i^\varepsilon)\,dx.\end{aligned}$$

Integrando de t_{i-1}^ε a t_i^ε e somando as equações para $i = 1, 2, \cdots, m_\varepsilon$, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m_\varepsilon}\int_\Omega S_n'(v_i^\varepsilon)(v_i^\varepsilon - v_{i-1}^\varepsilon)T_\gamma(v_i^\varepsilon)\,dx + \sum_{i=1}^{m_\varepsilon}\int_{t_{i-1}^\varepsilon}^{t_i^\varepsilon}\int_\Omega S_n'(v_i^\varepsilon)|\nabla v_i^\varepsilon|^{p(x)-2}\nabla v_i^\varepsilon \nabla T_\gamma(v_i^\varepsilon)\,dxdt \\ + \sum_{i=1}^{m_\varepsilon}\int_{t_{i-1}^\varepsilon}^{t_i^\varepsilon}\int_\Omega S_n''(v_i^\varepsilon)|\nabla v_i^\varepsilon|^{p(x)}T_\gamma(v_i^\varepsilon)\,dxdt \\ = \sum_{i=1}^{m_\varepsilon}\int_{t_{i-1}^\varepsilon}^{t_i^\varepsilon}\int_\Omega S_n'(v_i^\varepsilon) f_i^\varepsilon T_\gamma(v_i^\varepsilon)\,dxdt.\end{aligned}$$

Agora, note que para r entre v_{i-1}^ε e v_i^ε tem-se que $T_\gamma(r) \le T_\gamma(v_i^\varepsilon)$, daí

$$\begin{aligned}\int_{v_{i-1}^\varepsilon}^{v_i^\varepsilon} T_\gamma(r)\,dr &\le \int_{v_{i-1}^\varepsilon}^{v_i^\varepsilon} T_\gamma(v_i^\varepsilon)\,dr \\ &= T_\gamma(v_i^\varepsilon)(v_i^\varepsilon - v_{i-1}^\varepsilon).\end{aligned}$$

Assim, obtemos a seguinte estimativa

$$S_n'(v_i^\varepsilon)\int_{v_{i-1}^\varepsilon}^{v_i^\varepsilon} T_\gamma(r)\,dr \le S_n'(v_i^\varepsilon)(v_i^\varepsilon - v_{i-1}^\varepsilon)T_\gamma(v_i^\varepsilon). \tag{4.7}$$

Usando (4.7), vem que

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m_\varepsilon}\int_\Omega S_n'(v_i^\varepsilon)\int_{v_{i-1}^\varepsilon}^{v_i^\varepsilon} T_\gamma(r)\,dr\,dx + \sum_{i=1}^{m_\varepsilon}\int_{t_{i-1}^\varepsilon}^{t_i^\varepsilon}\int_\Omega S_n'(v_i^\varepsilon)|\nabla T_\gamma(v_i^\varepsilon)|^{p(x)}\,dxdt \\ &\le c\gamma\sum_{i=1}^{m_\varepsilon}\int_{t_{i-1}^\varepsilon}^{t_i^\varepsilon}\int_{\{n\le|v_i^\varepsilon|\le n+1\}}|\nabla v_i^\varepsilon|^{p(x)}\,dxdt + \sum_{i=1}^{m_\varepsilon}\int_{t_{i-1}^\varepsilon}^{t_i^\varepsilon}\int_\Omega S_n'(v_i^\varepsilon) f_i^\varepsilon T_\gamma(v_i^\varepsilon)\,dxdt.\end{aligned}$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$\sum_{i=1}^{m_\varepsilon}\int_\Omega\int_{v_{i-1}^\varepsilon}^{v_i^\varepsilon} T_\gamma(r)\,dr\,dx + \sum_{i=1}^{m_\varepsilon}\int_{t_{i-1}^\varepsilon}^{t_i^\varepsilon}\int_\Omega|\nabla T_\gamma(v_i^\varepsilon)|^{p(x)}\,dxdt \le \sum_{i=1}^{m_\varepsilon}\int_{t_{i-1}^\varepsilon}^{t_i^\varepsilon}\int_\Omega f_i^\varepsilon T_\gamma(v_i^\varepsilon)\,dxdt.$$

Agora, observe que

$$\sum_{i=1}^{m_\varepsilon}\int_\Omega\int_{v_{i-1}^\varepsilon}^{v_i^\varepsilon} T_\gamma(r)\,dr\,dx + \sum_{i=1}^{m_\varepsilon}\int_{t_{i-1}^\varepsilon}^{t_i^\varepsilon}\int_\Omega |\nabla T_\gamma(v_i^\varepsilon)|^{p(x)}\,dxdt = \int_\Omega\int_{u_\varepsilon(0)}^{u_\varepsilon(t_{m_\varepsilon}^\varepsilon)} T_\gamma(r)\,dr\,dx$$
$$+\int_0^{t_{m_\varepsilon}^\varepsilon}\int_\Omega |\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)|^{p(x)}\,dxdt.$$

Assim,

$$\int_\Omega\int_{u_\varepsilon(0)}^{u_\varepsilon(t_{m_\varepsilon}^\varepsilon)} T_\gamma(r)\,dr\,dx + \int_0^{t_{m_\varepsilon}^\varepsilon}\int_\Omega |\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)|^{p(x)}\,dxdt \le \sum_{i=1}^{m_\varepsilon}\int_{t_{i-1}^\varepsilon}^{t_i^\varepsilon}\int_\Omega f_i^\varepsilon T_\gamma(v_i^\varepsilon)\,dxdt. \quad (4.8)$$

Como uma consequência, temos

$$\begin{aligned}\int_0^{t_{m_\varepsilon}^\varepsilon}\int_\Omega |\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)|^{p(x)}\,dxdt &\le \int_\Omega\int_0^{u_\varepsilon(t_{m_\varepsilon}^\varepsilon)} T_\gamma(r)\,dr\,dx + \int_0^{t_{m_\varepsilon}^\varepsilon}\int_\Omega |\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)|^{p(x)}\,dxdt\\ &= \int_\Omega\left[\int_0^{u_\varepsilon(0)} T_\gamma(r)\,dr + \int_{u_\varepsilon(0)}^{u_\varepsilon(t_{m_\varepsilon}^\varepsilon)} T_\gamma(r)\,dr\right]dx\\ &+ \int_0^{t_{m_\varepsilon}^\varepsilon}\int_\Omega |\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)|^{p(x)}\,dxdt.\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\int_0^{t_{m_\varepsilon}^\varepsilon}\int_\Omega |\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)|^{p(x)}\,dxdt &\le \int_\Omega\int_0^{u_\varepsilon(0)} T_\gamma(r)\,dr\,dx + \int_\Omega\int_{u_\varepsilon(0)}^{u_\varepsilon(t_{m_\varepsilon}^\varepsilon)} T_\gamma(r)\,dr\,dx\\ &+ \int_0^{t_{m_\varepsilon}^\varepsilon}\int_\Omega |\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)|^{p(x)}\,dxdt.\end{aligned}$$

Usando a estimativa (4.8), segue que

$$\begin{aligned}\int_0^{t_{m_\varepsilon}^\varepsilon}\int_\Omega |\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)|^{p(x)}\,dxdt &\le \int_\Omega\int_0^{u_\varepsilon(0)} T_\gamma(r)\,dr\,dx + \sum_{i=1}^{m_\varepsilon}\int_{t_{i-1}^\varepsilon}^{t_i^\varepsilon}\int_\Omega f_i^\varepsilon T_\gamma(v_i^\varepsilon)\,dxdt\\ &\le \int_\Omega\int_0^{u_\varepsilon(0)} |T_\gamma(r)|\,dr\,dx + \sum_{i=1}^{m_\varepsilon}\int_{t_{i-1}^\varepsilon}^{t_i^\varepsilon}\int_\Omega |f_i^\varepsilon||T_\gamma(v_i^\varepsilon)|\,dxdt.\end{aligned}$$

Das propriedades da função truncação, lembramos que $|T_\gamma| \le \gamma$. Então,

$$\begin{aligned}\int_0^{t_{m_\varepsilon}^\varepsilon}\int_\Omega |\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)|^{p(x)}\,dxdt &\le \gamma\left[\int_\Omega\int_0^{u_\varepsilon(0)}\,dr\,dx + \sum_{i=1}^{m_\varepsilon}\int_{t_{i-1}^\varepsilon}^{t_i^\varepsilon}\int_\Omega |f_i^\varepsilon|\,dxdt\right]\\ &= \gamma\left[\int_\Omega u_\varepsilon(0)\,dx + \sum_{i=1}^{m_\varepsilon}\int_{t_{i-1}^\varepsilon}^{t_i^\varepsilon} ||f_i^\varepsilon||_{L^1(\Omega)}\,dt\right]\\ &= \gamma\left[||v_0^\varepsilon||_{L^1(\Omega)} + \sum_{i=1}^{m_\varepsilon}\int_{t_{i-1}^\varepsilon}^{t_i^\varepsilon} ||f_i^\varepsilon||_{L^1(\Omega)}\,dt\right],\end{aligned}$$

ou seja, uma estimativa de $\nabla(T_\gamma(u_\varepsilon))$ em $(L^{p(\cdot)}(Q_T))^N$ e assim de $(T_\gamma(u_\varepsilon))_\varepsilon \in L^{p^-}(0,T;W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega))$. Logo, tomando o limite uniforme das funções u_ε, segue que

$$T_\gamma(u) \in L^{p^-}(0,T;W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)), \text{ para todo } \gamma > 0$$

e

$$\nabla T_\gamma(u) \in (L^{p(\cdot)}(Q_T))^N, \text{ para todo } \gamma > 0.$$

$\square$

Proposição 4.3.2. *A solução mild u de $(CP)(u_0,f)$ obtida como o limite em $L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ das soluções aproximadas u_ε satisfaz a estimativa*

$$\begin{aligned}||\nabla\phi_\gamma(u)||_{L^{p(\cdot)}(Q_T)} \leq \max\Bigg\{&\Bigg(\int_{\{|u_0|\geq\gamma\}} |u_0|\,dx + \iint_{\{|u|\geq\gamma\}} |f|\,dxdt\Bigg)^{\frac{1}{p^-}},\\ &\Bigg(\int_{\{|u_0|\geq\gamma\}} |u_0|\,dx + \iint_{\{|u|\geq\gamma\}} |f|\,dxdt\Bigg)^{\frac{1}{p^+}}\Bigg\}.\end{aligned}$$

Demonstração. Usando (4.6), a renormalização $S = S_n$ e a função teste $\phi_\gamma(v_i^\varepsilon)$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{t_i^\varepsilon - t_{i-1}^\varepsilon}\int_\Omega S_n'(v_i^\varepsilon)(v_i^\varepsilon - v_{i-1}^\varepsilon)\phi_\gamma(v_i^\varepsilon)\,dx &+ \int_\Omega S_n'(v_i^\varepsilon)|\nabla v_i^\varepsilon|^{p(x)-2}\nabla v_i^\varepsilon\nabla\phi_\gamma(v_i^\varepsilon)\,dx\\ &+ \int_\Omega S_n''(v_i^\varepsilon)|\nabla v_i^\varepsilon|^{p(x)}\phi_\gamma(v_i^\varepsilon)\,dx\\ &= \int_\Omega S_n'(v_i^\varepsilon)f_i^\varepsilon\phi_\gamma(v_i^\varepsilon)\,dx.\end{aligned}$$

Integrando de t_{i-1}^ε a t_i^ε e somando as equações para $i = 1, 2, \cdots, m_\varepsilon$, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m_\varepsilon}\int_\Omega S_n'(v_i^\varepsilon)(v_i^\varepsilon - v_{i-1}^\varepsilon)\phi_\gamma(v_i^\varepsilon)\,dx &+ \sum_{i=1}^{m_\varepsilon}\int_{t_{i-1}^\varepsilon}^{t_i^\varepsilon}\int_\Omega S_n'(v_i^\varepsilon)|\nabla v_i^\varepsilon|^{p(x)-2}\nabla v_i^\varepsilon\nabla\phi_\gamma(v_i^\varepsilon)\,dxdt\\ &+ \sum_{i=1}^{m_\varepsilon}\int_{t_{i-1}^\varepsilon}^{t_i^\varepsilon}\int_\Omega S_n''(v_i^\varepsilon)|\nabla v_i^\varepsilon|^{p(x)}\phi_\gamma(v_i^\varepsilon)\,dxdt\\ &= \sum_{i=1}^{m_\varepsilon}\int_{t_{i-1}^\varepsilon}^{t_i^\varepsilon}\int_\Omega S_n'(v_i^\varepsilon)f_i^\varepsilon\phi_\gamma(v_i^\varepsilon)\,dxdt.\end{aligned}$$

Usando os mesmos argumentos da demonstração anterior, obtemos a seguinte estimativa

$$S_n'(v_i^\varepsilon)\int_{v_{i-1}^\varepsilon}^{v_i^\varepsilon}\phi_\gamma(r)\,dr \leq S_n'(v_i^\varepsilon)(v_i^\varepsilon - v_{i-1}^\varepsilon)\phi_\gamma(v_i^\varepsilon). \tag{4.9}$$

Usando (4.9), vem que

$$\sum_{i=1}^{m_\varepsilon}\int_\Omega S_n'(v_i^\varepsilon)\int\limits_{v_{i-1}^\varepsilon}^{v_i^\varepsilon}\phi_\gamma(r)\,dr\,dx+\sum_{i=1}^{m_\varepsilon}\int\limits_{t_{i-1}^\varepsilon}^{t_i^\varepsilon}\int\limits_{\{\gamma<|v_i^\varepsilon|<\gamma+1\}}S_n'(v_i^\varepsilon)|\nabla v_i^\varepsilon|^{p(x)}\,dxdt$$
$$\leq c\sum_{i=1}^{m_\varepsilon}\int_{t_{i-1}^\varepsilon}^{t_i^\varepsilon}\int\limits_{\{n\leq|v_i^\varepsilon|\leq n+1\}}|\nabla v_i^\varepsilon|^{p(x)}\,dxdt+\sum_{i=1}^{m_\varepsilon}\int_{t_{i-1}^\varepsilon}^{t_i^\varepsilon}\int_\Omega S_n'(v_i^\varepsilon)f_i^\varepsilon\phi_\gamma(v_i^\varepsilon)\,dxdt.$$

Fazendo $n\to\infty$, obtemos

$$\sum_{i=1}^{m_\varepsilon}\int_\Omega\int_{v_{i-1}^\varepsilon}^{v_i^\varepsilon}\phi_\gamma(r)\,dr\,dx+\sum_{i=1}^{m_\varepsilon}\int_{t_{i-1}^\varepsilon}^{t_i^\varepsilon}\int\limits_{\{\gamma<|v_i^\varepsilon|<\gamma+1\}}|\nabla v_i^\varepsilon|^{p(x)}\,dxdt\leq\sum_{i=1}^{m_\varepsilon}\int_{t_{i-1}^\varepsilon}^{t_i^\varepsilon}\int_\Omega f_i^\varepsilon\phi_\gamma(v_i^\varepsilon)\,dxdt.$$

Agora, observe que

$$\sum_{i=1}^{m_\varepsilon}\int_\Omega\int_{v_{i-1}^\varepsilon}^{v_i^\varepsilon}\phi_\gamma(r)\,dr\,dx+\sum_{i=1}^{m_\varepsilon}\int_{t_{i-1}^\varepsilon}^{t_i^\varepsilon}\int\limits_{\{\gamma<|v_i^\varepsilon|<\gamma+1\}}|\nabla v_i^\varepsilon|^{p(x)}\,dxdt$$
$$=\int_\Omega\int\limits_{u_\varepsilon(0)}^{u_\varepsilon(t_{m_\varepsilon}^\varepsilon)}\phi_\gamma(r)\,dr\,dx+\int_0^{t_{m_\varepsilon}^\varepsilon}\int\limits_{\{\gamma<|u_\varepsilon|<\gamma+1\}}|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)}\,dxdt.$$

Assim,

$$\int_\Omega\int_{u_\varepsilon(0)}^{u_\varepsilon(t_{m_\varepsilon}^\varepsilon)}\phi_\gamma(r)\,dr\,dx+\int_0^{t_{m_\varepsilon}^\varepsilon}\int\limits_{\{\gamma<|u_\varepsilon|<\gamma+1\}}|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)}\,dxdt\leq\sum_{i=1}^{m_\varepsilon}\int_{t_{i-1}^\varepsilon}^{t_i^\varepsilon}\int_\Omega f_i^\varepsilon\phi_\gamma(v_i^\varepsilon)\,dxdt. \tag{4.10}$$

Como uma consequência, temos

$$\int_0^{t_{m_\varepsilon}^\varepsilon}\int\limits_{\{\gamma<|u_\varepsilon|<\gamma+1\}}|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)}\,dxdt\leq\int_\Omega\int_0^{u_\varepsilon(t_{m_\varepsilon}^\varepsilon)}\phi_\gamma(r)\,dr\,dx+\int_0^{t_{m_\varepsilon}^\varepsilon}\int\limits_{\{\gamma<|u_\varepsilon|<\gamma+1\}}|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)}\,dxdt$$
$$=\int_\Omega\left[\int_0^{u_\varepsilon(0)}\phi_\gamma(r)\,dr+\int_{u_\varepsilon(0)}^{u_\varepsilon(t_{m_\varepsilon}^\varepsilon)}\phi_\gamma(r)\,dr\right]dx$$
$$+\int_0^{t_{m_\varepsilon}^\varepsilon}\int\limits_{\{\gamma<|u_\varepsilon|<\gamma+1\}}|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)}\,dxdt.$$

Então,

$$\int_0^{t_{m_\varepsilon}^\varepsilon}\int\limits_{\{\gamma<|u_\varepsilon|<\gamma+1\}}|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)}\,dxdt\leq\int_\Omega\int_0^{u_\varepsilon(0)}\phi_\gamma(r)\,dr\,dx+\int_\Omega\int_{u_\varepsilon(0)}^{u_\varepsilon(t_{m_\varepsilon}^\varepsilon)}\phi_\gamma(r)\,dr\,dx$$
$$+\int_0^{t_{m_\varepsilon}^\varepsilon}\int\limits_{\{\gamma<|u_\varepsilon|<\gamma+1\}}|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)}\,dxdt.$$

Usando a estimativa (4.10), segue que

$$\int_0^{t^\varepsilon_{m_\varepsilon}} \int\limits_{\{\gamma<|u_\varepsilon|<\gamma+1\}} |\nabla u_\varepsilon|^{p(x)}\, dxdt \le \int_\Omega \int_0^{u_\varepsilon(0)} \phi_\gamma(r)\, dr\, dx + \sum_{i=1}^{m_\varepsilon} \int_{t^\varepsilon_{i-1}}^{t^\varepsilon_i} \int_\Omega f^\varepsilon_i \phi_\gamma(v^\varepsilon_i)\, dxdt.$$

Passando o limite quando $\varepsilon \to 0$ na estimativa anterior e usando o Lema 3.4.1, obtemos

$$\int_0^T \int_\Omega |\nabla \phi_\gamma(u)|^{p(x)}\, dxdt \le \int\limits_{\{|u_0|\ge\gamma\}} |u_0|\, dx + \iint\limits_{\{|u|\ge\gamma\}} |f|\, dxdt,$$

ou seja,

$$||\nabla \phi_\gamma(u)||_{L^{p(\cdot)}(Q_T)} \le \max\left\{ \left(\int_0^T \int_\Omega |\nabla \phi_\gamma(u)|^{p(x)}\, dxdt \right)^{\frac{1}{p^-}}, \left(\int_0^T \int_\Omega |\nabla \phi_\gamma(u)|^{p(x)}\, dxdt \right)^{\frac{1}{p^+}} \right\}$$

e então,

$$||\nabla \phi_\gamma(u)||_{L^{p(\cdot)}(Q_T)} \le \max\left\{ \left(\int\limits_{\{|u_0|\ge\gamma\}} |u_0|\, dx + \iint\limits_{\{|u|\ge\gamma\}} |f|\, dxdt \right)^{\frac{1}{p^-}}, \left(\int\limits_{\{|u_0|\ge\gamma\}} |u_0|\, dx + \iint\limits_{\{|u|\ge\gamma\}} |f|\, dxdt \right)^{\frac{1}{p^+}} \right\}.$$

□

Observação 4.3.1. *Para dados suaves $u_0 \in D(A)$ e $f \in W^{1,1}(0,T;L^1(\Omega))$ que são também essencialmente limitados em Ω e Q_T, respectivamente, de acordo com o princípio da L^∞-contração para soluções mild do problema de Cauchy para um operador m-completamente acretivo A e como $A0 = 0$ para quase todo $t \in (0,T)$, segue que*

$$||u(t)||_{L^\infty(\Omega)} \le ||u_0||_{L^\infty(\Omega)} + \int_0^t ||f(s)||_{L^\infty(\Omega)}\, ds < \infty.$$

Logo, a solução mild u de $(CP)(u_0,f)$ é essencialmente limitada em Q_T e portanto u é solução fraca de $(CP)(u_0,f)$, ou seja, $u \in V \cap L^\infty(Q_T)$, já que pela Proposição 4.3.1 $u \in V$ para dados suaves.

Agora seja $u_0 \in L^1(\Omega)$, $f \in L^1(Q_T)$ arbitrários e considere aproximações por dados suaves essencialmente limitados $f_\varepsilon \in W^{1,1}(0,T;L^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q_T)$ e $u_{0,\varepsilon} \in D(A) \cap L^\infty(\Omega)$, satisfazendo

$$\begin{cases} f_\varepsilon \to f \text{ em } L^1(Q_T), \ u_{0,\varepsilon} \to u_0 \text{ em } L^1(\Omega), \text{ quando } \varepsilon \to 0, \\ \displaystyle\int_0^T \int_\Omega |f_\varepsilon| \ dxdt \leq \int_0^T \int_\Omega |f| \ dxdt, \ \int_\Omega |u_{0,\varepsilon}| \ dx \leq \int_\Omega |u_0| \ dx. \end{cases} \tag{4.11}$$

A aproximação de f pelas f_ε acima é possível devido a densidade de $W^{1,1}(0,T;L^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q_T)$ em $L^1(Q_T)$. Para o dado inicial $u_0 \in L^1(\Omega)$ temos sempre que $T_{\frac{1}{\varepsilon}}(u_0) \in L^\infty(\Omega)$ e $T_{\frac{1}{\varepsilon}}(u_0) \to u_0$ em $L^1(\Omega)$ quando $\varepsilon \to 0^+$.

Como uma consequência, no que segue, podemos assumir que o dado inicial $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. Assim, para tal dado inicial em L^∞, considere a função $u_{0,\varepsilon} = (I + \varepsilon A)^{-1}(u_0)$. Como A é m-completamente acretivo e $A0 = 0$, temos que

$$||u_{0,\varepsilon}||_{L^s(\Omega)} \leq ||u_0||_{L^s(\Omega)} \text{ para todo } 1 \leq s \leq \infty. \tag{4.12}$$

Usando estas considerações, abaixo segue um resultado referente ao D(A).

Proposição 4.3.3. *O D(A) é denso em* $L^1(\Omega)$.

Demonstração. Pela definição de A e como $u_{0,\varepsilon}$ é essencialmente limitada, $u_{0,\varepsilon} \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ e

$$u_{0,\varepsilon} - \varepsilon \, div(|\nabla u_{0,\varepsilon}|^{p(x)-2} \nabla u_{0,\varepsilon}) = u_0 \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Usando a equação no sentido das distribuições acima e tomando $\varphi = u_{0,\varepsilon}$ como função teste, com $\varepsilon > 0$, obtemos a seguinte estimativa

$$\int_\Omega u_{0,\varepsilon} u_{0,\varepsilon} \, dx + \varepsilon \int_\Omega |\nabla u_{0,\varepsilon}|^{p(x)-2} \nabla u_{0,\varepsilon} \nabla u_{0,\varepsilon} \, dx = \int_\Omega u_0 u_{0,\varepsilon} \, dx$$

e daí,

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_\Omega |\nabla u_{0,\varepsilon}|^{p(x)} \, dx &\leq \int_\Omega |u_0||u_{0,\varepsilon}| \, dx \\ &\leq \int_\Omega |u_0|^2 \, dx \\ &= ||u_0||^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Segue que, para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}\left|\varepsilon \int_\Omega |\nabla u_{0,\varepsilon}|^{p(x)-2} \nabla u_{0,\varepsilon} \nabla \varphi \, dx\right| &\leq \varepsilon \int_\Omega |\nabla u_{0,\varepsilon}|^{p(x)-2} |\nabla u_{0,\varepsilon}| |\nabla \varphi| \, dx \\ &= \varepsilon \int_\Omega |\nabla u_{0,\varepsilon}|^{p(x)-1} |\nabla \varphi| \, dx \\ &\leq 2\varepsilon || |\nabla u_{0,\varepsilon}|^{p(x)-1} ||_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)} ||\nabla \varphi||_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}.\end{aligned}$$

E pelo Lema 3.4.1, vem que

$$\begin{aligned}\left|\varepsilon \int_\Omega |\nabla u_{0,\varepsilon}|^{p(x)-2} \nabla u_{0,\varepsilon} \nabla \varphi \, dx\right| &\leq 2\varepsilon \max\left\{ \left(\int_\Omega |\nabla u_{0,\varepsilon}|^{p(x)} \, dx \right)^{\frac{1}{p'^-}}, \left(\int_\Omega |\nabla u_{0,\varepsilon}|^{p(x)} \, dx \right)^{\frac{1}{p'^+}} \right\} \\ &\quad . \, ||\nabla \varphi||_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \\ &= 2 \max\left\{ \varepsilon^{1-\frac{1}{p'^-}} \left(\varepsilon \int_\Omega |\nabla u_{0,\varepsilon}|^{p(x)} \, dx \right)^{\frac{1}{p'^-}}, \right. \\ &\quad \left. \varepsilon^{1-\frac{1}{p'^+}} \left(\varepsilon \int_\Omega |\nabla u_{0,\varepsilon}|^{p(x)} \, dx \right)^{\frac{1}{p'^+}} \right\} ||\nabla \varphi||_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Assim, como

$$\varepsilon \int_\Omega |\nabla u_{0,\varepsilon}|^{p(x)} \, dx \leq ||u_0||^2_{L^2(\Omega)},$$

segue que o último termo da estimativa acima tende a 0 quando $\varepsilon \to 0$. Como consequência, temos que $\varepsilon \, div(|\nabla u_{0,\varepsilon}|^{p(x)-2} \nabla u_{0,\varepsilon}) \to 0$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$, e assim $u_{0,\varepsilon} \to u_0$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ quando $\varepsilon \to 0$. Considerando (4.12), podemos concluir que $u_{0,\varepsilon} \to u_0$ em $L^2(\Omega)$ quando $\varepsilon \to 0$, e devido à inclusão contínua de $L^2(\Omega)$ em $L^1(\Omega)$ segue que $u_{0,\varepsilon} \to u_0$ em $L^1(\Omega)$. Portanto, segue que D(A) é denso em $L^1(\Omega)$. $\square$

Considerando o resultado acima, temos que para cada $\varepsilon > 0$, a solução mild u_ε de $(CP)(u_{0,\varepsilon}, f_\varepsilon)$, com $u_{0,\varepsilon}, f_\varepsilon$ como descritos em (4.11), já é uma solução forte e também uma solução fraca, e pelo Lema 4.2.3, uma solução renormalizada do problema parabólico (4.1).

4.4 Prova do Teorema 4.1.1

Pela teoria geral de semigrupos não-lineares, a solução mild u_ε de $(CP)(u_{0,\varepsilon}, f_\varepsilon)$ com os dados iniciais $u_{0,\varepsilon}$, f_ε como em (4.11), converge quando $\varepsilon \to 0$ em $C([0,T]; L^1(\Omega))$ para a única solução mild u de $(CP)(u_0, f)$. O nosso objetivo nesta seção é provar que esta solução mild é também uma solução renormalizada. A prova deste resultado consiste em duas etapas principais. São elas:

(1º) Provamos estimativas uniformes em ε em certos espaços de Bochner, bem como em espaços de Lebesgue com expoentes variáveis apropriados, para u_ε e ∇u_ε.

(2º) Passamos o limite nas equações renormalizadas quando $\varepsilon \to 0$.

As estimativas obtidas em u no Lema 4.2.2, valem para u_ε e todas as constantes são independentes de ε. Mais precisamente, temos:

Lema 4.4.1. (a)

$$\begin{aligned} ||u_\varepsilon||_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} &\leq ||f_\varepsilon||_{L^1(Q_T)} + ||u_{0,\varepsilon}||_{L^1(\Omega)} \\ &\leq ||f||_{L^1(Q_T)} + ||u_0||_{L^1(\Omega)}; \end{aligned}$$

(b) $||\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)||_{L^{p(\cdot)}(Q_T)} \leq \gamma \max\{(||f||_{L^1(Q_T)} + ||u_0||_{L^1(\Omega)})^{\frac{1}{p^-}}, (||f||_{L^1(Q_T)} + ||u_0||_{L^1(\Omega)})^{\frac{1}{p^+}}\}$, *para todo* $\gamma > 0$;

(c) $\sup\limits_{\gamma>0} \iint\limits_{\{\gamma \leq |u_\varepsilon| \leq \gamma+1\}} |\nabla u_\varepsilon|^{p(x)} dxdt \leq ||f||_{L^1(Q_T)} + ||u_0||_{L^1(\Omega)}$;

(d) *Se* $2 - \dfrac{1}{N+1} < p(\cdot) < N$, *então* $u_\varepsilon \in L^{q^-}(0, T; W_0^{1,q(\cdot)}(\Omega))$, *para cada expoente variável contínuo* q *em* $\overline{\Omega}$ *satisfazendo* $1 \leq q(\cdot) < \dfrac{N(p(\cdot)-1)+p(\cdot)}{N+1}$.

As estimativas do lema anterior para soluções aproximadas u_ε, junto com a $C([0,T]; L^1(\Omega))$-convergência garantida pela teoria de semigrupos não-lineares, implicam os seguintes resultados básicos de convergência:

Lema 4.4.2. *Para uma subsequência com* $\varepsilon \to 0$

$$u_\varepsilon \to u \ \text{ q.t.p. em } Q_T$$

(e, se $p^- > 2 - \dfrac{1}{N+1}$, $u_\varepsilon \to u$ *fortemente em* $L^{q^-}(0, T; L^{q(\cdot)}(\Omega))$ *para cada expoente variável contínuo* q *em* $\overline{\Omega}$ *satisfazendo* $1 \leq q(\cdot) < \dfrac{N(p(\cdot)-1)+p(\cdot)}{N+1}\Big)$. *Além disso,*

$$\nabla T_\gamma(u_\varepsilon) \to \nabla T_\gamma(u) \ \text{ fracamente em } (L^{p(\cdot)}(Q_T))^N,$$

e

$$T_\gamma(u_\varepsilon) \to T_\gamma(u) \ \textit{fracamente em} \ L^{p^-}(0,T;W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)),$$

para cada $\gamma > 0$.

Do lema acima, segue que a solução mild u de $(CP)(u_0,f)$ satisfaz $T_\gamma(u) \in V$ para todo $\gamma > 0$.

Lema 4.4.3. *A sequência* $(u_\varepsilon)_{\{0\leq\varepsilon<1\}}$ *satisfaz a seguinte estimativa*

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{\varepsilon\to 0} \iint\limits_{\{n\leq|u_\varepsilon|\leq n+1\}} |\nabla u_\varepsilon|^{p(x)}\, dxdt = 0.$$

Demonstração. Levando em conta a Proposição 4.3.2, a solução fraca u_ε satisfaz

$$||\nabla\phi_n(u_\varepsilon)||_{L^{p(\cdot)}(Q_T)} \leq \max\left\{\left(\int\limits_{\{|u_{0,\varepsilon}|\geq n\}} |u_{0,\varepsilon}|\, dx + \iint\limits_{\{|u_\varepsilon|\geq n\}} |f_\varepsilon|\, dxdt\right)^{\frac{1}{p^-}},\right.$$
$$\left.\left(\int\limits_{\{|u_{0,\varepsilon}|\geq n\}} |u_{0,\varepsilon}|\, dx + \iint\limits_{\{|u_\varepsilon|\geq n\}} |f_\varepsilon|\, dxdt\right)^{\frac{1}{p^+}}\right\}.$$

Como $\phi_n = T_{n+1} - T_n$, segue que $\nabla\phi_n(u_\varepsilon) = \mathbf{1}_{\{n\leq|u_\varepsilon|\leq n+1\}}\nabla u_\varepsilon$ q.t.p. em Q_T. Assim, usando (4.11) e o Lema 3.4.1, podemos deduzir que

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \iint\limits_{\{n\leq|u_\varepsilon|\leq n+1\}} |\nabla u_\varepsilon|^{p(x)}\, dxdt \leq \limsup_{\varepsilon\to 0} \max\left\{\left(\int\limits_{\{|u_{0,\varepsilon}|\geq n\}} |u_{0,\varepsilon}|\, dx + \iint\limits_{\{|u_\varepsilon|\geq n\}} |f_\varepsilon|\, dxdt\right)^{\frac{p^+}{p^-}},\right.$$
$$\left.\left(\int\limits_{\{|u_{0,\varepsilon}|\geq n\}} |u_{0,\varepsilon}|\, dx + \iint\limits_{\{|u_\varepsilon|\geq n\}} |f_\varepsilon|\, dxdt\right)^{\frac{p^-}{p^+}}\right\}$$

$$\leq \max\left\{\left(\int\limits_{\{|u_0|\geq n\}} |u_0|\, dx + \iint\limits_{\{|u|\geq n\}} |f|\, dxdt\right)^{\frac{p^+}{p^-}}, \left(\int\limits_{\{|u_0|\geq n\}} |u_0|\, dx + \iint\limits_{\{|u|\geq n\}} |f|\, dxdt\right)^{\frac{p^-}{p^+}}\right\}.$$

Como $u_0 \in L^1(\Omega)$ e $f \in L^1(Q_T)$, $u \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$, passando o limite na estimativa acima quando $n \to \infty$, o resultado segue. $\square$

Vamos considerar agora um procedimento de regularização, encontrado em [22], introduzido por Landes e empregado por vários autores para resolver problemas não-lineares dependentes do tempo com dados iniciais em L^1 ou com dados iniciais mensuráveis.

Vamos denotar a função regularizada associada a $T_\gamma(u)$ por $(T_\gamma(u))_\mu$, com $\mu > 0$. Ela é definida como a única solução $(T_\gamma(u))_\mu \in V \cap L^\infty(Q_T)$ da equação

$$\partial_t (T_\gamma(u))_\mu + \mu((T_\gamma(u))_\mu - T_\gamma(u)) = 0 \ \text{ em } \ \mathcal{D}'(Q_T),$$

com a condição inicial

$$(T_\gamma(u))_\mu \Big|_{t=0} = w_0^\mu \ \text{ em } \ \Omega,$$

onde w_0^μ é uma sequência de funções tal que

$$w_0^\mu \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \ \ ||w_0^\mu||_{L^\infty(\Omega)} \leq \gamma,$$

$$w_0^\mu \to T_\gamma(u_0) \text{ q.t.p. em } \Omega \text{ quando } \mu \to \infty,$$
$$\frac{1}{\mu}||w_0^\mu||_{W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)} \to 0 \text{ quando } \mu \to \infty.$$

Ainda, segundo [22],

$$\partial_t (T_\gamma(u))_\mu \in V \cap L^\infty(Q_T), \ \ ||(T_\gamma(u))_\mu||_{L^\infty(Q_T)} \leq \gamma,$$

$$(T_\gamma(u))_\mu \to T_\gamma(u) \text{ q.t.p. em } Q_T, \text{ fraca-* em } L^\infty(Q_T) \text{ e fortemente em V, qundo } \mu \to \infty.$$

Além disso, temos:

Lema 4.4.4. *Fixe $\gamma > 0$. Seja $S \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ uma função monótona não-crescente tal que $S(r) = r$ para $|r| \leq \gamma$ e supp $S' \subset [-M, M]$ para algum $M > 0$. Então,*

$$\liminf_{\mu\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^T \int_0^t \int_\Omega \partial_t S(u_\varepsilon)(T_\gamma(u_\varepsilon) - (T_\gamma(u))_\mu) \, dxdsdt \geq 0.$$

Demonstração. Tendo em vista o Lema 4.4.2 e os resultados anteriores, como $u_\varepsilon \to u$ q.t.p. em Q_T, para cada renormalização S, $S(u_\varepsilon) \in V \cap L^\infty(Q_T)$ e $S(u_\varepsilon)_t \in V^* + L^1(Q_T)$. Além disso, sendo S não-crescente tal que $S(r) = r$ para $|r| \leq \gamma$, vem que $T_\gamma(S(u_\varepsilon)) = T_\gamma(u_\varepsilon)$ e assim, $T_\gamma(S(u)) = T_\gamma(u)$ q.t.p. em Q_T. Como uma consequência, $(T_\gamma(S(u)))_\mu = (T_\gamma(u))_\mu$ q.t.p. em Q_T. Agora, considerando a notação

$$v^\varepsilon = S(u_\varepsilon) \ \text{ e } \ v = S(u)$$

e os últimos argumentos, temos que

$$\int_0^T \int_0^t \int_\Omega \partial_t S(u_\varepsilon)(T_\gamma(u_\varepsilon) - (T_\gamma(u))_\mu) \, dxdsdt = \int_0^T \int_0^t \int_\Omega \partial_t v^\varepsilon(T_\gamma(v^\varepsilon) - (T_\gamma(v))_\mu) \, dxdsdt.$$

Pelas propriedades da função regularizada $(T_\gamma(u))_\mu$, $\mu > 0$, sabemos que $\partial_t(T_\gamma(u))_\mu \in V \cap L^\infty(Q_T)$ e como $(T_\gamma(S(u)))_\mu = (T_\gamma(u))_\mu$ q.t.p. em Q_T, devido a notação definida, segue que $\partial_t(T_\gamma(v))_\mu \in V \cap L^\infty(Q_T)$. Então,

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_0^t \int_\Omega \partial_t v^\varepsilon(T_\gamma(v^\varepsilon) - (T_\gamma(v))_\mu) \, dxdsdt \\
&= \int_0^T \int_0^t \int_\Omega \partial_t(v^\varepsilon - (T_\gamma(v))_\mu + (T_\gamma(v))_\mu)(T_\gamma(v^\varepsilon) - (T_\gamma(v))_\mu) \, dxdsdt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^T \int_0^t \int_\Omega \partial_t(v^\varepsilon - (T_\gamma(v))_\mu)(T_\gamma(v^\varepsilon) - (T_\gamma(v))_\mu) \, dxdsdt \\
&+ \int_0^T \int_0^t \int_\Omega \partial_t(T_\gamma(v))_\mu(T_\gamma(v^\varepsilon) - (T_\gamma(v))_\mu) \, dxdsdt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^T \int_0^t \int_\Omega \partial_t(v^\varepsilon - (T_\gamma(v))_\mu)(v^\varepsilon - (T_\gamma(v))_\mu) \, dxdsdt \\
&- \int_0^T \int_0^t \int_\Omega \partial_t(v^\varepsilon - (T_\gamma(v))_\mu)(v^\varepsilon - T_\gamma(v^\varepsilon)) \, dxdsdt \\
&+ \int_0^T \int_0^t \int_\Omega \partial_t(T_\gamma(v))_\mu(v^\varepsilon - (T_\gamma(v))_\mu) \, dxdsdt \\
&- \int_0^T \int_0^t \int_\Omega \partial_t(T_\gamma(v))_\mu(v^\varepsilon - T_\gamma(v^\varepsilon)) \, dxdsdt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^T \int_0^t \int_\Omega \partial_t(v^\varepsilon - (T_\gamma(v))_\mu)(v^\varepsilon - (T_\gamma(v))_\mu) \, dxdsdt \\
&- \int_0^T \int_0^t \int_\Omega \partial_t v^\varepsilon(v^\varepsilon - T_\gamma(v^\varepsilon)) \, dxdsdt \\
&+ \int_0^T \int_0^t \int_\Omega \partial_t(T_\gamma(v))_\mu(v^\varepsilon - T_\gamma(v^\varepsilon)) \, dxdsdt \\
&+ \int_0^T \int_0^t \int_\Omega \partial_t(T_\gamma(v))_\mu(v^\varepsilon - (T_\gamma(v))_\mu) \, dxdsdt \\
&- \int_0^T \int_0^t \int_\Omega \partial_t(T_\gamma(v))_\mu(v^\varepsilon - T_\gamma(v^\varepsilon)) \, dxdsdt
\end{aligned}$$

$$= \int_0^T \int_0^t \int_\Omega \partial_t(v^\varepsilon - (T_\gamma(v))_\mu)(v^\varepsilon - (T_\gamma(v))_\mu)\, dxdsdt$$
$$- \int_0^T \int_0^t \int_\Omega \partial_t v^\varepsilon(v^\varepsilon - T_\gamma(v^\varepsilon))\, dxdsdt$$
$$+ \int_0^T \int_0^t \int_\Omega \partial_t(T_\gamma(v))_\mu(v^\varepsilon - (T_\gamma(v))_\mu)\, dxdsdt.$$

Devido a argumentos básicos de Análise Funcional, temos que é válida a seguinte igualdade

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_\Omega |f(t)|^2 dx\right] = \int_\Omega \frac{d}{dt} f(t) f(t) dx,$$

sendo f uma função em $L^2(\Omega)$, um espaço de Banach real. Dessa forma, nesse contexto, obtemos

$$\int_0^T \int_0^t \int_\Omega \partial_t v^\varepsilon(T_\gamma(v^\varepsilon) - (T_\gamma(v))_\mu)\, dxdsdt = \frac{1}{2}\int_0^T \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |v^\varepsilon - (T_\gamma(v))_\mu|^2\, dxdsdt$$
$$- \frac{1}{2}\int_0^T \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |v^\varepsilon - T_\gamma(v^\varepsilon)|^2\, dxdsdt + \int_0^T \int_0^t \int_\Omega \partial_t(T_\gamma(v))_\mu(v^\varepsilon - (T_\gamma(v))_\mu)\, dxdsdt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t |v^\varepsilon - (T_\gamma(v))_\mu|^2\, dsdxdt - \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t |v^\varepsilon - T_\gamma(v^\varepsilon)|^2\, dsdxdt$$
$$+ \int_0^T \int_0^t \int_\Omega \partial_t(T_\gamma(v))_\mu(v^\varepsilon - (T_\gamma(v))_\mu)\, dxdsdt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega |v^\varepsilon - (T_\gamma(v))_\mu|^2\, dxdt - \frac{T}{2}\int_\Omega |v^\varepsilon - (T_\gamma(v))_\mu|^2\, dx\ (t = 0,\ t \in (0,T))$$
$$- \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega |v^\varepsilon - T_\gamma(v^\varepsilon)|^2\, dxdt + \frac{T}{2}\int_\Omega |v^\varepsilon - T_\gamma(v^\varepsilon)|^2\, dx\ (t = 0,\ t \in (0,T))$$
$$+ \int_0^T \int_0^t \int_\Omega \partial_t(T_\gamma(v))_\mu(v^\varepsilon - (T_\gamma(v))_\mu)\, dxdsdt.$$

Agora, note que a renormalização S além de monótona é limitada, então como $u_\varepsilon \to u$ q.t.p. em Q_T, pela notação definida anteriormente, segue que $S(u_\varepsilon) = v^\varepsilon \to v$ fortemente em $L^2(Q_T)$ e fraca-* em $L^\infty(Q_T)$ quando $\varepsilon \to 0$ (Teorema 2.1.5). Além disso, da condição inicial, temos que

$$v^\varepsilon\Big|_{t=0} = S(u_\varepsilon)\Big|_{t=0} = S(u_{0,\varepsilon}) \text{ q.t.p. em } Q_T,$$

de modo que a convergência forte de $u_{0,\varepsilon}$ para u_0 em $L^1(\Omega)$ implica que

$$v^\varepsilon\Big|_{t=0} = S(u_{0,\varepsilon}) \to S(u_0) \text{ em } L^2(\Omega) \text{ quando } \varepsilon \to 0.$$

Dessa forma, passando o limite quando $\varepsilon \to 0$ na estimativa anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T\int_0^t\int_\Omega \partial_t v^\varepsilon (T_\gamma(v^\varepsilon)-(T_\gamma(v))_\mu)\,dxdsdt\\
&=\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega |v-(T_\gamma(v))_\mu|^2\,dxdt-\frac{T}{2}\int_\Omega |S(u_0)-(T_\gamma(S(u_0)))_\mu|^2\,dx\\
&-\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega |v-T_\gamma(v)|^2\,dxdt+\frac{T}{2}\int_\Omega |S(u_0)-T_\gamma(S(u_0))|^2\,dx\\
&+\int_0^T\int_0^t\int_\Omega \partial_t(T_\gamma(v))_\mu(v-(T_\gamma(v))_\mu)\,dxdsdt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=-\frac{T}{2}\int_\Omega |S(u_0)-(T_\gamma(S(u_0)))_\mu|^2\,dx+\frac{T}{2}\int_\Omega |S(u_0)-T_\gamma(S(u_0))|^2\,dx\\
&+\int_0^T\int_0^t\int_\Omega \partial_t(T_\gamma(v))_\mu(v-(T_\gamma(v))_\mu)\,dxdsdt.
\end{aligned}$$

A fim de tomar o $\liminf$ quando $\mu \to \infty$ na igualdade anterior, vamos usar as propriedades da função regularizada $(T_\gamma(u))_\mu$, $\mu > 0$, e as notações definidas. Assim, visto que $(T_\gamma(v))_\mu = (T_\gamma(S(u)))_\mu = (T_\gamma(u))_\mu$ q.t.p. em Q_T, temos que

$$\partial_t(T_\gamma(v))_\mu+\mu((T_\gamma(v))_\mu-T_\gamma(v))=0 \text{ em } \mathcal{D}'(Q_T),$$

com a condição inicial

$$(T_\gamma(v))_\mu\Big|_{t=0}=w_0^\mu \text{ em } \Omega.$$

Como $w_0^\mu \to T_\gamma(v_0)$ q.t.p. em Ω, segue que $(T_\gamma(S(u_0)))_\mu \to T_\gamma(S(u_0))$ em $L^2(\Omega)$ quando $\mu \to \infty$. Logo, tomando o $\liminf$ quando $\mu \to \infty$ na última estimativa, obtemos

$$\begin{aligned}
&\liminf_{\mu\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T\int_0^t\int_\Omega \partial_t v^\varepsilon (T_\gamma(v^\varepsilon)-(T_\gamma(v))_\mu)\,dxdsdt\\
&=\liminf_{\mu\to\infty}\int_0^T\int_0^t\int_\Omega \partial_t(T_\gamma(v))_\mu(v-(T_\gamma(v))_\mu)\,dxdsdt\\
&=\liminf_{\mu\to\infty}\mu\int_0^T\int_0^t\int_\Omega (T_\gamma(v)-(T_\gamma(v))_\mu)(v-(T_\gamma(v))_\mu)\,dxdsdt.
\end{aligned}$$

Desde que $\mu, \gamma > 0$, $(T_\gamma(v))_\mu \to T_\gamma(v)$ q.t.p. em Q_T e $T_\gamma(v) = T_\gamma(S(u)) = T_\gamma(u)$ quase sempre em Q_T para $|u| \leq \gamma$, segue que

$$\liminf_{\mu\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T\int_0^t\int_\Omega \partial_t v^\varepsilon (T_\gamma(v^\varepsilon)-(T_\gamma(v))_\mu)\,dxdsdt \geq 0.$$

$\square$

Para a prova do Teorema 4.1.1, precisaremos também do resultado seguinte.

Proposição 4.4.1. *Para cada truncação $\gamma > 0$ temos*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T\int_\Omega(|\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)|^{p(x)-2}\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)-|\nabla T_\gamma(u)|^{p(x)-2}\nabla T_\gamma(u))(\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)-\nabla T_\gamma(u))dxdt=0, \tag{4.13}$$

$$\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)\to\nabla T_\gamma(u)\ \textit{fortemente em}\ (L^{p(\cdot)}(Q_T))^N, \tag{4.14}$$

e

$$T_\gamma(u_\varepsilon)\to T_\gamma(u)\ \textit{fortemente em}\ L^{p^-}(0,T;W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)). \tag{4.15}$$

Demonstração. Prova de (4.13): Como $\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)\to\nabla T_\gamma(u)$ fracamente em $(L^{p(\cdot)}(Q_T))^N$ quando $\varepsilon\to 0$ e $\nabla(T_\gamma(u))_\mu\to\nabla T_\gamma(u)$ fortemente em $(L^{p(\cdot)}(Q_T))^N$ quando $\mu\to\infty$, é suficiente provar que

$$\lim_{\mu\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T\int_\Omega(|\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)|^{p(x)-2}\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)-|\nabla(T_\gamma(u))_\mu|^{p(x)-2}\nabla(T_\gamma(u))_\mu)$$
$$.\ (\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)-\nabla(T_\gamma(u))_\mu)\,dxdt=0.$$

Para isso, vamos tomar a equação no sentido das distribuições usando a renormalização $S=S_n$ e $\varphi=S_n'(u_\varepsilon)V_{\varepsilon,\mu}$ como função teste, onde $V_{\varepsilon,\mu}=T_\gamma(u_\varepsilon)-(T_\gamma(u))_\mu$. Assim, temos que

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^t\int_\Omega\partial_t S_n(u_\varepsilon)V_{\varepsilon,\mu}\,dxdsdt+&\int_0^T\int_0^t\int_\Omega S_n'(u_\varepsilon)|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)-2}\nabla u_\varepsilon\nabla V_{\varepsilon,\mu}\,dxdsdt\\ &+\int_0^T\int_0^t\int_\Omega S_n''(u_\varepsilon)|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)}V_{\varepsilon,\mu}\,dxdsdt\\ &=\int_0^T\int_0^t\int_\Omega f_\varepsilon S_n'(u_\varepsilon)V_{\varepsilon,\mu}\,dxdsdt.\end{aligned}$$

O objetivo é passar o limite na equação acima quando $\varepsilon\to 0$, $\mu\to\infty$, sucessivamente, e então quando $n\to\infty$. Usando as definições de S_n e $V_{\varepsilon,\mu}$, e o Lema 4.4.4 com $S=S_n$ podemos deduzir que para cada $n\geq\gamma$

$$\liminf_{\mu\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T\int_0^t\int_\Omega\partial_t S_n(u_\varepsilon)V_{\varepsilon,\mu}\,dx\,ds\,dt\geq 0.$$

Pelo Lema 4.4.2 e pela definição de $V_{\varepsilon,\mu}$, deduzimos para cada $\mu>0$ que

$$V_{\varepsilon,\mu}\to T_\gamma(u)-(T_\gamma(u))_\mu \text{ fracamente em V quando } \varepsilon\to 0,$$

$$||V_{\varepsilon,\mu}||_{L^\infty(Q_T)} \leq 2\gamma \text{ para cada } \varepsilon > 0,$$

$$V_{\varepsilon,\mu} \to T_\gamma(u) - (T_\gamma(u))_\mu \text{ q.t.p. em } Q_T \text{ e fraca-* em } L^\infty(Q_T) \text{ quando } \varepsilon \to 0. \tag{4.16}$$

Agora, como supp $S'' \subset [-(n+1), -n] \cup [n, n+1]$, temos para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $\mu > 0$ que

$$\begin{aligned}\left| \int_0^T \int_0^t \int_\Omega S_n''(u_\varepsilon)|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)} V_{\varepsilon,\mu} \, dxdsdt \right| &\leq \int_0^T \int_0^t \int_\Omega |S_n''(u_\varepsilon)||\nabla u_\varepsilon|^{p(x)} |V_{\varepsilon,\mu}| \, dxdsdt \\ &\leq T||S_n''(u_\varepsilon)||_{L^\infty(\mathbb{R})}||V_{\varepsilon,\mu}||_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ &\cdot \iint_{\{n \leq |u_\varepsilon| \leq n+1\}} |\nabla u_\varepsilon|^{p(x)} \, dxdt.\end{aligned}$$

Assim, considerando (4.16), obtemos

$$\begin{aligned}&\limsup_{\mu\to\infty} \limsup_{\varepsilon\to 0} \left| \int_0^T \int_0^t \int_\Omega S_n''(u_\varepsilon)|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)} V_{\varepsilon,\mu} \, dxdsdt \right| \\ &\leq \limsup_{\mu\to\infty} \limsup_{\varepsilon\to 0} \; T||S_n''(u_\varepsilon)||_{L^\infty(\mathbb{R})}||V_{\varepsilon,\mu}||_{L^\infty(\mathbb{R})} \iint_{\{n \leq |u_\varepsilon| \leq n+1\}} |\nabla u_\varepsilon|^{p(x)} \, dxdt \\ &\leq c \limsup_{\varepsilon\to 0} \iint_{\{n \leq |u_\varepsilon| \leq n+1\}} |\nabla u_\varepsilon|^{p(x)} \, dxdt\end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ e $c > 0$ uma constante independente de n. Logo, pelo Lema 4.4.3 e pela última estimativa, segue que

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \limsup_{\mu\to\infty} \limsup_{\varepsilon\to 0} \left| \int_0^T \int_0^t \int_\Omega S_n''(u_\varepsilon)|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)} V_{\varepsilon,\mu} \, dxdsdt \right| \\ &\leq c \lim_{n\to\infty} \limsup_{\varepsilon\to 0} \iint_{\{n \leq |u_\varepsilon| \leq n+1\}} |\nabla u_\varepsilon|^{p(x)} \, dxdt = 0.\end{aligned}$$

Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema 2.1.9) e (4.16), vem que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^T \int_0^t \int_\Omega f_\varepsilon S_n'(u_\varepsilon) V_{\varepsilon,\mu} \, dxdsdt = \int_0^T \int_0^t \int_\Omega f S_n'(u)(T_\gamma(u) - (T_\gamma(u))_\mu) \, dxdsdt$$

para cada $\mu > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Usando as propriedades de convergência de $(T_\gamma(u))_\mu$ quando passamos o limite com $\mu \to \infty$ e que $fS_n'(u) \in L^1(Q_T)$, para cada n fixado, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{\mu\to\infty} \limsup_{\varepsilon\to 0} \int_0^T \int_0^t \int_\Omega f_\varepsilon S_n'(u_\varepsilon) V_{\varepsilon,\mu} \, dxdsdt = 0.$$

Assim, tomando o $\limsup$ quando $\varepsilon \to 0$, $\mu \to \infty$, respectivamente, e o limite quando $n \to \infty$ em todos os termos da estimativa principal, para cada $\gamma > 0$, segue que

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \limsup_{\mu\to\infty} \limsup_{\varepsilon\to 0} \int_0^T \int_0^t \int_\Omega \partial_t S_n(u_\varepsilon) V_{\varepsilon,\mu}\, dxdsdt \\
&+ \lim_{n\to\infty} \limsup_{\mu\to\infty} \limsup_{\varepsilon\to 0} \int_0^T \int_0^t \int_\Omega S_n'(u_\varepsilon)|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)-2}\nabla u_\varepsilon \nabla V_{\varepsilon,\mu}\, dxdsdt \\
&+ \lim_{n\to\infty} \limsup_{\mu\to\infty} \limsup_{\varepsilon\to 0} \int_0^T \int_0^t \int_\Omega S_n''(u_\varepsilon)|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)} V_{\varepsilon,\mu}\, dxdsdt \\
&= \lim_{n\to\infty} \limsup_{\mu\to\infty} \limsup_{\varepsilon\to 0} \int_0^T \int_0^t \int_\Omega f_\varepsilon S_n'(u_\varepsilon) V_{\varepsilon,\mu}\, dxdsdt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \limsup_{\mu\to\infty} \limsup_{\varepsilon\to 0} \int_0^T \int_0^t \int_\Omega \partial_t S_n(u_\varepsilon) V_{\varepsilon,\mu}\, dxdsdt \\
&+ \lim_{n\to\infty} \limsup_{\mu\to\infty} \limsup_{\varepsilon\to 0} \int_0^T \int_0^t \int_\Omega S_n'(u_\varepsilon)|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)-2}\nabla u_\varepsilon \nabla V_{\varepsilon,\mu}\, dxdsdt = 0.
\end{aligned}$$

Considerando o Lema 4.4.4, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{\mu\to\infty} \limsup_{\varepsilon\to 0} \int_0^T \int_0^t \int_\Omega S_n'(u_\varepsilon)|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)-2}\nabla u_\varepsilon \nabla V_{\varepsilon,\mu}\, dxdsdt \leq 0.$$

Pela definição de S_n e T_γ, temos para cada $n \geq \gamma$ que

$$S_n'(u_\varepsilon)|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)-2}\nabla u_\varepsilon \nabla T_\gamma(u_\varepsilon) = |\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)|^{p(x)-2}\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)\nabla T_\gamma(u_\varepsilon). \tag{4.17}$$

Como uma consequência, resulta que

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{\mu\to\infty} \limsup_{\varepsilon\to 0} \int_0^T \int_0^t \int_\Omega (|\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)|^{p(x)-2}\nabla T_\gamma(u_\varepsilon))(\nabla T_\gamma(u_\varepsilon) - \nabla(T_\gamma(u))_\mu)\, dxdsdt \leq 0.$$

Pelo Lema (2.1.1), temos que

$$\begin{aligned}
\limsup_{\mu\to\infty} \limsup_{\varepsilon\to 0} \int_0^T \int_\Omega &(|\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)|^{p(x)-2}\nabla T_\gamma(u_\varepsilon) - |\nabla(T_\gamma(u))_\mu|^{p(x)-2}\nabla(T_\gamma(u))_\mu) \\
&. (\nabla T_\gamma(u_\varepsilon) - \nabla(T_\gamma(u))_\mu)\, dxdt \geq 0
\end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned}
\limsup_{\mu\to\infty} \limsup_{\varepsilon\to 0} \int_0^T \int_\Omega &(|\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)|^{p(x)-2}\nabla T_\gamma(u_\varepsilon) - |\nabla(T_\gamma(u))_\mu|^{p(x)-2}\nabla(T_\gamma(u))_\mu) \\
&. (\nabla T_\gamma(u_\varepsilon) - \nabla(T_\gamma(u))_\mu)\, dxdt = 0
\end{aligned}$$

o que implica

$$\lim_{\mu\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T\int_\Omega(|\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)|^{p(x)-2}\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)-|\nabla(T_\gamma(u))_\mu|^{p(x)-2}\nabla(T_\gamma(u))_\mu)$$

$$.\,(\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)-\nabla(T_\gamma(u))_\mu)\,dxdt=0.$$

Prova de (4.14): Considere as desigualdades como no Lema 2.1.1. Então, para $p \geq 2$ temos que

$$2^{2-p^+}\int_0^T\int_{\{x\in\Omega:p(x)\geq 2\}}|\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)-\nabla T_\gamma(u)|^{p(x)}\,dxdt$$

$$\leq\int_0^T\int_{\{x\in\Omega:p(x)\geq 2\}}(\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)|\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)|^{p(x)-2}-\nabla T_\gamma(u)|\nabla T_\gamma(u)|^{p(x)-2})$$

$$.\,(\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)-\nabla T_\gamma(u))\,dxdt$$

$$\leq\int_0^T\int_\Omega(\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)|\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)|^{p(x)-2}-\nabla T_\gamma(u)|\nabla T_\gamma(u)|^{p(x)-2})(\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)-\nabla T_\gamma(u))dxdt$$

$$:=E(\varepsilon).$$

Assumindo (4.13) temos que $E(\varepsilon)\to 0$ quando $\varepsilon\to 0$ e então $\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)\to\nabla T_\gamma(u)$ fortemente em $(L^{p(\cdot)}(Q_T))^N$. Agora, para $1<p(x)<2$, usando a desigualdade de Hölder, temos que

$$\int_0^T\int_{\{x\in\Omega:1<p(x)<2\}}|\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)-\nabla T_\gamma(u)|^{p(x)}dxdt$$

$$\leq\int_0^T\int_{\{x\in\Omega:1<p(x)<2\}}\frac{|\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)-\nabla T_\gamma(u)|^{p(x)}}{(|\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)|+|\nabla T_\gamma(u)|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}}}(|\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)|+|\nabla T_\gamma(u)|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}}dxdt$$

$$\leq 2\int_0^T\left|\left|\frac{|\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)-\nabla T_\gamma(u)|^{p(x)}}{(|\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)|+|\nabla T_\gamma(u)|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}}}\right|\right|_{L^{\frac{2}{p(x)}}(\Omega)}$$

$$.\,||(|\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)|+|\nabla T_\gamma(u)|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}}||_{L^{\frac{2}{2-p(x)}}(\Omega)}dt.$$

E usando o Lema 3.4.1 e o Lema 2.1.1, obtemos

$$\int_0^T \int_{\{x\in\Omega:1<p(x)<2\}} |\nabla T_\gamma(u_\varepsilon) - \nabla T_\gamma(u)|^{p(x)} dxdt$$

$$\leq 2\max\left\{\left(\int_0^T \int_\Omega \frac{|\nabla T_\gamma(u_\varepsilon) - \nabla T_\gamma(u)|^2}{(|\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)| + |\nabla T_\gamma(u)|)^{2-p(x)}}\, dxdt\right)^{\frac{p^-}{2}},\right.$$

$$\left.\left(\int_0^T \int_\Omega \frac{|\nabla T_\gamma(u_\varepsilon) - \nabla T_\gamma(u)|^2}{(|\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)| + |\nabla T_\gamma(u)|)^{2-p(x)}}\, dxdt\right)^{\frac{p^+}{2}}\right\}$$

$$.\ \max\left\{\left(\int_0^T \int_\Omega (|\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)| + |\nabla T_\gamma(u)|)^{p(x)} dxdt\right)^{\frac{2-p^+}{2}},\right.$$

$$\left.\left(\int_0^T \int_\Omega (|\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)| + |\nabla T_\gamma(u)|)^{p(x)} dxdt\right)^{\frac{2-p^-}{2}}\right\}$$

$$\leq 2\max\{(E(\varepsilon))^{\frac{p^-}{2}}(p^- - 1)^{-\frac{p^-}{2}}, (E(\varepsilon))^{\frac{p^+}{2}}(p^- - 1)^{-\frac{p^+}{2}}\}$$

$$.\ \max\left\{\left(\int_0^T \int_\Omega (|\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)| + |\nabla T_\gamma(u)|)^{p(x)} dxdt\right)^{\frac{2-p^+}{2}},\right.$$

$$\left.\left(\int_0^T \int_\Omega (|\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)| + |\nabla T_\gamma(u)|)^{p(x)} dxdt\right)^{\frac{2-p^-}{2}}\right\}.$$

Como $\nabla T_\gamma(u_\varepsilon)$ é limitado em $L^{p(\cdot)}(Q_T)$, usando (4.13), obtemos que o lado direito da desigualdade vai a zero quando $\varepsilon \to 0$. Logo,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^T \int_{\{x\in\Omega:1<p(x)<2\}} |\nabla T_\gamma(u_\varepsilon) - \nabla T_\gamma(u)|^{p(x)} dxdt = 0,$$

ou seja, para $1 < p(x) < 2$, $\nabla T_\gamma(u_\varepsilon) \to \nabla T_\gamma(u)$ fortemente em $(L^{p(\cdot)}(Q_T))^N$.

Prova de (4.15): Como $u_\varepsilon \to u$ em $L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ e $L^{p(\cdot)}(Q_T) \hookrightarrow L^{p^-}(0,T;L^{p(\cdot)}(\Omega))$ continuamente, é claro que se temos (4.14), (4.15) é imediato. □

4.5 Conclusão da Prova do Teorema 4.1.1

Como a regularidade da solução renormalizada u do Teorema 4.1.1 já foi satisfeita, nesta seção concluiremos a prova do Teorema 4.1.1 exibindo a existência de uma solução renormalizada u do problema parabólico (4.1).

Seja $S \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que supp $S' \subset [-M, M]$ para algum $M > 0$. Como u é solução fraca de $(CP)(u_0, f)$ para dados suaves, pelo Lema 4.2.3, u_ε é solução renormalizada de (4.1) para cada $\varepsilon > 0$. Assim, u_ε satisfaz a equação

$$\partial_t S(u_\varepsilon) - div(S'(u_\varepsilon)|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)-2}\nabla u_\varepsilon) + S''(u_\varepsilon)|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)} = f_\varepsilon S'(u_\varepsilon) \text{ em } \mathcal{D}'(Q_T). \quad (4.18)$$

Assim, vamos passar o limite quando $\varepsilon \to 0$ (no sentido das distribuições) em cada termo desta equação. Para o primeiro e o último termo, como $u_\varepsilon \to u$ em $C([0,T]; L^1(\Omega))$ e $f_\varepsilon \to f$ em $L^1(Q_T)$ quando $\varepsilon \to 0$, obtemos diretamente as convergências necessárias. Agora, como

$$S'(u_\varepsilon)|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)-2}\nabla u_\varepsilon = S'(u_\varepsilon)|\nabla T_M(u_\varepsilon)|^{p(x)-2}\nabla T_M(u_\varepsilon),$$

$u_\varepsilon \to u$ em $C([0,T]; L^1(\Omega))$ e $\nabla T_M(u_\varepsilon) \to \nabla T_M(u)$ fortemente em $(L^{p(\cdot)}(Q_T))^N$ quando $\varepsilon \to 0$, passando o limite no segundo termo de (4.18), temos que

$$S'(u_\varepsilon)|\nabla T_M(u_\varepsilon)|^{p(x)-2}\nabla T_M(u_\varepsilon) \to S'(u)|\nabla T_M(u)|^{p(x)-2}\nabla T_M(u) \text{ fortemente em } L^{p'(\cdot)}(Q_T).$$

Equivalentemente,

$$S'(u)|\nabla T_M(u)|^{p(x)-2}\nabla T_M(u) = S'(u)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u.$$

Considerando o terceiro termo de (4.18), como supp $S'' \subset [-M, M]$ temos claramente que

$$S''(u_\varepsilon)|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)} = S''(u_\varepsilon)|\nabla T_M(u_\varepsilon)|^{p(x)} \text{ q.t.p. em } Q_T.$$

Assim, usando que $S''(u_\varepsilon) \to S''(u)$ q.t.p. em Q_T e $\nabla T_M(u_\varepsilon) \to \nabla T_M(u)$ fortemente em $(L^{p(\cdot)}(Q_T))^N$ quando $\varepsilon \to 0$, sabendo que S'' é limitada, podemos deduzir que

$$S''(u_\varepsilon)|\nabla T_M(u_\varepsilon)|^{p(x)} \to S''(u)|\nabla T_M(u)|^{p(x)} \text{ fortemente em } L^1(Q_T).$$

Equivalentemente,

$$S''(u)|\nabla T_M(u)|^{p(x)} = S''(u)|\nabla u|^{p(x)}.$$

Logo, u sendo o limite uniforme das funções u_ε satisfaz a equação no sentido das distribuições, sendo esta a condição (iv) da definição de solução renormalizada.

No que se trata da condição inicial (condição (v)), temos

$$S(u_\varepsilon)\Big|_{t=0} = S(u_{0,\varepsilon}) \to S(u_0) \text{ em } L^1(\Omega) \text{ quando } \varepsilon \to 0.$$

O restante das condições para ser uma solução renormalizada seguem trivialmente se considerarmos a Proposição 4.3.1 e o Lema 4.4.3. Assim, a prova de existência da solução renormalizada u para o problema de valor inicial (4.1) está completa.

4.6 Unicidade da Solução Renormalizada

Nesta seção mostraremos que a solução renormalizada u do problema parabólico (4.1), existente pela seção anterior, é única.

Teorema 4.6.1. *Seja u uma solução renormalizada do problema (4.1) para dados iniciais $(u_0, f) \in L^1(\Omega) \times L^1(0, T; L^1(\Omega))$. Então, u é uma solução integral e assim a única solução mild do problema da Cauchy $(CP)(u_0, f)$. Em particular, a solução renormalizada de (4.1) é única.*

Demonstração. Seja $(v, w) \in A \cap (L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega))$, isto é, $v \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $w \in L^\infty(\Omega)$ e

$$-div(|\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v) = w \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{4.19}$$

Seja $0 < s < t < T$ e $k \in \mathbb{N}$ com $\frac{1}{k} < \min\{s, T - t\}$. Considere também $\sigma_k \in W^{1,\infty}(0, T)$ como uma interpolação afim por partes da função que é constante igual a 1 em (s, t) e igual a 0 em $\left[0, \frac{s-1}{k}\right] \cup \left[\frac{t+1}{k}, T\right]$. Agora, considere a equação no sentido das distribuições, tomando $S = S_n$ e escolhendo $\varphi = \frac{1}{\gamma}T_\gamma(u - v)\sigma_k \in V \cap L^\infty(Q_T)$, $\gamma > 0$, como função teste. Então, temos que

$$\begin{aligned}
&\langle \partial_t S_n(u), \frac{1}{\gamma}T_\gamma(u - v)\sigma_k\rangle_{V^*+L^1(Q_T), V\cap L^\infty(Q_T)} \\
&+ \frac{1}{\gamma}\int_0^T\int_\Omega \sigma_k S_n'(u)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla T_\gamma(u - v)\, dxd\tau \\
&+ \frac{1}{\gamma}\int_0^T\int_\Omega \sigma_k S_n''(u)|\nabla u|^{p(x)} T_\gamma(u - v)\, dxd\tau \\
&= \frac{1}{\gamma}\int_0^T\int_\Omega \sigma_k f S_n'(u) T_\gamma(u - v)\, dxd\tau.
\end{aligned}$$

Aplicando a fórmula de integração por partes dada no Lema 4.2.1 para o termo de evolução, escolhendo $h(x) = \frac{1}{\gamma}T_\gamma(u-v)$, para todo x, e $\xi = \sigma_k$ e passando o limite quando $n \to \infty$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\langle \partial_t S_n(u), \frac{1}{\gamma}T_\gamma(u-v)\sigma_k\rangle_{V^*+L^1(Q_T),V\cap L^\infty(Q_T)}\\
&= -\int_0^T\int_\Omega (\sigma_k)_\tau \left[\int_{u_0}^{u(\tau)} S_n'(r)\frac{1}{\gamma}T_\gamma(r-v)dr\right] dxd\tau
\end{aligned}$$

$$\to -\int_0^T\int_\Omega (\sigma_k)_\tau \left[\int_{u_0}^{u(\tau)} \frac{1}{\gamma}T_\gamma(r-v)dr\right] dxd\tau \text{ quando } n \to \infty,$$

devido ao Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, onde $S_n'(u) \to 1$ q.t.p. em Q_T quando $n \to \infty$ e $||S_n'||_{L^\infty(Q_T)} \leq ||s||_{L^\infty(Q_T)} = 1$. Usando os mesmos argumentos, tomando o limite quando $n \to \infty$ no segundo e no último termo da equação integral, obtemos, respectivamente,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\gamma}\int_0^T\int_\Omega \sigma_k S_n'(u)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla T_\gamma(u-v)\,dxd\tau\\
&= \frac{1}{\gamma}\int_0^T\int_\Omega \sigma_k |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla T_\gamma(u-v)\,dxd\tau
\end{aligned}$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\gamma}\int_0^T\int_\Omega \sigma_k f S_n'(u)T_\gamma(u-v)\,dxd\tau = \frac{1}{\gamma}\int_0^T\int_\Omega \sigma_k f T_\gamma(u-v)\,dxd\tau.$$

Lembrando que $|T_\gamma(u-v)| \leq \gamma$, supp $S_n'' \subset [-(n+1), -n] \cup [n, n+1]$ e que $|S_n''(u)| \leq ||S_n''||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq ||s'||_{L^\infty(\mathbb{R})} = c$ nesse suporte, usando que o terceiro termo da equação obedece à condição (iii) da definição de solução renormalizada, quando $n \to \infty$, segue que

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^T\int_\Omega \sigma_k S_n''(u)|\nabla u|^{p(x)}\frac{1}{\gamma}T_\gamma(u-v)\,dxd\tau\right| &\leq \frac{1}{\gamma}\int_0^T\int_\Omega |\sigma_k||S_n''(u)||\nabla u|^{p(x)}|T_\gamma(u-v)|\,dxd\tau\\
&\leq c\iint_{\{n\leq|u|\leq n+1\}} |\nabla u|^{p(x)}\,dxd\tau \to 0.
\end{aligned}$$

Logo, obtemos

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T\int_\Omega (\sigma_k)_\tau \left[\int_{u_0}^{u(\tau)} \frac{1}{\gamma}T_\gamma(r-v)dr\right] dxd\tau\\
&+\frac{1}{\gamma}\int_0^T\int_\Omega \sigma_k |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla T_\gamma(u-v)\,dxd\tau\\
&= \frac{1}{\gamma}\int_0^T\int_\Omega \sigma_k f T_\gamma(u-v)\,dxd\tau.
\end{aligned}$$

Usando agora (4.19), escolhendo $\varphi = \dfrac{1}{\gamma}T_\gamma(u(t)-v)\sigma_k$, $\gamma > 0$, como função teste e integrando em $(0,T)$ em seguida, temos

$$\int_\Omega -div(|\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v)\frac{1}{\gamma}T_\gamma(u(t)-v)\sigma_k\,dx = \int_\Omega w\frac{1}{\gamma}T_\gamma(u(t)-v)\sigma_k\,dx$$

$$\frac{1}{\gamma}\int_0^T\int_\Omega -div(|\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v)T_\gamma(u-v)\sigma_k\,dxd\tau = \frac{1}{\gamma}\int_0^T\int_\Omega wT_\gamma(u-v)\sigma_k\,dxd\tau$$

$$\frac{1}{\gamma}\int_0^T\int_\Omega \sigma_k|\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v\nabla T_\gamma(u-v)\,dxd\tau = \frac{1}{\gamma}\int_0^T\int_\Omega wT_\gamma(u-v)\sigma_k\,dxd\tau.$$

Subtraindo a equação acima da obtida anteriormente (tomada no sentido das distribuições), obtemos

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T\int_\Omega(\sigma_k)_\tau\left[\int_{u_0}^{u(\tau)}\frac{1}{\gamma}T_\gamma(r-v)dr\right]dxd\tau\\
&+\frac{1}{\gamma}\int_0^T\int_\Omega\sigma_k|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla T_\gamma(u-v)\,dxd\tau - \frac{1}{\gamma}\int_0^T\int_\Omega\sigma_k|\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v\nabla T_\gamma(u-v)\,dxd\tau\\
&=\frac{1}{\gamma}\int_0^T\int_\Omega\sigma_k fT_\gamma(u-v)\,dxd\tau - \frac{1}{\gamma}\int_0^T\int_\Omega wT_\gamma(u-v)\sigma_k\,dxd\tau
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T\int_\Omega(\sigma_k)_\tau\left[\int_{u_0}^{u(\tau)}\frac{1}{\gamma}T_\gamma(r-v)dr\right]dxd\tau\\
&+\frac{1}{\gamma}\iint_{\{|u-v|<\gamma\}}\sigma_k(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u-|\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v)\nabla(u-v)\,dxd\tau\\
&=\frac{1}{\gamma}\int_0^T\int_\Omega\sigma_k(f-w)T_\gamma(u-v)\,dxd\tau.
\end{aligned}$$

Obviamente, o segundo termo da equação acima é não-negativo, levando em conta o Lema 2.1.1, que $\gamma > 0$ e σ_k como foi definida. Considerando o primeiro termo, vem que

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T\int_\Omega(\sigma_k)_\tau\left[\int_{u_0(x)}^{u(\tau,x)}\frac{1}{\gamma}T_\gamma(r-v(x))dr\right]dxd\tau\\
&=-\int_0^T\int_\Omega(\sigma_k)_\tau\left[\int_{u_0(x)-v(x)}^{u(\tau,x)-v(x)}\frac{1}{\gamma}T_\gamma(w)dw\right]dxd\tau\\
&=-\int_0^T\int_\Omega(\sigma_k)_\tau\left[\int_{u_0(x)-v(x)}^{0}\frac{1}{\gamma}T_\gamma(w)dw+\int_0^{u(\tau,x)-v(x)}\frac{1}{\gamma}T_\gamma(w)dw\right]dxd\tau.
\end{aligned}$$

Assim, quando $u_0(x) - v(x) < 0$, temos

$$-\int_0^T \int_\Omega (\sigma_k)_\tau \left[-\int_{u_0(x)-v(x)}^{-\gamma} dw + \frac{1}{\gamma}\int_{-\gamma}^{0} w dw + \int_0^{u(\tau,x)-v(x)} \frac{1}{\gamma} T_\gamma(w) dw \right] dx d\tau$$

$$-\int_0^T \int_\Omega (\sigma_k)_\tau \left[-(-\gamma - (u_0(x) - v(x))) + \frac{1}{\gamma}\left[\frac{w^2}{2}\right]_{-\gamma}^{0} + \int_0^{u(\tau,x)-v(x)} \frac{1}{\gamma} T_\gamma(w) dw \right] dx d\tau$$

$$-\int_0^T \int_\Omega (\sigma_k)_\tau \left[\gamma + (u_0(x) - v(x)) - \frac{\gamma}{2} + \int_0^{u(\tau,x)-v(x)} \frac{1}{\gamma} T_\gamma(w) dw \right] dx d\tau$$

$$-\int_0^T \int_\Omega (\sigma_k)_\tau \left[-(-(u_0(x) - v(x))) + \frac{\gamma}{2} + \int_0^{u(\tau,x)-v(x)} \frac{1}{\gamma} T_\gamma(w) dw \right] dx d\tau$$

$$-\int_0^T \int_\Omega (\sigma_k)_\tau \left[-|u_0(x) - v(x)| + \frac{\gamma}{2} + \int_0^{u(\tau,x)-v(x)} \frac{1}{\gamma} T_\gamma(w) dw \right] dx d\tau.$$

E quando $u_0(x) - v(x) > 0$, temos

$$-\int_0^T \int_\Omega (\sigma_k)_\tau \left[-\int_0^{u_0(x)-v(x)} \frac{1}{\gamma} T_\gamma(w) dw + \int_0^{u(\tau,x)-v(x)} \frac{1}{\gamma} T_\gamma(w) dw \right] dx d\tau$$

$$-\int_0^T \int_\Omega (\sigma_k)_\tau \left[-\left[\frac{1}{\gamma}\int_0^{\gamma} w dw + \int_\gamma^{u_0(x)-v(x)} dw\right] + \int_0^{u(\tau,x)-v(x)} \frac{1}{\gamma} T_\gamma(w) dw \right] dx d\tau$$

$$-\int_0^T \int_\Omega (\sigma_k)_\tau \left[-\left[\frac{\gamma}{2} + (u_0(x) - v(x)) - \gamma\right] + \int_0^{u(\tau,x)-v(x)} \frac{1}{\gamma} T_\gamma(w) dw \right] dx d\tau$$

$$-\int_0^T \int_\Omega (\sigma_k)_\tau \left[-|u_0(x) - v(x)| + \frac{\gamma}{2} + \int_0^{u(\tau,x)-v(x)} \frac{1}{\gamma} T_\gamma(w) dw \right] dx d\tau$$

implicando que

$$\int_{u_0(x)-v(x)}^{0} \frac{1}{\gamma} T_\gamma(w) dw = -|u_0(x) - v(x)| + \frac{\gamma}{2}.$$

Analogamente, podemos obter que

$$\int_0^{u(\tau,x)-v(x)} \frac{1}{\gamma} T_\gamma(w) dw = |u(\tau,x) - v(x)| - \frac{\gamma}{2}.$$

Então, usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, fazendo $\gamma \to 0$ e em seguida $k \to \infty$, temos

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T \int_\Omega (\sigma_k)_\tau \left[\int_{u_0}^{u(\tau)} \frac{1}{\gamma} T_\gamma(r-v)dr \right] dxd\tau \\
&\to -\int_0^T \int_\Omega (\sigma_k)_\tau |u(\tau,x)-v(x)| - |u_0(x)-v(x)|\, dxd\tau \;\text{ quando }\; \gamma \to 0 \\
&= -\int_0^T (\sigma_k)_\tau (||u(\tau)-v||_{L^1(\Omega)} - ||u_0-v||_{L^1(\Omega)})\, d\tau \\
&= -\int_{s-\frac{1}{k}}^{s} k(||u(\tau)-v||_{L^1(\Omega)} - ||u_0-v||_{L^1(\Omega)})\, d\tau \\
&+ \int_t^{t+\frac{1}{k}} k(||u(\tau)-v||_{L^1(\Omega)} - ||u_0-v||_{L^1(\Omega)})\, d\tau
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\to -(||u(s)-v||_{L^1(\Omega)} - ||u_0-v||_{L^1(\Omega)}) + (||u(t)-v||_{L^1(\Omega)} - ||u_0-v||_{L^1(\Omega)}) \\
&\text{quando }\; k \to \infty \\
&= ||u(t)-v||_{L^1(\Omega)} - ||u(s)-v||_{L^1(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Por fim, para o último termo da equação, fazendo $k \to \infty$, temos

$$\frac{1}{\gamma}\int_0^T \int_\Omega \sigma_k (f-w) T_\gamma(u-v)\, dxd\tau \to \frac{1}{\gamma}\int_s^t \int_\Omega (f-w) T_\gamma(u-v)\, dxd\tau.$$

Agora, note que

$$\frac{1}{\gamma} T_\gamma(u-v) = \begin{cases} 1, & \text{se } \quad u(x)-v(x) > 0, \\ 0, & \text{se } \quad u(x)-v(x) = 0, \\ -1, & \text{se } \quad u(x)-v(x) < 0, \end{cases}$$

portanto, quando $\gamma \to 0$, $\frac{1}{\gamma}T_\gamma(u-v) \to sgn(u-v)$ para todo $x \in \Omega$. Assim, fazendo $\gamma \to 0$ no último termo, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\gamma}\int_s^t \int_\Omega (f-w) T_\gamma(u-v)\, dxd\tau &\to \int_s^t \int_\Omega (f-w) sgn(u-v)\, dxd\tau \\
&\leq \int_s^t [u(\tau)-v, f(\tau)-w]_+\, d\tau.
\end{aligned}
$$

Combinando as estimativas, vem que

$$||u(t)-v||_{L^1(\Omega)} - ||u(s)-v||_{L^1(\Omega)} \leq \int_s^t [u(\tau)-v, f(\tau)-w]_+\, d\tau$$

para $0 \leq s \leq t \leq T$. Logo, como A é o fecho de $A \cap (L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega))$ em $L^1(\Omega) \times L^1(\Omega)$, existem sequências de funções v_n e w_n tal que, através o Lema de Fatou ocorrem as convergências, $||u(t) - v_n||_{L^1(\Omega)} \to ||u(t) - v||_{L^1(\Omega)}$ e $||u(s) - v_n||_{L^1(\Omega)} \to ||u(s) - v||_{L^1(\Omega)}$ em $L^1(\Omega)$. Também, como o produto semi-interno superior normalizado é contínuo, a última desigualdade se mantém para toda $(v, w) \in A$. Portanto, pela Definição 3.3.4, u é solução integral de $(CP)(u_0, f)$ e pelos Teoremas 3.3.4 e 3.3.3, u é a única solução integral e a única solução mild de $(CP)(u_0, f)$. Consequentemente, devido a unicidade da solução mild, concluímos que u é a única solução renormalizada de $(CP)(u_0, f)$. $\square$

Como A é m-acretivo, vale o princípio da contração para soluções mild u, v. Considerando o resultado acima, o mesmo vale para soluções renormalizadas u, v.

Corolário 4.6.1. *Sejam u, v soluções renormalizadas de (4.1) correspondentes aos dados iniciais (u_0, f), $(v_0, g) \in L^1(\Omega) \times L^1(0, T; L^1(\Omega))$, respectivamente. Então,*

$$||(u(t) - v(t))^+||_{L^1(\Omega)} \leq ||(u_0 - v_0)^+||_{L^1(\Omega)} + \int_0^t ||(f(s) - g(s))^+||_{L^1(\Omega)}\, ds$$

para cada $0 \leq t \leq T$.

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R. A.; FOURNIER, J. J. F. *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 2^{rd} edition, 2003.

[2] ALT, H. W.; LUCKHAUS, S. *Quasi-Linear Elliptic-Parabolic Differential Equations*, Math. Z. **183** (1983) 311-341.

[3] ALVES, C. O. et. al. *The Cauchy problem for a class of parabolic equations in weighted variable Sobolev spaces: existence and asymptotic behavior*, J. Math. Anal. Appl. **443** (2016).

[4] BARBU, V.; PRECUPANU, Th. *Convexity and Optimization in Banach Spaces*, Sijthoff and Noordhoff (1978).

[5] BARBU, V. *Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces*, Springer, Berlin, 2010.

[6] BENDAHMANE, M.; WITTBOLD, P.; ZIMMERMANN, A. *Renormalized Solutions for a Nonlinear Parabolic Equation with Variable Exponents and L^1-data*, J. Differential Equations, **249** (6)(2010), 1483-1515.

[7] BIEZUNER, R. J. *Notas de Aula Análise Funcional*, UFMG, 2009.

[8] BLANCHARD, D.; MURAT, F.; REDWANE, H. *Existence and Uniqueness of a Renormalized Solution for a Fairly General Class of Nonlinear Parabolic Problems*, J. Differential Equations **177** (2)(2001) 331-374.

[9] BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. *Fundamentos de Análise Funcional*, Coleção Textos Universitários, Rio de Janeiro: SBM, 2^{rd} Edition, 2015.

[10] BREZIS, H. *Operateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions Dans un Espace de Hilbert*, Amsterdam, Noth-Holland Publishing Company, 1973.

[11] CARRILLO, J.; WITTBOLD, P. *Uniqueness of Renormalized Solutions of Degenerate Elliptic-Parabolic Problems*, J. Differential Equations **156** (1999) 93-121.

[12] CIORANESCU, I. *Aplicatii de Dualitate în Analiza Functionala Neliniara*, Editura Academiei, Bucuresti, 1974.

[13] CRANDALL, M. G.; LIGGETT T. M. *Generation of Semi-Groups of Nonlinear Transformations in General Banach Spaces*, Amer. J. Math., **93** (1971), 265-298.

[14] DEVILLE, R. *Strong Solutions of Evolutions and the Radon-Nikodym Property*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **308** (1989), 909-914.

[15] DIENING, L. et. al. *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2017, Springer-Verlag, Heidelberg: 2011.

[16] DIPERNA, R. J.; LIONS, P. L. *On The Cauchy Problem for Boltzmann Equations: Global Existence and Weak Stability*, Ann. of Math., **130** (2) (1989), 321-366.

[17] FAN, X. L.; SHEN, J.; ZHAO, D. *Sobolev Embedding Theorems for Spaces* $W^{k,p(x)}(\Omega)$, J. Math. Anal. Appl., **262** (2001), 749-760.

[18] FAN, X. L.; ZHAO, D. *On The Spaces* $L^{p(x)}(U)$ *and* $W^{m,p(x)}(U)$, J. Math. Anal. Appl. **263** (2001), 424-446.

[19] GUIMARÃES, C. J. *Sobre os Espaços de Lebesgue e Sobolev Generalizados e Aplicações Envolvendo o p(x)-Laplaciano*, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Matemática-UFCG, Campina Grande, 2006.

[20] JAKUBOWSKI, V. G.; WITTBOLD, P. *Regularity of Solutions of Nonlinear Volterra Equations*, J. Evol. Equ. 3 (2003) 303-319.

[21] KINDERLEHRER, D.; STAMPACCHIA, G. *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*, Academic Press, New York, 1980.

[22] LANDES, R. *On the Existence of Weak Solutions for Quasilinear Parabolic Initial-Boundary Value Problems*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **89** (3-4) (1981) 217-237.

[23] LAKSHMIKANTHAM, V.; LEELA, S. *Nonlinear Differential Equations in Abstract Spaces*, International Series in Nonlinear Mathematics, **2**, Pergamon Press, 1981.

[24] PAVEL, N. H. *Differential Equations, Flow Invariance and Applications*, Research Notes in Mathematics, **113**, Pitman Advanced Publishing Program, 1984.

[25] PORRETTA, A. *Existence Results for Nonlinear Parabolic Equations via Strong Convergence of Truncations*, Ann. Mat. Pura Appl. **177** (4) (1999) 143-172.

[26] RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*, McGraw Hill, 3^{rd} Edition, 1987.

[27] SATO, K. *On the generators of non-negative contraction semigroups in Banach lattices*, J. Math. Soc. Japan, **20** (1968), 423-436.

[28] VRABIE, I.I. *Compactness Methods for Nonlinear Evolutions*, second edition, Longman and Pitman Monogr. Surv. Pure Appl. Math., vol. 75, John Wiley & Sons, 1995.

[29] WITTBOLD, P.; ZIMMERMANN, A. *Existence and Uniqueness of Renormalized Solutions to Nonlinear Elliptic Equations with Variable Exponents and L^1-data*, Nonlinear Anal. **72** (2010) 2990-3008.

[30] YOSIDA, K. *Functional Analysis*, 3^{rd} Edition, Springer Verlag, 1971.

[31] ZALINESCU, C. *On Uniformly Convex Functions*, J Math. Anal. Appl., **95** (1983), 344-374.