

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ**  
**INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE  
UMA VIGA ESCALONADA SOBRE APOIOS  
ELÁSTICOS VARIÁVEIS USANDO MATERIAL  
COMPÓSITO**

**Autor: Felipe de Souza Eloy**

**Orientador: Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior**

Itajubá, Fevereiro de 2014

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ**  
**INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE  
UMA VIGA ESCALONADA SOBRE APOIOS  
ELÁSTICOS VARIÁVEIS USANDO MATERIAL  
COMPÓSITO**

**Autor: Felipe de Souza Eloy**

**Orientador: Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior**

**Curso: Mestrado em Engenharia Mecânica**

**Área de Concentração: Projeto e Fabricação**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia  
Mecânica como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em  
Engenharia Mecânica.

Itajubá, Fevereiro de 2014

M.G. – Brasil

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Mauá –  
Bibliotecária Margareth Ribeiro- CRB\_6/1700

E48a

Eloy, Felipe de Souza

Análise do comportamento dinâmico de uma viga escalonada sobre apoios elásticos variáveis usando material composto / Felipe de Souza Eloy. -- Itajubá, (MG) : [s.n.], 2014.  
160 p. : il.

Orientador: Prof. Dr. José Juliano de Lima Júnior.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Itajubá.

1. Frequências naturais. 2. Viga laminada escalonada. 3. Apoios elásticos. I. Lima Júnior, José Juliano, orient. II. Universidade Federal de Itajubá. III. Título.

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ**  
**INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE  
UMA VIGA ESCALONADA SOBRE APOIOS  
ELÁSTICOS VARIÁVEIS USANDO MATERIAL  
COMPÓSITO**

Autor: **Felipe de Souza Eloy**

Orientador: **Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior**

Composição da Banca Examinadora:

**Prof. Dr. Fernando José de Oliveira Moreira - EMBRAER**

**Prof. Dr. Antônio Carlos Ancelotti Júnior - IEM/UNIFEI**

**Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior - IEM/UNIFEI**

# Dedicatória

*Aos meus pais, Sebastião e Helena.*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus por me abençoar e me conceder a realização deste trabalho.

Ao meu orientador Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior, meus agradecimentos pela valiosa colaboração, paciência, dedicação e pelos importantes conselhos.

Ao Prof. Dr. Antônio Carlos Ancelotti Júnior, pela colaboração com a parte experimental deste trabalho, e aos demais Professores do IEM.

À Universidade Federal de Itajubá, pela possibilidade da realização deste mestrado.

Aos secretários Maria Auta, Patrícia e Vanderlei, dentre outros, pelo bom atendimento e auxílio com as questões burocráticas.

Aos amigos da UNIFEI, Alberto Cardoso Almeida, Antônio Edson Castro, Aureliano Rodrigues Barborati, Dario de Almeida, Exdras Devys, Fabíola Ottoboni, Jean Michel Suveges, Julio César Silva de Souza, Luciana Bernardo Justino e Thairone Conti Serafini pelas contribuições, conselhos, companheirismo, horas de lazer e boas conversas.

À minha família, a principal responsável pelo meu esforço.

À CAPES pelo apoio financeiro concedido à esta pesquisa.

E por fim, a todos meus amigos e parentes, pelo incentivo aos meus estudos e pela amizade.

## Resumo

**ELOY, F. S. (2014)**, Análise do Comportamento Dinâmico de uma Viga Escalonada sobre Apoios Elásticos Variáveis Usando Material Compósito, Itajubá, 160 p. Dissertação, Mestrado em Projeto e Fabricação, Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá.

Devido à grande aplicação dos materiais compósitos nas indústrias, este trabalho apresenta um estudo dinâmico comparativo entre as frequências naturais dos modelos de viga escalonada de Euler-Bernoulli e Cisalhamento, com diferentes condições de apoios elásticos. É apresentado todo o desenvolvimento analítico e as equações diferenciais que regem o comportamento de uma viga laminada contínua e escalonada em várias partes. As frequências naturais dimensionais e adimensionais obtidas pelo programa computacional desenvolvido com base nos modelos teóricos são comparadas com aquelas obtidas na literatura. Os resultados são obtidos variando-se os índices de esbeltez da viga, bem como para as diferentes condições de apoios elásticos e disposições das lâminas, em função da orientação de suas fibras. Para os casos onde as fibras estão orientadas a  $0^\circ$ , os valores das frequências foram maiores que para os casos contendo fibras orientadas a  $90^\circ$ , ao passo que para fibras orientadas a  $45^\circ$ , os valores obtidos para as frequências foram intermediários entre estes dois últimos casos, tanto para o modelo de Euler-Bernoulli quanto para o modelo de Cisalhamento, de modo que pode ser avaliada a influência da rigidez de cada constituinte do laminado (fibra e matriz) sobre suas frequências naturais. Este estudo permite a compreensão do comportamento dinâmico de uma viga compósita quando analisada por dois modelos teóricos diferentes.

### Palavras-chave

Frequências Naturais, Viga Laminada Escalonada, Apoios Elásticos.

# Abstract

ELOY, F. S. (2014), Dynamic Behavior Analysis of a Stepped Beam with Variables Elastic Supports Using Composite Material, Itajubá, 160 p. MSc. Dissertation – Mechanical Engineering Institute, Federal University of Itajubá.

Due to the increase of application of composite materials in the industry, this work presents a dynamic comparative study about the natural frequencies of stepped beam models of Euler-Bernoulli and Shear with different conditions of elastic supports. It's presented all the analytical development and the differential equations that govern the behavior of a continuous and multi-stepped laminated beam. Dimensional and dimensionless natural frequencies are obtained by the computational program based on the theoretical models and they are compared with those found in the literature. Results are obtained by the variation in slenderness ratio, as well as for different elastic supports conditions and layups, depending on the plate's fibers orientation. For the cases involving fibers oriented at  $0^\circ$ , frequencies values were higher than those for the cases containing fibers oriented at  $90^\circ$ , while for fibers oriented at  $45^\circ$  the obtained frequencies were intermediate between the last cases, for both Euler-Bernoulli and Shear models, so that the influence of the stiffness of each constituent of the laminate on its natural frequencies can be evaluated. This study gives an understanding about the dynamic behavior of a composite beam analyzed by two different theoretical models.

## Keywords

Natural Frequencies, Laminated Stepped Beam, Elastic Supports.



# Sumário

<b>SUMÁRIO</b>	<b>I</b>
<b>LISTA DE FIGURAS</b>	<b>III</b>
<b>LISTA DE TABELAS</b>	<b>VI</b>
<b>LISTA DE FOTOS</b>	<b>IX</b>
<b>SIMBOLOGIA</b>	<b>X</b>
<b>LETRAS LATINAS</b>	<b>X</b>
<b>LETRAS GREGAS</b>	<b>XII</b>
<b>SUBSCRITOS</b>	<b>XII</b>
<b>ABREVIATURAS</b>	<b>XIII</b>
<b>OPERADORES</b>	<b>XIII</b>
<b>SIGLAS</b>	<b>XIV</b>
<b>CAPÍTULO 1</b>	<b>1</b>
<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1 OBJETIVOS	3
1.2 REVISÃO DA LITERATURA	3
1.2.1 Modelos utilizados no estudo de vibrações em vigas	4
1.2.2 Estudo de vigas escalonadas	5
1.2.3 Vibrações em vigas compósitas laminadas	7
1.3 CONTRIBUIÇÃO DO TRABALHO	11
1.4 CONTEÚDO	11
<b>CAPÍTULO 2</b>	<b>13</b>
<b>MATERIAIS COMPÓSITOS LAMINADOS</b>	<b>13</b>
2.1 DEFINIÇÕES	13
2.2 ANÁLISE DE LAMINADOS	16
2.2.1 Propriedades elásticas	18
2.2.1.1 Regra das misturas	19
2.2.2 Teoria Clássica dos Laminados	27

<b>CAPÍTULO 3</b>	<b>41</b>
<b>MODELOS DE VIGA COMPÓSITA LAMINADA ESCALONADA EM VÁRIAS PARTES E ELASTICAMENTE APOIADA</b>	<b>41</b>
3.1 ANÁLISE DINÂMICA DE UMA VIGA ESCALONADA EM VÁRIAS PARTES	42
<b>CAPÍTULO 4</b>	<b>55</b>
<b>VALIDAÇÃO</b>	<b>55</b>
4.1 O PROGRAMA COMPUTACIONAL DESENVOLVIDO	55
4.2 COMPARAÇÕES DE FREQUÊNCIAS NATURAIS DIMENSIONAIS E ADIMENSIONAIS DE VIGAS CONTÍNUAS	58
4.3 COMPARAÇÕES DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE UMA VIGA ESCALONADA EM DUAS PARTES	74
<b>CAPÍTULO 5</b>	<b>78</b>
<b>EXPERIMENTO</b>	<b>78</b>
5.1 CONFECÇÃO DOS MODELOS DE VIGA	78
5.2 CARACTERIZAÇÃO DO COMPÓSITO	84
5.3 DESCRIÇÃO DO ENSAIO DE VIBRAÇÃO LIVRE	87
5.3.1 Frequências naturais	89
<b>CAPÍTULO 6</b>	<b>97</b>
<b>RESULTADOS</b>	<b>97</b>
6.1 FREQUÊNCIAS NATURAIS ADIMENSIONAIS DE UMA VIGA COMPÓSITA ESCALONADA EM DUAS PARTES	99
6.2 FREQUÊNCIAS NATURAIS ADIMENSIONAIS DE UMA VIGA COMPÓSITA ESCALONADA EM TRÊS PARTES	114
<b>CAPÍTULO 7</b>	<b>128</b>
<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS</b>	<b>128</b>
7.1 CONCLUSÕES	128
7.2 PERSPECTIVAS FUTURAS	130
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>131</b>
<b>APÊNDICE A</b>	<b>137</b>
<b>MODELO DE VIGA COMPÓSITA LAMINADA UNIFORME DE EULER-BERNOULLI</b>	<b>137</b>
A.1 EQUACIONAMENTO DO MODELO DE VIGA COMPÓSITA DE EULER-BERNOULLI	137

<b>APÊNDICE B</b>	<b>148</b>
<b>MODELO DE VIGA UNIFORME COMPÓSITA LAMINADA DE CISALHAMENTO</b>	<b>148</b>
B.1 EQUACIONAMENTO DO MODELO DE VIGA LAMINADA DE CISALHAMENTO -----	148
<b>APÊNDICE C</b>	<b>156</b>
<b>INSTRUMENTAÇÃO</b>	<b>156</b>

## Lista de Figuras

Figura 2.1 - Tipos de compósitos. Fonte: Belo (2006).-----	15
Figura 2.2 - Laminado multi-direcional e sistema de coordenadas. Fonte: Daniel e Ishai (1994). -----	18
Figura 2.3 - Modelo simplificado de um compósito unidirecional sob ação de uma carga $F$ .-21	
Figura 2.4 - Esquema representativo de um tecido plano. Fonte: Gay et al. (2002). -----	26
Figura 2.5 - Sistema de coordenadas de um elemento de uma lâmina. Adaptado de Vinson e Sierakowski (1987). -----	27
Figura 2.6 - Representação dos deslocamentos de um laminado. Adaptado de Reddy e Miravete (1995). -----	34
Figura 2.7 - Representação esquemática do empilhamento das lâminas. Fonte: Vinson e Sierakowski (1987). -----	36
Figura 2.8 - Representação esquemática das forças e momentos atuantes sobre o laminado. -37	
Figura 3.1 – Vista lateral de uma viga laminada escalonada em $n$ partes.-----	43
Figura 4.1 – Comportamento da frequência adimensional em função da variação do ângulo de orientação das fibras. -----	68
Figura 4.2 – Viga com um escalonamento. Fonte: Tong (1995). -----	75
Figura 5.1 - Vista superior da disposição das lâminas da placa escalonada na espessura. ----	79
Figura 5.2 - Esquema do processo VARTM. -----	80
Figura 5.3 - Marcação e corte das lâminas. -----	81
Figura 5.4 - Bolsa de vácuo montada.-----	82
Figura 5.5 - Equipamento montado destinado à infusão da resina no reforço.-----	82
Figura 5.6 - Movimento da resina na pré-forma: a) no início; b) no meio e c) após a infusão.83	
Figura 5.7 - Manta térmica no processo de cura da resina. -----	83
Figura 5.8 - Modelo de viga laminada contínua. -----	87
Figura 5.9 - Modelo de viga laminada escalonada em duas partes.-----	87
Figura 5.10 - Modelo de viga laminada escalonada em três partes. -----	88
Figura 5.11 - Viga engastada, Vibrômetro Laser e Analisador de Sinais. -----	90

Figura 5.12 - Espectro de frequência da viga uniforme.-----	91
Figura 5.13 - Espectro de frequência da viga escalonada em duas partes.-----	93
Figura 5.14 - Espectro de frequência da viga escalonada em três partes.-----	94
Figura 6.1 - Quatro primeiras frequências adimensionais - viga simplesmente apoiada.-----	100
Figura 6.2 - Desvio relativo para as quatro primeiras frequências adimensionais - viga simplesmente apoiada. -----	101
Figura 6.3 - Quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-apoiada. -----	101
Figura 6.4 - Desvio relativo para as quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-apoiada. -----	102
Figura 6.5 - Quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-engastada. -----	102
Figura 6.6 - Desvio relativo para as quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-engastada. -----	103
Figura 6.7 - Quatro primeiras frequências adimensionais - viga simplesmente apoiada.-----	106
Figura 6.8 - Desvio relativo para as quatro primeiras frequências adimensionais - viga simplesmente apoiada. -----	106
Figura 6.9 - Quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-apoiada. -----	107
Figura 6.10 - Desvio relativo para as quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-apoiada. -----	107
Figura 6.11 - Quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-engastada. -----	108
Figura 6.12 - Desvio relativo para as quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-engastada. -----	108
Figura 6.13 - Quatro primeiras frequências adimensionais - viga simplesmente apoiada. ---	111
Figura 6.14 - Desvio relativo para as quatro primeiras frequências adimensionais - viga simplesmente apoiada. -----	111
Figura 6.15 - Quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-apoiada. -----	112
Figura 6.16 - Desvio relativo para as quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-apoiada. -----	112
Figura 6.17 - Quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-engastada. -----	113
Figura 6.18 - Desvio relativo para as quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-engastada. -----	113
Figura 6.19 - Quatro primeiras frequências adimensionais - viga simplesmente apoiada. ---	115
Figura 6.20 - Desvio relativo para as quatro primeiras frequências adimensionais - viga simplesmente apoiada. -----	116

Figura 6.21 - Quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-apoiada. -----	116
Figura 6.22 - Desvio relativo para as quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-apoiada.-----	117
Figura 6.23 - Quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-engastada. -----	118
Figura 6.24 - Desvio relativo para as quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-engastada. -----	118
Figura 6.25 - Quatro primeiras frequências adimensionais - viga simplesmente apoiada. ---	120
Figura 6.26 - Desvio relativo para as quatro primeiras frequências adimensionais - viga simplesmente apoiada. -----	120
Figura 6.27 - Quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-apoiada. -----	121
Figura 6.28 - Desvio relativo para as quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-apoiada.-----	122
Figura 6.29 - Quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-engastada. -----	122
Figura 6.30 - Desvio relativo para as quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-engastada. -----	123
Figura 6.31 - Quatro primeiras frequências adimensionais - viga simplesmente apoiada. ---	125
Figura 6.32 - Desvio relativo para as quatro primeiras frequências adimensionais - viga simplesmente apoiada. -----	125
Figura 6.33 - Quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-apoiada. -----	126
Figura 6.34 - Desvio relativo para as quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-apoiada.-----	126
Figura 6.35 - Quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-engastada. -----	127
Figura 6.36 - Desvio relativo para as quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-engastada. -----	127
Figura A.1 – Modelo de uma viga contínua laminada de Euler-Bernoulli.-----	139
Figura A.2 – Elemento infinitesimal de um modelo de viga compósita laminada de Euler-Bernoulli.-----	140
Figura B.1 – Elemento infinitesimal de um modelo de viga compósita de Cisalhamento.---	149

## Lista de Tabelas

Tabela 2.1 – Classificação dos materiais compósitos sintéticos quanto à forma, tamanho e distribuição dos reforços. Fonte: Hull (1988).-----	15
Tabela 2.2 – Determinação das constantes elásticas. Fonte: Vinson e Sierakowski (1987).---	23
Tabela 4.1 – Propriedades geométricas e do material da viga contínua simulada.-----	59
Tabela 4.2 - 1 <sup>a</sup> , 2 <sup>a</sup> e 3 <sup>a</sup> Frequências naturais adimensionais para uma viga contínua apoiada – apoiada.-----	60
Tabela 4.3 - Desvio relativo (%) entre os valores calculados e os valores teóricos – viga contínua apoiada - apoiada. -----	61
Tabela 4.4 - 1 <sup>a</sup> , 2 <sup>a</sup> e 3 <sup>a</sup> Frequências naturais adimensionais para uma viga contínua livre – livre. -----	61
Tabela 4.5 - Desvio relativo (%) entre os valores calculados e os valores teóricos – viga contínua livre - livre. -----	61
Tabela 4.6 - 1 <sup>a</sup> , 2 <sup>a</sup> e 3 <sup>a</sup> Frequências naturais adimensionais para uma viga contínua engastada – livre. -----	62
Tabela 4.7 – Desvio relativo (%) entre os valores calculados e os valores teóricos – viga contínua engastada – livre. -----	62
Tabela 4.8 – Propriedades materiais e geométricas da viga laminada. -----	63
Tabela 4.9 - Frequências naturais (em kHz) para uma viga espessa simplesmente apoiada (0°).64	
Tabela 4.10 - Frequências naturais (em kHz) para uma viga esbelta simplesmente apoiada (0°). -----	64
Tabela 4.11 - Frequências naturais adimensionais para uma viga feita a partir de um laminado “angle-ply” ( $\theta/-\theta/-\theta/\theta$ ). -----	66
Continuação da tabela 4.11 - Frequências naturais adimensionais para uma viga feita a partir de um laminado “angle-ply” ( $\theta/-\theta/-\theta/\theta$ ). -----	67
Tabela 4.12 – Desvio relativo (%) entre as frequências naturais adimensionais calculadas e teóricas para uma viga feita a partir de um laminado “angle-ply” ( $\theta/-\theta/-\theta/\theta$ ). -----	69
Tabela 4.13 - Frequências naturais adimensionais para a viga contínua (0°/90°/90°/0°).-----	70

Tabela 4.14 – Desvio relativo (%) entre as frequências naturais adimensionais calculadas e teóricas. -----	71
Tabela 4.15 – Propriedades materiais e geométricas da viga laminada. -----	72
Tabela 4.16 - Frequências naturais (em Hz) para uma viga esbelta. -----	73
Tabela 4.17 – Erro relativo entre as frequências naturais obtidas teoricamente e experimentalmente. -----	74
Tabela 3.18 – Propriedades geométricas e materiais da viga escalonada. -----	76
Tabela 4.19 - Frequências naturais adimensionais da viga escalonada em uma parte engastada - livre. -----	76
Tabela 4.20 – Desvio relativo (%) entre os valores calculados pelo autor e os valores teóricos obtidos por Almeida (2012) – viga escalonada engastada - livre. -----	77
Tabela 5.1 – Propriedades dos constituintes do compósito. -----	85
Tabela 5.2 – Valores das massas iniciais, finais e das porcentagens em peso de cada fase. ---	86
Tabela 5.3 – Propriedades do compósito. -----	86
Tabela 5.4 – Propriedades geométricas das vigas utilizadas nos ensaios. -----	88
Tabela 5.5 – Três primeiras frequências experimentais e calculadas da viga contínua laminada (Hz). -----	92
Tabela 5.6 - Desvio relativo (%) entre os valores experimentais e os valores calculados das frequências naturais da viga contínua. -----	92
Tabela 5.6 - Três primeiras frequências experimentais e calculadas da viga escalonada em duas partes (Hz). -----	93
Tabela 5.7 – Desvio relativo (%) entre os valores experimentais e os valores calculados das frequências naturais da viga escalonada em duas partes. -----	94
Tabela 5.8 - Três primeiras frequências experimentais e calculadas da viga escalonada em três partes (Hz). -----	95
Tabela 5.9 - Desvio relativo (%) entre os valores experimentais e os valores calculados das frequências naturais da viga escalonada em três partes. -----	95
Tabela 6.1 – Propriedades materiais das vigas simuladas. -----	98
Tabela 6.2 – Propriedades geométricas das vigas simuladas. -----	98
Tabela 6.3 – Três primeiras frequências adimensionais do caso 1 – modelo de Euler-Bernoulli. -----	99
Tabela 6.4 – Três primeiras frequências adimensionais do caso 1 – modelo de Cisalhamento.	100



Tabela 6.5 – Três primeiras frequências adimensionais do caso 2 – modelo de Euler-Bernoulli. ....	105
Tabela 6.6 – Três primeiras frequências adimensionais do caso 2 – modelo de Cisalhamento.	105
Tabela 6.7 – Três primeiras frequências adimensionais do caso 3 – modelo de Euler-Bernoulli. ....	109
Tabela 6.8 – Três primeiras frequências adimensionais do caso 3 – modelo de Cisalhamento.	110
Tabela 6.9 – Três primeiras frequências adimensionais do Caso 1 – modelo de Euler-Bernoulli. ....	114
Tabela 6.10 – Três primeiras frequências adimensionais do caso 1 – modelo de Cisalhamento.	115
Tabela 6.11 – Três primeiras frequências adimensionais do caso 2 – modelo de Euler-Bernoulli. ....	119
Tabela 6.12 – Três primeiras frequências adimensionais do caso 2 – modelo de Cisalhamento.	119
Tabela 6.13 – Três primeiras frequências adimensionais do caso 3 – modelo de Euler-Bernoulli. ....	124
Tabela 6.14 – Três primeiras frequências adimensionais do caso 3 – modelo de Cisalhamento.	124

## Lista de Fotos

Fotografia C.1 – Vista frontal do vibrômetro laser.-----	156
Fotografia C.2 – Vista frontal do analisador de sinais. -----	157
Fotografia C.3 – Paquímetro utilizado. -----	157
Fotografia C.4 - Máquina de corte utilizada. -----	158
Fotografia C.5 - Manta térmica utilizada. -----	159
Fotografia C.6 – Controlador de tempo e temperatura. -----	159
Fotografia C.7 – Bomba de vácuo. -----	160

# Simbologia

## Letras Latinas

$A$	área da seção transversal da viga modelo uniforme.	$m^2$
$[A]$	matriz de rigidez à tração e à compressão.	
$A_{ij}$	termo da linha $i$ e coluna $j$ da matriz de rigidez à tração e à compressão.	N/m
$b$	base de uma viga de seção retangular.	m
$\bar{b}$	relação entre valores da base de trechos adjacentes da viga escalonada.	
$\{b\}$	vetor de incógnitas.	
$B_i$	constante de integração.	
$[B]$	matriz de acoplamento entre a rigidez planar e rigidez à flexão.	
$C$	co-seno.	
$c$	velocidade de propagação da onda no meio sólido	m/s
$CH$	co-seno hiperbólico.	
$D$	constante da equação temporal.	
$[D]$	matriz de rigidez à flexão do laminado.	
$D_{ij}$	termo da linha $i$ e coluna $j$ da matriz de rigidez à flexão.	Nm
$\overline{D_{11}}$	relação entre valores de rigidez à flexão de trechos adjacentes.	
$E_i$	módulo de elasticidade na direção $i$ da viga laminada.	GPa
$F$	força.	N
$f$	frequência natural.	Hz
$G_{ij}$	módulo de cisalhamento no plano $i$ - $j$ .	GPa
$h$	altura da viga.	m

$h_i$	distância da superfície da lâmina $i$ até o plano de simetria do laminado.	m
$[H]$	matriz de coeficientes do sistema linear.	
$k_c$	fator numérico que depende da forma da seção transversal no cisalhamento.	
$k_R$	constante de rigidez de rotação.	Nm/rad
$k_T$	constante de rigidez de translação.	Nm
$K$	constante.	
$L_i$	comprimento dos trechos da viga escalonada.	m
$L$	comprimento total da viga.	m
$n$	número de trechos de uma viga escalonada.	
$m$	massa.	kg
$M$	momento fletor.	Nm
$N$	força normal.	N
$q$	carga distribuída por unidade de comprimento da viga.	N/m
$Q$	força cortante.	N
$R$	constante adimensional diretamente proporcional a rigidez de rotação.	
$S$	seno.	
$SH$	seno hiperbólico.	
$t$	tempo.	s
$T$	solução temporal.	
$T$	constante adimensional diretamente proporcional a rigidez de translação.	
$u$	deslocamento da superfície central do laminado.	m
$v$	deslocamento na direção $y$ ou deflexão.	m
$V$	esforço cortante.	N
$V_f$	porcentagem em volume de fibras.	%
$V_m$	porcentagem em volume de matriz.	%
$\ddot{v}$	aceleração na direção $y$ .	m/s <sup>2</sup>
$w$	deslocamento da superfície central do laminado.	m
$W_f$	porcentagem em peso de fibras.	%
$W_m$	porcentagem em peso de matriz.	%
$X$	modo de vibração ou solução espacial.	
$x$	eixo coordenado cartesiano.	

$y$	eixo coordenado cartesiano.
$z$	eixo coordenado cartesiano.

## Letras Gregas

$\bar{\alpha}$	primeira derivada do deslocamento lateral com relação a $x$ .	
$\bar{\beta}$	primeira derivada do deslocamento lateral com relação a $y$ .	
$\bar{\beta}_i$	relação de frequências naturais de trechos adjacentes de uma viga escalonada.	
$\beta_i$	frequência natural dimensional dos trechos da viga escalonada.	$m^{-1}$
$\hat{\beta}_{1,k}$	$k$ - ésima frequência natural adimensional em relação ao primeiro trecho de uma viga escalonada.	
$\beta_{1,k}$	$k$ - ésima frequência natural dimensional em relação ao primeiro trecho de uma viga escalonada.	$(m^{-1})$
$\varepsilon$	deformação específica.	
$\eta$	constante.	
$\rho$	massa específica.	$kg/m^3$
$\sigma$	tensão normal.	$N/m^2$
$\nu_{ij}$	coeficiente de Poisson associado com carregamento na direção $i$ e deformação na direção $j$ .	
$\omega$	frequência natural angular.	$rad/s$
$\omega_{ad}$	frequência natural adimensional para a viga laminada.	
$\gamma_{xy}$	ângulo de distorção	$^{\circ}$
$\theta$	ângulo de fase.	$rad/s$
$\mu$	relação entre o termo $A_{55}$ e o termo $D_{11}$ .	$1/m^2$

## Subscritos

1	índice do primeiro trecho da viga.
11	índice do elemento da primeira linha e primeira coluna da matriz de rigidez à flexão.
2	índice do segundo trecho da viga.
$n$	índice do $n$ -ésimo trecho da viga escalonada.
$b_j$	índice da constante de integração para uma viga com infinitos escalonamentos.
$i$	índice de uma viga escalonada com $n$ partes.
$k$	índice que indica a $k$ -ésima frequência natural.
$s$	índice que indica a simetria das lâminas de uma viga.
$x$	eixo cartesiano.
$y$	eixo cartesiano.
$z$	eixo cartesiano.
$o$	condição inicial.

## Abreviaturas

MEF      Método dos Elementos Finitos

## Operadores

$\int$	integral.
$\sum$	somatório.
$\{ \}$	vetor.
$[ ]$	matriz.

$\frac{\partial}{\partial x}$	primeira derivada com relação a $x$ .
$\frac{\partial^2}{\partial t^2}$	segunda derivada com relação ao tempo.
$\frac{\partial^4}{\partial t^4}$	quarta derivada com relação ao tempo.
$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$	segunda derivada com relação a $x$ .
$\frac{\partial^4}{\partial x^4}$	quarta derivada com relação a $x$ .

## Siglas

DTEP	Problema de autovalor transcendental direto
IEM	Instituto de Engenharia Mecânica
ITEP	Problema de autovalor transcendental inverso
UNIFEI	Universidade Federal de Itajubá

## **CAPÍTULO 1**

### **INTRODUÇÃO**

Atualmente é desenvolvida uma consciência global que anseia por novas soluções energéticas eficientes, que desafia as indústrias a reordenarem suas prioridades, redirecionando seus esforços no sentido de produzirem uma tecnologia otimizada, eficiente e de baixo custo. Para isso, novas metodologias, processos e materiais vêm sendo desenvolvidos.

Neste contexto, as indústrias vêm fazendo o uso de materiais compósitos, os quais são a combinação de dois ou mais materiais com a finalidade de se obter um material resultante com propriedades especificadas. Segundo Subramanian (2006), os materiais compósitos têm sido extensivamente utilizados nas engenharias aeroespacial, automotiva, nuclear, marinha, biomédica e civil, devido ao fato desses materiais possuírem elevada relação resistência-peso, elevada rigidez em relação ao peso, características superiores de fadiga e capacidade de orientação das fibras para atender a requisitos de projeto.

Uma grande vantagem dos materiais compósitos, como afirma Jones (1999), citado por Perdigão (2010), é que quando são projetados corretamente, possuem as melhores características/qualidades dos seus constituintes ou componentes e, por vezes, algumas qualidades que nenhum constituinte/componente possui.



Algumas dificuldades ainda são encontradas na introdução desses materiais na indústria moderna. Tita (1999) afirma que entre as principais causas disso está a dificuldade de se prever o modo de falha exato do material, os custos na sua fabricação e a falta de conhecimento sobre o comportamento do material junto a materiais químicos corrosivos.

Frente às vantagens expostas, que tendem a favorecer o aumento da utilização de compósitos em estruturas mecânicas, torna-se de grande importância o conhecimento do comportamento dinâmico dessas estruturas, que induz vibrações. Tal conhecimento é importante no desenvolvimento de projetos de forma segura, na tentativa de se aumentar a vida útil de peças e equipamentos e de se evitar fenômenos indesejáveis, tais como a ressonância, que pode levar ao colapso da estrutura.

Um dos modelos com maior aplicação prática em estruturas elásticas é a viga. Um modelo de viga compósita pode ser utilizado em asas de aviões, pontes, eixos, hélices de helicópteros e em estruturas de máquinas, dentre outras inúmeras aplicações. Daí o interesse em se levar em consideração as vigas compósitas com mudanças nas seções de área transversal, a fim de uma avaliação mais acurada do possível comportamento dinâmico da estrutura.

Para o estudo do comportamento dinâmico de vigas, são encontrados na literatura quatro modelos, sendo eles os modelos de viga de Euler-Bernoulli, de Cisalhamento, de Vlasov e de Timoshenko. Almeida (2012) afirma que estes modelos diferem quanto à sua formulação. Segundo o autor, no modelo de Euler-Bernoulli, é considerado apenas o efeito da flexão pura, sendo que a influência do cisalhamento e da inércia de rotação é desprezada, e ainda é feita a suposição de que as seções planas permanecem planas e perpendiculares à linha neutra da viga após a deformação. O modelo de Vlasov, também despreza o efeito do cisalhamento, porém considera o efeito da inércia de rotação. O modelo de Cisalhamento leva em conta o efeito causado pelo cisalhamento, e desconsidera a inércia de rotação, supondo-se que as seções planas permanecem planas, mas não necessariamente perpendiculares à linha neutra da viga, uma vez que há um giro da seção em relação a esta linha devido à influência do cisalhamento. Já o modelo de Timoshenko, é o mais completo, uma vez que adiciona ao modelo de Euler-Bernoulli, a inércia de rotação e a deformação causada pelo cisalhamento ao mesmo tempo.

Sendo assim, o presente trabalho analisa o comportamento dinâmico de vigas compósitas laminadas simétricas, escalonadas em  $n$  partes e apoiadas sobre apoios elásticos variáveis. Para isso, desenvolve-se um estudo comparativo entre as frequências naturais obtidas pelos modelos de viga de Euler-Bernoulli e de Cisalhamento. Logo, são determinadas as primeiras frequências naturais dos modelos de viga estudados, assim como a comparação entre esses dois modelos.

## **1.1 OBJETIVOS**

Apresentação de um estudo dinâmico comparativo entre os modelos de viga escalonada de Euler-Bernoulli e Cisalhamento aplicados a vigas feitas de material compósito laminado elasticamente apoiadas, de modo que as frequências naturais adimensionais e dimensionais destas vigas sejam determinadas, bem como a realização de ensaios experimentais e a avaliação da influência do índice de esbeltez e do ângulo de orientação das fibras das lâminas sobre as frequências naturais da estrutura.

## **1.2 REVISÃO DA LITERATURA**

O estudo da dinâmica de estruturas com parâmetros distribuídos envolve variáveis que dependem tanto do tempo quanto do espaço. Sendo assim, o comportamento dinâmico de uma estrutura é governado por equações diferenciais parciais e por certas condições de contorno que devem ser satisfeitas.

A viga é um dos modelos fundamentais de estruturas elásticas, uma vez que é utilizada em uma variedade de aplicações, como por exemplo, em hélices de helicópteros, asas de aviões, braços robóticos e trilhos de trens (Costa, 2006). A viga é tratada como um modelo unidimensional, fazendo-se a hipótese de que o comprimento é bem maior que as dimensões da seção transversal.

Frente à importância da aplicação dada a uma viga e da compreensão de seu comportamento dinâmico, muitos pesquisadores têm dedicado seus trabalhos à modelagem e análise deste tipo de estrutura.

### **1.2.1 Modelos utilizados no estudo de vibrações em vigas**

De acordo com Vinson e Sierakowski (1987), uma viga, coluna ou barra é um componente estrutural longo e fino de largura  $b$ , altura  $h$  e comprimento  $L$ , onde  $b/L \ll 1$  e  $h/L \ll 1$ . O termo “viga” é utilizado quando a estrutura é sujeita a um carregamento lateral na direção de sua espessura, de modo que a flexão ocorra. Já o termo “barra” é usado quando a estrutura é carregada na direção axial por forças de tração, e por fim, quando a estrutura é carregada por forças de compressão na direção axial, usa-se o termo “coluna”.

Para o estudo do comportamento dinâmico de vigas, dispõem-se na literatura de quatro modelos, sendo eles os modelos de Euler-Bernoulli, Vlasov, Cisalhamento e Timoshenko.

A teoria de Euler-Bernoulli data do século XVIII, quando Jacob Bernoulli (1654-1705) propôs que a curvatura de uma viga elástica em um ponto qualquer é proporcional ao momento fletor naquele ponto. Daniel Bernoulli (1700-1782), sobrinho de Jacob, foi o primeiro pesquisador a formular a equação diferencial do movimento de uma viga em vibração. Muitos avanços sobre curvas elásticas foram alcançados por Euler, como afirma Timoshenko (1953), citado por Han et al. (1999).

O modelo de Euler-Bernoulli, por ser o menos complexo e apresentar resultados razoáveis para muitos problemas, é o mais utilizado. De acordo com Lima Jr e Arantes (2000), esta teoria apresenta resultados melhores quando aplicada a vigas finas ou esbeltas, enquanto que Costa (2006) afirma que este modelo tende a superestimar as frequências naturais relativas aos maiores modos.

A teoria da viga de Vlasov fornece uma pequena melhora sobre o modelo de Euler-Bernoulli por incluir o efeito da rotação da seção transversal. Como resultado, esta inclusão corrige parcialmente o efeito da superestimação das frequências naturais observada no modelo de Euler-Bernoulli. Já o modelo de Cisalhamento, inclui sobre o modelo de Euler-Bernoulli o efeito da distorção devida ao cisalhamento, assim, a estimativa das frequências naturais melhora consideravelmente (Han et al., 1999).

Timoshenko (1921) propôs um modelo de viga que adiciona o efeito da distorção causada pelo cisalhamento e o efeito de inércia de rotação ao modelo de Euler-Bernoulli. De acordo com Costa (2006), este último modelo foi e ainda é a maior melhoria para a aproximação da resposta de vigas não-delgadas e para altas frequências, onde os efeitos do cisalhamento e da rotação não podem ser desprezados.

Inman (2001) desenvolve o modelo analítico para as teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko, considerando as condições clássicas de apoio: apoiada-apoiada, livre-livre, engastada-engastada, engastada-livre e engastada-apoiada. As frequências naturais adimensionais também são tabeladas para cada um desses casos.

## 1.2.2 Estudo de vigas escalonadas

Muitos pesquisadores estudaram as propriedades de uma viga escalonada, entre eles Jang e Bert (1989), os quais obtiveram os primeiros resultados exatos ao deduzir as equações de frequência de uma viga escalonada considerando-se as condições clássicas de contorno e baseando-se na teoria de Euler-Bernoulli. Estes autores tiveram seu trabalho generalizado por Maurizi e Bellés (1993a), onde foi estudada a viga de Euler-Bernoulli com uma mudança de seção e os modos de vibração para cada trecho da viga foram obtidos por meio da solução da equação diferencial ordinária de quarta ordem por eles obtida.

Hong e Kim (1999) inseriram o efeito do amortecimento na análise modal de uma viga com múltiplos escalonamentos. Inicialmente encontraram a matriz dinâmica exata para um elemento da viga uniforme de Timoshenko, e a equação espacial foi encontrada por meio da

transformada de Laplace, e com a substituição das condições de contorno, encontraram um sistema que pode ser montado da mesma maneira que o método dos elementos finitos (MEF). Segundo os autores, a grande vantagem do método proposto é que ele encontra soluções exatas para os parâmetros distribuídos da viga com múltiplos escalonamentos. A validação do método proposto é realizada por meio de três exemplos numéricos: no primeiro, considerou-se uma viga com um único escalonamento; no segundo, uma viga com múltiplos escalonamentos suportada por articulações flexíveis com amortecimento, e no terceiro, uma viga com múltiplos escalonamentos sob uma carga em movimento.

Naguleswaran (2002a) continuou o estudo desenvolvido por Jang e Bert (1989) estudando as três primeiras frequências naturais de uma viga de Euler-Bernoulli com uma mudança de seção e sobre apoios clássicos, considerando seções transversais de área retangular e circular. Em seguida, Naguleswaran (2002b) analisaram um modelo de viga, também de Euler-Bernoulli, agora com três mudanças de seção transversal de área, onde foi feita uma combinação de 45 apoios elásticos e determinadas as três primeiras frequências naturais.

Uma viga engastada com múltiplos escalonamentos é estudada por Jaworski e Dowell (2008). Os resultados da vibração livre da viga foram obtidos teoricamente e experimentalmente. Os resultados teóricos foram obtidos baseando-se no modelo de Euler-Bernoulli, no Método dos Elementos Finitos (MEF.), por meio do programa comercial ANSYS<sup>®</sup>, onde observou-se um pequeno desvio na primeira frequência natural entre os resultados teóricos com os resultados obtidos experimentalmente e pelo MEF.

Vaz (2008) apresentou uma metodologia para a determinação das frequências naturais e dos modos de vibração de uma viga escalonada em várias partes, pelo modelo de Euler-Bernoulli. Foram usados diferentes apoios elásticos nas extremidades e geometrias diferentes. Os resultados foram gerados por um programa computacional desenvolvido pela autora e comparados com ensaios experimentais com vigas escalonadas em até três partes de seção circular e com resultados teóricos obtidos na literatura. O método utilizado elimina a necessidade do uso de malhas na solução de problemas dinâmicos e é capaz de gerar bons resultados.

Almeida (2012) analisou o comportamento dinâmico de uma viga escalonada em várias partes, sobre apoios elasticamente variáveis utilizando os modelos de Euler-Bernoulli, Vlasov, Cisalhamento e Timoshenko. Uma comparação entre esses modelos é feita, e conclui-se deste trabalho que o efeito do cisalhamento é mais importante que o efeito da inércia de rotação, uma vez que os resultados obtidos pelo modelo de Cisalhamento aproximam-se mais do modelo de Timoshenko, do que o modelo de Vlasov.

### 1.2.3 Vibrações em vigas compósitas laminadas

Dada a grande importância do conhecimento do comportamento de uma viga quando sujeita a carregamentos tanto estáticos quanto dinâmicos, segue uma revisão sobre os trabalhos envolvidos com problemas de vibrações em vigas laminadas.

Teoh e Huang (1977) analisaram o efeito da deformação causada pelo cisalhamento e da inércia de rotação sobre as frequências naturais de uma viga laminada engastada em uma extremidade e livre na outra. São plotados gráficos mostrando a influência do cisalhamento e da orientação das fibras sobre as frequências naturais da viga. Conclui-se deste trabalho que a frequência decai de forma aproximadamente linear com o aumento da orientação das fibras de  $0^\circ$  a aproximadamente  $50^\circ$ , e acima de  $50^\circ$  o decréscimo torna-se menor.

Uma teoria de viga baseada na teoria clássica da laminação é apresentada por Vinson e Sierakowski (1987). Uma solução exata para a vibração livre de uma viga sobre apoios simples é descrita, assim como a solução analítica para o caso, pelo modelo de Euler-Bernoulli. Segundo o autor, uma viga de material compósito possui o mesmo modo de vibração de uma viga feita a partir de material isotrópico, porém, a equação para determinação das frequências naturais da viga laminada difere daquela para material isotrópico.

Chandrashekhara et al. (1990) determinaram as frequências naturais de uma viga laminada pela teoria de Cisalhamento de Primeira Ordem, onde é adicionada a inércia de rotação e o efeito da deformação causada pelo cisalhamento, considerando diferentes condições de apoios elásticos nas extremidades. As frequências adimensionais foram tabeladas para di-

ferentes ângulos de orientação das fibras das lâminas, assim como para duas relações de comprimento sobre espessura da viga. Os autores concluíram que para relações comprimento/espessura altas, a teoria de Cisalhamento de Primeira Ordem, fornece os mesmos resultados obtidos pela teoria Clássica da Laminação, utilizada por Vinson e Sierakowski (1987), ou seja, para vigas finas longas o efeito da deformação causada pelo cisalhamento pode ser desconsiderado. Os autores afirmam que o efeito da deformação causada pelo cisalhamento deve ser levada em conta na predição das frequências naturais de um laminado. Trabalho parecido foi feito por Krishnaswamy et al. (1992) que utilizaram estes mesmos modelos, porém analisaram também o efeito do número de lâminas e diferentes disposições de laminados sobre a resposta final.

Vibrações livres de uma viga laminada “*crossply*” não simétrica são estudadas no trabalho de Abramovich e Livshits (1994), baseando-se na teoria de Timoshenko. Seis diferentes condições de apoios elásticos foram consideradas e os resultados obtidos pelo presente método foram comparados com os obtidos pela teoria clássica de Euler-Bernoulli. São determinadas as frequências para dois casos simétricos e para um caso não simétrico para uma relação comprimento/espessura igual a 10.

Uma formulação baseada no Método dos Elementos Finitos e na Teoria de Deformação de Primeira Ordem é apresentada por Nabi e Ganesan (1994) para obter a solução das vibrações livres de uma viga compósita levando-se em conta os deslocamentos extensional, flexural e torcional da viga. É apresentado o efeito da orientação das fibras, da geometria da viga e da deformação por cisalhamento sobre as frequências naturais adimensionais.

Khdeir e Reddy (1994) desenvolveram um estudo comparativo entre a teoria clássica de Euler-Bernoulli e as teorias de Cisalhamento de Primeira Ordem, de Segunda Ordem e de Terceira Ordem. São determinadas as frequências fundamentais adimensionais da viga com diferentes condições de apoios elásticos e diferentes relações comprimento/espessura. Os autores concluíram que o erro entre as diferentes teorias de deformação de cisalhamento é muito menor do que o erro entre qualquer uma delas e o modelo de Euler-Bernoulli.

Farghaly e Gadelrab (1995) fazem um estudo adimensional sobre o comportamento dinâmico de uma viga escalonada em duas partes usando o modelo de Timoshenko. Quatro materiais compósitos são considerados no trabalho: grafite/epóxi, carbono/epóxi, boro/epóxi e fibra de vidro-E/epóxi. A variação da fração de volume de fibra sobre as frequências também é analisada em forma de gráficos.

A análise de vibrações e de amortecimento de vigas revestidas com material compósito laminado é estudada por Hamada (1995). São investigadas numericamente as variações nas frequências naturais e nas propriedades de amortecimento considerando-se diferentes orientações das lâminas e dois núcleos de material isotrópico são utilizados, no caso aço e alumínio. Segundo os autores, de acordo com a escolha da orientação das fibras da camada de revestimento, há a possibilidade de se melhorar a capacidade de amortecimento da viga sem que ocorram variações consideráveis nas frequências naturais da mesma.

Lam e Sathiyamoorthy (1996) analisam a influência de um impacto de baixa velocidade sobre a resposta dinâmica de uma viga laminada escalonada. Inicialmente avalia-se uma viga contínua, e depois uma viga escalonada em duas e três partes, variando-se entre vigas simétricas, não simétricas, “*cross-ply*” e “*angle-ply*” sob diferentes condições de apoios elásticos.

Maher et al. (1999) modelaram o amortecimento de vibrações em uma viga de material compósito laminado e concluíram que o ângulo de orientação das lâminas externas tem efeitos significantes sobre os parâmetros modais do compósito comparado com o ângulo das lâminas internas, e que o ângulo de orientação das lâminas de 45°, no qual o parâmetro cisalhamento atinge seus valores mais altos, tem a maior influência sobre os parâmetros modais em relação às outras orientações.

Yildirim e Kiral (2000) determinaram as frequências naturais de uma viga laminada simétrica pelo método da matriz de transferência. A inércia de rotação e o efeito do cisalhamento são considerados na análise da viga de Timoshenko baseada na teoria da deformação de Cisalhamento de Primeira Ordem. Comparam-se os resultados obtidos pela teoria de Timoshenko com resultados obtidos pela teoria de Euler-Bernoulli. É avaliada a influência da rela-



ção comprimento/espessura de uma faixa de 3 a 20 sobre as frequências naturais adimensionais, e as condições de contorno foram engastada-engastada, engastada-apoiada e engastada-livre. De acordo com os gráficos plotados, nota-se que o erro relativo entre as duas teorias estudadas tende a se tornar mínimo à medida que a relação comprimento/espessura aproxima-se de 20.

Um método analítico para a determinação das frequências naturais de vigas laminadas e vigas sandwich é desenvolvido por Rao et al. (2001) usando teorias mistas de alta ordem. O princípio de Hamilton é empregado para derivar as equações de equilíbrio. São apresentados os resultados para seis diferentes exemplos incluindo diferentes disposições e propriedades de lâminas e seções transversais de área finas e espessas. As frequências obtidas para vigas finas por este método foram inferiores àquelas obtidas pelas teorias de cisalhamento de alta ordem.

Chen et al. (2004) propõem uma teoria baseada na quadratura diferencial espacial, a fim de se determinar as frequências naturais de uma viga com múltiplas camadas. Os resultados são comparados com aqueles presentes na literatura, e os modos de vibração são apresentados, em função das relações comprimento/espessura, esquema das lâminas e números de camadas.

Singh et al. (2006) pesquisaram um novo modelo para a análise de uma viga compósita não uniforme. Eles desenvolvem certos problemas de autovalor transcendental direto (DTEP) e problemas de autovalor transcendental inverso (ITEP) associados com vigas não-uniformes, escalonadas na largura. As DTEP e ITEP desenvolvidas por eles são direcionadas para vigas compósitas longas e finas, governadas pela equação de viga de Euler-Bernoulli. O comportamento espectral obtido pela DTEP é comparado com resultados existentes. As técnicas experimentais e uma reconstrução precisa de parâmetros físicos baseados em dados experimentais também são apresentados. Os autores também utilizam o programa comercial ANSYS® para a análise em 3-D da viga e apresentam os três primeiros modos de vibração da viga escalonada em estudo.

Jun e Hongxing (2009) desenvolvem a matriz de rigidez dinâmica de vigas laminadas baseando-se na teoria da deformação por Cisalhamento Trigonométrica. A influência do efei-

to do coeficiente de Poisson, do índice de esbeltez, da anisotropia do material e das condições de contorno sobre as frequências naturais é discutida. São utilizadas propriedades referentes a vigas de fibra de vidro e fibra de carbono com resina poliéster e epóxi, respectivamente.

### **1.3 CONTRIBUIÇÃO DO TRABALHO**

Tendo como base os modelos de viga de Euler-Bernoulli e de Cisalhamento, o presente trabalho apresenta uma metodologia para o cálculo das frequências naturais adimensionais e dimensionais de vigas escalonadas em várias partes, sobre apoios elásticos variáveis e feitas a partir de materiais compósitos laminados.

É também desenvolvido um programa computacional capaz de determinar essas frequências para diferentes condições de contorno e diferentes materiais, no caso compósitos laminados.

### **1.4 CONTEÚDO**

No capítulo 1, é apresentada uma idéia geral acerca do tema estudado, e também é feita uma revisão dos trabalhos publicados na área de modelagem de vigas compósitas, sendo destacadas as principais teorias para a determinação das frequências naturais deste tipo de estrutura.

No capítulo 2, toda a teoria envolvendo os materiais compósitos laminados é descrita. Inicialmente as definições, termos e tipos de compósitos são apresentados, e depois, todo o desenvolvimento analítico para a determinação das equações referentes às vigas laminadas é feito.

No capítulo 3, é feita uma descrição do modelo que rege o comportamento de uma viga escalonada em várias partes, elasticamente apoiada nas extremidades. A obtenção da equa-

ção diferencial de quarta ordem é mostrada, bem como as condições de contorno e a matriz dos coeficientes.

No capítulo 4, a validação dos resultados numéricos é feita para vigas contínuas e escalonadas em duas partes, laminadas e isotrópicas, com diferentes condições de contorno.

No capítulo 5, é apresentado todo o procedimento experimental referente à confecção dos modelos de viga, e ao ensaio de vibrações. São apresentados os espectros de frequência para uma viga contínua, escalonada em duas e em três partes, na condição engastada-livre.

No capítulo 6, são apresentados os resultados gerados com base nas teorias propostas e nos modelos numéricos desenvolvidos, sendo analisados parâmetros de interferência sobre as frequências naturais, tais como a orientação das fibras das lâminas.

As conclusões da dissertação são apresentadas no capítulo 7, com comentários sobre alguns dos resultados teóricos e experimentais, além de sugestões para trabalhos futuros.

Nos apêndices A e B são apresentados com mais pormenores todo o equacionamento dos modelos de vigas contínua de Euler-Bernoulli e Cisalhamento, as considerações feitas para uma viga contínua, além do procedimento usado para obter as frequências naturais e os modos de vibração. Já no apêndice C são apresentadas as fotos e as especificações técnicas dos equipamentos utilizados nos ensaios experimentais.

## **CAPÍTULO 2**

# **MATERIAIS COMPÓSITOS LAMINADOS**

Antes de se abordar o assunto vibrações em compósitos laminados, é interessante primeiro conhecer este tipo de material, sua definição e classificação, bem como sua nomenclatura. Sendo assim, seguem as informações inerentes a esta classe de material, e posteriormente, nos próximos capítulos, um aprofundamento sobre os métodos analíticos utilizados para descrever seu comportamento dinâmico.

### **2.1 DEFINIÇÕES**

Um compósito consiste de um material multifásico feito artificialmente onde as fases constituintes devem ser quimicamente diferentes e devem estar separadas por uma interface distinta. A maioria dos compósitos foi criada para melhorar combinações de características mecânicas tais como a rigidez, tenacidade e resistência nas condições ambientes e a altas temperaturas (Callister, 2002).

Os materiais que formam um compósito podem ser classificados em uma fase contínua, também conhecida como matriz, e em uma fase dispersa, conhecida com reforçante. De acordo com Tita (1999), a função da matriz é manter os reforçantes unidos, transmitindo a

eles o carregamento aplicado. Já os reforçantes, têm como função suportar os carregamentos transmitidos pela matriz.

Segundo Correia (1988), citado por Tinô (2010), as matrizes têm como função básica atuar como um caminho de transferência de carga para os reforços através das tensões cisalhantes, assim como também proteger o reforço da abrasão e da ação do ambiente externo, que este venha a sofrer. As matrizes se classificam em: orgânicas (poliméricas), metálicas e cerâmicas, sendo a primeira, a mais difundida no mercado, de acordo com o autor.

Daniel e Ishai (1994) afirmam que as propriedades de um compósito dependem das propriedades dos constituintes, da geometria e da distribuição das fases, sendo que um dos parâmetros mais importantes é a fração volumétrica da fibra, ou reforço. Quanto mais desuniforme é a distribuição do reforço, mais heterogêneo é o material e mais susceptível à ocorrência de falhas também.

Dentre as várias classificações para esses materiais, está a apresentada por Hull (1988), que diz que os materiais compósitos estão divididos em duas grandes categorias: materiais compósitos naturais, aqueles criados pela natureza, como por exemplo a madeira, os ossos e os músculos, e materiais compósitos sintéticos, aqueles fabricados pelo homem. Ainda segundo este autor, a mais relevante classificação é quanto ao tamanho, forma e distribuição dos reforços, como mostrado na Tabela 2.1, a qual mostra as possíveis distribuições das fibras em função de seu tamanho e forma.

Os materiais compósitos fibrosos são constituídos de fibras aderidas a uma matriz, normalmente fibras que possuem um alto módulo de elasticidade e alta resistência mecânica, envolvida na matriz com interface entre elas (Matthews e Rawlings, 1994).

No que diz respeito aos tipos de fibras fabricados atualmente, Tinô (2010) destaca as fibras de vidro, de carbono, de aramida (kevlar) e de boro. Ainda segundo o autor, as fibras de vidro são as mais utilizadas mundialmente devido às suas propriedades físicas e mecânicas, à sua grande aderência para a maioria dos sistemas fibra/matriz e ao seu baixo custo.

Tabela 2.1 – Classificação dos materiais compósitos sintéticos quanto à forma, tamanho e distribuição dos reforços. Fonte: Hull (1988).

Forma	Tamanho	Distribuição
Fibras imersas em matrizes	Contínua	Alinhada ou aleatória
	Curta	Aleatória
Particulados imersos em matrizes	Indefinido	Aleatória
Estrutura laminar	Indefinido	Ordenada
		Aleatória

Belo (2006) caracteriza os compósitos em três grupos principais: compósitos fibrosos (Figura 2.1 (a),(b) e (c)), aqueles constituídos de fibras curtas ou longas envolvidas na matriz, compósitos particulados (Figura 2.1 (d)), constituídos de pequenas partículas dispersas na matriz, e compósitos laminados (Figura 2.1 (e) e (f)), aqueles formados por uma ou mais lâminas.

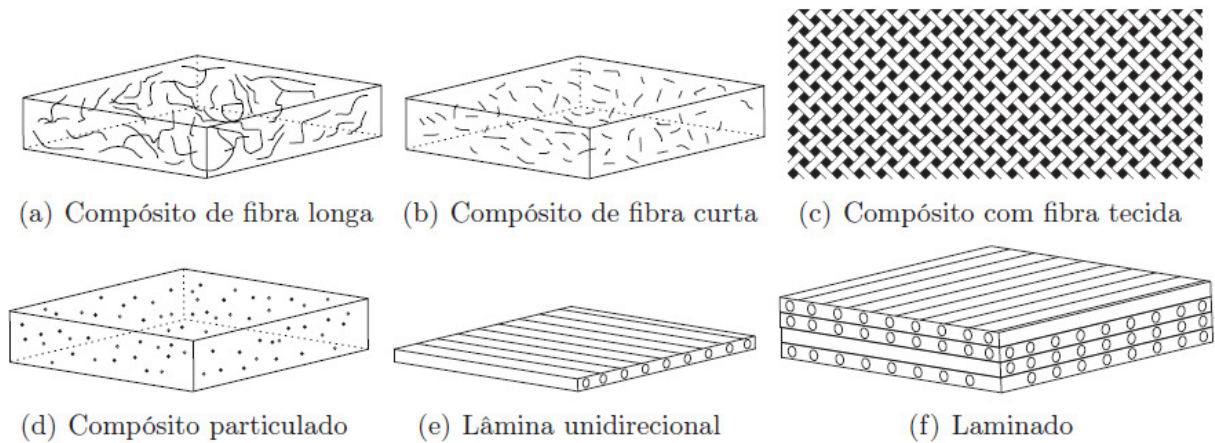


Figura 2.1 - Tipos de compósitos. Fonte: Belo (2006).

Farão parte do escopo deste trabalho os compósitos laminados reforçados com fibras bidirecionais, devido à sua grande aplicação nas indústrias. Sendo assim, seguem as informações referentes à nomenclatura e propriedades mecânicas deste tipo de compósito.

## 2.2 ANÁLISE DE LAMINADOS

De acordo com Belo (2006), a lâmina representa o bloco fundamental da estrutura e consiste de fibras envoltas na matriz. Já o laminado, é o conjunto de lâminas empilhadas orientadas sob diversas direções a fim de se promover o aumento das características físicas e mecânicas que somente uma lâmina teria. A sequência de empilhamento das lâminas segundo as várias direções é chamado de esquema de laminação. A orientação das fibras em várias direções e a sequência de empilhamento das lâminas é que garantem aos compósitos laminados a otimização da estrutura conforme um dado carregamento.

Daniel e Ishai (1994) dizem que as lâminas (ou camadas) podem ter diferentes espessuras, diferentes orientações das fibras e consistir de diferentes materiais, desde que o material difira de camada para camada. É mais conveniente analisar um laminado usando um sistema comum fixo de coordenadas  $(x,y,z)$ , como mostrado na Figura 2.2. A orientação de uma dada camada é dada pelo ângulo entre o eixo de referência  $x$  e o eixo principal do material da camada (orientação da fibra). Segundo os autores, um laminado é caracterizado de modo que se indique o número, o tipo, a orientação e a sequência de empilhamento de suas camadas. A seguir, são dados alguns exemplos de nomenclaturas de laminados:

- Unidirecional de 6 camadas:

$$[0/0/0/0/0/0] = [0_6]$$

No laminado unidirecional, as fibras de cada camada estão orientadas somente em uma dada direção, a  $0^\circ$ .

- Simétrico “*Crossply*”:

$$[0/90/90/0] = [0/90]_s$$

$$[0/90/0] = [0/\overline{90}]_s$$

Compósitos “*Crossply*” possuem uma combinação de ângulos das camadas entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$ .

- Simétrico “*Angle-Ply*”:

$$[+45/-45/-45/+45] = [\pm 45]_S$$

$$[30/-30/30/-30/-30/30/-30/30] = [\pm 30]_{2S}$$

- Não - simétrico “*Angle-Ply*”:

$$[30/-30/30/-30/30/-30/30/-30] = [\pm 30]_4$$

Compósitos “*Angle-Ply*” possuem as camadas orientadas a  $+\theta$  e a  $-\theta$ .

- Multi – direcional:

$$[0/45/-45/-45/45/0] = [0/\pm 45]_S$$

$$[0/0/45/-45/0/0/0/0/-45/45/0/0] = [0_2/\pm 45/0_2]_S$$

$$[0/15/-15/15/-15/0] = [0/\pm 15/\pm 15/0]_T = [0/(\pm 15)_2/0]_T$$

- Híbrido:

$$[0^K/0^K/45^C/-45^C/90^G/-45^C/45^C/0^K/0^K]_T = [0_2^K/\pm 45^C/\overline{90}^G]_S$$

sendo número subscrito = múltiplo das camadas ou grupos de camadas,  $^S$  = Seqüência simétrica,  $^T$  = Número de camadas e  $^-$  = Denota que o laminado é simétrico sobre o plano central da lâmina.

Para o caso do laminado híbrido, os sobrescritos  $K$ ,  $C$  e  $G$  denotam fibras de Kevlar (aramida), carbono (grafite) e vidro, respectivamente.



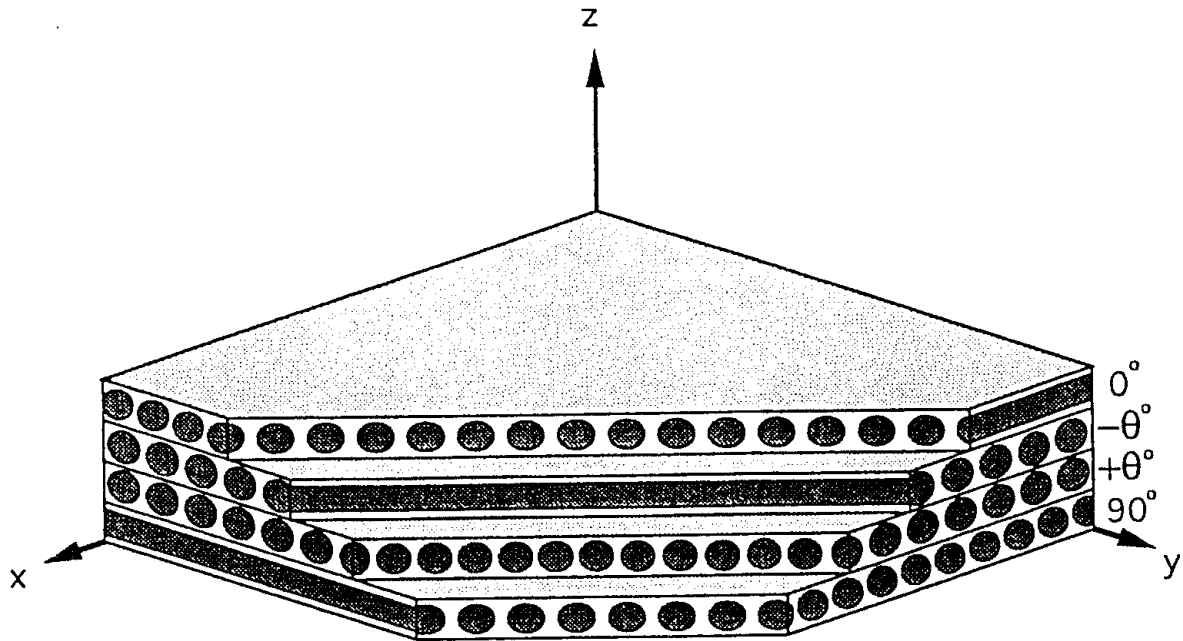


Figura 2.2 - Laminado multi-direcional e sistema de coordenadas. Fonte: Daniel e Ishai (1994).

## 2.2.1 Propriedades elásticas

As propriedades elásticas dos materiais compósitos poliméricos, sendo elas os módulos de elasticidade, módulos de cisalhamento e coeficiente de Poisson, são características mecânicas essenciais para a análise de tensões e o projeto de componentes estruturais utilizados em vários ramos da engenharia.

Vinson e Sierakowski (1987) trataram os compósitos sob dois pontos de vista diferentes. O primeiro, o micromecânico, leva em conta as frações volumétricas e propriedades da fibra e da matriz em separado, de modo que se consiga caracterizar a lâmina em função destas duas, e o segundo, o macromecânico, analisa o laminado usando as propriedades das lâminas, de modo que se obtenham as propriedades longitudinais e transversais de alinhamento das fibras, necessárias para a análise de vigas e de outros elementos estruturais.

Uma das principais vantagens da micro-mecânica, como afirmam Neto e Pardini (2006), é permitir o cálculo das propriedades elásticas de um compósito a partir das propriedades elásticas de seus constituintes, desde que as frações volumétricas dos mesmos sejam conhecidas. O método de obtenção dessas propriedades através deste princípio é conhecido como Regra das Misturas.

Tita (1999) afirma haver dois métodos de obtenção das propriedades elásticas, sendo eles a determinação das propriedades mecânicas por meio da Regra das Misturas ou por ensaios experimentais. Após sua determinação, usa-se um procedimento de cálculo aplicado a materiais compósitos laminados conhecido por Teoria Clássica dos Laminados. Ainda de acordo com o autor, devido à complexidade encontrada em um laminado, esta teoria tende a aproximar os resultados.

Segundo Hull (1981) citado por Tita (1999), algumas considerações devem ser tomadas ao utilizar-se a Teoria Clássica dos Laminados:

- O material é ortotrópico, ou seja, apresenta três eixos de simetria;
- O material apresenta homogeneidade na sua composição;
- A união entre as lâminas é considerada perfeita, de modo que não haja deslocamentos relativos entre as mesmas;
- Faz-se a consideração de estado plano de tensões em cada lâmina;
- As propriedades finais dependem da orientação de cada camada relativa à outra subsequente.

### **2.2.1.1 Regra das misturas**

Um método fácil para se determinar a rigidez de um compósito no qual as fibras estão alinhadas na direção da carga aplicada (Figura 2.3) é assumir que as fases fibra e matriz estão perfeitamente unidas de modo que elas irão deformar-se juntas.

As constantes elásticas necessárias para o projeto com materiais compósitos são:

- $E_1$  ou  $E_{11}$ : Módulo de elasticidade (Pa) na direção 1 ou direção principal do material (paralelo às fibras);
- $E_2$  ou  $E_{22}$ : Módulo de elasticidade (Pa) na direção 2 (perpendicular ao plano das fibras);
- $E_3$  ou  $E_{33}$ : Módulo de elasticidade (Pa) na direção 3 (no sentido da espessura da fibra);
- $G_{12}$ ,  $G_{13}$  e  $G_{23}$ : Módulos de cisalhamento (Pa) nos planos 1-2, 1-3 e 2-3, respectivamente;
- $\nu_{12}$ : Coeficiente de Poisson associado com carregamento na direção 1 e deformação na direção 2;
- $\nu_{13}$ : Coeficiente de Poisson associado com carregamento na direção 1 e deformação na direção 3;
- $\nu_{23}$ : Coeficiente de Poisson associado com carregamento na direção 2 e deformação na direção 3.

Seja a área do “componente fibra” igual a  $A_f$  (m), e a área do “componente matriz”  $A_m$  (m). Pode-se representar as quantidades dos dois componentes em termos de suas frações em volume,  $V_f$  (%) e  $V_m$  (%), logo, sua soma é  $V_f + V_m = 1$ . A fração em volume de fibra,  $V_f$ , é o parâmetro material crítico para a maioria dos propósitos.

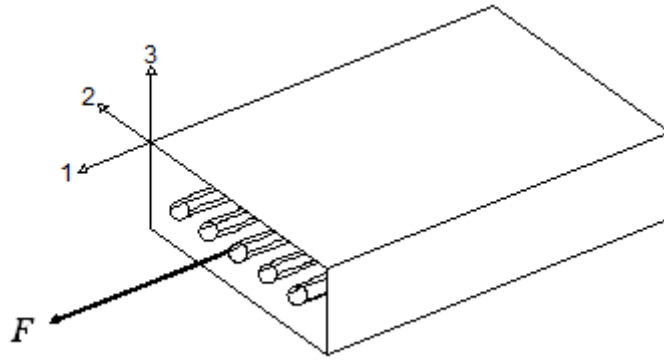


Figura 2.3 - Modelo simplificado de um compósito unidirecional sob ação de uma carga  $F$ .

A carga aplicada (em N) sobre o compósito é dividida em duas fases, de modo que  $F = F_f + F_m$  e a deformação relativa na direção principal 1 (longitudinal à fibra) é a mesma tanto para a matriz quanto para a fibra, logo  $\varepsilon_1 = \varepsilon_f = \varepsilon_m$ . Como a tensão é uma relação entre a força aplicada e a área:

$$\sigma_1 A = \sigma_f A_f + \sigma_m A_m \quad (2.1)$$

Da relação tensão versus deformação de um material sabe-se que:

$$\sigma_f = \varepsilon_1 E_f \quad (2.2)$$

$$\sigma_m = \varepsilon_1 E_m \quad (2.3)$$

Sendo  $E_f$  e  $E_m$  os módulos de elasticidade da fibra e da matriz (Pa), respectivamente, na direção principal do material. Dividindo-se toda a Equação (2.1) por  $\varepsilon_1$ , obtém-se:

$$E_1 A = E_f A_f + E_m A_m \quad (2.4)$$

Como  $V_f = \frac{A_f}{A}$  e  $V_m = \frac{A_m}{A}$ , e  $V_f + V_m = 1$ , então a determinação do módulo de elasticidade na direção principal (comprimento das fibras) do material é dada pela seguinte equação:

$$E_1 = E_f V_f + E_m (1 - V_f) \quad (2.5)$$

De acordo com Tita (1999), seguindo-se o mesmo raciocínio para cargas aplicadas perpendicularmente às fibras e de cisalhamento à lâmina, tem-se a seguinte equação, dada por Vinson e Sierakowski (1987):

$$P = \frac{(P_f V_f + \eta P_m V_m)}{(V_f + \eta V_m)} \quad (2.6)$$

sendo que para as constantes elásticas  $P$ , a obtenção de  $P_f$ ,  $P_m$  e  $\eta$  são dadas na Tabela 2.2. Hahn (1980), citado por Vinson e Sierakowski (1987), codificaram certos resultados para fibras de seção circular distribuídas aleatoriamente em um plano normal às fibras orientadas unidirecionalmente. Para este caso, o compósito é macroscopicamente, transversalmente isotrópico, de modo que  $(\ )_{12} = (\ )_{13}$  e  $(\ )_{22} = (\ )_{33}$ . Onde, dentro dos parênteses as quantidades deveriam ser  $E$  (Módulo de Elasticidade),  $G$  (Módulo de Cisalhamento) ou  $\nu$  (Coeficiente de Poisson).

Na Tabela 2.2, para a determinação das constantes elásticas, é necessário se conhecer o valor de outras constantes. Assim sendo, seguem as equações para obtenção dessas constantes:

$$\eta_6 = \frac{1 + \frac{G_m}{G_{12f}}}{2} \quad (2.7)$$

sendo  $G_{12f}$  o módulo de cisalhamento da fibra (Pa) e  $G_m$  o módulo de cisalhamento da matriz (Pa). Se a matriz for isotrópica,  $G_m = \frac{E_m}{2(1 + \nu_m)}$ , sendo  $\nu_m$  o coeficiente de Poisson da matriz e  $E_m$  o módulo de elasticidade da mesma (Pa).

$$\eta_4 = \frac{3 - 4\nu_m + \frac{G_m}{G_{23f}}}{4(1 - \nu_m)} \quad (2.8)$$

$G_{23f}$  é o módulo de cisalhamento da fibra (Pa).

Tabela 2.2 – Determinação das constantes elásticas. Fonte: Vinson e Sierakowski (1987).

Constante Elástica	$P$	$P_f$	$P_m$	$\eta$
$E_1$	$E_1$	$E_f$	$E_m$	1
$\nu_{12}$	$\nu_{12}$	$\nu_{12f}$	$\nu_m$	1
$G_{12}$	$\frac{1}{G_{12}}$	$\frac{1}{G_{12f}}$	$\frac{1}{G_m}$	$\eta_6$
$G_{23}$	$\frac{1}{G_{23}}$	$\frac{1}{G_{23f}}$	$\frac{1}{G_m}$	$\eta_4$
$K_T$	$\frac{1}{K_T}$	$\frac{1}{K_f}$	$\frac{1}{K_m}$	$\eta_K$

$$\eta_K = \frac{1 + \frac{G_m}{K_f}}{2(1 - \nu_m)} \quad (2.9)$$

Seja ainda:

$$K_f = \frac{E_f}{2(1 - \nu_f)} \quad (2.10)$$

e

$$K_m = \frac{E_m}{2(1 - \nu_m)} \quad (2.11)$$

De posse das Equações (2.10) e (2.11), torna-se possível a obtenção da constante  $K_T$  (calculada pela Equação 2.6), a qual será utilizada na determinação de  $E_2$ , dada pela seguinte equação:

$$E_2 = E_3 = \frac{4K_T G_{23}}{K_T + mG_{23}} \quad (2.12)$$

com

$$m = 1 + \frac{4K_T v_{12}^2}{E_{11}} \quad (2.13)$$

Ainda de acordo com Vinson e Sierakowski (1987), Han (1980) notou que quando  $\frac{G_m}{G_f} < 0,05$ , a aproximação dos parâmetros  $\eta$  é

$$\eta_6 \approx 0,5; \eta_4 = \frac{3 - 4v_m}{4(1 - v_m)} \text{ e} \quad (2.14)$$

$$\eta_k = \frac{1}{2(1 - v_m)}$$

e se a matriz for epóxi, o coeficiente de Poisson da matriz é  $v_m = 0,35$ . Então  $\eta_4 = 0,63$  e  $\eta_k = 0,77$ .

E por último, o coeficiente de Poisson  $v_{23}$  pode se escrito como:

$$v_{23} = v_{12f} V_f + v_m (1 - V_f) \left( \frac{1 + v_m - v_{12} \left( \frac{E_m}{E_1} \right)}{1 - v_m^2 + v_m v_{12} \left( \frac{E_m}{E_1} \right)} \right) \quad (2.15)$$

Em alguns casos, somente as frações em peso da fibra e da matriz,  $W_f$  e  $W_m$  (%) são conhecidas, nestes casos, a fração em volume de fibra é obtida pela seguinte equação, onde  $\rho_f$  e  $\rho_m$  são as densidades da fibra e da matriz ( $\text{kg/m}^3$ ), respectivamente:

$$V_f = \frac{\rho_m W_f}{\rho_m W_f + \rho_f W_m} \quad (2.16)$$

Barbero (1998) propõe uma outra equação para a determinação do módulo de cisalhamento  $G_{23}$ , de modo que a mesma não seja uma função do módulo de cisalhamento da fibra no plano 2-3 ( $G_{23f}$ ), parâmetro este difícil de ser determinado na maioria das vezes. Assim, a equação é dada da seguinte maneira:

$$G_{23} = G_m \frac{V_f + \eta_{23}(1-V_f)}{\eta_{23}(1-V_f) + V_f \frac{G_m}{G_f}} \quad (2.17)$$

sendo

$$\eta_{23} = \frac{3 - 4\nu_m + \frac{G_m}{G_f}}{4(1 - \nu_m)} \quad (2.18)$$

Gay et al. (2002) afirmam que é necessária uma correção nas propriedades elásticas quando se trata de tecidos, os quais são feitos de fibras orientadas ao longo de duas direções perpendiculares, como mostrado na figura 2.4, onde torna-se possível a observação da disposição de um conjunto de fibras em relação ao outro. Assim sendo, usa-se a seguinte notação:

$n_1$  = número de conjuntos de fibras por metro na direção do comprimento da lâmina;

$n_2$  = número de conjuntos de fibras por metro na direção da largura da lâmina;

$$k = \frac{n_1}{n_1 + n_2} \quad (2.19)$$



As constantes elásticas para o tecido são dadas então por:

$$E_1' = k \times E_1 + (1-k) \times E_2 \quad (2.20)$$

$$E_2' = (1-k) \times E_1 + k \times E_2 \quad (2.21)$$

$$G_{12}' = G_{12} \quad (2.22)$$

$$v_{12}' = \frac{v_{12}}{\left( k + (1-k) \frac{E_1}{E_2} \right)} \quad (2.23)$$

sendo  $E_1'$  e  $E_2'$  os módulos de elasticidade (Pa) nas direções 1 e 2, respectivamente, para o tecido,  $G_{12}'$  o módulo de cisalhamento (Pa) para o tecido no plano 1-2 e  $v_{12}'$  o coeficiente de Poisson para o tecido.

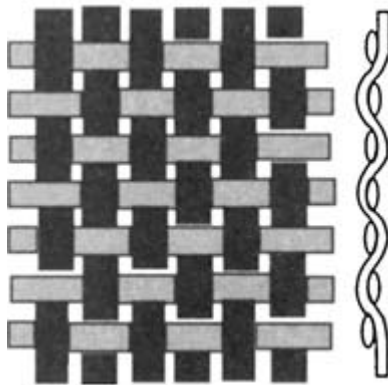


Figura 2.4 - Esquema representativo de um tecido plano. Fonte: Gay et al. (2002).

Logo, conhecendo-se as propriedades dos constituintes e suas frações em volume, pode-se prever as constantes elásticas do laminado, e posteriormente, sua rigidez. Todas as equações apresentadas, foram obtidas desconsiderando-se os efeitos da temperatura e umidade sobre o comportamento do compósito.

## 2.2.2 Teoria Clássica dos Laminados

Usando a Teoria Clássica dos Laminados torna-se possível a obtenção das matrizes de rigidez do compósito, bem como das equações para determinação das forças normais, momentos e forças cortantes atuantes sobre o material. Inicialmente, faz-se o estudo de uma lâmina, para depois dar prosseguimento ao estudo de um laminado.

Como a maioria dos materiais compósitos são finos, devido às suas boas propriedades de resistência, considere-se um pequeno elemento de uma lâmina de espessura constante  $h$ , onde os eixos principais do elemento são os eixos 1 (direção paralela às fibras) e 2 (direção normal às fibras), e que os eixos geométricos da viga, placa ou casca são os eixos  $x$  e  $y$ , como mostrado na Figura 2.5.

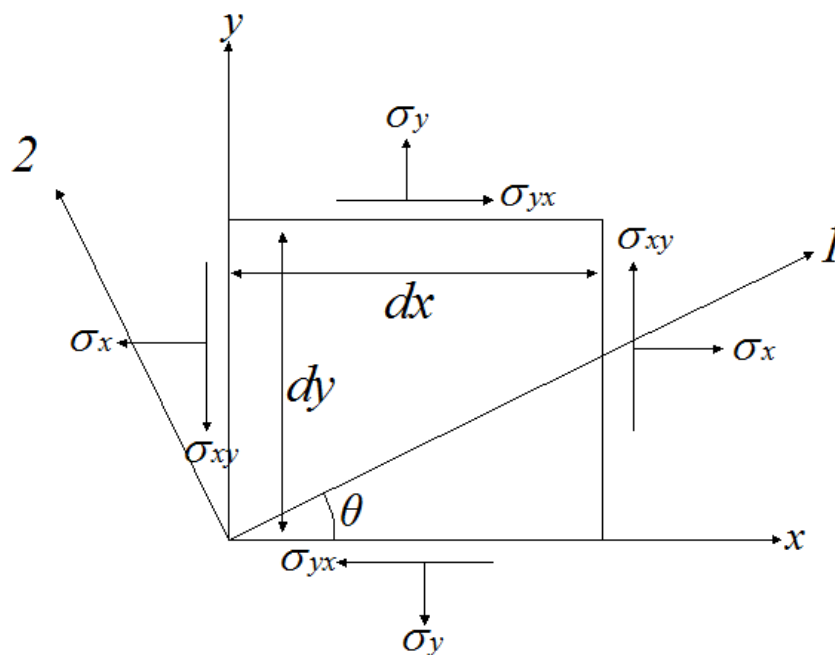


Figura 2.5 - Sistema de coordenadas de um elemento de uma lâmina. Adaptado de Vinson e Sierakowski (1987).

Para se relacionar  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_{xy}$  a  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_{12}$ , o procedimento é exatamente análogo à análise do círculo de Mohr na resistência dos materiais básica, diferindo-se apenas no fato de que aqui as equações estão na forma matricial. Logo vem:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = [T]_{CL} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

sendo

$$[T]_{CL} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & (m^2 - n^2) \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

com  $m = \cos\theta$ ,  $n = \sin\theta$  e o sub-escrito  $CL$  refere-se ao caso clássico bi-dimensional, somente.

De maneira análoga, as relações de deformação são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = [T]_{CL} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

Entretanto, as relações bi-dimensionais devem ser modificadas para se levar em conta o efeito da deformação causada pelo cisalhamento transversal. Neste caso, adiciona-se às Equações (2.24) e (2.26) também as relações de  $\sigma_4 - \varepsilon_4$  e  $\sigma_5 - \varepsilon_5$ . Na direção da fibra, o composto tem muitas das propriedades mecânicas da própria fibra, enquanto que na direção da espessura, as fibras praticamente não afetam, e as propriedades de cisalhamento são dominadas pelo material da matriz que é mais fraco (Vinson e Sierakowski(1987)). Assim se escreve:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

com

$$[T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 0 & 0 & 0 & 2mn \\ n^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & -2mn \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & m & 0 \\ -mn & mn & 0 & 0 & 0 & (m^2 - n^2) \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

ou de outra forma:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

sendo  $[T]^{-1}$  a inversa da matriz  $[T]$ .

Neste ponto, a Lei de Hooke pode ser utilizada para relacionar tensão e deformação. Então a equação geral de uma lâmina de material compósito reforçado com fibras em termos de suas direções principais é:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

sendo a matriz  $[Q]$  a matriz de rigidez de uma lâmina, a qual provém da Teoria da Elasticidade. Na equação (2.32), as quantidades  $Q_{ij}$  (Pa) podem ser escritas como:

$$Q_{11} = \frac{E_{11}(1 - \nu_{23}\nu_{32})}{\Delta}$$

$$Q_{22} = \frac{E_{22}(1 - \nu_{31}\nu_{13})}{\Delta}$$

$$Q_{33} = \frac{E_{33}(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{\Delta}$$

$$Q_{44} = G_{23}$$

$$Q_{55} = G_{13} \quad (2.33)$$

$$Q_{66} = G_{12}$$

$$Q_{12} = \frac{(v_{21} + v_{31}v_{23})E_{11}}{\Delta} = \frac{(v_{12} + v_{32}v_{13})E_{22}}{\Delta}$$

$$Q_{13} = \frac{(v_{31} + v_{21}v_{32})E_{11}}{\Delta} = \frac{(v_{13} + v_{12}v_{23})E_{33}}{\Delta}$$

$$Q_{23} = \frac{(v_{32} + v_{12}v_{31})E_{22}}{\Delta} = \frac{(v_{23} + v_{21}v_{13})E_{33}}{\Delta}$$

$$\Delta = 1 - v_{12}v_{21} - v_{23}v_{32} - v_{31}v_{13} - 2v_{21}v_{32}v_{13}$$

Se a lâmina for transversalmente isotrópica, ou seja, tiver as mesmas propriedades nas direções 2 e 3, então  $v_{12} = v_{13}$ ,  $G_{12} = G_{13}$ , e  $E_{22} = E_{33}$ . Sendo assim, as Equações (2.33) simplificam-se na seguinte forma:

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{(1 - v_{12}v_{21})}$$

$$Q_{22} = \frac{E_{22}}{(1 - v_{12}v_{21})}$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \frac{v_{21}E_{11}}{(1 - v_{12}v_{21})} = \frac{v_{12}E_{22}}{(1 - v_{12}v_{21})} \quad (2.34)$$

$$Q_{66} = G_{12}$$

$$v_{21} = \frac{v_{12}E_{22}}{E_{11}}$$

Utilizando essas equações simplificadas e desprezando-se o efeito causado pelo cisalhamento, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

Quando os eixos estruturais  $x$ ,  $y$  e  $z$  não estão alinhados com os eixos principais 1, 2 e 3, como indicado na Figura 2.4, uma transformação de coordenadas é necessária. Para isso utiliza-se a Equação (2.31) na Equação (2.32), logo:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 & \bar{Q}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{36} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

sendo  $[\bar{Q}] = [T]^{-1}[Q][T]$ , ou:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11}m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}n^4 \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})m^2n^2 + Q_{12}(m^4 + n^4) \\ \bar{Q}_{13} &= Q_{13}m^2 + Q_{23}n^2 \\ \bar{Q}_{16} &= -mn^3Q_{22} + m^3nQ_{11} - mn(m^2 - n^2)(Q_{12} + 2Q_{66}) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}m^4 \\ \bar{Q}_{23} &= Q_{13}n^2 + Q_{23}m^2 \\ \bar{Q}_{33} &= Q_{33} \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\bar{Q}_{26} = -m^3 n Q_{22} + mn^3 Q_{11} + mn(m^2 - n^2)(Q_{12} + 2Q_{66})$$

$$\bar{Q}_{36} = (Q_{13} - Q_{23})mn$$

$$\bar{Q}_{44} = Q_{44}m^2 + Q_{55}n^2$$

$$\bar{Q}_{45} = (Q_{55} - Q_{44})mn$$

$$\bar{Q}_{55} = Q_{55}m^2 + Q_{44}n^2$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12})m^2 n^2 + Q_{66}(m^2 - n^2)^2$$

Novamente, para cálculos simples ou aproximações, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

Até agora, foram formuladas as equações constitutivas equivalentes a uma lâmina de um material compósito, porém, sabe-se que uma estrutura compósita (viga, placa ou casca) pode ser constituída de várias lâminas, as quais unidas, formam o componente.

Daqui para frente, as equações desenvolvidas passam a ser relativas ao laminado, as equações para os momentos, forças normais e forças cortantes serão apresentadas, assim como a terminologia utilizada quando se utiliza esse tipo de material.

Assume-se que o laminado consiste de lâminas perfeitamente coladas, e as colas (matriz) são assumidas ser infinitesimalmente finas. Os deslocamentos são contínuos através dos contornos da lâmina de modo que nenhuma lâmina deslize em relação à outra. Então, o laminado age como uma camada singular (Reddy e Miravete, 1995).



De acordo com Vinson e Sierakowski (1987) em qualquer corpo elástico (Figura 2.6), considerando-se deformação elástica linear, os deslocamentos são dados por:

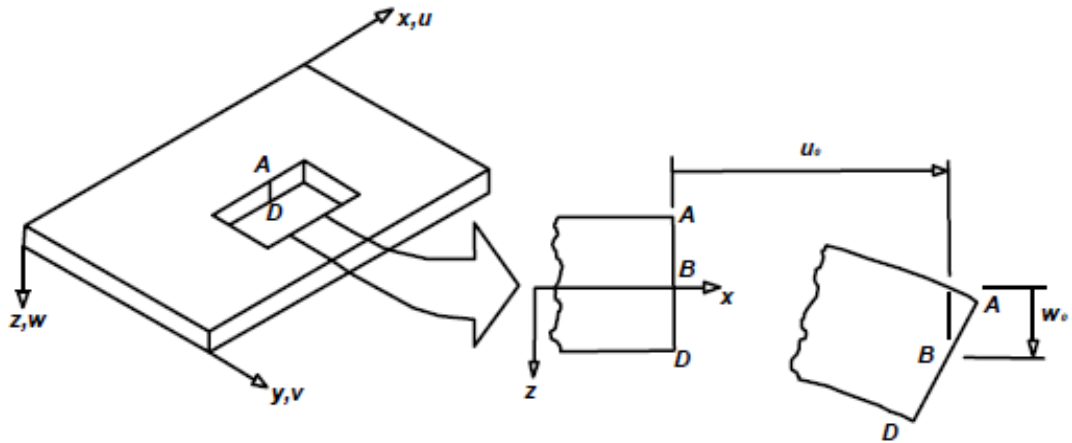


Figura 2.6 - Representação dos deslocamentos de um laminado. Adaptado de Reddy e Miravete (1995).

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (2.39)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

sendo  $u$ ,  $v$  e  $w$  os deslocamentos ao longo dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, dados por:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\bar{\alpha}(x, y)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\bar{\beta}(x, y) \quad (2.40)$$

$$w(x, y, z) = w(x, y)$$

sendo  $u_0$ ,  $v_0$  e  $w$  os deslocamentos da superfície central, correspondentes à sua translação, e  $\bar{\alpha}$  e  $\bar{\beta}$  os valores negativos da primeira derivada do deslocamento lateral com relação às coordenadas  $x$  e  $y$  (ou seja,  $\bar{\alpha} = -\frac{\partial w}{\partial x}$  e  $\bar{\beta} = -\frac{\partial w}{\partial y}$ ). Ainda é assumido na teoria clássica, que o elemento na direção da espessura não pode ser estendido nem contraído, uma vez que sofrerá no máximo uma rotação e translação, então  $w(x, y, z) = w(x, y)$ . Substituindo as Equações (2.40) nas Equações (2.39), vem:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial x}, \quad \varepsilon_z = 0 \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left( \bar{\alpha} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \bar{\beta} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + \frac{z}{2} \left( \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.41)$$

As deformações no plano central do laminado são:

$$\varepsilon_{x_0} = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \varepsilon_{y_0} = \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy_0} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \quad (2.42)$$

E as curvaturas são dadas por:

$$\kappa_x = \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x}, \quad \kappa_y = \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial y}, \quad \kappa_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial x} \right) \quad (2.43)$$

Substituindo a Equação (2.41) na Equação (2.43), e considerando-se que a tensão na direção da espessura pode ser desprezada, vem:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k = [\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} \epsilon_{x_0} + z\kappa_x \\ \epsilon_{y_0} + z\kappa_y \\ 2\epsilon_{yz} \\ 2\epsilon_{xz} \\ 2(\epsilon_{xy_0} + \kappa_{xy}z) \end{Bmatrix}_k \quad (2.44)$$

sendo que o subscrito  $k$  representa o número da lâmina.

A representação de um compósito laminado é mostrada na Figura 2.7, onde  $h$  é a espessura do laminado e  $h_k$  é a distância do plano central do compósito à superfície superior da  $k$ -ésima lâmina. Assim, qualquer posição abaixo do plano central é tomada como negativa, e qualquer posição acima do plano central é dada como positiva.

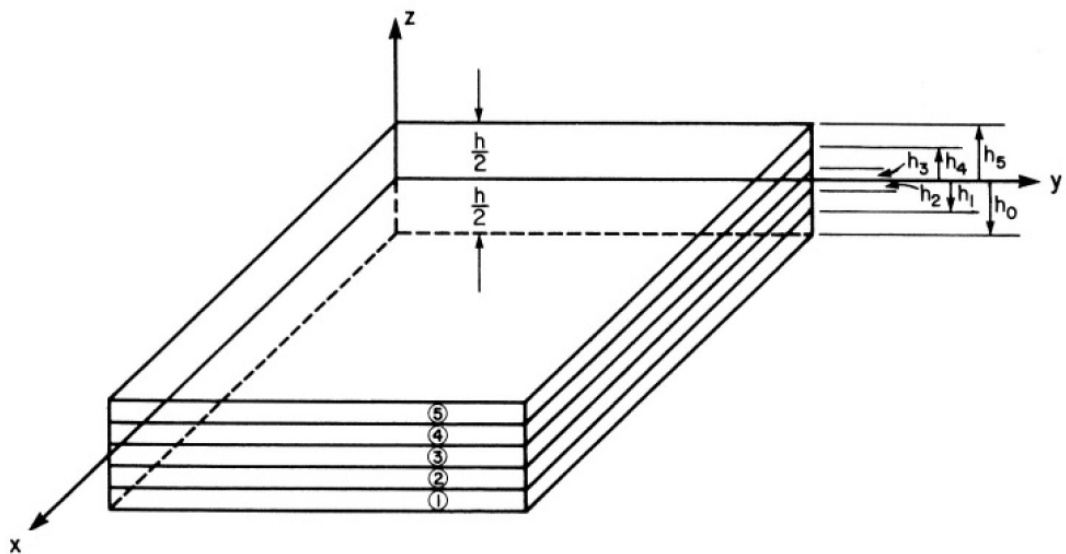


Figura 2.7 - Representação esquemática do empilhamento das lâminas. Fonte: Vinson e Sierakowski (1987).

Parte-se agora, para a determinação das forças e momentos sobre o laminado (Figura 2.8). Para vigas, cascas ou placas laminadas, as forças resultantes  $N$  (N), os momentos  $M$  (N.m) e as forças cortantes  $Q$  (N) são dados por unidade de comprimento, uma vez que nestas

estruturas, estas quantidades variam tanto da direção  $x$  quanto na direção  $y$ , assim essas quantidades são obtidas pela integral das tensões em cada lâmina através da espessura, tal como segue:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz, \quad \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (2.45)$$

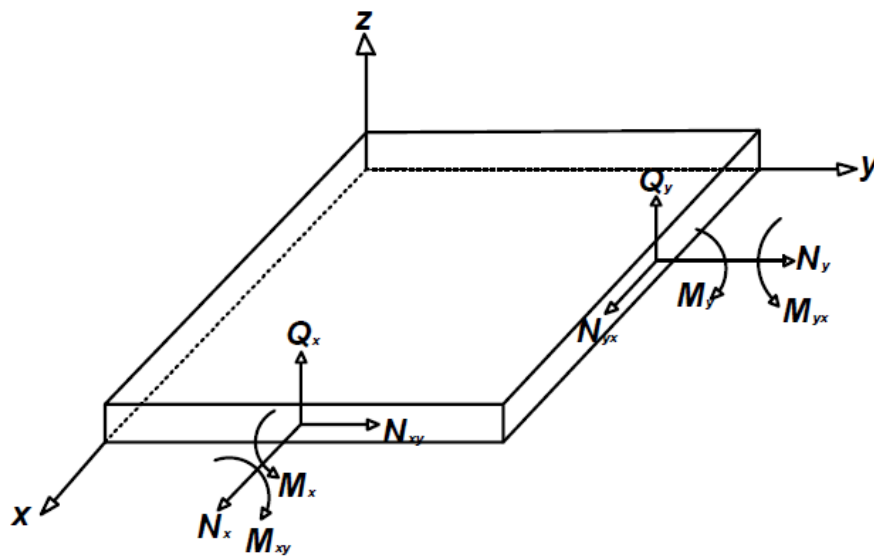


Figura 2.8 - Representação esquemática das forças e momentos atuantes sobre o laminado.

Empregando-se as Equações (2.39) e (2.41) na (2.43), para um laminado com um número  $N$  de camadas, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \left( [\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} \epsilon_{x_0} \\ \epsilon_{y_0} \\ \epsilon_{xy_0} \end{Bmatrix} \right)_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz + [\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \quad (2.46)$$

A Equação (2.46) pode ser escrita como:

$$\{N\} = [A]\{\varepsilon_0\} + [B]\{\kappa\} \quad (2.47)$$

com

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (h_k - h_{k-1}) \quad (2.48)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (2.49)$$

sendo

$i, j = 1, 2 \text{ e } 6;$

[A]: Matriz de rigidez à tração e à compressão (N/m);

[B]: Matriz de acoplamento entre a rigidez planar e a rigidez à flexão (N).

Analogamente, é obtida a expressão para os momentos:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \left( [\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x_0} \\ \varepsilon_{y_0} \\ \varepsilon_{xy_0} \end{Bmatrix}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz + [\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \right) \quad (2.50)$$

ou seja:

$$\{M\} = [B]\{\varepsilon_0\} + [D]\{\kappa\} \quad (2.51)$$

com

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad (2.52)$$

sendo

$i, j = 1, 2$  e  $6$ ;

$[D]$ : Matriz de rigidez à flexão (N.m);

Na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ \hline B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{x_0} \\ \epsilon_{y_0} \\ 2\epsilon_{xy_0} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.53)$$

A inclusão do efeito do cisalhamento sobre o comportamento da estrutura, gera uma melhora na teoria por representar de forma mais próxima o real comportamento da estrutura. As equações para a determinação das forças cortantes são dadas a seguir:

$$Q_x = 2(A_{55}\epsilon_{xz} + A_{45}\epsilon_{yz}) \quad (2.54)$$

$$Q_y = 2(A_{45}\epsilon_{xz} + A_{44}\epsilon_{yz}) \quad (2.55)$$

com

$$A_{ij} = k_c \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (h_k - h_{k-1}) \quad (2.56)$$

para

$$i, j = 4, 5;$$

$k_c$  = fator de correção de cisalhamento, que depende da forma da área da seção transversal (normalmente igual a  $5/6$  para seções retangulares, de acordo com Vinson e Sierakowski (1987));

$h$  = distância da superfície da lâmina até o plano central do laminado (m).

Se o laminado for simétrico em relação ao seu plano central, a matriz  $[B]$  será nula. Tita (1999) afirma que a rigidez final do laminado depende em parte da sequência de empilhamento das lâminas para a determinação das matrizes de rigidez. Assim, nota-se a importância da disposição das fibras sobre o laminado. Essa característica, inerente aos compósitos reforçados com fibras, faz com que esses materiais sejam muito atrativos para o desenvolvimento de projetos.

Então, conhecendo-se a Teoria Clássica dos Laminados e suas equações, torna-se possível o projeto e análise de estruturas compostas por estes materiais, tendo a sua disposição as equações para determinação das tensões, momentos e forças atuantes sobre um compósito, e a possibilidade de mudanças na disposição das lâminas e orientações de suas fibras, de modo que se possa atender a requisitos dos projetos.

## **CAPÍTULO 3**

# **MODELOS DE VIGA COMPÓSITA LAMINADA ESCALONADA EM VÁRIAS PARTES E ELASTICAMENTE APOIADA**

Com a finalidade de se obter as frequências naturais e os modos de vibração de uma viga compósita escalonada em várias partes, sobre apoios elasticamente variáveis, é exibido neste capítulo todo o equacionamento e os conceitos necessários para a modelagem matemática que rege o comportamento da viga em estudo.

Em Inman (2001) é apresentado o equacionamento do modelo de Euler-Bernoulli para a determinação das frequências adimensionais de uma viga contínua em vibração livre. Da mesma forma, em Vinson e Sierakowski (1987) é também apresentado o equacionamento, porém aplicado a materiais compósitos laminados. Este modelo matemático apresentado nos fornece uma boa base teórica para casos onde a geometria da viga pode ser um pouco mais complexa, no que diz respeito ao número de escalonamentos. Sendo assim, a seguir desenvolvem-se todas as hipóteses e considerações para o estudo da viga escalonada mostrada na figura 3.1.



### 3.1 ANÁLISE DINÂMICA DE UMA VIGA ESCALONADA EM VÁRIAS PARTES

Vigas escalonadas são aquelas que apresentam variações nas áreas das seções transversais em função de seu comprimento. Algumas das estruturas complexas mecânicas, civis e aeronáuticas, dentre outras, podem como primeira aproximação, serem idealizadas como vigas escalonadas.

A partir dos modelos matemáticos de vigas uniforme de Euler-Bernoulli e de Cisalhamento aplicados a vigas compósitas, tem-se uma base introdutória para casos mais complexos, de onde se inicia então, o estudo de viga do tipo escalonada em várias partes e com diferentes suportes elásticos nas extremidades, conforme figura 3.1. Nesta figura, observam-se as diferentes seções de área transversal, em função dos diferentes números de lâminas ou camadas para cada trecho. Onde  $A_n$  é a área da seção transversal do  $n$ -ésimo trecho da viga escalonada ( $m^2$ ),  $L_n$  é o comprimento do  $n$ -ésimo trecho da viga escalonada (m) e  $k_{R1}, k_{R2}$  e  $k_{T1}, k_{T2}$  são constantes de rigidez de rotação (Nm/rad) e translação (Nm) nos apoios da viga, respectivamente.

Assim, o equacionamento a ser apresentado neste capítulo, rege o comportamento dinâmico de vigas escalonadas tanto na espessura (em função do número de camadas), quanto na largura da viga. O escalonamento dá-se tanto da maior espessura para a menor, quanto da menor espessura para a maior, aplicando-se assim às diversas condições que podem ser encontradas na prática ou nos projetos envolvendo compósitos.

As vigas escalonadas compósitas possuem as camadas centrais pertencentes a todos os seus trechos, ou camadas globais, sendo que o escalonamento é definido pela adição de uma ou mais camadas nas superfícies superior ou inferior de cada trecho, como mostrado na figura 3.1, onde os trechos da viga são apresentados sob diferentes cores.

Nos Apêndices A e B são apresentados com mais detalhes os equacionamentos relativos aos modelos de viga de Euler-Bernoulli e de Cisalhamento, respectivamente, bem como a linha de raciocínio seguida para a obtenção das equações apresentadas neste capítulo.

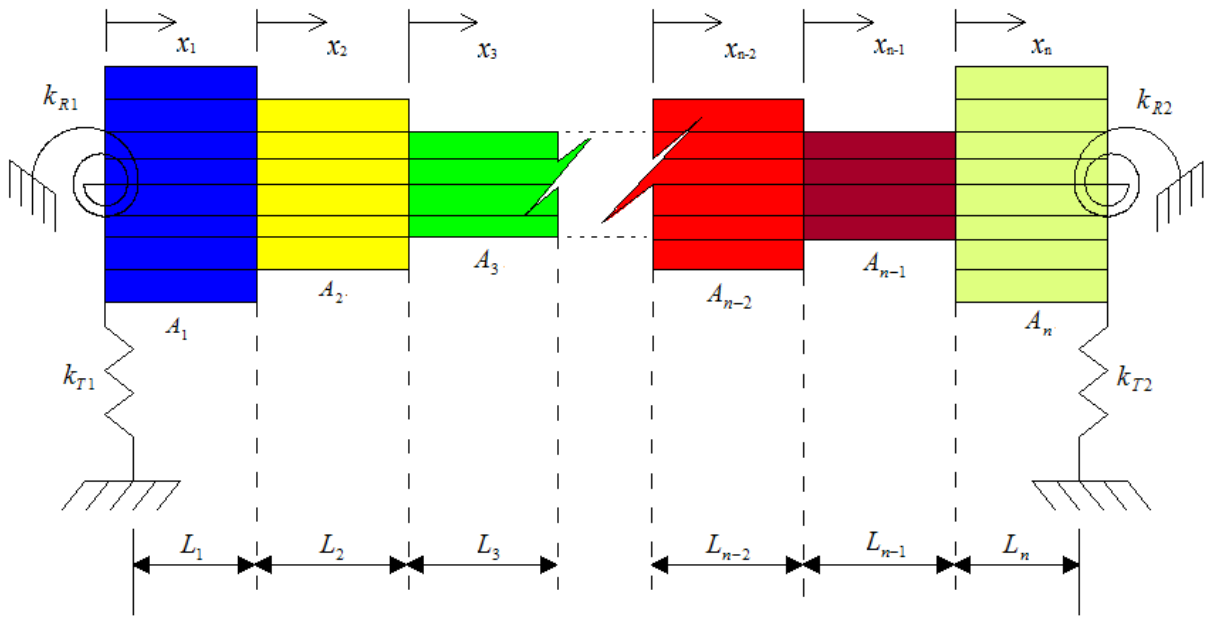


Figura 3.1 – Vista lateral de uma viga laminada escalonada em  $n$  partes.

As equações espaciais dos modelos de viga de Euler-Bernoulli e Cisalhamento são respectivamente:

$$\frac{d^4 X_i(x_i)}{dx_i^4} - \left(\frac{\omega}{c_i}\right)^2 X_i(x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$

$$\frac{d^4 X_i(x_i)}{dx_i^4} + \left(\frac{\omega}{c_i}\right)^2 \frac{1}{k_c \mu} \frac{d^2 X_i(x_i)}{dx_i^2} - \left(\frac{\omega}{c_i}\right)^2 X_i(x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.2)$$

com

$$\beta_i^4 = \frac{\omega^2}{c_i^2} = \frac{\rho A_i \omega^2}{b_i D_{11i}} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{A_{55}}{D_{11}} \quad (3.3)$$

sendo  $\beta_i$  a frequência natural dimensional ( $\text{m}^{-1}$ ),  $\omega$  a frequência natural angular ( $\text{rad/s}$ ),  $c_i$  a velocidade de propagação da onda no meio sólido ( $\text{m/s}$ ),  $\rho$  a massa específica ( $\text{kg/m}^3$ ),  $A_i$  a

área da seção transversal ( $m^2$ ),  $A_{55}$  o coeficiente de cisalhamento (N/m),  $D_{11}$  o primeiro termo da matriz de rigidez à flexão do laminado (N.m),  $\mu$  a relação entre  $A_{55}$  e  $D_{11}$  e  $k_c$  o fator numérico que depende da forma da seção transversal no cisalhamento.

A solução espacial para cada trecho da viga dos modelos estudados é dado pelas equações (3.4) e (3.5), sendo que a solução espacial para o modelo de Euler-Bernoulli é representada pela equação (3.4) e a solução espacial para o modelo de Cisalhamento pela equação (3.5). As constantes  $K_{1+2(i-1)}$  e  $K_{2+2(i-1)}$  da equação (3.5) são representadas pelas equações (3.6) e (3.7).

$$X_i(x_i) = B_{b_1} \text{sen}(\beta_i x_i) + B_{b_2} \cos(\beta_i x_i) + B_{b_3} \text{senh}(\beta_i x_i) + B_{b_4} \cosh(\beta_i x_i) \quad (3.4)$$

$$X_i(x_i) = B_{b_1} \text{sen}(K_{1+2(i-1)} x_i) + B_{b_2} \cos(K_{1+2(i-1)} x_i) + B_{b_3} \text{senh}(K_{2+2(i-1)} x_i) + B_{b_4} \cosh(K_{2+2(i-1)} x_i) \quad (3.5)$$

Para  $0 \leq x_i \leq L_i$

com

$$K_{1+2(i-1)}^2 = \frac{\beta_i^4}{k_c \mu} + \frac{\sqrt{\beta_i^8 + 4\beta_i^4}}{2} \quad (3.6)$$

$$K_{2+2(i-1)}^2 = -\frac{\beta_i^4}{k_c \mu} + \frac{\sqrt{\beta_i^8 + 4\beta_i^4}}{2} \quad (3.7)$$

sendo  $i$  o número de trechos da viga.

A determinação dos índices  $b_1, b_2, b_3$  e  $b_4$  dos coeficientes  $B$  das equações (3.4) e (3.5) é feita através da seguinte equação:

$$\begin{cases} b_1 = 1 + 4 \times (i - 1) \\ b_2 = 2 + 4 \times (i - 1) \\ b_3 = 3 + 4 \times (i - 1) \\ b_4 = 4 + 4 \times (i - 1) \end{cases} \quad (3.8)$$

com  $i = 1, \dots, n$

As condições de contorno para a viga compósita escalonada em  $n$  partes, duas condições para cada apoio e as demais para as junções, são:

- Nas extremidades:

Em  $x_1 = 0$ ,

Para momento de flexão:

$$b_1 D_{11_1} \left. \frac{d^2 X_1(x_1)}{dx_1^2} \right|_{x_1=0} = k_{R1} \left. \frac{dX_1(x_1)}{dx_1} \right|_{x_1=0} \quad (3.9)$$

Para força de cisalhamento:

$$b_1 D_{11_1} \left. \frac{d^3 X_1(x_1)}{dx_1^3} \right|_{x_1=0} = -k_{T1} X_1(x_1) \Big|_{x_1=0} \quad (3.10)$$

Em  $x_n = L_n$ ,

Para momento de flexão:

$$b_n D_{11_n} \left. \frac{d^2 X_n(x_n)}{dx_n^2} \right|_{x_n=L_n} = -k_{R2} \left. \frac{dX_n(x_n)}{dx_n} \right|_{x_n=L_n} \quad (3.11)$$

Para força de cisalhamento:

$$b_n D_{11n} \frac{d^3 X_n(x_n)}{dx_n^3} \Big|_{x_n=L_n} = k_{T2} X_n(x_n) \Big|_{x_n=L_n} \quad (3.12)$$

- Nas junções:

Para deflexão:

$$X_i(x_i) \Big|_{x_i=L_i} = X_{i+1}(x_{i+1}) \Big|_{x_{i+1}=0}, \quad i=1,2,\dots,n \quad (3.13)$$

Para inclinação:

$$\frac{dX_i(x_i)}{dx_i} \Big|_{x_i=L_i} = \frac{dX_{i+1}(x_{i+1})}{dx_{i+1}} \Big|_{x_{i+1}=0} \quad (3.14)$$

Para momento de flexão:

$$b_i D_{11i} \frac{d^2 X_i(x_i)}{dx_i^2} \Big|_{x_i=L_i} = b_{i+1} D_{11i+1} \frac{d^2 X_{i+1}(x_{i+1})}{dx_{i+1}^2} \Big|_{x_{i+1}=0} \quad (3.15)$$

Para força de cisalhamento:

$$b_i D_{11i} \frac{d^3 X_i(x_i)}{dx_i^3} \Big|_{x_i=L_i} = b_{i+1} D_{11i+1} \frac{d^3 X_{i+1}(x_{i+1})}{dx_{i+1}^3} \Big|_{x_{i+1}=0} \quad (3.16)$$

As constantes de integração,  $B_{b_1}, B_{b_2}, B_{b_3}$  e  $B_{b_4}$ , que compõem as equações (3.4) e (3.5) formam o vetor de incógnitas,  $\{b\}$ , de ordem  $4n$ . As oito condições de contorno, referentes às extremidades e as junções, nos fornecem um sistema linear de equações homogêneas que formam a chamada matriz de coeficientes  $[H]$ , como mostrado na equação (3.17). No caso de uma viga escalonada em  $n$  partes, a matriz de coeficientes tem dimensão  $4n \times 4n$ .

$$[H]\{b\} = \{0\} \quad (3.17)$$

Para que o sistema da equação (3.17) tenha solução, é necessário que o determinante da matriz  $[H]$  seja igual a zero, com isso, através de busca de raízes chega-se ao valor das frequências naturais.

$$\det\left(\left[H\left(\hat{\beta}_{1,k}\right)\right]\right) = 0 \quad (3.18)$$

sendo  $\hat{\beta}_{1,k}$  correspondente à  $k$ -ésima frequência natural adimensional, que tem como referência o primeiro trecho da viga escalonada,  $k$  é o índice que indica a  $k$ -ésima frequência natural e 1 o índice de  $\beta$  referente ao primeiro trecho da viga escalonada, uma vez que os valores encontrados ao se igualar o determinante a zero correspondem à frequência adimensional do primeiro trecho da viga.

Há uma relação entre a frequência natural adimensional do 1º trecho ( $\hat{\beta}_{1,k}$ ), e a frequência natural dimensional do 1º trecho ( $\beta_{1,k}$ ), dada pela equação (3.19).

$$\hat{\beta}_{1,k} = \beta_{1,k} L \quad (3.19)$$

De modo que  $L$  seja o comprimento da viga escalonada (m).

A matriz  $[H]$  é uma função da frequência natural do 1º trecho, que servirá como base para o cálculo das frequências naturais dos demais trechos pela equação (3.20). Assim, faz-se uma transferência das frequências dos trechos da viga em função da frequência do primeiro trecho.

$$\bar{\beta}_i = \frac{\hat{\beta}_{i+1}}{\hat{\beta}_i} \rightarrow \hat{\beta}_{i+1} = \hat{\beta}_i \bar{\beta}_i \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad (3.20)$$

com  $\bar{\beta}_i$  a relação entre as frequências naturais de trechos adjacentes de uma viga escalonada e  $\hat{\beta}_i$  e  $\hat{\beta}_{i+1}$  as frequências naturais adimensionais referentes aos trechos,  $i$  e  $i+1$ , da viga escalonada.

Feitas as devidas considerações, parte-se agora para a determinação da matriz  $[H]$  para uma viga escalonada em  $n$  partes, de modo que a mesma seja generalizada para diferentes tipos de apoios elásticos. Uma vez que as matrizes são para vigas escalonadas, logo  $n > 1$ .

Fazendo-se as seguintes definições:

$$\begin{aligned} S_i &= \text{sen} \beta_i L_i \\ C_i &= \text{cos} \beta_i L_i \\ SH_i &= \text{senh} \beta_i L_i \\ CH_i &= \text{cosh} \beta_i L_i \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\bar{b}_i = \frac{b_{i+1}}{b_i} \quad (3.22)$$

$$\overline{D}_{11i} = \frac{D_{11i+1}}{D_{11i}} \quad (3.23)$$

$$R_1 = \frac{k_{R1} L_1}{b_1 D_{111}} \quad (3.24)$$

$$T_1 = \frac{k_{T1} L_1^3}{b_1 D_{111}} \quad (3.25)$$

$$R_2 = \frac{k_{R2} L_n}{b_n D_{11n}} \quad (3.26)$$

$$T_2 = \frac{k_{T2} L_n^3}{b_n D_{11n}} \quad (3.27)$$

com  $\bar{b}_i$  a relação entre os valores da base de trechos adjacentes de uma viga escalonada,  $b_{i+1}$  e  $b_i$  os valores das bases referentes aos trechos,  $i+1$  e  $i$ , de uma viga escalonada (m),  $\bar{D}_{11i}$  a relação entre os valores das rigidezes à flexão de trechos adjacentes da viga escalonada,  $D_{11i+1}$  e  $D_{11i}$  os valores da rigidez à flexão referentes aos trechos  $i+1$  e  $i$  da viga escalonada (Nm),  $R_1$  e  $R_2$  são constantes adimensionais diretamente proporcionais à rigidez de rotação e  $T_1$  e  $T_2$  são constantes adimensionais diretamente proporcionais à rigidez de translação.

Assim, a partir das condições de contorno apresentadas nas equações de (3.9) a (3.16), torna-se possível a montagem da matriz de coeficientes  $[H]$  para os modelos de Euler-Bernoulli e Cisalhamento. Inicialmente a matriz  $[H]$  é declarada como sendo uma matriz quadrada nula de ordem  $4n$ , logo após as quatro primeiras linhas são preenchidas como segue:

- Modelo de Euler- Bernoulli:

Das condições de contorno nos dois apoios da viga, tomando-se a referência proposta na figura 3.1, ou seja, partindo-se sempre da esquerda para a direita, vem:

1ª linha, colunas de 1 até  $4n$  :

$$R_1 \quad \beta_1 L_1 \quad R_1 \quad -\beta_1 L_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad (3.28)$$

2ª linha, colunas de 1 até  $4n$  :

$$\beta_1^3 L_1^3 \quad -T_1 \quad -\beta_1^3 L_1^3 \quad -T_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad (3.29)$$

3ª linha, colunas de  $4n-3$  até  $4n$  :

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad -(\beta_n L_n)S_n + R_2 C_n \quad -(\beta_n L_n)C_n - R_2 S_n \quad (\beta_n L_n)SH_n + R_2 CH \quad (\beta_n L_n)CH_n + R_2 SH_n \quad (3.30)$$

4ª linha, colunas de  $4n-3$  até  $4n$  :



$$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ -\beta_n^3 L_n^3 C_n - T_2 S_n \ \beta_n^3 L_n^3 S_n - T_2 C_n \ \beta_n^3 L_n^3 CH_n - T_2 SH_n \ \beta_n^3 L_n^3 SH_n - T_2 CH_n \quad (3.31)$$

Para a montagem da matriz  $[H]$  a partir da quinta linha, utiliza-se as condições de contorno apresentadas nas equações de (3.13) a (3.16) na sub-matriz  $m$  do algoritmo da equação (3.32).

Início

$n =$  número de escalonamentos;

Para  $n > 2$  faça

$s = 5$  ;

$j = 1$  ;

Para  $i = 1$  até  $n - 1$  faça

$$[m] = \begin{bmatrix} S_i & C_i & SH_i & CH_i & 0 & -1 & 0 & -1 \\ C_i & -S_i & CH_i & SH_i & -\bar{\beta}_i & 0 & -\bar{\beta}_i & 0 \\ -S_i & -C_i & SH_i & CH_i & 0 & \overline{D_{11i} \bar{b}_i \bar{\beta}_i^2} & 0 & -\overline{D_{11i} \bar{b}_i \bar{\beta}_i^2} \\ -C_i & S_i & CH_i & SH_i & \overline{D_{11i} \bar{b}_i \bar{\beta}_i^3} & 0 & -\overline{D_{11i} \bar{b}_i \bar{\beta}_i^3} & 0 \end{bmatrix}; \quad (3.32)$$

$H(s \rightarrow s + 3, j \rightarrow j + 7) = m(1 \rightarrow 4, 1 \rightarrow 8)$  ;

$s = s + 4$  ;

$j = j + 4$  ;

Fim-Para;

Fim-Para;

Fim.

Assim, monta-se uma sub-matriz  $m$  de ordem  $4 \times 8$ , a qual possui  $n-1$  posições dentro da matriz  $[H]$ .

Colocando-se na forma matricial, a matriz dos coeficientes  $[H]$  assume a seguinte forma:

$$[H] = \begin{bmatrix}
R_1 & (\beta_1 L_1) & R_1 & -(\beta_1 L_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\beta_1^3 L_1^3 & -T_1 & -\beta_1^3 L_1^3 & -T_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
S_1 & C_1 & SH_1 & CH_1 & 0 & -1 & 0 & -1 & \dots \\
C_1 & -S_1 & CH_1 & SH_1 & -\bar{\beta}_1 & 0 & -\bar{\beta}_1 & 0 & \dots \\
-S_1 & -C_1 & SH_1 & CH_1 & 0 & \bar{\beta}_1^2 \bar{b}_1 \bar{D}_{111} & 0 & -\bar{\beta}_1^2 \bar{b}_1 \bar{D}_{111} & \dots \\
-C_1 & S_1 & CH_1 & SH_1 & \bar{\beta}_1^3 \bar{b}_1 \bar{D}_{111} & 0 & -\bar{\beta}_1^3 \bar{b}_1 \bar{D}_{111} & 0 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots
\end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -(\beta_n L_n)S_n + R_2 C_n & -(\beta_n L_n)C_n - R_2 S_n & (\beta_n L_n)SH_n + R_2 CH_n & (\beta_n L_n)CH_n + R_2 SH_n \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_n^3 L_n^3 C_n - T_2 S_n & \beta_n^3 L_n^3 S_n - T_2 C_n & \beta_n^3 L_n^3 CH_n - T_2 SH_n & \beta_n^3 L_n^3 SH_n - T_2 CH_n \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
S_{n-1} & C_{n-1} & SH_{n-1} & CH_{n-1} & 0 & -1 & 0 & -1 \\
C_{n-1} & -S_{n-1} & CH_{n-1} & SH_{n-1} & -\bar{\beta}_{n-1} & 0 & -\bar{\beta}_{n-1} & 0 \\
-S_{n-1} & -C_{n-1} & SH_{n-1} & CH_{n-1} & 0 & \bar{\beta}_{n-1}^2 \bar{b}_{n-1} \bar{D}_{11 n-1} & 0 & -\bar{\beta}_{n-1}^2 \bar{b}_{n-1} \bar{D}_{11 n-1} \\
-C_{n-1} & S_{n-1} & CH_{n-1} & SH_{n-1} & \bar{\beta}_{n-1}^3 \bar{b}_{n-1} \bar{D}_{11 n-1} & 0 & -\bar{\beta}_{n-1}^3 \bar{b}_{n-1} \bar{D}_{11 n-1} & 0
\end{array} \right]_{4n \times 4n} \quad (3.33)$$

Partindo-se agora para a definição da matriz dos coeficientes  $[H]$  para o modelo de Cisalhamento, faz-se a seguinte definição:

$$\begin{aligned} S_i &= \text{sen}K_{1+2(i-1)}L_i \\ C_i &= \text{cos}K_{1+2(i-1)}L_i \\ SH_i &= \text{senh}K_{2+2(i-1)}L_i \\ CH_i &= \text{cosh}K_{2+2(i-1)}L_i \end{aligned} \quad (3.34)$$

- Modelo de Cisalhamento:

1ª linha, colunas de 1 até  $4n$ :

$$R_1K_1 \quad (K_1^2L_1) \quad R_1K_2 \quad -(K_2^2L_1) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad (3.35)$$

2ª linha, colunas de 1 até  $4n$ :

$$(K_1^3L_1^3) \quad -T_1 \quad -(K_2^3L_1^3) \quad -T_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad (3.36)$$

3ª linha, colunas de  $4n-3$  até  $4n$ :

$$\begin{aligned} 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad -S_nL_nK_{1+2(n-1)}^2 + R_2C_nK_{1+2(n-1)} \quad -C_nL_nK_{1+2(n-1)}^2 - R_2S_nK_{1+2(n-1)} \quad , \\ SH_nL_nK_{2+2(n-1)}^2 + R_2CH_nK_{2+2(n-1)} \quad CH_nL_nK_{2+2(n-1)}^2 + R_2SH_nK_{2+2(n-1)} \end{aligned} \quad (3.37)$$

4ª linha, colunas de  $4n-3$  até  $4n$ :

$$\begin{aligned} 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad -C_nL_nK_{1+2(n-1)}^3 - T_2S_n \quad S_nL_nK_{1+2(n-1)}^3 - T_2C_n \quad , \\ CH_nL_nK_{2+2(n-1)}^3 - T_2SH_n \quad SH_nL_nK_{2+2(n-1)}^3 - T_2CH_n \end{aligned} \quad (3.38)$$

Para a montagem da matriz  $[H]$  a partir da quinta linha, utiliza-se as condições de contorno apresentadas nas equações de (3.13) a (3.16) na sub-matriz  $m$  do algoritmo da equação (3.39) para o modelo de Cisalhamento.

Início

$n$  = número de escalonamentos;

Para  $n > 2$  faça

$s = 5$  ;

$j = 1$  ;

$o = 1$  ;

Para  $i = 1$  até  $n - 1$  faça

$$[m] = \begin{bmatrix} S_i & C_i & SH_i & CH_i & 0 & -1 & 0 & -1 \\ K_o C_i & -K_o S_i & K_{o+1} CH_i & K_{o+1} SH_i & -K_{o+2} & 0 & -K_{o+3} & 0 \\ -K_o^2 S_i & -K_o^2 C_i & K_{o+1}^2 SH_i & K_{o+1}^2 CH_i & 0 & \overline{D_{11i}} \overline{b_i} K_{o+2}^2 & 0 & -\overline{D_{11i}} \overline{b_i} K_{o+3}^2 \\ -K_o^3 C_i & K_o^3 S_i & K_{o+1}^3 CH_i & K_{o+1}^3 SH_i & \overline{D_{11i}} \overline{b_i} K_{o+2}^3 & 0 & -\overline{D_{11i}} \overline{b_i} K_{o+3}^3 & 0 \end{bmatrix};$$

$H(s \rightarrow s+3, j \rightarrow j+7) = m(1 \rightarrow 4, 1 \rightarrow 8)$  ;

$s = s + 4$  ;

$j = j + 4$  ;

$o = o + 2$  ;

Fim-Para;

Fim-Para;

Fim.

(3.39)

Logo, a matriz  $[H]$  para o modelo de cisalhamento, fazendo-se as seguintes definições, pode ser escrita na forma da equação (3.42):

$$Q = K_{1+2(n-1)} \quad (3.40)$$

$$U = K_{2+2(n-1)} \quad (3.41)$$

$$[H] = \begin{bmatrix} R_1 K_1 & (K_1^2 L_1) & R_1 K_2 & -(K_2^2 L_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ (K_1^3 L_1^3) & -T_1 & -(K_2^3 L_1^3) & -T_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ S_1 & C_1 & SH_1 & CH_1 & 0 & -1 & 0 & -1 & \dots \\ C_1 K_1 & -S_1 K_1 & CH_1 K_2 & SH_1 K_2 & -K_3 & 0 & -K_4 & 0 & \dots \\ -S_1 K_1^2 & -C_1 K_1^2 & SH_1 K_2^2 & CH_1 K_2^2 & 0 & K_3^2 \overline{D_{111}} & 0 & -K_4^2 \overline{D_{111}} & \dots \\ -C_1 K_1^3 & S_1 K_1^3 & CH_1 K_2^3 & SH_1 K_2^3 & K_3^3 \overline{D_{111}} & 0 & -K_4^3 \overline{D_{111}} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -L_n S_n Q^2 + R_2 C_n Q & -L_n C_n Q^2 - R_2 S_n Q & U^2 L_n SH_n + R_2 CH_n U & U^2 L_n CH_n + R_2 SH_n U \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -L_n C_n Q^3 - T_2 S_n & L_n Q^3 S_n - T_2 C_n & L_n CH_n U^3 - T_2 SH_n & L_n U^3 SH_n - T_2 CH_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{n-1} & C_{n-1} & SH_{n-1} & CH_{n-1} & 0 & -1 & 0 & -1 \\ C_{n-1} Q & -S_{n-1} Q & CH_{n-1} U & SH_{n-1} U & -Q & 0 & -U & 0 \\ -S_{n-1} Q^2 & -C_{n-1} Q^2 & SH_{n-1} U^2 & CH_{n-1} U^2 & 0 & Q^2 \overline{b_{n-1} D_{11 n-1}} & 0 & -U^2 \overline{b_{n-1} D_{11 n-1}} \\ -C_{n-1} Q^3 & S_{n-1} Q^3 & CH_{n-1} U^3 & SH_{n-1} U^3 & Q^3 \overline{b_{n-1} D_{11 n-1}} & 0 & -U^3 \overline{b_{n-1} D_{11 n-1}} & 0 \end{bmatrix} 4n \times 4n \quad (3.42)$$

## **CAPÍTULO 4**

### **VALIDAÇÃO**

Para que o programa computacional desenvolvido pelo autor utilizando o software MATLAB<sup>®</sup> tenha confiabilidade, é feita neste capítulo sua validação, comparando os resultados aqui gerados com aqueles disponíveis na literatura. Inicialmente descreve-se o programa computacional, bem como a função de suas sub-rotinas, depois comparam-se as frequências adimensionais de uma viga contínua sob condições clássicas de apoio, e por fim, as frequências naturais são comparadas para diferentes disposições de lâminas e de condições de contorno.

#### **4.1 O PROGRAMA COMPUTACIONAL DESENVOLVIDO**

Para a determinação das frequências naturais de vigas compósitas, o programa desenvolvido é dividido em rotinas, de modo que a rotina principal é responsável pela leitura das sub-rotinas. Ambos modelos de Euler-Bernoulli e de Cisalhamento são lidos na mesma rotina, de modo que os resultados sejam gerados juntos também.

Para o desenvolvimento das rotinas usa-se como base o desenvolvimento matemático apresentado no capítulo 3 e nos apêndices A e B. Assim sendo, com base na teoria proposta, o programa determina as frequências naturais adimensionais e dimensionais de vigas compósitas laminadas, contínuas ou escalonadas em  $n$  partes, sobre apoios elasticamente variáveis.

A seguir as rotinas e a função de cada uma delas:

- Rotina Principal:

É a rotina que contém e lê as demais sub-rotinas.

- Sub-rotina Entrada:

Na sub-rotina entrada, o usuário fornece as informações necessárias a respeito da viga a ser estudada, sendo elas:

- Número de escalonamentos;
  - Valores dos módulos de elasticidade do compósito nas direções 1 e 2, bem como os valores do módulo de cisalhamento nos planos 1-2, 1-3 e 2-3, e também o valor do coeficiente de Poisson no plano 1-2, o qual é desconsiderado nos modelos de viga estudados, contudo é necessário na determinação das constantes elásticas do laminado;
  - Propriedades geométricas da viga, sendo elas os valores das bases, das alturas e dos comprimentos de cada trecho;
  - Propriedades das lâminas, sendo o número de camadas de cada trecho, a espessura de cada lâmina e a orientação das fibras de cada camada;
  - Valor da massa específica do laminado;
  - Valor do fator de forma ( $k_c$ ) utilizado no modelo de cisalhamento, o qual depende da seção da área transversal da viga;
  - Valores das constantes adimensionais diretamente proporcionais às rigidezes de rotação e translação ( $R$  e  $T$ ), que são as condições de contorno a serem adotadas.
- Sub-rotina Matriz:

A matriz dos coeficientes  $[H]$  é determinada nesta sub-rotina, a qual é generalizada em função do número de escalonamentos da viga, sendo montada a partir do sistema de equações lineares provenientes da aplicação das condições de contorno especificadas no capítulo anterior.

- Sub-rotina Cálculo do Determinante:

Nesta sub-rotina, o valor do determinante da matriz  $[H]$  é encontrado para uma estimativa inicial de um intervalo que possa conter as frequências naturais da viga.

- Sub-rotina Raízes:

Aqui, realiza-se a busca das frequências naturais adimensionais através da função *fzero* do Matlab. O algoritmo utilizado na função *fzero* é uma combinação dos métodos da biseção e da interpolação quadrática inversa. A busca é realizada na função gerada após encontrar-se o determinante da matriz  $[H]$ .

- Sub-rotina Cálculo das Frequências Naturais Dimensionais:

São aqui determinadas as frequências naturais da viga em Hz e em rad/s, as quais são determinadas em função dos valores das frequências naturais adimensionais encontradas na sub-rotina Raízes, do valor da massa específica do compósito, do termo  $D_{11}$  referente ao laminado, do valor da base, do comprimento total e da área da seção transversal da viga.

- Sub-rotina Resultado:

Sub-rotina responsável por agrupar os resultados provenientes de cada teoria e imprimi-los na tela do computador de forma organizada e clara.



## 4.2 COMPARAÇÕES DE FREQUÊNCIAS NATURAIS DIMENSIONAIS E ADIMENSIONAIS DE VIGAS CONTÍNUAS

O programa computacional foi desenvolvido para modelos de viga escalonada, como mostrado no capítulo 3, assim sendo, para que uma viga contínua seja simulada, é necessário fazer-se a simulação de uma viga escalonada em duas partes, de modo que a área da seção transversal dos dois trechos da viga seja a mesma, bem como o número de lâminas, a espessura de cada lâmina e também a orientação das fibras de cada camada. Uma última consideração para a representação de uma viga contínua é a de que o comprimento do segundo trecho da viga corresponda a um valor muito pequeno se comparado com o comprimento do primeiro trecho, aproximadamente 1% do comprimento total. Deste modo, consegue-se fazer a representação de uma viga contínua através de uma viga escalonada em duas partes.

Uma das vantagens do programa computacional desenvolvido neste trabalho é que ele pode determinar, de forma aproximada, as frequências adimensionais de uma viga feita a partir de um material isotrópico, como o aço, por exemplo. Assim, torna-se possível aqui a comparação aproximada com frequências adimensionais calculadas para materiais isotrópicos, tais como aquelas propostas por Inman (2001) e por Almeida (2012). Para isso, é necessário atribuir às constantes elásticas solicitadas pelo programa valores correspondentes aos do aço. Para fins de comparação, inicialmente, trabalha-se com viga contínua com diferentes condições de apoios elásticos nas extremidades. Os desvios relativos (%) entre os resultados são calculados pela equação 4.1.

$$\text{Desvio Relativo (\%)} = \frac{\text{Freq.}_{\text{teóricos}} - \text{Freq.}_{\text{calculada}}}{\text{Freq.}_{\text{teóricos}}} \times 100 \quad (4.1)$$

sendo  $\text{Freq.}_{\text{teóricos}}$  os valores das frequências naturais provenientes de trabalhos disponíveis na literatura e  $\text{Freq.}_{\text{calculada}}$  os valores das frequências naturais calculados pelo programa computacional desenvolvido pelo autor.

Para os diferentes tipos de apoios elásticos, como apresentado no capítulo 3, usam-se as constantes  $R$  e  $T$  apresentadas nas equações de (3.24) a (3.27), pela facilidade de se trabalhar com constantes adimensionais. Essas constantes são diretamente proporcionais à rigidez de rotação e translação,  $k_R$  e  $k_T$ , respectivamente. Logo, quando a rigidez de rotação e translação tendem para infinito, as constantes adimensionais  $R$  e  $T$  tendem a infinito também, neste caso, o apoio apresenta uma rigidez muito alta, o que corresponde a um apoio engastado, e se essas constantes tendem a zero, significa que não há nenhuma restrição ou à rotação ou à translação no apoio da viga, de modo que o apoio é livre. Então variando os valores das constantes adimensionais conseguimos simular as diferentes condições de contorno estudadas.

Para as simulações aqui realizadas, usam-se os dados provenientes da tabela 4.1, onde são fornecidas informações relativas ao aço 1020 e às propriedades geométricas da viga estudada. Os dados apresentados nesta tabela foram obtidos de Almeida (2012).

Tabela 4.1 – Propriedades geométricas e do material da viga contínua simulada.

Grandeza	Valor	Unidade
Módulo de elasticidade longitudinal $E_1$	210,0	GPa
Módulo de elasticidade transversal $E_2$	210,0	GPa
Módulo de cisalhamento no plano 1-2 $G_{12}$	81,0	GPa
Módulo de cisalhamento no plano 1-3 $G_{13}$	81,0	GPa
Módulo de cisalhamento no plano 2-3 $G_{23}$	81,0	GPa
Massa específica $\rho$	7800	kg/m <sup>3</sup>
Coefficiente de Poisson $\nu_{12}$	0,3	-
Coefficiente de cisalhamento $k_c$	5/6	-
Base $b$	0,075	m
Espessura $h$	0,075	m
Comprimento $L$	1,5	m
Número de lâminas	1	-
Orientação das fibras da lâmina	0	°

Nas tabelas de 4.2 a 4.7 são apresentadas as três primeiras frequências naturais adimensionais ( $\hat{\beta}$ ) para uma viga contínua em função de diferentes condições de apoios, de modo que os erros percentuais também são mostrados. Comparam-se as frequências naturais adimensionais aqui obtidas com aquelas encontradas analiticamente por Inman (2000), através do modelo de Euler-Bernoulli, e com aquelas obtidas por Almeida (2012) usando o modelo de Cisalhamento.

Tabela 4.2 - 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> Frequências naturais adimensionais para uma viga contínua apoiada – apoiada.

Viga Contínua com $\frac{L}{h} = 20$ , $L=1,5$ m				
Freq.	Inman (2000)	Almeida (2012)	Autor	
	EB	C	EB	C
1 <sup>a</sup>	3,142	3,136	3,142	3,136
2 <sup>a</sup>	6,283	6,243	6,283	6,240
3 <sup>a</sup>	9,425	9,293	9,425	9,281

EB – Euler-Bernoulli, C – Cisalhamento.

Das tabelas de 4.2 a 4.7, observa-se que as frequências naturais adimensionais para a viga contínua obtidas pelo autor apresentam boa concordância para com aquelas encontradas na literatura, sendo que não houve diferença percentual para o modelo de Euler-Bernoulli, e diferença muito pequena para o modelo de cisalhamento. Embora a simulação tenha sido realizada para as propriedades de um material isotrópico, mas a partir do desenvolvimento teórico para um material compósito, nota-se boa concordância com a literatura, o que ajuda na confiabilidade do programa desenvolvido.

Tabela 4.3 - Desvio relativo (%) entre os valores calculados e os valores teóricos – viga contínua apoiada - apoiada.

Modelos de Viga	1ª Frequência Natural	2ª Frequência Natural	3ª Frequência Natural
Euler-Bernoulli	0,00	0,00	0,00
Cisalhamento	0,00	0,05	0,13

Tabela 4.4 - 1ª, 2ª e 3ª Frequências naturais adimensionais para uma viga contínua livre – livre.

Viga Contínua com $\frac{L}{h} = 20$ , $L=1,5$ m				
Freq.	Inman (2000)	Almeida (2012)	Autor	
	EB	C	EB	C
1ª	4,730	4,720	4,730	4,720
2ª	7,853	7,795	7,853	7,790
3ª	10,996	10,825	10,996	10,810

EB – Euler-Bernoulli, C – Cisalhamento.

Tabela 4.5 - Desvio relativo (%) entre os valores calculados e os valores teóricos – viga contínua livre - livre.

Modelos de Viga	1ª Frequência Natural	2ª Frequência Natural	3ª Frequência Natural
Euler-Bernoulli	0,00	0,00	0,00
Cisalhamento	0,00	0,06	0,14

Tabela 4.6 - 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> Frequências naturais adimensionais para uma viga contínua engastada – livre.

Viga Contínua com $\frac{L}{h} = 20$ , $L=1,5$ m				
Freq.	Inman (2000)	Almeida (2012)	Autor	
	EB	C	EB	C
1 <sup>a</sup>	1,875	1,875	1,875	1,875
2 <sup>a</sup>	4,694	4,683	4,694	4,683
3 <sup>a</sup>	7,855	7,797	7,855	7,792

EB – Euler-Bernoulli, C – Cisalhamento.

Tabela 4.7 – Desvio relativo (%) entre os valores calculados e os valores teóricos – viga contínua engastada – livre.

Modelos de Viga	1 <sup>a</sup> Frequência Natural	2 <sup>a</sup> Frequência Natural	3 <sup>a</sup> Frequência Natural
Euler-Bernoulli	0,00	0,00	0,00
Cisalhamento	0,00	0,00	0,06

Parte-se agora para a comparação das frequências naturais dimensionais e adimensionais com as frequências encontradas na literatura para materiais laminados, em função das condições de apoio e da relação comprimento sobre espessura ( $\frac{L}{h}$ ) dessas vigas.

As simulações a serem apresentadas são realizadas em função das propriedades materiais e geométricas da viga laminada mostradas na tabela 4.8. Essas propriedades foram obtidas de Yildirim e Kiral (2000) e são valores característicos do compósito de fibra de carbono/resina epóxi, sendo o reforço unidirecional.

As tabelas 4.9 e 4.10 mostram os valores das frequências em kHz para uma viga contínua laminada, constituída de uma única lâmina orientada a 0°, simplesmente apoiada nas

extremidades, onde se comparam os valores obtidos para uma viga esbelta e para uma viga espessa.

Tabela 4.8 – Propriedades materiais e geométricas da viga laminada.

Grandeza	Valor	Unidade
Módulo de elasticidade longitudinal $E_1$	144,8	GPa
Módulo de elasticidade transversal $E_2$	9,65	GPa
Módulo de cisalhamento no plano 1-2 $G_{12}$	4,14	GPa
Módulo de cisalhamento no plano 1-3 $G_{13}$	4,14	GPa
Módulo de cisalhamento no plano 2-3 $G_{23}$	3,45	GPa
Massa específica $\rho$	1389,23	kg/m <sup>3</sup>
Coefficiente de Poisson $\nu_{12}$	0,3	-
Coefficiente de cisalhamento $k_c$	5/6	-

Nota-se na tabela 4.9, que há discordâncias entre as várias teorias utilizadas para o cálculo das frequências naturais. Para a relação  $\frac{L}{h} = 15$  o modelo de Euler-Bernoulli apresentou um desvio percentual de 7,54% para a primeira frequência natural quando se utiliza alguma teoria que leve em conta o efeito do cisalhamento. Já o modelo de cisalhamento apresentou os valores das frequências entre aqueles dispostos na literatura, assim sendo, o cisalhamento, neste caso, é um fator que deve ser considerado, dada a sua influência sobre as frequências naturais.

Tabela 4.9 - Frequências naturais (em kHz) para uma viga espessa simplesmente apoiada (0°).

Viga Contínua com $\frac{L}{h} = 15$ , $L = 381$ mm, $b = 25,4$ mm					
Referências	Modos				
	1	2	3	4	5
Chandrashekhara et al. <sup>a</sup> (1990)	0,755	2,548	4,716	6,960	9,194
Rao e Ganesan <sup>a</sup> (1997)	0,753	2,545	4,714	7,021	9,201
Rao e Ganesan <sup>b</sup> (1997)	0,754	2,555	4,753	7,052	9,382
Chandrashekhara e Bagera <sup>c</sup> (1992)	0,756	2,554	4,742	-	-
Nabi e Ganesan <sup>c</sup> (1994)	0,789	2,656	4,895	-	-
Yildirim e Kiral <sup>d</sup> (2000)	0,753	2,544	4,711	-	-
Autor (Cisalhamento)	0,756	2,555	4,730	6,979	9,215
Vinson e Sierakowski <sup>e</sup> (1987)	0,813	3,250	7,314	13,002	20,316
Autor (Euler-Bernoulli)	0,813	3,250	7,312	13,000	20,312

<sup>a</sup> - Teoria de cisalhamento de primeira ordem; <sup>b</sup> - Teoria de cisalhamento de alta ordem; <sup>c</sup> - Método dos Elementos finitos; <sup>d</sup> - Teoria de Timoshenko; <sup>e</sup> - Teoria de Euler-Bernoulli.

Tabela 4.10 - Frequências naturais (em kHz) para uma viga esbelta simplesmente apoiada (0°).

Viga Contínua com $\frac{L}{h} = 120$ , $h = 6,35$ mm, $b = 25,4$ mm					
Referências	Modos				
	1	2	3	4	5
Chandrashekhara et al. <sup>a</sup> (1990)	0,051	0,203	0,457	0,812	1,269
Rao e Ganesan <sup>a</sup> (1997)	0,051	0,202	0,452	0,798	1,236
Rao e Ganesan <sup>b</sup> (1997)	0,051	0,202	0,454	0,804	1,252
Autor (Cisalhamento)	0,051	0,202	0,452	0,798	1,233
Vinson e Sierakowski <sup>c</sup> (1987)	0,051	0,203	0,457	0,812	1,269
Autor (Euler-Bernoulli)	0,051	0,203	0,457	0,813	1,270

<sup>a</sup> - Teoria de cisalhamento de primeira ordem; <sup>b</sup> - Teoria de cisalhamento de alta ordem; <sup>c</sup> - Teoria de Euler-Bernoulli.

Da tabela 4.10, percebe-se que quando a relação  $\frac{L}{h}$  é aumentada para um valor alto, os valores obtidos pelo modelo de Euler-Bernoulli e de Cisalhamento tendem a se aproximar, principalmente para as primeiras frequências naturais, e neste caso o efeito do cisalhamento sobre o comportamento dinâmico da viga pode ser desconsiderado. Nas tabelas 4.9 e 4.10, observa-se que os resultados obtidos pelo programa computacional desenvolvido pelo autor apresentaram boa concordância com aqueles disponíveis na literatura. Para essas tabelas, o desvio percentual não foi tabelado, uma vez que a comparação foi realizada com várias referências, dentre as quais pôde ser notado um pequeno desvio, assim não foi adotado nenhum modelo como referência.

A tabela 4.11 mostra as frequências naturais adimensionais dadas pela equação 4.2, para diferentes ângulos de orientação das fibras das lâminas, bem como para diferentes condições de contorno. Cabe ressaltar aqui que essas frequências naturais adimensionais ( $\omega_{ad}$ ) são diferentes daquelas mostradas anteriormente,  $\hat{\beta}$ . Para vigas compósitas, as frequências adimensionais dadas pela equação (4.2) são as mais comuns encontradas na literatura.

$$\omega_{ad} = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho}{E_1 h^2}} \quad (4.2)$$

sendo  $\omega$  a frequência natural angular da viga (rad/s),  $L$  o comprimento da viga (m),  $\rho$  a massa específica do material (kg/m<sup>3</sup>),  $E_1$  o módulo de elasticidade na direção principal do laminado (Pa) e  $h$  a espessura da viga (m).



Tabela 4.11 - Frequências naturais adimensionais para uma viga feita a partir de um laminado “angle-ply” ( $\theta/-\theta/-\theta/\theta$ ).

$\omega_{ad} \left( \frac{L}{h} = 15 \right)$					
Ângulo(°)	Referência	SS	CC	CF	CS
0	Chandrashekhara et al (1990)	2,6560	4,8487	0,9820	3,7305
	Autor (Cisalhamento)	2,6577	5,9250	1,025	4,1051
	Autor (Euler-Bernoulli)	2,8577	6,4779	1,018	4,4642
	Krishnawamy et al (1992)	-	4,869	-	3,837
15	Chandrashekhara et al (1990)	2,5105	4,6635	0,9249	3,5593
	Autor (Cisalhamento)	2,5123	5,6097	0,9610	3,8847
	Autor (Euler-Bernoulli)	2,6812	6,0779	0,9552	4,1885
	Krishnawamy et al (1992)	-	3,988	-	3,243
30	Chandrashekhara et al (1990)	2,1032	4,0981	0,7678	3,0573
	Autor (Cisalhamento)	2,1048	4,7195	0,7887	3,2639
	Autor (Euler-Bernoulli)	2,2046	4,9975	0,7853	3,4439
	Krishnawamy et al (1992)	-	2,878	-	2,213
45	Chandrashekhara et al (1990)	1,5368	3,1843	0,5551	2,3032
	Autor (Cisalhamento)	1,5377	3,4645	0,5631	2,3922
	Autor (Euler-Bernoulli)	1,5771	3,5751	0,5618	2,4638
	Krishnawamy et al (1992)	-	1,947	-	1,388
60	Chandrashekhara et al (1990)	1,0124	2,1984	0,3631	1,5511
	Autor (Cisalhamento)	1,0119	2,2875	0,3649	1,5778
	Autor (Euler-Bernoulli)	1,0234	2,3201	0,3646	1,5988
	Krishnawamy et al (1992)	-	1,644	-	1,146

Continuação da tabela 4.11 - Frequências naturais adimensionais para uma viga feita a partir de um laminado “angle-ply” ( $\theta/-\theta/-\theta/\theta$ ).

Ângulo (°)	Referência	SS	CC	CF	CS
75	Chandrashekhara et al (1990)	0,7611	1,6815	0,2723	1,1753
	Autor (Cisalhamento)	0,7598	1,7196	0,2726	1,1856
	Autor (Euler-Bernoulli)	0,7648	1,7338	0,2725	1,1948
	Krishnawamy et al (1992)	-	1,621	-	1,129
90	Chandrashekhara et al (1990)	0,7320	1,6200	0,2619	1,1312
	Autor (Cisalhamento)	0,7308	1,6540	0,2621	1,1404
	Autor (Euler-Bernoulli)	0,7353	1,6668	0,2619	1,1487
	Krishnawamy et al (1992)	-	1,631	-	1,136

SS – Simplesmente apoiada; CC – engastada nas duas extremidades; CF – engastada - livre; CS – engastada – apoiada.

O gráfico da figura 4.1 mostra o comportamento da frequência adimensional em função da variação do ângulo de orientação das fibras para o caso no qual a viga é simplesmente apoiada, mostrado na tabela 4.11. Uma vez que para todas as condições de apoios apresentadas o comportamento das frequências é o mesmo, é mostrado apenas o caso para a condição simplesmente apoiada. Nota-se neste gráfico que à medida em que o ângulo de orientação das fibras aumenta, até um valor de 90°, os valores das frequências adimensionais ( $\omega_{ad}$ ) diminuem para a mesma condição de contorno. Outra observação é a de que a partir de um ângulo de 60° os valores das frequências obtidos pelos modelos de Euler-Bernoulli e Cisalhamento tornam-se muito próximos. Logo, para ângulos menores o efeito do cisalhamento mostrou-se mais influente sobre o modelo de Euler-Bernoulli.

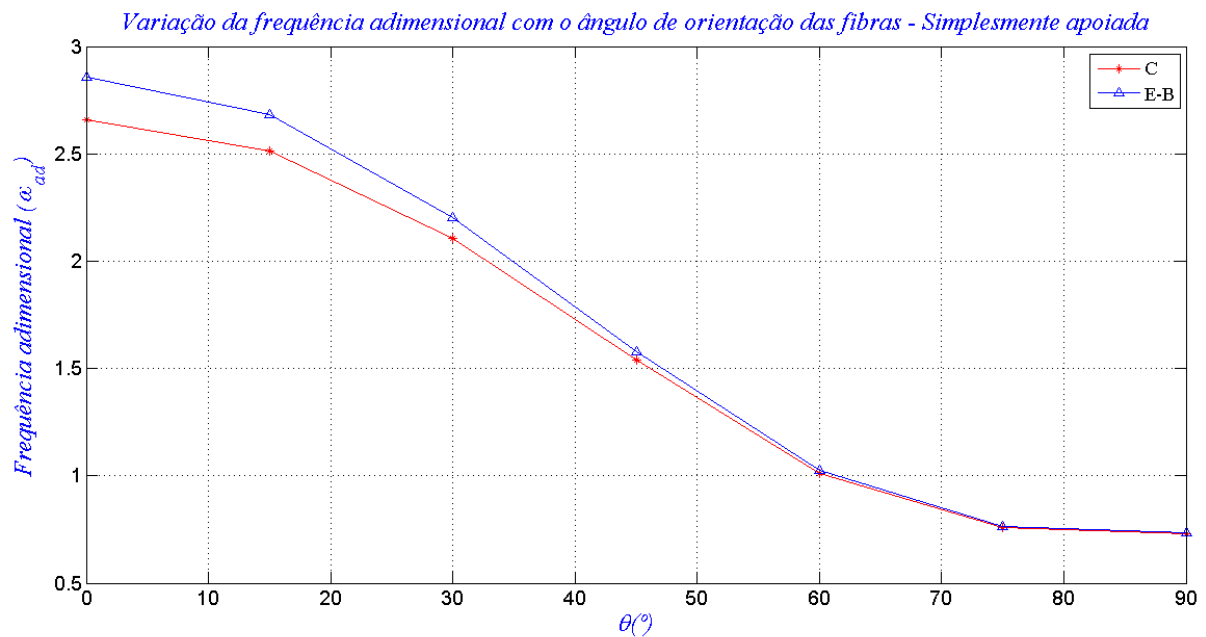


Figura 4.1 – Comportamento da frequência adimensional em função da variação do ângulo de orientação das fibras.

A tabela 4.12 mostra o desvio relativo entre os valores calculados e os valores teóricos, sendo tomados como referência os valores encontrados por Chandrashekhara et al (1990), uma vez que Krishnawamy et al (1992) também o tomam como referência. O desvio relativo entre estas duas referências também é mostrado.

Observa-se da tabela 4.12 que os desvios relativos tornam-se pequenos à medida que o ângulo de orientação das fibras aumenta, tanto para o modelo de Euler-Bernoulli, quanto para o modelo de Cisalhamento. Para ângulos de orientação das fibras de 45° a 90°, as propriedades do laminado são dominadas pela resina, de modo que não dependem das fibras. Os desvios foram maiores, em média, para a condição de contorno engastada-engastada tanto para os modelos estudados pelo autor, quanto para o modelo estudado por Krishnawamy et al (1992), que levaram em conta a adição do coeficiente de Poisson à teoria de cisalhamento de primeira ordem. O maior desvio percentual obtido pelo autor foi de -33,60% para o modelo de Euler-Bernoulli, na condição engastada-engastada, enquanto que para Krishnawamy et al (1992), o maior desvio foi de 39,74% para a condição engastada-apoiada. As maiores aproximações foram observadas para a condição de contorno simplesmente apoiada.

Tabela 4.12 – Desvio relativo (%) entre as frequências naturais adimensionais calculadas e teóricas para uma viga feita a partir de um laminado “angle-ply” ( $\theta/-\theta/-\theta/\theta$ ).

		Desvio (%)			
Ângulo	Modelo	SS	CC	CF	CS
0	Autor (Cisalhamento)	-0,06	-22,20	-4,38	-10,04
	Autor (Euler-Bernoulli)	-7,69	-33,60	-3,67	-19,67
	Krishnawamy et al (1992)	-	-0,42	-	-2,85
15	Autor (Cisalhamento)	-0,07	-20,29	-3,90	-9,14
	Autor (Euler-Bernoulli)	-6,79	-30,33	-3,28	-17,68
	Krishnawamy et al (1992)	-	14,48	-	8,89
30	Autor (Cisalhamento)	-0,08	-15,16	-2,72	-6,76
	Autor (Euler-Bernoulli)	-4,82	-21,95	-2,28	-12,65
	Krishnawamy et al (1992)	-	29,77	-	27,62
45	Autor (Cisalhamento)	-0,06	-8,80	-1,44	-3,86
	Autor (Euler-Bernoulli)	-2,62	-12,27	-1,21	-6,97
	Krishnawamy et al (1992)	-	38,86	-	39,74
60	Autor (Cisalhamento)	0,05	-4,05	-0,50	-1,72
	Autor (Euler-Bernoulli)	-1,09	-5,54	-0,41	-3,08
	Krishnawamy et al (1992)	-	25,22	-	26,12
75	Autor (Cisalhamento)	0,17	-2,27	-0,11	-0,88
	Autor (Euler-Bernoulli)	-0,49	-3,11	-0,07	-1,66
	Krishnawamy et al (1992)	-	3,60	-	3,94
90	Autor (Cisalhamento)	0,16	-2,10	-0,08	-0,81
	Autor (Euler-Bernoulli)	-0,45	-2,89	0,00	-1,55
	Krishnawamy et al (1992)	-	-0,68	-	-0,42

Na tabela 4.13, são mostradas as frequências adimensionais de uma viga laminada contínua sob diferentes condições de apoios. Os resultados são comparados com Chandrashekhara et al (1990), sendo que o desvio relativo também é mostrado.

Tabela 4.13 - Frequências naturais adimensionais para a viga contínua (0°/90°/90°/0°).

$\omega_{ad} \left( \frac{L}{h} = 15 \right)$					
Modo	Referência	SS	CF	CS	CC
1	Chandrashekhara et al (1990)	2,5023	0,9241	3,5254	4,5940
	Autor (Cisalhamento)	2,5059	0,9631	3,8724	5,5903
	Autor (Euler-Bernoulli)	2,6858	0,9568	4,1958	6,0885
2	Chandrashekhara et al (1990)	8,4812	4,8925	9,4423	10,2906
	Autor (Cisalhamento)	8,5068	5,4606	10,5960	12,8736
	Autor (Euler-Bernoulli)	10,7433	5,9963	13,5970	16,7831
3	Chandrashekhara et al (1990)	15,7558	11,4400	16,3839	16,9659
	Autor (Cisalhamento)	15,8067	12,9065	18,2561	20,8545
	Autor (Euler-Bernoulli)	24,1724	16,7897	28,3690	32,9015

SS – Simplesmente apoiada; CC – engastada nas duas extremidades; CF – engastada - livre; CS – engastada – apoiada.

De acordo com a tabela 4.14, os modelos de Euler-Bernoulli e de Cisalhamento apresentam os menores desvios relativos para a condição simplesmente apoiada, e também para as primeiras frequências, sendo que para a condição engastada-engastada os desvios observados foram os maiores, de modo que para a terceira frequência da condição engastada-engastada os desvios relativos foram muito altos.

Tabela 4.14 – Desvio relativo (%) entre as frequências naturais adimensionais calculadas e teóricas.

Desvio (%) $\left(\frac{L}{h} = 15\right)$					
Modo	Referência	SS	CF	CS	CC
1	Autor (Cisalhamento)	-0,14	-4,22	-9,84	-21,69
	Autor (Euler-Bernoulli)	-7,33	-3,54	-19,01	-32,53
2	Autor (Cisalhamento)	-0,30	-11,61	-12,22	-25,10
	Autor (Euler-Bernoulli)	-26,67	-22,56	-44,00	-63,09
3	Autor (Cisalhamento)	-0,32	-12,82	-11,43	-22,92
	Autor (Euler-Bernoulli)	-53,42	-46,76	-73,15	-93,93

SS – Simplesmente apoiada; CC – engastada nas duas extremidades; CF – engastada - livre; CS – engastada – apoiada.

As propriedades geométricas e de materiais da viga simulada na tabela 4.16 são apresentadas na tabela 4.15. Os dados da tabela 4.15 foram obtidos de Tita (1999), o qual determinou as frequências naturais de uma viga contínua laminada na condição engastada – livre utilizando o método dos elementos finitos e também experimentalmente.

Na tabela 4.17 o desvio relativo entre as frequências geradas pelas teorias de Euler-Bernoulli e Cisalhamento em relação às frequências obtidas experimentalmente por Tita (1999) é mostrado. Ainda nesta tabela, o desvio obtido entre o método dos elementos finitos e experimentalmente, relativo ao trabalho de Tita (1999) também é mostrado e em todas as determinações, as frequências obtidas experimentalmente foram tomadas como referência, de acordo com a equação (4.3).

$$\text{Desvio Relativo (\%)} = \frac{\text{Freq.}_{\text{experimental}} - \text{Freq.}_{\text{calculada}}}{\text{Freq.}_{\text{experimental}}} \times 100 \quad (4.3)$$

sendo  $Freq_{experimental}$  a frequência obtida experimentalmente por Tita (1999) e  $Freq_{calculada}$  aquela obtida analiticamente pela teoria de Euler-Bernoulli e Cisalhamento ou numericamente pelo método dos elementos finitos.

Tabela 4.15 – Propriedades materiais e geométricas da viga laminada.

Grandeza	Valor	Unidade
Módulo de elasticidade longitudinal $E_1$	44,8	GPa
Módulo de elasticidade transversal $E_2$	11,27	GPa
Módulo de cisalhamento no plano 1-2 $G_{12}$	4,86	GPa
Módulo de cisalhamento no plano 1-3 $G_{13}$	4,86	GPa
Módulo de cisalhamento no plano 2-3 $G_{23}$	4,45	GPa
Massa específica $\rho$	1780,00	kg/m <sup>3</sup>
Coefficiente de Poisson $\nu_{12}$	0,28	-
Coefficiente de cisalhamento $k_c$	5/6	-
Base da viga $b$	0,025	m
Espessura da viga $h$	0,0016	m
Comprimento da viga $L$	0,425	m

Das tabelas 4.16 e 4.17 nota-se que os valores obtidos pelos modelos de Euler-Bernoulli e Cisalhamento foram praticamente os mesmos, isso se deve ao fato da viga em estudo ser muito esbelta, de modo que o efeito do cisalhamento torna-se desprezível quando comparado ao modelo de Euler-Bernoulli, e esses valores se aproximaram mais dos valores obtidos numericamente pelo método dos elementos finitos do que os obtidos experimentalmente. De acordo com Tita (1999), vários fatores podem interferir na precisão dos valores, entre eles destacam-se a presença de ruídos durante as medições, presença de defeitos nas amostras, tais como porosidade e falta de uniformidade na espessura. Outro ponto importante é o de que a viga foi feita de tecido de fibra de vidro, ou seja, tecido bidirecional, e as propriedades utilizadas tanto neste trabalho quanto no trabalho de Tita (1999) foram relativas a fibras unidirecionais. Mas mesmo assim, nota-se boa aproximação dos dados obtidos analiticamente com aqueles obtidos numericamente pelo método dos elementos finitos.

Tabela 4.16 - Frequências naturais (em Hz) para uma viga esbelta.

Frequências naturais em Hz ( $\frac{L}{h} = 265,6$ )						
Referência	Modos					
	1	2	3	4	5	
	$[45/-45/45/-45/45/-45/45/-45/0/90]_s^{MEF}$	4,8	29,9	83,8	164,5	272,6
Tita	$[45/-45/45/-45/45/-45/45/-45/0/90]_s^{EXP}$	4,0	25,5	74,0	139,0	-
(1999)	$[0/90/0/90/0/90/0/90/0/90]_s^{MEF}$	6,7	42,0	117,6	230,0	379,6
	$[0/90/0/90/0/90/0/90/0/90]_s^{EXP}$	4,5	28,0	84,0	-	-
	$[45/-45/45/-45/45/-45/45/-45/0/90]_s^C$	4,9	30,7	85,9	168,3	278,1
Autor	$[45/-45/45/-45/45/-45/45/-45/0/90]_s^{EB}$	4,9	30,7	85,9	168,3	278,3
	$[0/90/0/90/0/90/0/90/0/90]_s^C$	6,6	41,7	116,6	228,5	377,5
	$[0/90/0/90/0/90/0/90/0/90]_s^{EB}$	6,6	41,7	116,6	228,6	377,9

$_s$  - simétrico;  $^{MEF}$  - Método dos elementos finitos;  $^C$  - Cisalhamento;  $^{EB}$  - Euler-Bernoulli;  $^{EXP}$  - Experimental.

Ainda em relação ao trabalho de Tita (1999), não é notada uma elevação no desvio relativo à medida que os modos aumentam, como observado nos demais trabalhos encontrados na literatura, porém, o que é observado é uma redução nos valores dos desvios com o aumento dos modos. Isso se deve principalmente à utilização de propriedade referentes a fibras unidirecionais nas simulações, enquanto que o resultado experimental reproduz fielmente as frequências referentes a um laminado bidirecional, assim o desvio comporta-se de forma inesperada. Para a primeira condição estudada, os desvios obtidos pelos modelos de Euler-Bernoulli e Cisalhamento foram um pouco maiores que os obtidos por Tita (1999), porém para a segunda condição, os desvios foram menores que os obtidos por este autor.



Tabela 4.17 – Desvio relativo entre as frequências naturais obtidas teoricamente e experimentalmente.

		Desvio (%), $\frac{L}{h} = 265,6$				
Referência		Modos				
		1	2	3	4	5
Tita (1999)	$[45/-45/45/-45/45/-45/45/-45/0/90]_s^{MEF}$	-20,0	-17,3	-13,2	-18,3	-
	$[0/90/0/90/0/90/0/90/0/90]_s^{MEF}$	-48,9	-50,0	-40,0	-	-
Autor	$[45/-45/45/-45/45/-45/45/-45/0/90]_s^C$	-22,5	-20,4	-16,0	-21,1	-
	$[45/-45/45/-45/45/-45/45/-45/0/90]_s^{EB}$	-22,5	-20,4	-16,0	-21,1	-
	$[0/90/0/90/0/90/0/90/0/90]_s^C$	-46,7	-48,9	-38,8	-	-
	$[0/90/0/90/0/90/0/90/0/90]_s^{EB}$	-46,7	-48,9	-38,8	-	-

$_s$  - simétrico;  $^{MEF}$  – Método dos elementos finitos;  $^C$  – Cisalhamento;  $^{EB}$  – Euler-Bernoulli.

### 4.3 COMPARAÇÕES DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE UMA VIGA ESCALONADA EM DUAS PARTES

Nesta parte do capítulo, são apresentadas as frequências adimensionais de um modelo de viga escalonada. Aqui, mais uma vez faz-se recorrência à comparação de frequências naturais obtidas pelo programa computacional desenvolvido pelo autor com aquelas obtidas na literatura para vigas feitas a partir de material isotrópico, uma vez que são poucos os trabalhos envolvendo a análise dinâmica de vigas laminadas escalonadas. Embora os existentes apresentem as frequências para este tipo de viga, alguns deles analisam a influência de alguns parâmetros sobre os resultados, como por exemplo, a influência da velocidade de impacto sobre as frequências naturais da viga, de modo que esses parâmetros não são considerados no presente trabalho.

Tong (1995), citado por Almeida (2012), determina as três primeiras frequências naturais adimensionais de uma viga com um escalonamento engastada em uma extremidade e livre na outra. Os resultados são obtidos através do método dos elementos finitos, utilizando-se o modelo de viga de Timoshenko. A figura 4.1 ilustra a viga estudada por Tong (1995).

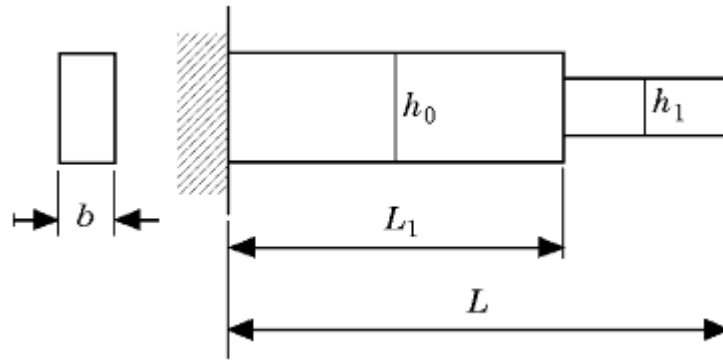


Figura 4.2 – Viga com um escalonamento. Fonte: Tong (1995).

Nas tabelas 4.19 e 4.20 são apresentados os valores e os desvios relativos (%) das três primeiras frequências naturais adimensionais para três diferentes relações  $\frac{L}{h}$ . Os valores calculados pelo autor são comparados com os valores obtidos por Almeida (2012) tanto para o modelo de Euler-Bernoulli quanto para o modelo de Cisalhamento.

As propriedades geométricas e materiais da viga simulada nas tabelas 4.19 e 4.20 são apresentadas na tabela 4.18. Os dados da tabela 4.18 foram obtidos de Tong (1995), citado por Almeida (2012). Sendo que os valores de  $b_0$ ,  $h_0$  e  $L$ , para as tabelas 4.19 e 4.20 são escolhidos de maneira que satisfaça a relação  $\frac{L}{h}$  das tabelas.

Observa-se da tabela 4.19 que há diferenças entre os valores calculados e os valores teóricos obtidos por Almeida (2012). Isso se deve ao fato de que, mesmo que os modelos teóricos estudados desprezem o efeito do coeficiente de Poisson, ele é inserido na determinação das constantes elásticas, como mostra a equação (2.33) para a determinação da matriz de rigidez reduzida do laminado. Assim, mesmo utilizando-se as propriedades pertencentes a mate-

riais isotrópicos, a rigidez flexural da viga sofre indiretamente a influência do coeficiente de Poisson, de modo que para a viga laminada, a rigidez flexural  $bD_{11}$  é diferente da rigidez flexural  $EI$  da viga isotrópica, pois o termo  $D_{11}$  depende da equação (2.33), que por sua vez é função do coeficiente de Poisson.

Tabela 4.18 – Propriedades geométricas e materiais da viga escalonada.

Grandeza	Valor	Unidade
Base $b$	$b_1 = b_0$	m
Espessura $h$	$h_1 / h_0 = 0,8$	m
Comprimento $L$	$L_1 / L = 2/3$	m
Coefficiente de Poisson $\nu$	0,3	-
Coefficiente de cisalhamento $k_c$	5/6	-

Tabela 4.19 - Frequências naturais adimensionais da viga escalonada em duas partes engastada - livre.

$\frac{L}{h}$	Modo	Tong (1995) $\hat{\beta}_{1,k}$	Almeida (2012) $\left(\hat{\beta}_{1,k}\right)^2$		Autor $\left(\hat{\beta}_{1,k}\right)^2$	
		T	EB	C	EB	C
21,7	1	3,821	3,972	3,972	3,831	3,832
	2	21,354	22,335	22,259	21,577	21,501
	3	55,040	58,308	57,668	56,346	55,705
10,8	1	3,803	3,972	3,972	3,831	3,835
	2	20,728	22,335	22,033	21,578	21,271
	3	51,685	58,308	55,860	56,350	53,897
7,2	1	3,771	3,972	3,972	3,845	3,856
	2	19,803	22,335	21,669	21,608	20,932
	3	47,354	58,308	53,187	56,427	50,714

EB – Euler-Bernoulli, C – Cisalhamento, T – Timoshenko.

Tabela 4.20 – Desvio relativo (%) entre os valores calculados pelo autor e os valores teóricos obtidos por Almeida (2012) – viga escalonada engastada - livre.

Desvio (%)				
Modelo	Modo	$\frac{L}{h}$		
		21,7	10,8	7,2
Euler-Bernoulli	1	3,55	3,55	3,20
	2	3,39	3,39	3,25
	3	3,36	3,36	3,23
Cisalhamento	1	3,52	3,45	2,92
	2	3,41	3,46	3,40
	3	3,40	3,51	4,65

## **CAPÍTULO 5**

### **EXPERIMENTO**

A parte experimental do presente trabalho consta de duas etapas: A primeira diz respeito à confecção dos modelos de viga contínua e escalonada em material compósito laminado, e a segunda refere-se à determinação experimental das frequências naturais dessas vigas. A seguir, ambas etapas são descritas, incluindo os processos utilizados, os materiais e equipamentos envolvidos. Todos os dados técnicos dos equipamentos utilizados estão contidos no Apêndice C desta dissertação.

#### **5.1 CONFECÇÃO DOS MODELOS DE VIGA**

A confecção dos modelos de viga ensaiados foi realizada no Laboratório de Materiais Compósitos do IEM da UNIFEI, onde foram montadas as vigas utilizando-se tecido de fibra bidirecional de vidro plano WR240 e resina epóxi da Huntsman, em sistema resina/endurecedor (Araudite LY 5052/ Aradur 5052).

Inicialmente, com a ajuda de uma régua e um pincel marcador, foram desenhados no tecido quatro retângulos de 35 cm de comprimento (no sentido do comprimento do rolo a 0°)

por 30 cm de largura. Logo após mais dois retângulos de 25 x 22 cm e por fim mais dois de 15 x 16 cm. Esses retângulos foram cortados com uma tesoura, tomando-se os devidos cuidados para que o corte fosse realizado na direção  $0^\circ$  das fibras do tecido. Em seguida, os retângulos foram combinados de maneira que os quatro maiores foram sobrepostos primeiro, depois os dois intermediários foram colocados sobre os quatro primeiros e por fim os dois menores sobre os dois intermediários, de modo a formar uma placa com espessura não constante ao longo de seu comprimento. Todas as lâminas foram colocadas de modo que a orientação de suas fibras fosse  $0^\circ$  com relação ao seu comprimento. Tal combinação de lâminas é mostrada na figura 5.1. Dessa forma, após a infusão da resina nas lâminas, a placa pode ser cortada no sentido de seu comprimento, assim obtêm-se os modelos de viga contínua, escalonada em duas partes e escalonada em três partes.

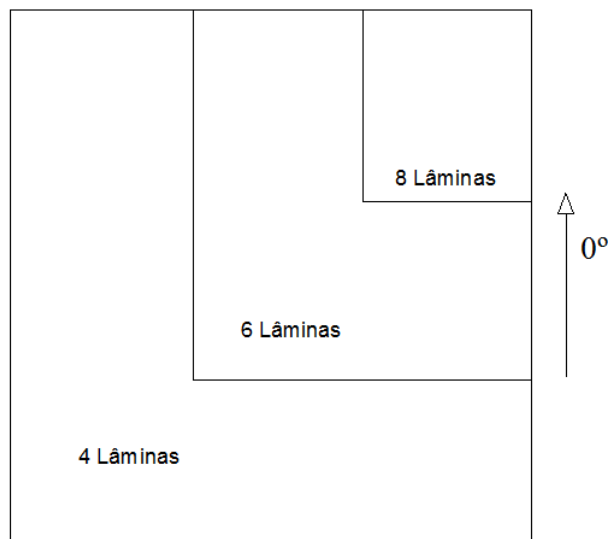


Figura 5.1 - Vista superior da disposição das lâminas da placa escalonada na espessura.

Montado o esquema de laminação, parte-se para o procedimento de infusão da resina no tecido de fibra de vidro. Para isso foi utilizada a Moldagem por Transferência de Resina Assistida por Vácuo (VARTM), que consta de um processo onde a resina é transferida para o interior das fibras das lâminas através de um gradiente de pressão desenvolvido no interior de uma bolsa de vácuo, onde se encontra a pré-forma (ou fibras do reforço), como mostrado na figura 5.2.

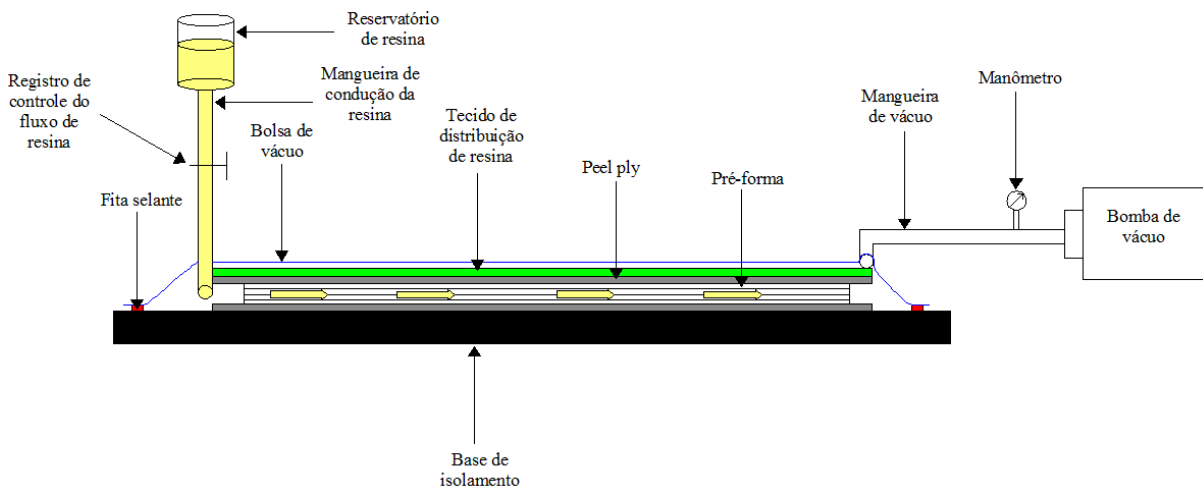


Figura 5.2 - Esquema do processo VARTM.

Inicialmente, passou-se sobre o ferramental (ou base de isolamento), neste caso uma superfície metálica plana, um desmoldante, cuja função é facilitar a desmoldagem na retirada do laminado. Em seguida foi colocada uma camada de peel ply, que é um tecido fino e poroso responsável pelo bom acabamento do material. Sobre a primeira camada de peel ply, foram colocadas as lâminas do tecido de fibra de vidro (pré-forma) na disposição desejada, tal como na figura 5.1. Sobre a pré-forma, colocou-se novamente outra camada de peel ply, e sobre esta, uma rede de plástico (tecido de distribuição de resina) do tamanho aproximado da placa do reforço, cuja função é facilitar e acelerar o movimento da resina sobre as fibras, diminuindo-se assim o tempo do processo. Após esse arranjo, foram colocados dois dutos em forma de espiral, nas extremidades do laminado. Em seguida, toda a montagem foi coberta por um plástico para a formação da bolsa de vácuo, de modo que esse plástico teve suas bordas vedadas através de um selante de bordas, que foi colocado entre o plástico e a base de isolamento.

Fechada a bolsa, o próximo passo foi conectar uma mangueira externa a um dos dutos e a um funil que iria conter a resina à pressão atmosférica. Outra mangueira foi conectada no outro duto e em uma bomba de vácuo. Para a averiguação do correto fechamento da bolsa antes da infusão da resina, ligou-se a bomba e retirou-se todo o ar de dentro da bolsa, e foi procurada qualquer possível entrada de ar na mesma.

Logo após, a resina foi preparada, sendo misturados 148,62 gramas de Araudite LY 5052 com 56,47 gramas de Aradur 5052, tal como indicado pelo fabricante (100 partes em peso de resina para 38 de endurecedor). A quantidade necessária dessas duas partes é uma função da área ou do peso do reforço e do volume de fibras desejado, de acordo com o recomendado pelo fabricante. Os componentes da resina foram misturados manualmente por 5 minutos com o auxílio de uma haste de madeira para homogeneizar a mistura. Em seguida, a resina então misturada foi levada a um tanque de pressão, onde permaneceu por um tempo de 10 minutos sob pressão de 26 pol/Hg exercida pela bomba de vácuo. Assim todas as bolhas de ar devidas à mistura manual foram retiradas, eliminando-se então o possível aparecimento de vazios no interior do laminado.

Após toda a preparação, partiu-se finalmente para a infusão da resina, a qual foi colocada em um funil suspenso e conectado a uma mangueira com uma válvula para o controle de seu fluxo. Assim, a partir do momento em que a bomba de vácuo foi ligada, devido ao gradiente de pressão a resina começou a ser movimentada sobre a pré-forma. O tempo total da infusão foi de aproximadamente 19 minutos. As fotografias mostradas nas figuras 5.3 a 5.7 ilustram as etapas do processo.



Figura 5.3 - Marcação e corte das lâminas.



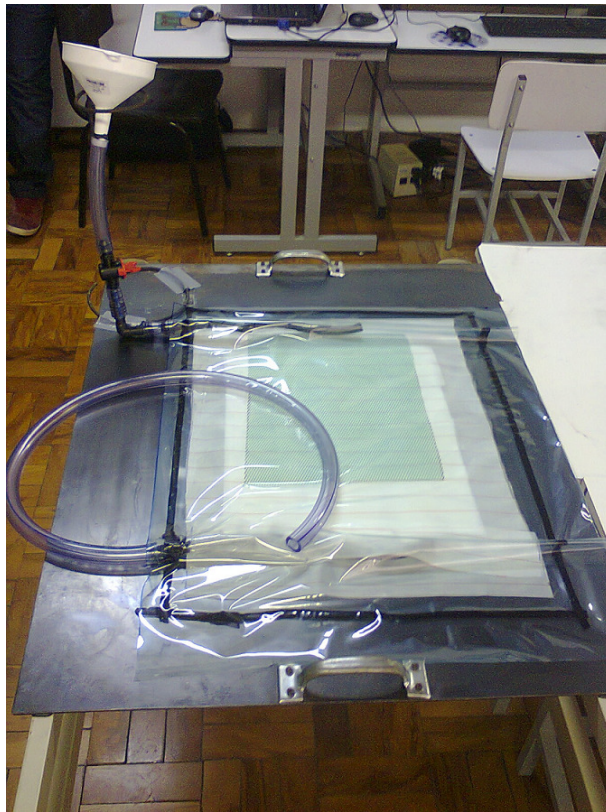


Figura 5.4 - Bolsa de vácuo montada.

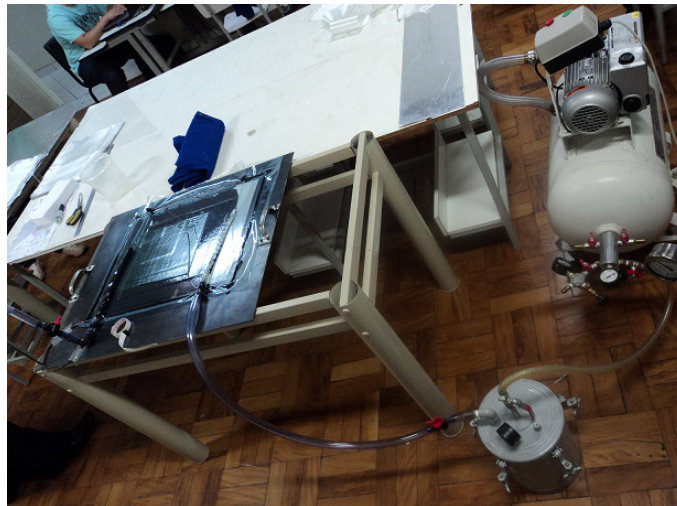


Figura 5.5 - Equipamento montado destinado à infusão da resina no reforço.

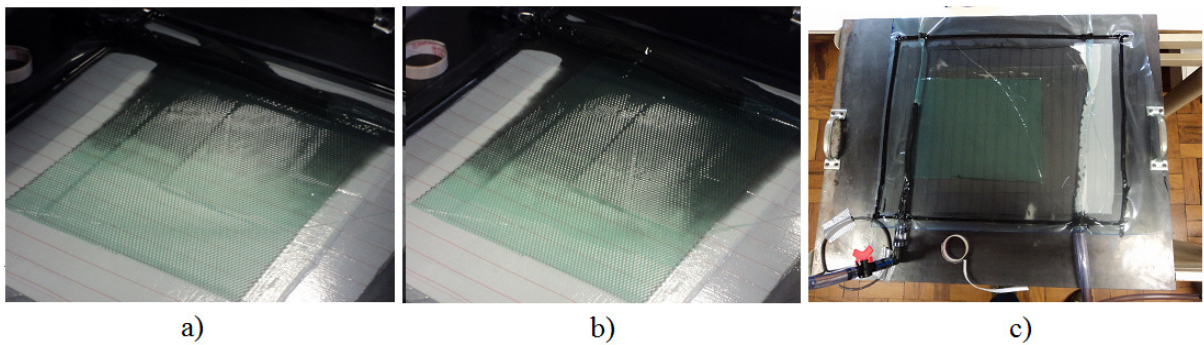


Figura 5.6 - Movimento da resina na pré-forma: a) no início; b) no meio e c) após a infusão.

Terminado o processo de infusão da resina no reforço, é necessário certo tempo de descanso para que a resina fique totalmente polimerizada (curada ou endurecida), tempo este chamado de tempo de cura. Esse tempo pode ser menor caso se consiga aumentar a temperatura sobre o compósito, assim, utilizou-se uma manta térmica que forneceu uma temperatura de 80°C durante 4 horas para o processo de cura da resina.

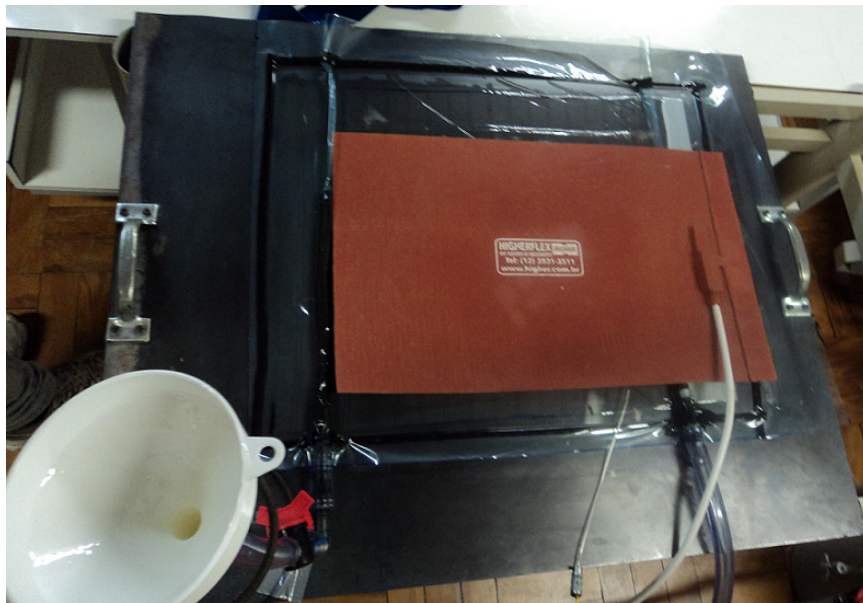


Figura 5.7 - Manta térmica no processo de cura da resina.

Transcorrido o tempo de cura, desmontou-se a bolsa e os equipamentos e retiraram-se as camadas de peel ply. A placa obtida foi cortada no sentido de seu comprimento para a ob-

tenção dos modelos de viga a serem ensaiados, desprezando-se as bordas longitudinais e transversais de cada viga. A máquina utilizada no corte foi uma máquina de disco de corte.

Obtidos os corpos de prova, os mesmos foram submetidos a lixamento nas laterais que foram cortadas, de modo a obter-se bom acabamento e correções de possíveis desuniformidades durante o corte, usando-se inicialmente lixa 400 e posteriormente para o acabamento lixa 600. Todo o lixamento foi realizado embaixo de água.

## 5.2 CARACTERIZAÇÃO DO COMPÓSITO

A determinação da densidade do material compósito foi feita através do Princípio de Arquimedes. Foram retiradas três amostras quadradas com 3 centímetros de lado para a determinação da densidade. De acordo com esse princípio, todo corpo submerso totalmente ou parcialmente em um líquido está sujeito à ação de uma força vertical de baixo para cima chamada empuxo ( $E$ ), de intensidade igual ao peso do líquido deslocado. Assim, as equações de (5.1) a (5.6) descrevem a determinação da densidade do compósito imerso no líquido. Neste caso a água, sendo  $m_L$  a massa do líquido deslocado (kg),  $g$  a aceleração da gravidade ( $m/s^2$ ),  $\rho_L$  a densidade do líquido ( $kg/m^3$ ),  $V_L$  o volume do líquido deslocado ( $m^3$ ),  $V_c$  o volume do corpo imerso,  $m_c$  a massa do corpo (kg) e  $\rho_c$  a densidade do corpo.

$$E = m_L g \quad (5.1)$$

ou

$$E = \rho_L V_L g \quad (5.2)$$

Considerando-se que o volume do líquido deslocado é igual ao volume do corpo:

$$V_c = V_L = V \quad (5.3)$$

Como:

$$V = \frac{m_c}{\rho_c} \quad (5.4)$$

Substituindo (5.4) em (5.2):

$$E = \rho_L \frac{m_c}{\rho_c} g \quad (5.5)$$

Igualando-se (5.5) a (5.1):

$$\rho_c = \rho_L \frac{m_c}{m_L} \quad (5.6)$$

Desta forma, a partir da equação (5.6) torna-se possível a obtenção da densidade do compósito. Para a determinação das demais propriedades deste material, através da Regra das Misturas, as características de cada componente são dadas separadamente na tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Propriedades dos constituintes do compósito.

Propriedade	Reforço	Matriz
Densidade (g/cm <sup>3</sup> )	2,54	1,15
Módulo de Elasticidade (GPa)	72,5	3,4
Módulo de Cisalhamento (GPa)	30	1,31
Coefficiente de Poisson	0,2	0,3

Para a determinação da porcentagem em volume de fibras e de matriz presente no compósito desenvolvido através da regra das misturas, é necessário o conhecimento da porcentagem em peso de cada constituinte. Para isso foram retirados três corpos de prova (1,25 x 18 cm) da placa com a finalidade de secagem dos mesmos em estufa por 3 horas a 400°C, assim, consegue-se a remoção da resina e determina-se a porcentagem em peso referente às fibras.

A tabela 5.2 mostra os valores das porcentagens em peso da fibra ( $W_r$ ) e da matriz ( $W_m$ ), bem como os valores das massas iniciais e finais de cada corpo de prova.

Tabela 5.2 – Valores das massas iniciais, finais e das porcentagens em peso de cada fase.

Propriedade	Corpo de prova		
	1	2	3
Massa inicial (g)	3,1500	3,0600	2,9793
Massa final (g)	2,2417	2,1675	2,2368
$W_r$ (%)	71,17	70,83	75,08
$W_m$ (%)	28,83	29,17	24,92

Assim, a porcentagem em peso média do reforço foi de 72,36% e da matriz, 27,64%, e com a utilização da equação (2.16) chegou-se ao valor da porcentagem em peso das fibras ( $V_f$ ). Com a utilização da Regra das Misturas, as propriedades características do compósito confeccionado que neste trabalho serão utilizadas, estão apresentadas na tabela 5.3.

Tabela 5.3 – Propriedades do compósito.

Propriedade	Unidade	Valor
Fração volumétrica de fibra ( $V_f$ )	%	54,24%
Densidade ( $\rho$ )	kg/m <sup>3</sup>	1908,2
Módulo de elasticidade longitudinal ( $E_1$ )	GPa	23,96
Módulo de elasticidade transversal ( $E_2$ )	GPa	23,96
Módulo de cisalhamento no plano 1-2 ( $G_{12}$ )	GPa	2,72
Módulo de cisalhamento no plano 1-3 ( $G_{13}$ )	GPa	3,40
Módulo de cisalhamento no plano 2-3 ( $G_{23}$ )	GPa	3,40
Coefficiente de Poisson no plano 1-2 ( $\nu_{12}$ )	-	0,10

Após a obtenção e caracterização do material compósito laminado, partiu-se para o ensaio de vibração livre dos modelos de viga.

### 5.3 DESCRIÇÃO DO ENSAIO DE VIBRAÇÃO LIVRE

Os ensaios de vibração foram realizados no Laboratório de Vibrações Mecânicas do IEM da UNIFEI. Esta parte do experimento tem a finalidade de levantar experimentalmente as propriedades dinâmicas de vigas laminadas uniformes e escalonadas a fim de se compararem as frequências naturais calculadas pelo programa desenvolvido pelo autor com as frequências medidas no laboratório.

Foram analisadas três vigas compósitas laminadas, sendo uma contínua, uma escalonada em duas partes e a outra, escalonada em três partes. As figuras de 5.8 a 5.10 mostram as vigas e a respectiva denominação de seus parâmetros geométricos.

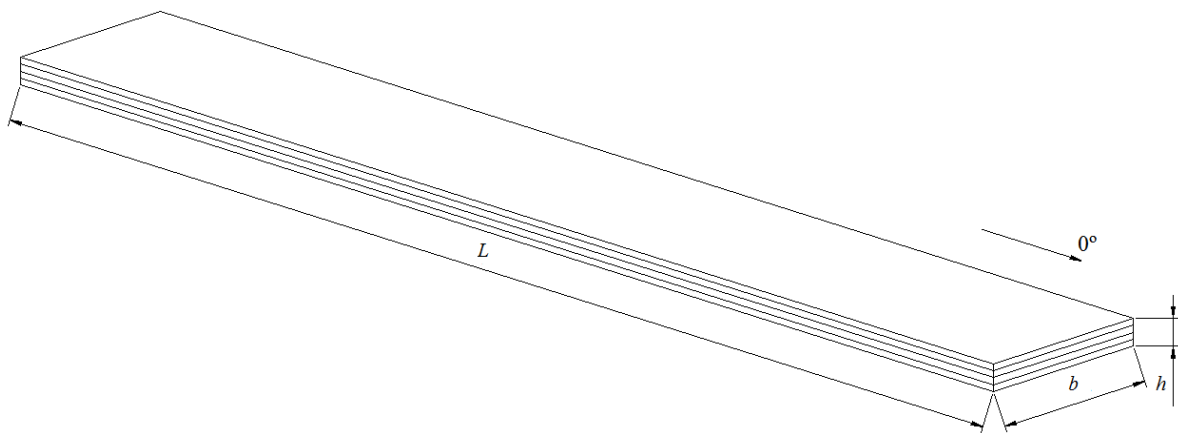


Figura 5.8 - Modelo de viga laminada contínua.

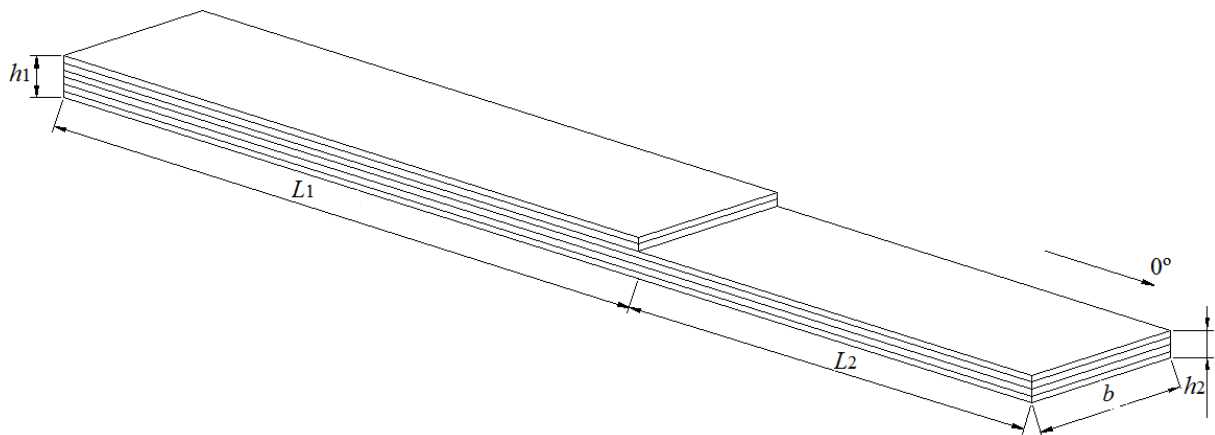


Figura 5.9 - Modelo de viga laminada escalonada em duas partes.

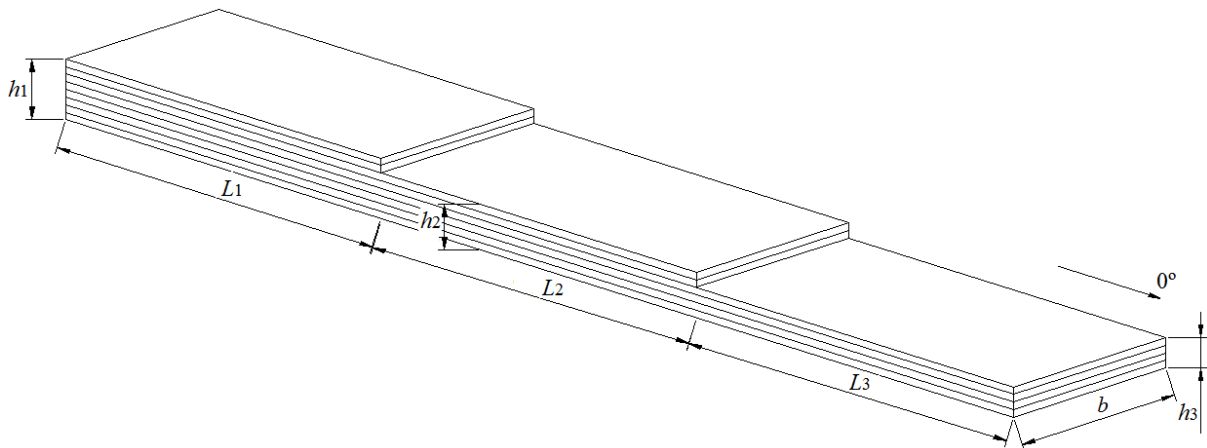


Figura 5.10 - Modelo de viga laminada escalonada em três partes.

A tabela 5.4 contém os valores referentes à largura, espessura e comprimento de cada trecho de cada viga mostrada nas figuras de 5.8 a 5.10. Esses valores foram medidos com um paquímetro digital e referem-se às médias de algumas medições.

Tabela 5.4 – Propriedades geométricas das vigas utilizadas nos ensaios.

Viga	Propriedade	Unidade	Trecho		
			1	2	3
Contínua	Comprimento ( $L$ )	m	0,31000	-	-
	Espessura ( $h$ )	m	0,00092	-	-
	Largura ( $b$ )	m	0,02634	-	-
	Número de lâminas ( $0^\circ$ )	-	4	-	-
Escalonada: duas partes	Comprimento ( $L$ )	m	0,23100	0,07922	-
	Espessura ( $h$ )	m	0,00131	0,00089	-
	Largura ( $b$ )	m	0,02720	0,027445	-
	Número de lâminas ( $0^\circ$ )	-	6	4	-
Escalonada: três partes	Comprimento ( $L$ )	m	0,13757	0,09298	0,07992
	Espessura ( $h$ )	m	0,00169	0,00135	0,00094
	Largura ( $b$ )	m	0,02518	0,02513	0,02500
	Número de lâminas ( $0^\circ$ )	-	8	6	4

### 5.3.1 Frequências naturais

Os ensaios em laboratório tiveram como objetivo a determinação das frequências naturais das vigas compósitas laminadas, uma vez que o conhecimento dessas frequências é de fundamental importância para o conhecimento do comportamento de uma estrutura quando solicitada dinamicamente. As frequências obtidas experimentalmente serviram também para a comparação com aquelas calculadas pelo programa computacional desenvolvido pelo autor.

Para a realização do ensaio, a condição de contorno utilizada foi a engastada-livre, onde a viga tem seus movimentos restritos em uma extremidade, através de seu engaste em um suporte que é muito bem apertado, elevando assim a rigidez no apoio da viga, a qual é colocada em oscilação mediante a aplicação de um impulso no plano perpendicular ao plano de fixação da viga, na altura de sua linha neutra e em sua extremidade livre. O impulso aplicado excita dinamicamente a viga. Assim a viga entra em movimento e o sinal deste movimento é captado pelo vibrômetro laser, posicionado no mesmo plano de aplicação da força impulsiva e transmitido ao analisador de sinais, conforme a fotografia 5.11. Devido à transparência do material constituinte da viga, foi colocado em sua extremidade sob a incidência do laser um pequeno pedaço de fita isolante, de modo que o laser pudesse capturar melhor o movimento da viga. O analisador é capaz de receber e armazenar um número bastante grande de sinais do vibrômetro em curtos intervalos de tempo, permitindo a obtenção dos gráficos de espectro de frequência.

Nas tabelas de (5.5) a (5.10) estão presentes os resultados obtidos nos ensaios e os valores gerados pelo programa computacional desenvolvido pelo autor, bem como os erros relativos, dados pela equação (5.7). As frequências medidas em laboratório apresentam-se em Hertz, enquanto que o programa computacional permite a obtenção dos valores em rad/s, em Hz e em valores adimensionais,  $\hat{\beta}_{1,k}$ , os quais são substituídos na equação (5.7) para o cálculo das frequências em rad/s e posteriormente utilizando a equação (5.8) obtêm-se as frequências em Hz, que serão utilizadas para as comparações.



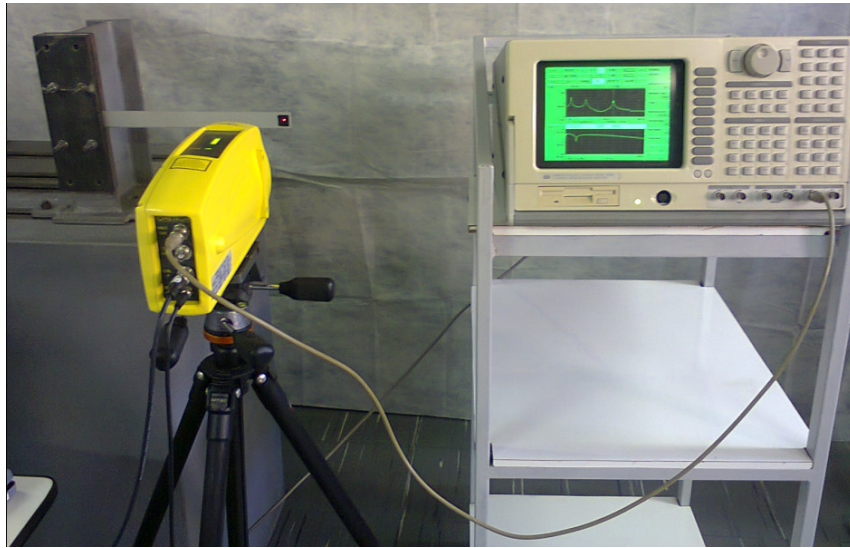


Figura 5.11 - Viga engastada, Vibrômetro Laser e Analisador de Sinais.

➤ Cálculo da frequência natural:

$$\omega_k = \left( \frac{\hat{\beta}_{1,k}}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{b_1 D_{11_1}}{\rho A_1}} \quad (5.7)$$

$$f_k = \frac{\omega_k}{2\pi} \quad (5.8)$$

sendo  $\omega_k$  a  $k$ -ésima frequência natural angular (rad/s),  $\hat{\beta}_{1,k}$  a  $k$ -ésima frequência natural adimensional que tem como referência o primeiro trecho da viga escalonada,  $L$  o comprimento total da viga (m),  $D_{11_1}$  o termo que reflete a rigidez à flexão do material do primeiro trecho da viga (N.m),  $b_1$  a largura do primeiro trecho da viga (m),  $\rho$  a massa específica (kg/m<sup>3</sup>),  $A_1$  a área da seção transversal do primeiro trecho da viga escalonada (m<sup>2</sup>),  $f_k$  a  $k$ -ésima frequência natural (Hz),  $k$  o índice que indica a  $k$ -ésima frequência natural e 1 índice de  $\beta$ ,  $D_{11_1}$  e  $b$  referente ao primeiro trecho da viga escalonada.

As figuras 5.12 a 5.14 mostram os espectros de frequência de cada viga ensaiada. Os desvios relativos (%) para todas as tabelas a seguir são calculados pela equação (5.9) e os valores das frequências de laboratório tabeladas são retirados das figuras de espectro de frequência.

$$\text{Desvio Relativo (\%)} = \frac{\text{Freq.}_{\text{experimental}} - \text{Freq.}_{\text{calculada}}}{\text{Freq.}_{\text{experimental}}} \times 100 \quad (5.9)$$

sendo  $\text{Freq.}_{\text{experimental}}$  as frequências naturais provenientes dos ensaios e  $\text{Freq.}_{\text{calculada}}$  as frequências naturais calculadas pelo programa computacional desenvolvido pelo autor.

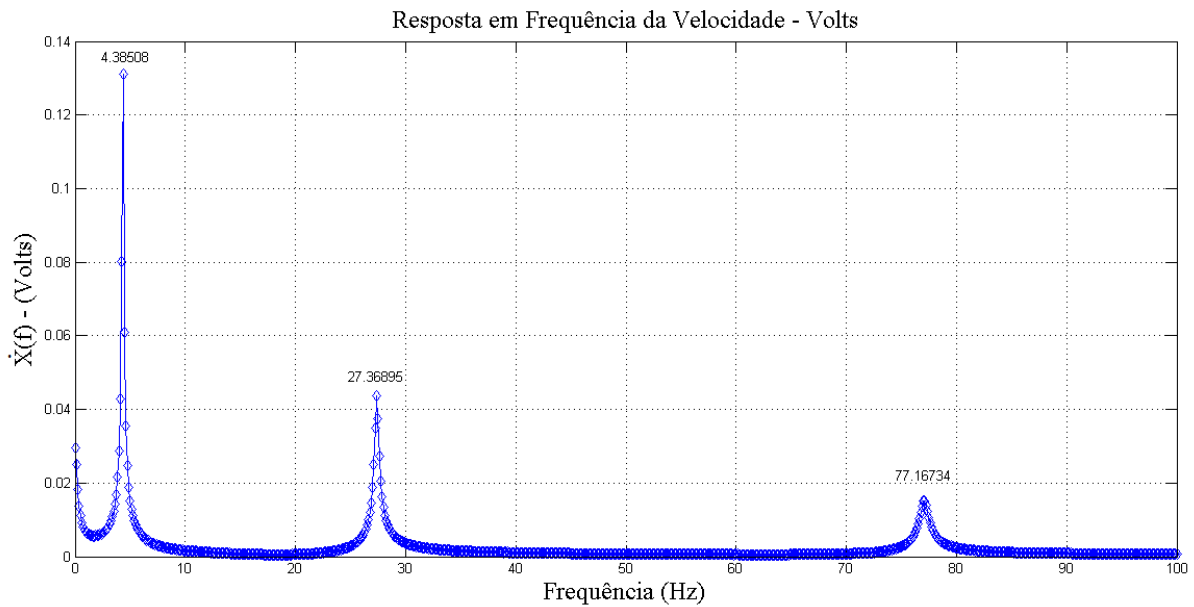


Figura 5.12 - Espectro de frequência da viga uniforme.

A tabela 5.5 mostra a comparação entre as frequências naturais obtidas experimentalmente e através do programa computacional desenvolvido pelo autor. Já a tabela 5.6, mostra o desvio relativo entre as mesmas.

Tabela 5.5 – Três primeiras frequências experimentais e calculadas da viga contínua laminada (Hz).

Frequências naturais (Hz) ( $\frac{L}{h} = 337$ )			
Freq.	Experimental	Euler-Bernoulli	Cisalhamento
1 <sup>a</sup>	4,385081	5,152296	5,152309
2 <sup>a</sup>	27,368952	32,288890	32,287659
3 <sup>a</sup>	77,167339	90,409827	90,397926

Tabela 5.6 - Desvio relativo (%) entre os valores experimentais e os valores calculados das frequências naturais da viga contínua.

Modelos de Viga	1 <sup>a</sup> Frequência Natural	2 <sup>a</sup> Frequência Natural	3 <sup>a</sup> Frequência Natural
Euler-Bernoulli	-17,49	-17,98	-17,16
Cisalhamento	-17,49	-17,97	-17,15

Nota-se boa concordância entre os modelos de Euler-Bernoulli e Cisalhamento, pois a viga é esbelta e o efeito do cisalhamento é desprezível.

A figura 5.13 e as tabelas 5.6 e 5.7 apresentam o espectro de frequência do ensaio, as frequências naturais e os desvios relativos (%) entre os valores de frequências naturais experimentais e calculadas, respectivamente, para o modelo de viga escalonada em duas partes.

Como a viga laminada é fina e tem seu comprimento muito maior que sua espessura, o efeito do cisalhamento torna-se desprezível, como pode ser observado na tabela 5.5 a proximidade entre os valores obtidos pelo modelo de Euler-Bernoulli e pelo modelo de Cisalhamento.

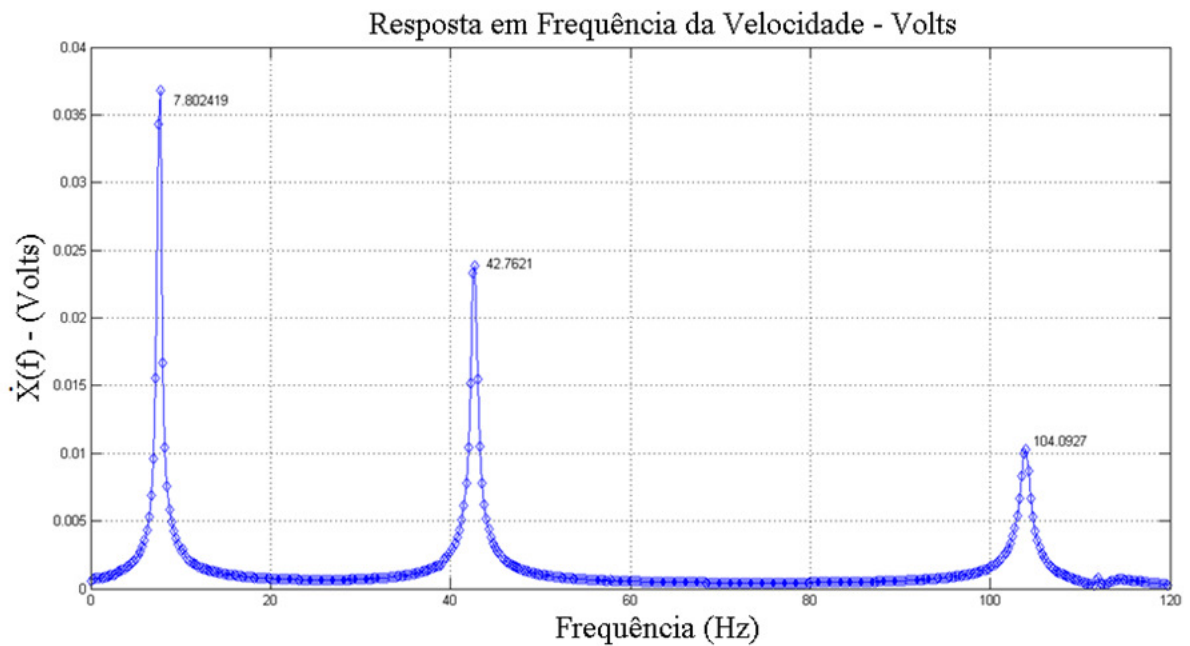


Figura 5.13 - Espectro de frequência da viga escalonada em duas partes.

Tabela 5.6 - Três primeiras frequências experimentais e calculadas da viga escalonada em duas partes (Hz).

Frequências naturais (Hz) ( $\frac{L}{h_1} = 176,3, \frac{L}{h_2} = 89,0$ )			
Freq.	Experimental	Euler-Bernoulli	Cisalhamento
1 <sup>a</sup>	7,802419	10,027443	10,027518
2 <sup>a</sup>	42,762097	56,066298	56,061238
3 <sup>a</sup>	104,092742	151,375565	151,328979

Novamente é observada uma boa concordância entre os modelos de Euler-Bernoulli e Cisalhamento. Com o escalonamento, nota-se um aumento nas frequências naturais. Isso se deve ao aumento de rigidez em cada trecho devido ao aumento das lâminas, neste caso duas lâminas acrescidas ao primeiro trecho da viga já proporcionaram um aumento considerável nas frequências naturais da estrutura.

Tabela 5.7 – Desvio relativo (%) entre os valores experimentais e os valores calculados das frequências naturais da viga escalonada em duas partes.

Modelos de Viga	1ª Frequência Natural	2ª Frequência Natural	3ª Frequência Natural
Euler-Bernoulli	-28,52	-31,11	-45,42
Cisalhamento	-28,52	-31,10	-45,38

A figura 5.14 e as tabelas 5.8 e 5.9 apresentam o espectro de frequência do ensaio, as frequências naturais e os desvios relativos (%) entre os valores de frequências naturais experimentais e calculadas, respectivamente, referentes à viga escalonada em três partes.

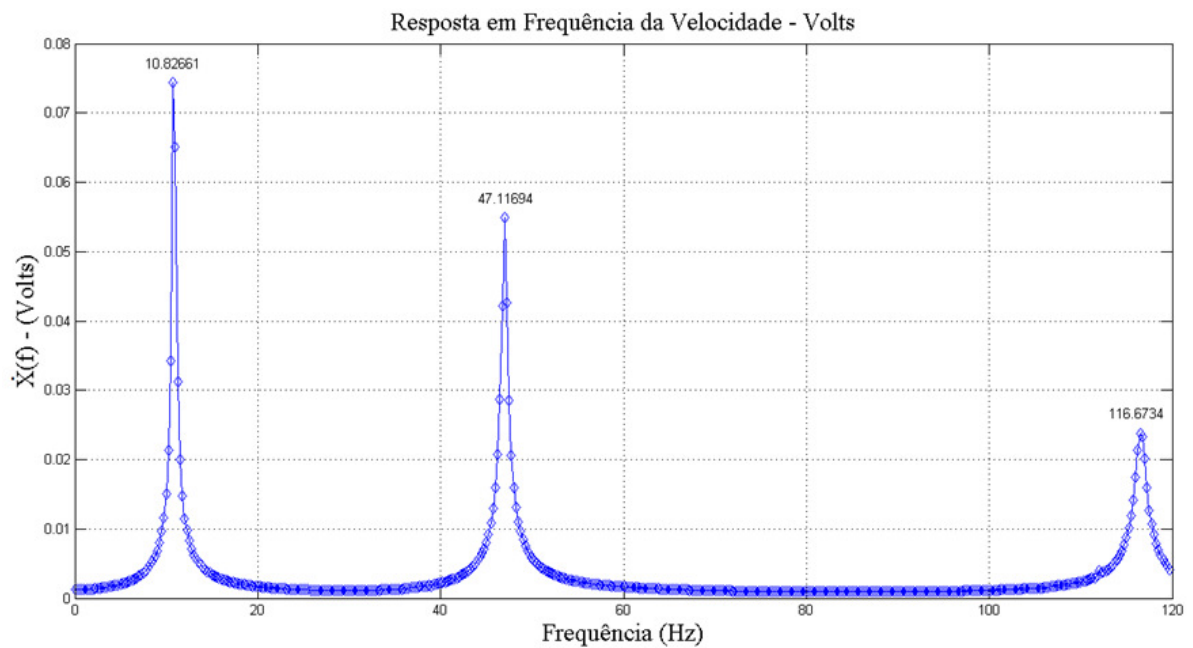


Figura 5.14 - Espectro de frequência da viga escalonada em três partes.

Tabela 5.8 - Três primeiras frequências experimentais e calculadas da viga escalonada em três partes (Hz).

Frequências naturais (Hz)			
$(\frac{L}{h_1} = 81,4, \frac{L}{h_2} = 68,9, \frac{L}{h_3} = 85,0)$			
Freq.	Experimental	Euler-Bernoulli	Cisalhamento
1 <sup>a</sup>	10,826613	16,799351	16,799623
2 <sup>a</sup>	47,116935	86,358122	86,344234
3 <sup>a</sup>	116,673387	230,278313	230,150613

Tabela 5.9 - Desvio relativo (%) entre os valores experimentais e os valores calculados das frequências naturais da viga escalonada em três partes.

Modelos de Viga	1 <sup>a</sup> Frequência Natural	2 <sup>a</sup> Frequência Natural	3 <sup>a</sup> Frequência Natural
Euler-Bernoulli	-55,17	-83,28	-97,37
Cisalhamento	-55,17	-83,26	-97,26

Para o caso da viga escalonada em três partes, os valores das frequências naturais foram ainda maiores que os da viga escalonada em duas partes, devido ainda ao fato da adição de camadas elevar a rigidez da viga, deixando a estrutura menos flexível.

Os desvios relativos não foram baixos, principalmente para os casos onde a viga foi escalonada. Alguns fatores fazem com que esses desvios se tornem maiores, como aqueles relacionados às amostras, como por exemplo a presença de porosidade, a falta de uniformidade na espessura medida da viga e a superfície irregular das amostras. Durante o desenvolvimento analítico dos modelos de viga, esses fatores não são levados em conta, pois consideram-se amostras perfeitas e com uma distribuição homogênea de propriedades, fato este que normalmente não ocorre com amostras reais. Outro aspecto a ser considerado é o de que as

propriedades do material utilizadas nos cálculos são provenientes da Regra das Misturas, a qual não considera os efeitos da interface fibra-matriz e nem da distribuição irregular de resina sobre o reforço. Assim, a distribuição não uniforme da resina entre as fibras e consequentemente a presença de regiões onde as lâminas não foram perfeitamente coladas podem exercer uma boa influência nos valores das frequências obtidas, de modo que os deslocamentos observados presentes no laminado sejam diferentes daqueles adotados para um elemento infinitesimal de um corpo elástico, como mostrado na equação (2.39), devido à possibilidade de uma lâmina da viga, durante a flexão, deslocar-se ou escorregar-se sobre as outras lâminas.

Para as vigas escalonadas, outro ponto importante diz respeito à sobreposição das lâminas, pois pode ser que algumas lâminas não tenham ficado orientadas exatamente a  $0^\circ$  no sentido longitudinal e o escalonamento pode não ter sido perfeito, pois como se trata de lâminas constituídas de fibras, é possível que não houve uma redução brusca da seção transversal de área, enquanto que no modelo analítico essa redução de área é considerada perfeita. E por fim, durante o corte das vigas a partir da placa compósita, para que o corte fosse perfeito a  $0^\circ$  era necessário que os lados da placa formassem ângulos retos entre si, para o perfeito encaixe na máquina de corte, fato este que pode não ter ocorrido.

Assim, nota-se que vários fatores podem fazer com que os resultados experimentais se aproximem ou se afastem daqueles obtidos analiticamente, e que em materiais compósitos, cada um desses fatores pode ter um efeito considerável sobre as frequências naturais obtidas.

## CAPÍTULO 6

### RESULTADOS

O objetivo deste capítulo é o de apresentar as frequências naturais adimensionais de vigas escalonadas em duas e em três partes, dadas pela equação 6.1, uma vez que as frequências adimensionais propostas por esta equação são as mais encontradas na literatura, e avaliar o efeito da orientação das fibras sobre estas frequências. As vigas são consideradas sobre apoios elásticos nas suas extremidades. Os resultados apresentados aqui foram gerados pelo programa computacional desenvolvido pelo autor, e alguns desses resultados ainda não se encontram disponíveis na literatura. Logo, estes resultados poderão servir de base para o estudo de outros autores sobre o tema. As propriedades do material das vigas a serem simuladas são apresentadas na tabela 6.1, enquanto que as propriedades geométricas das vigas contínuas e escalonadas são apresentadas na tabela 6.2.

$$\omega_{ad} = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho}{E_1 h_1^2}} \quad (6.1)$$

sendo  $\omega$  a frequência natural angular da viga (rad/s),  $L$  o comprimento total da viga (m),  $\rho$  a massa específica do material (kg/m<sup>3</sup>),  $E_1$  o módulo de elasticidade na direção principal do laminado (Pa) e  $h_1$  a espessura do primeiro trecho da viga (m).



Tabela 6.1 – Propriedades materiais das vigas simuladas (Yildirim e Kiral (2000)).

Propriedade	Unidade	Valor
Densidade ( $\rho$ )	kg/m <sup>3</sup>	1389,23
Módulo de elasticidade longitudinal ( $E_1$ )	GPa	144,8
Módulo de elasticidade transversal ( $E_2$ )	GPa	9,65
Módulo de cisalhamento no plano 1-2 ( $G_{12}$ )	GPa	4,14
Módulo de cisalhamento no plano 1-3 ( $G_{13}$ )	GPa	4,14
Módulo de cisalhamento no plano 2-3 ( $G_{23}$ )	GPa	3,45
Coefficiente de Poisson no plano 1-2 ( $\nu_{12}$ )	-	0,30

Tabela 6.2 – Propriedades geométricas das vigas simuladas.

Viga	Propriedade	Unidade	Trecho		
			1	2	3
Escalonada: duas partes	Comprimento ( $L$ )	m	0,075	0,075	-
	Espessura ( $h$ )	m	0,010	0,005	-
	Largura ( $b$ )	m	0,010	0,010	-
	Número de lâminas	-	4	2	-
	Caso 1	-	[0/0/0/0]	[0/0]	-
	Caso 2	-	[90/90/90/90]	[90/90]	-
	Caso 3	-	[45/-45/-45/45]	[-45/-45]	-
Escalonada: três partes	Comprimento ( $L$ )	m	0,075	0,075	0,075
	Espessura ( $h$ )	m	0,015	0,010	0,005
	Largura ( $b$ )	m	0,010	0,010	0,010
	Número de lâminas	-	6	4	2
	Caso 1	-	[0/0/0] <sub>s</sub>	[0/0] <sub>s</sub>	[0/0]
	Caso 2	-	[90/90/90] <sub>s</sub>	[90/90] <sub>s</sub>	[90/90]
	Caso 3	-	[-45/45/-45] <sub>s</sub>	[45/-45] <sub>s</sub>	[-45/-45]

s – simétrico.

As propriedades do material foram retiradas de Yildirim e Kiral (2000), que se referem a um compósito fibra de carbono com resina epóxi.

## 6.1 FREQUÊNCIAS NATURAIS ADIMENSIONAIS DE UMA VIGA COMPÓSITA ESCALONADA EM DUAS PARTES

Atribui-se o mesmo comprimento para os trechos, de modo que três esquemas de laminação possam ser analisados, conforme mostrado na tabela 6.2. São apresentados também gráficos mostrando o comportamento das quatro primeiras frequências adimensionais em função do aumento da relação  $\frac{L}{h_1}$ , sendo  $L$  o valor do comprimento total da viga (em m) e  $h_1$  o valor da espessura do primeiro trecho (em m). Para a elaboração dos gráficos, a espessura foi considerada constante e o valor do comprimento total da viga foi a variável.

Nas tabelas de 6.3 a 6.8 encontram-se os resultados obtidos na determinação das quatro primeiras frequências naturais adimensionais da viga escalonada em duas partes sobre diferentes tipos de apoio para o Caso 1.

Tabela 6.3 – Três primeiras frequências adimensionais do caso 1 – modelo de Euler-Bernoulli.

Caso 1 - Modelo de Euler-Bernoulli			
Condição	1ª Freq.	2ª Freq.	3ª Freq.
SS	2,8408	11,9592	26,1968
CC	6,5202	18,6245	35,7155
FF	6,5532	18,6251	35,7074
CF	1,3796	6,6647	18,5514
CS	4,7175	14,9897	30,8686

SS – simplesmente apoiada; CC – engastada nas duas extremidades; FF – livre-livre; CF – engastada-livre; CS – engastada-apoiada.

Tabela 6.4 – Três primeiras frequências adimensionais do caso 1 – modelo de Cisalhamento.

Caso 1 - Modelo de Cisalhamento			
Condição	1ª Freq.	2ª Freq.	3ª Freq.
SS	2,6741	9,6280	17,6349
CC	6,0605	14,5203	23,3270
FF	6,0831	14,5664	23,2886
CF	1,3934	6,1558	23,2339
CS	4,4456	11,8667	20,5583

SS – simplesmente apoiada; CC – engastada nas duas extremidades; FF – livre-livre; CF – engastada-livre; CS – engastada-apoiada.

As figuras de 6.1 a 6.6 mostram a variação da frequência adimensional em função da relação  $\frac{L}{h_1}$  da viga e o desvio relativo entre os modelos de Euler-Bernoulli e Cisalhamento para o Caso 1. São apresentados os gráficos para as condições simplesmente apoiada, engastada-apoiada e engastada-engastada, uma vez que os gráficos são muito semelhantes para as demais condições de apoio.

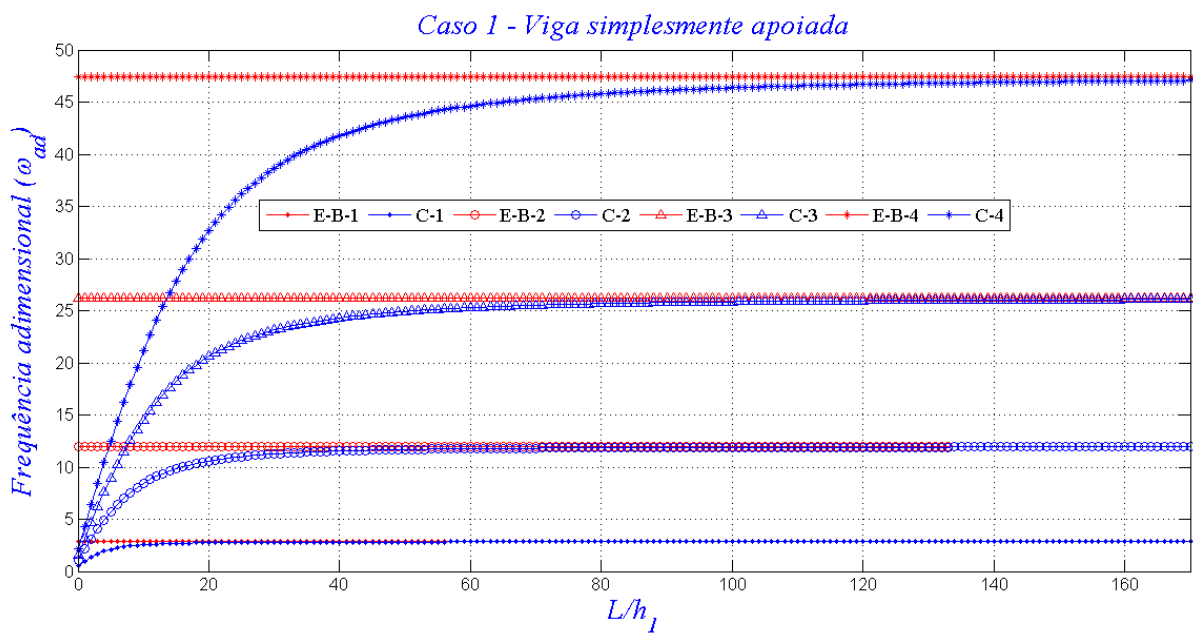


Figura 6.1 - Quatro primeiras frequências adimensionais - viga simplesmente apoiada.

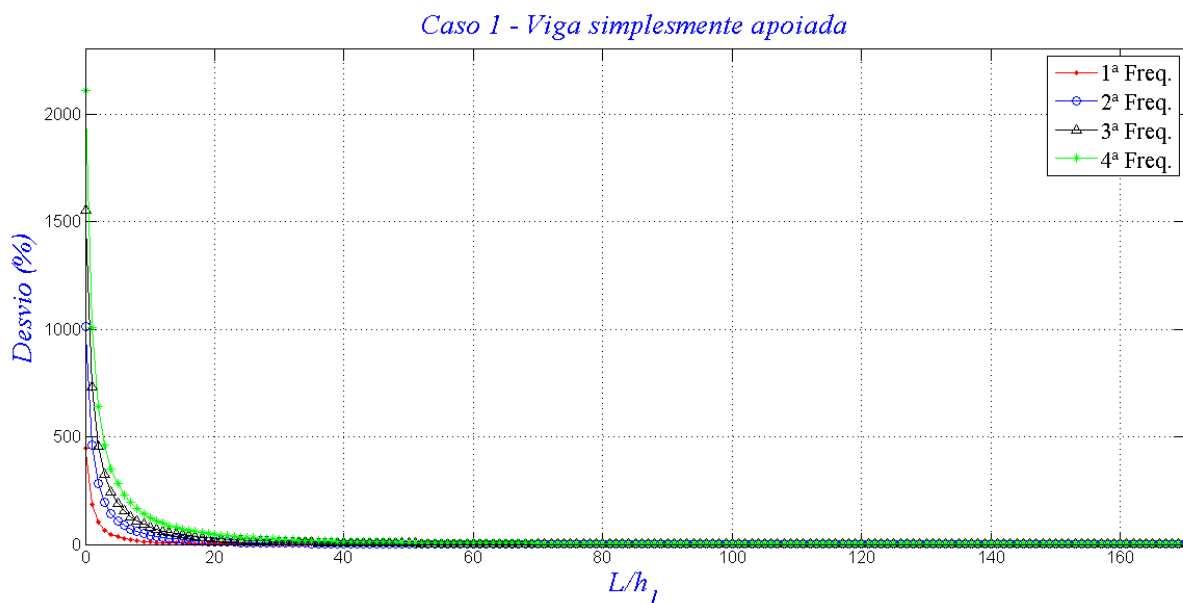


Figura 6.2 - Desvio relativo para as quatro primeiras frequências adimensionais - viga simplesmente apoiada.

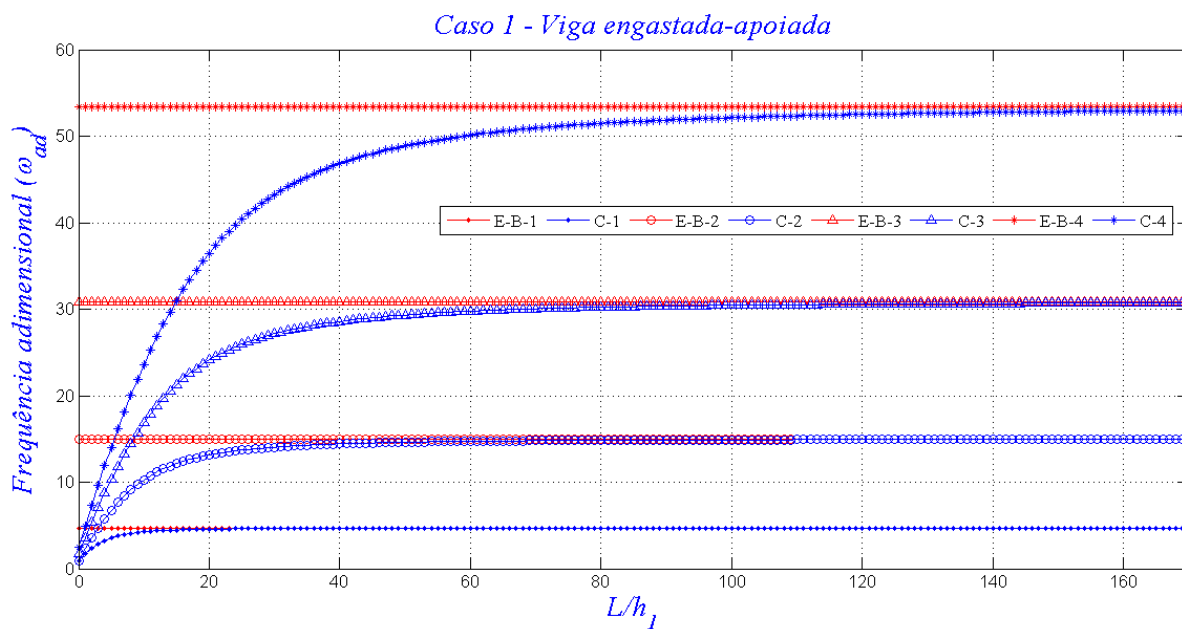


Figura 6.3 - Quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-apoiada.

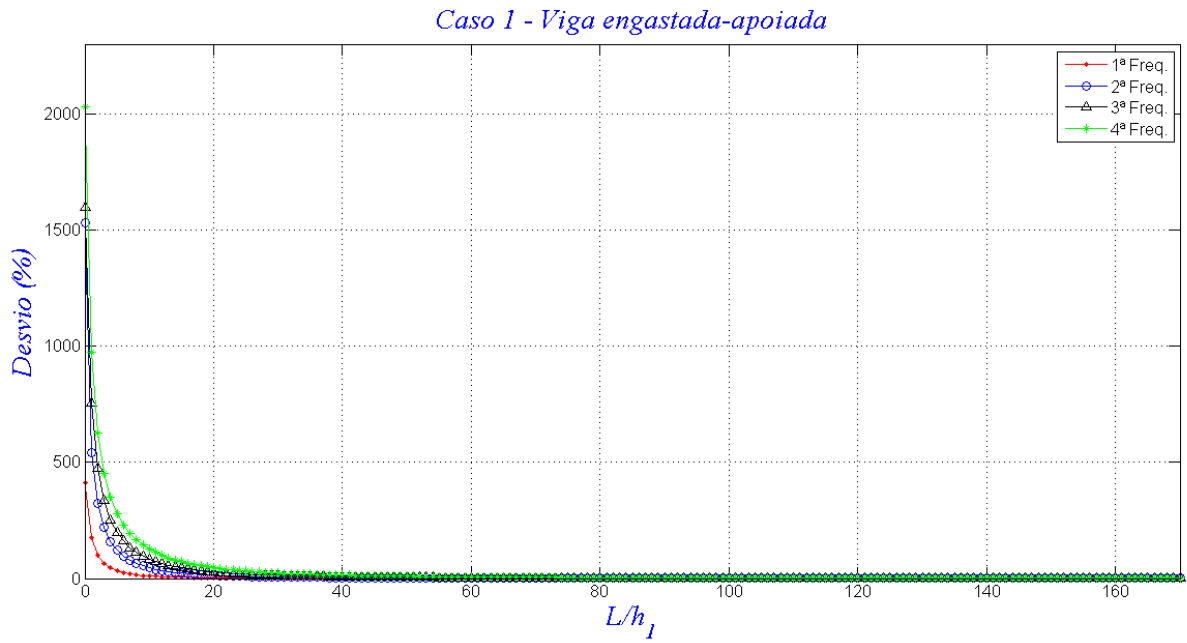


Figura 6.4 - Desvio relativo para as quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-apoiada.

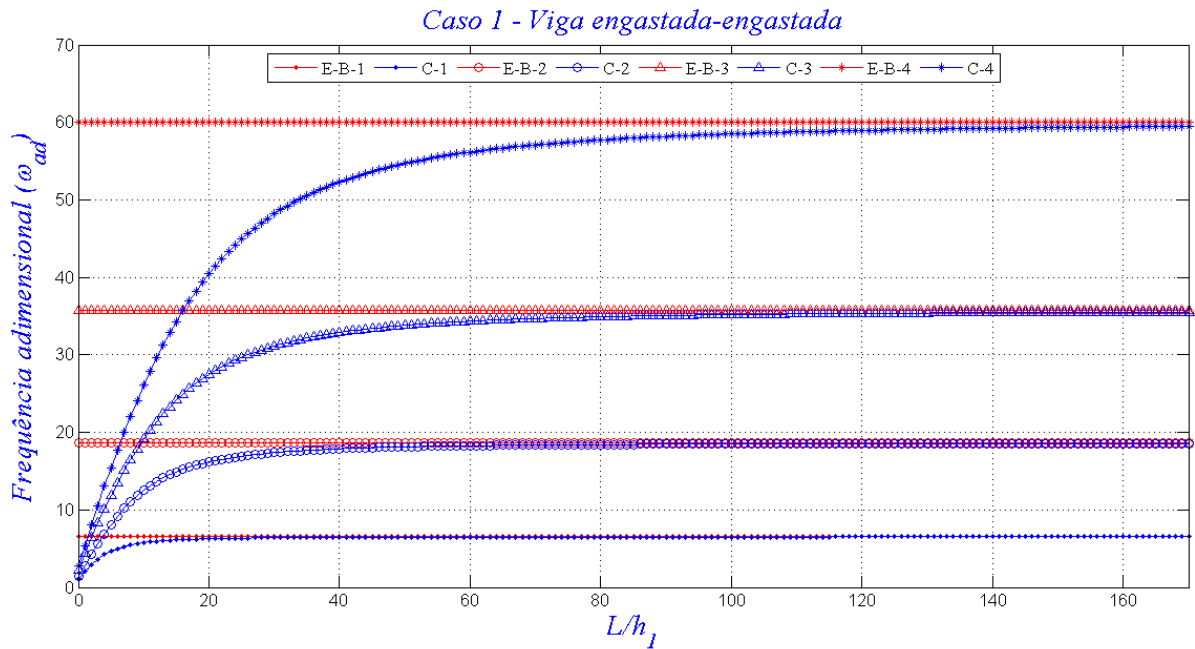


Figura 6.5 - Quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-engastada.

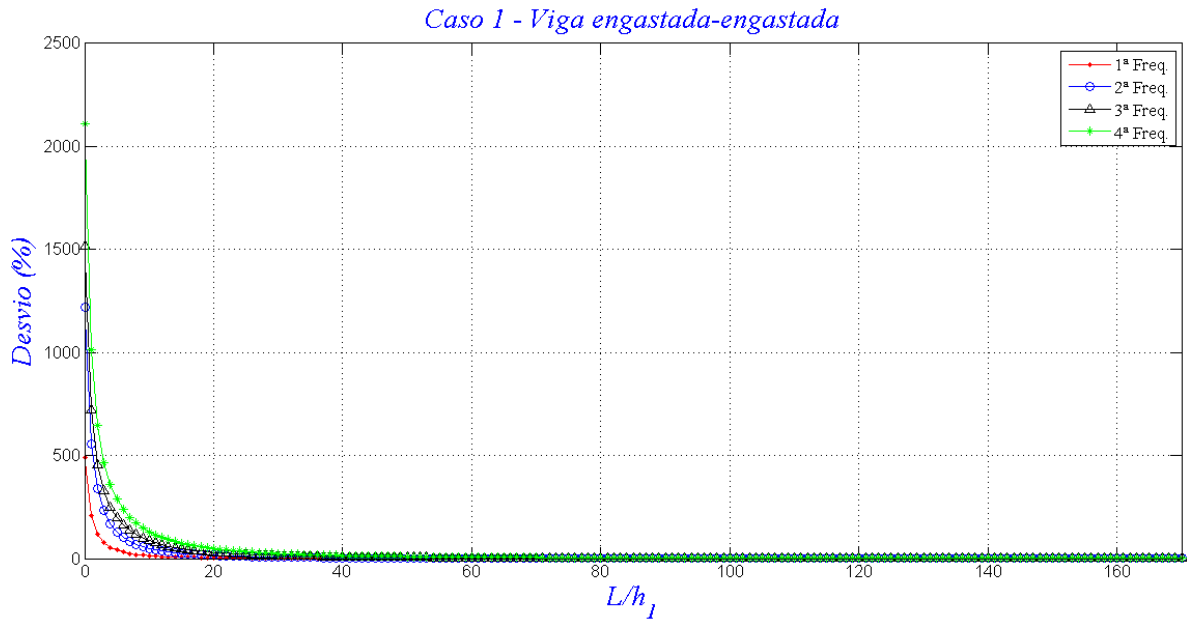


Figura 6.6 - Desvio relativo para as quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-engastada.

O desvio relativo entre os modelos foi calculado através da equação 6.2. Sendo  $\omega_{ad\ EB}$  a frequência adimensional obtida pelo método de Euler-Bernoulli e  $\omega_{ad\ C}$  é a frequência adimensional obtida pelo método de Cisalhamento.

$$Desvio(\%) = \left( \frac{\omega_{ad\ EB} - \omega_{ad\ C}}{\omega_{ad\ C}} \right) * 100 \quad (6.2)$$

Nota-se que as frequências obtidas pelo modelo de Euler-Bernoulli não sofrem a influência da relação  $\frac{L}{h_1}$ , ou seja, as linhas encontradas para este modelo nos gráficos das figuras 6.1, 6.3 e 6.5 permanecem constantes a medida que esta relação é alterada. Com o aumento da relação  $\frac{L}{h_1}$ , o desvio relativo entre os modelos diminui. Adotando-se um padrão de desvio relativo, a partir do qual os modelos de Euler-Bernoulli e Cisalhamento convergem para a mesma frequência, sendo este desvio de 0,10% para a primeira e quarta frequência natural. Este desvio é adotado de modo que se torne possível a tomada de decisão de quando se utili-

zar um ou outro modelo para a determinação das frequências naturais de uma viga com uma determinada relação  $\frac{L}{h_1}$ , uma vez que pode-se optar pela utilização do modelo de Euler-Bernoulli devido à sua menor complexidade se comparado ao modelo de Cisalhamento. Logo, este desvio adotado é considerado pequeno, de modo que as frequências obtidas pelos modelos de Euler-Bernoulli e Cisalhamento são também consideradas iguais. Não é adotado aqui um desvio de 0%, devido ao comportamento assintótico das curvas dos desvios plotadas.

A partir de  $\frac{L}{h_1} = 118$  para a primeira frequência o desvio converge para o valor de 0,10% para a condição simplesmente apoiada, e para as condições engastada-apoiada e engastada-engastada, estes valores de  $\frac{L}{h_1}$  são de 117 e 131, respectivamente. Já para a quarta frequência, o desvio relativo entre os modelos estudados converge para 0,10% a partir de uma relação  $\frac{L}{h_1}$  de 404, 411 e 421 para as condições simplesmente apoiada, engastada-apoiada e engastada-engastada, respectivamente. Nota-se ainda, que para frequências maiores o desvio relativo é muito alto para baixas relações  $\frac{L}{h_1}$ , e diminui à medida em que é aumentada essa relação, como observado no trabalho de Yildirim e Kiral (2000).

As tabela 6.5 e 6.6 mostram as frequências adimensionais obtidas para o Caso 2, para as diferentes condições de apoio elástico.

Já as figuras de 6.7 a 6.12 ilustram o comportamento das frequências adimensionais pra diferentes relações  $\frac{L}{h_1}$ .

Tabela 6.5 – Três primeiras frequências adimensionais do caso 2 – modelo de Euler-Bernoulli.

Caso 2 - Modelo de Euler-Bernoulli			
Condição	1ª Freq.	2ª Freq.	3ª Freq.
SS	0,7334	3,0873	6,7628
CC	1,6832	4,8080	9,2201
FF	1,6917	4,8081	9,2180
CF	0,3561	1,7205	4,7891
CS	1,2178	3,8696	7,9688

SS – simplesmente apoiada; CC – engastada nas duas extremidades; FF – livre-livre; CF – engastada-livre; CS – engastada-apoiada.

Tabela 6.6 – Três primeiras frequências adimensionais do caso 2 – modelo de Cisalhamento.

Caso 2 - Modelo de Cisalhamento			
Condição	1ª Freq.	2ª Freq.	3ª Freq.
SS	0,7296	3,0225	6,4592
CC	1,6727	4,6906	8,7620
FF	1,6810	4,6915	8,7596
CF	0,3564	1,7091	4,6708
CS	1,2117	3,7819	7,6000

SS – simplesmente apoiada; CC – engastada nas duas extremidades; FF – livre-livre; CF – engastada-livre; CS – engastada-apoiada.

É observada uma redução nos valores das frequências naturais adimensionais do Caso 1 para o Caso 2. Isto reflete a influência da orientação das fibras sobre as frequências naturais, ou seja, quando as fibras estão orientadas a 0° a rigidez à flexão é maior do que quando as fibras estão orientadas a 90°, pois a 0° a resistência aos esforços é devida principalmente às fibras, já a 90°, esta resistência é devida principalmente à matriz, a qual possui uma rigidez inferior àquela apresentada pela fibra. Logo, quanto maior a rigidez, maiores os valores das frequências naturais da viga. Isto mostra que é possível a alteração da rigidez da estrutura sem



alterar sua massa ou suas propriedades geométricas. Desta forma, pode-se optar pela sequência de empilhamento que melhor atender à solicitação exigida sobre a estrutura.

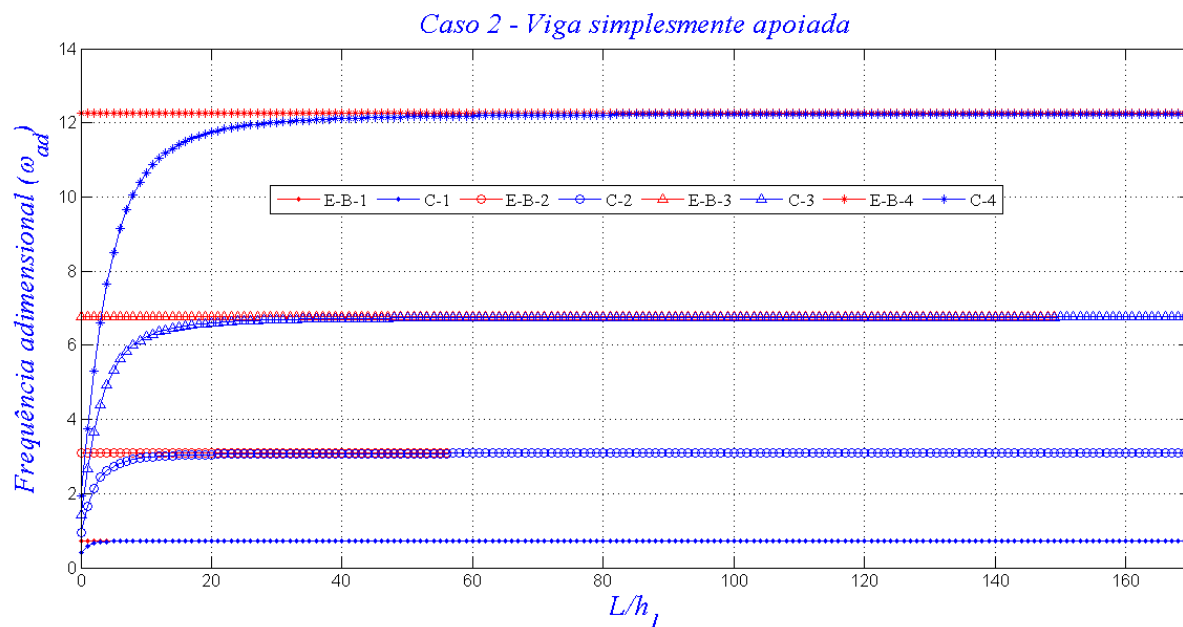


Figura 6.7 - Quatro primeiras frequências adimensionais - viga simplesmente apoiada.

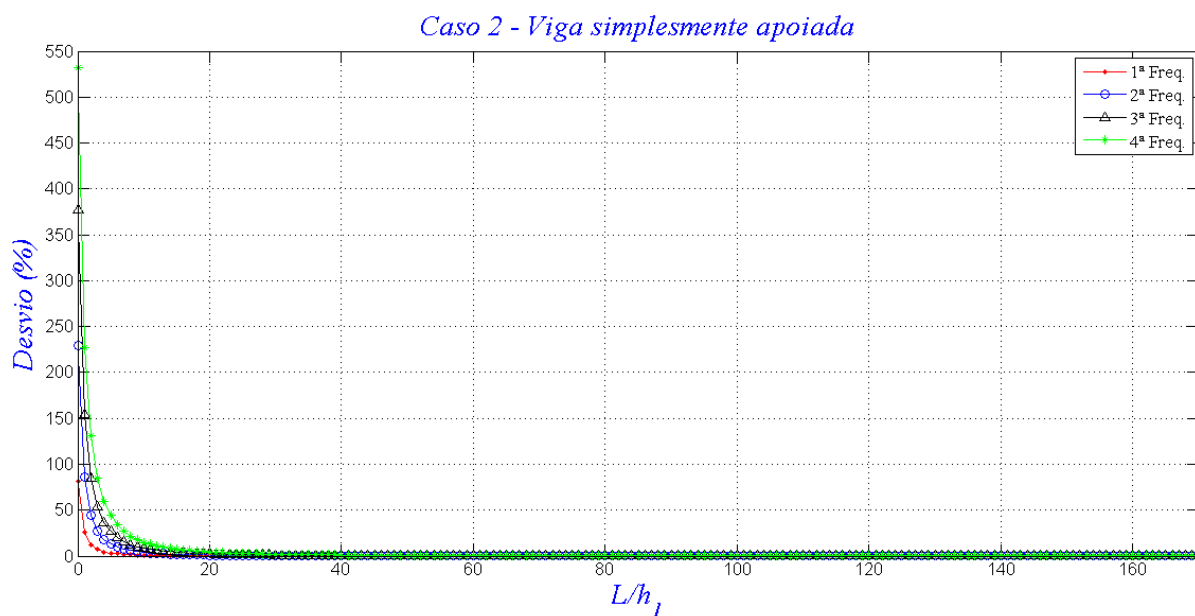


Figura 6.8 - Desvio relativo para as quatro primeiras frequências adimensionais - viga simplesmente apoiada.

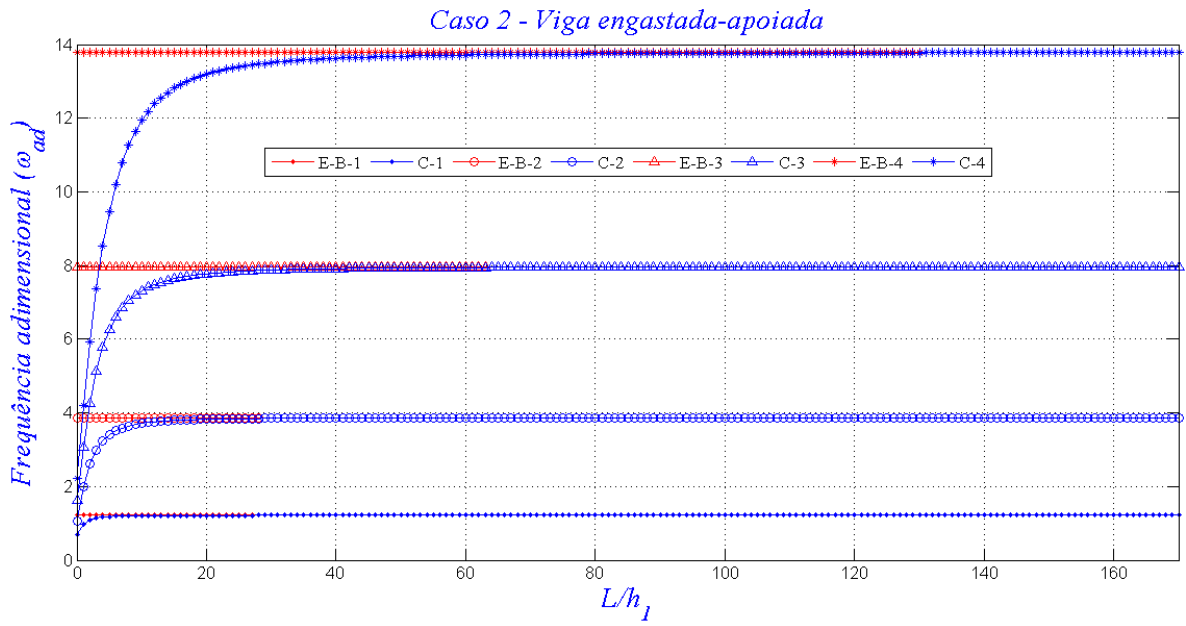


Figura 6.9 - Quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-apoiada.

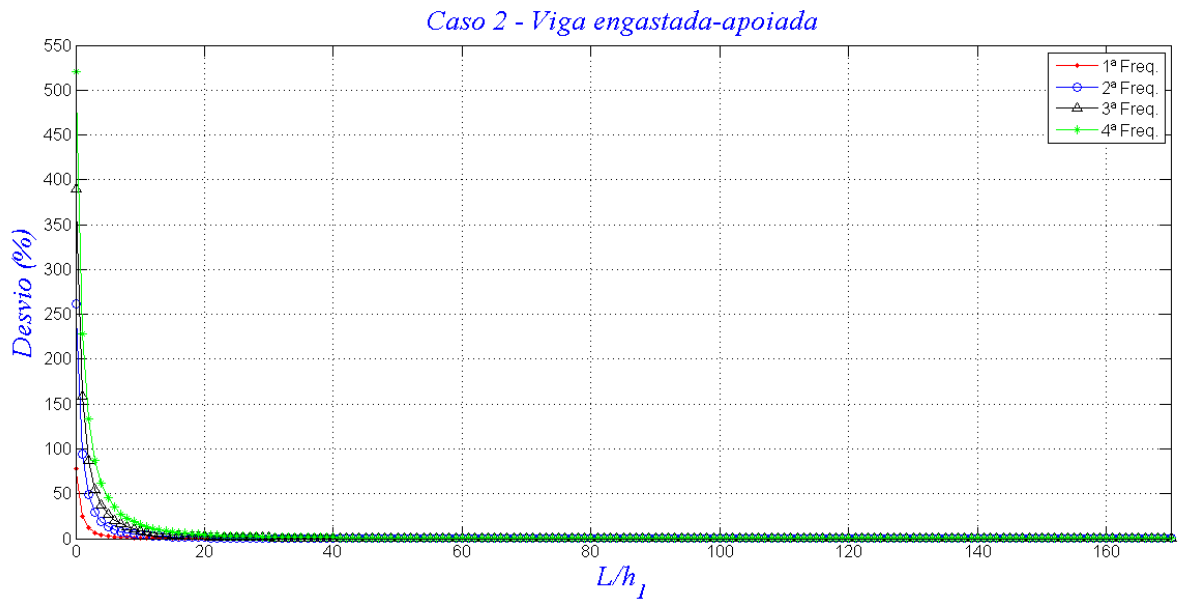


Figura 6.10 - Desvio relativo para as quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-apoiada.

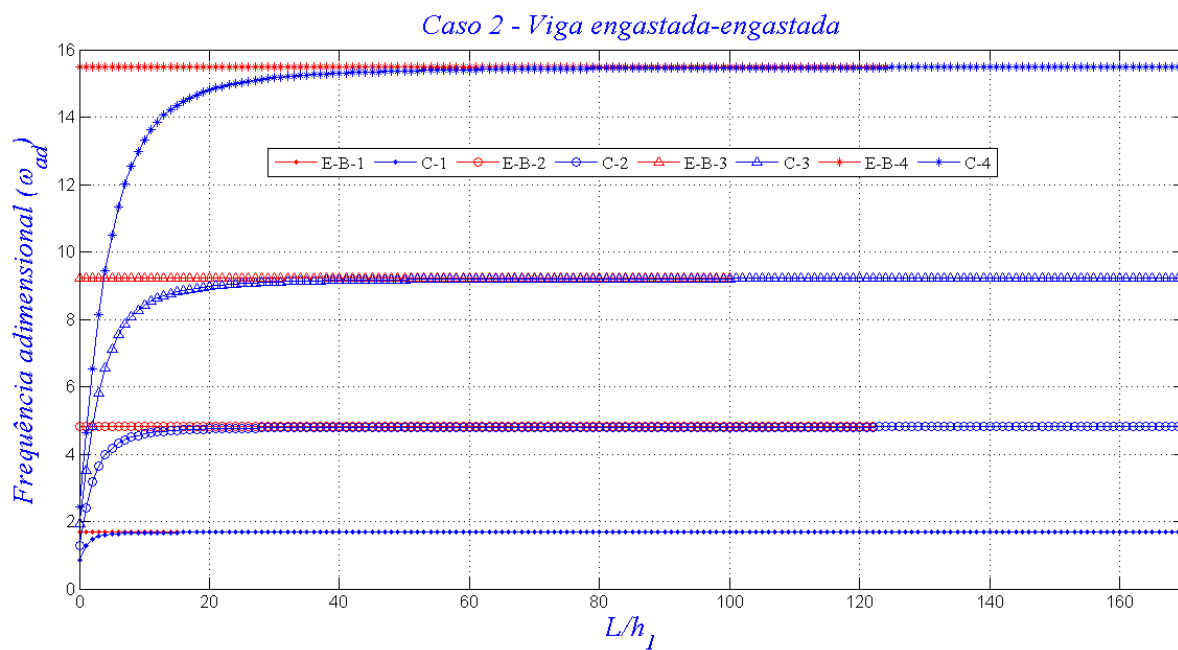


Figura 6.11 - Quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-engastada.

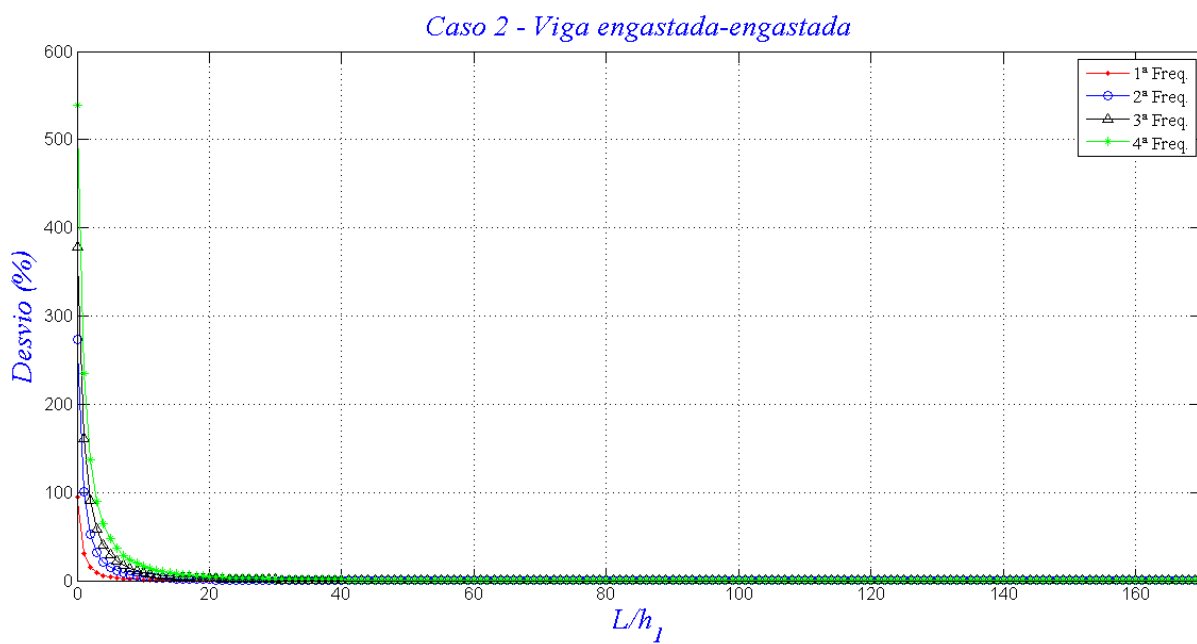


Figura 6.12 - Desvio relativo para as quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-engastada.

Observa-se para o Caso 2, para as frequências fundamentais, que a partir de uma relação  $\frac{L}{h_1}$  igual a 34, 33 e 37, para as condições simplesmente apoiada, engastada-apoiada e engastada-engastada, respectivamente, o desvio relativo entre o modelo de Euler-Bernoulli e o modelo de Cisalhamento converge para o valor de 0,10%. Para a quarta frequência, o desvio converge para 0,10% para uma relação  $\frac{L}{h_1}$  igual a 137, 139 e 143, para as condições citadas, nesta ordem. Isso mostra que uma alteração de 90° na direção das fibras, por exemplo para a condição simplesmente apoiada, do Caso 1 para o Caso 2, reduz em 71,19% o valor da relação  $\frac{L}{h_1}$  a partir da qual o desvio relativo entre os dois modelos converge para 0,10% para a primeira frequência natural.

As tabelas 6.7 e 6.8 e as figuras de 6.13 a 6.18 mostram os resultados encontrados para o Caso 3.

Tabela 6.7 – Três primeiras frequências adimensionais do caso 3 – modelo de Euler-Bernoulli.

Caso 3 - Modelo de Euler-Bernoulli			
Condição	1ª Freq.	2ª Freq.	3ª Freq.
SS	1,5690	6,6055	14,4695
CC	3,6013	10,2870	19,7270
FF	3,6196	10,2873	19,7226
CF	0,7620	3,6812	10,2467
CS	2,6057	8,2794	17,0499

SS – simplesmente apoiada; CC – engastada nas duas extremidades; FF – livre-livre; CF – engastada-livre; CS – engastada-apoiada.

Tabela 6.8 – Três primeiras frequências adimensionais do caso 3 – modelo de Cisalhamento.

Caso 3 - Modelo de Cisalhamento			
Condição	1ª Freq.	2ª Freq.	3ª Freq.
SS	1,5365	6,0796	12,2248
CC	3,5105	9,3439	16,3958
FF	3,5267	9,3517	16,3881
CF	0,7645	3,5820	9,2967
CS	2,5524	7,5699	14,3330

SS – simplesmente apoiada; CC – engastada nas duas extremidades; FF – livre-livre; CF – engastada-livre; CS – engastada-apoiada.

Para o Caso 3, os valores das frequências naturais obtidos permaneceram entre aqueles encontrados para o Caso 1 e para o Caso 2, ou seja, foram maiores que para o Caso 2, e menores que para o Caso 1, como já era de se esperar, pois as fibras estando orientadas a +45° e a -45°, fazem com que a rigidez da viga à flexão tenha um valor intermediário entre aquelas rigidezes encontradas para a orientação das fibras a 0° e a 90°. Para este Caso 3, boa parte da resistência aos esforços é devida à matriz e outra boa parte às fibras, fato este que justifica a rigidez à flexão intermediária entre os demais casos.

Da mesma forma, observando-se os gráficos das figuras 6.13 a 6.18, as frequências naturais adimensionais obtidas pelos modelos de Euler-Bernoulli e Cisalhamento se aproximam para uma relação  $\frac{L}{h_1}$  de 68, 68, e 76, respectivamente para as condições simplesmente apoiada, engastada-apoiada e engastada-engastada para a primeira frequência natural, de modo que a partir desta relação, o desvio relativo entre estes dois modelos torna-se 0,10%. Para a quarta frequência, a convergência do desvio relativo para 0,10% ocorre a partir de  $\frac{L}{h_1}$  igual a 233, 237 e 244 respectivamente para as condições de apoio citadas.

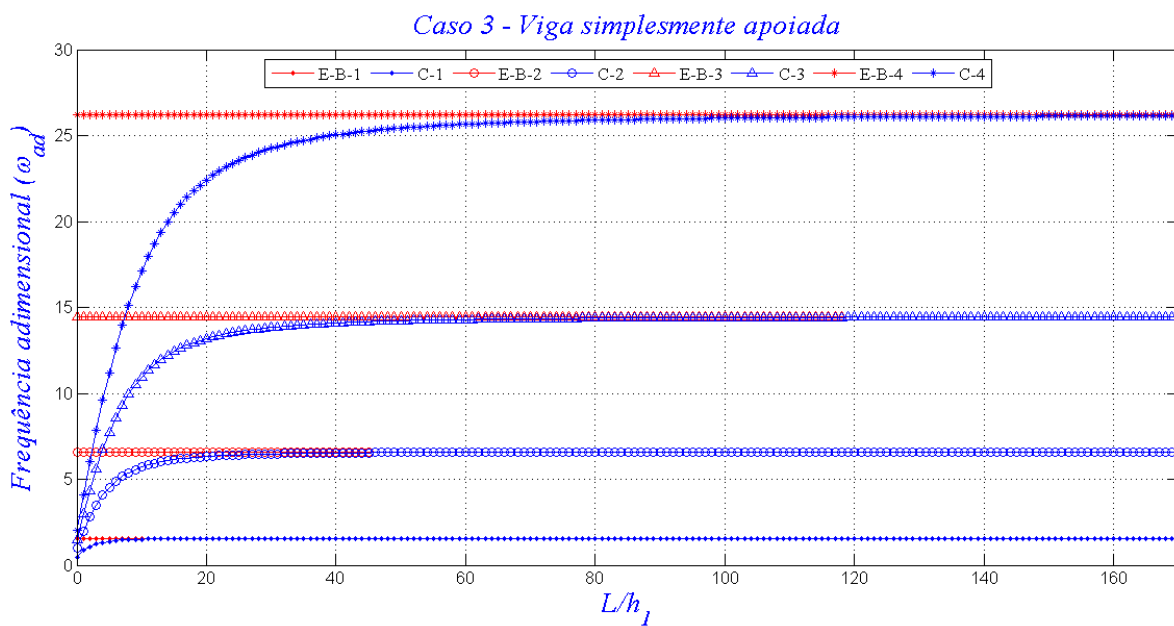


Figura 6.13 - Quatro primeiras frequências adimensionais - viga simplesmente apoiada.

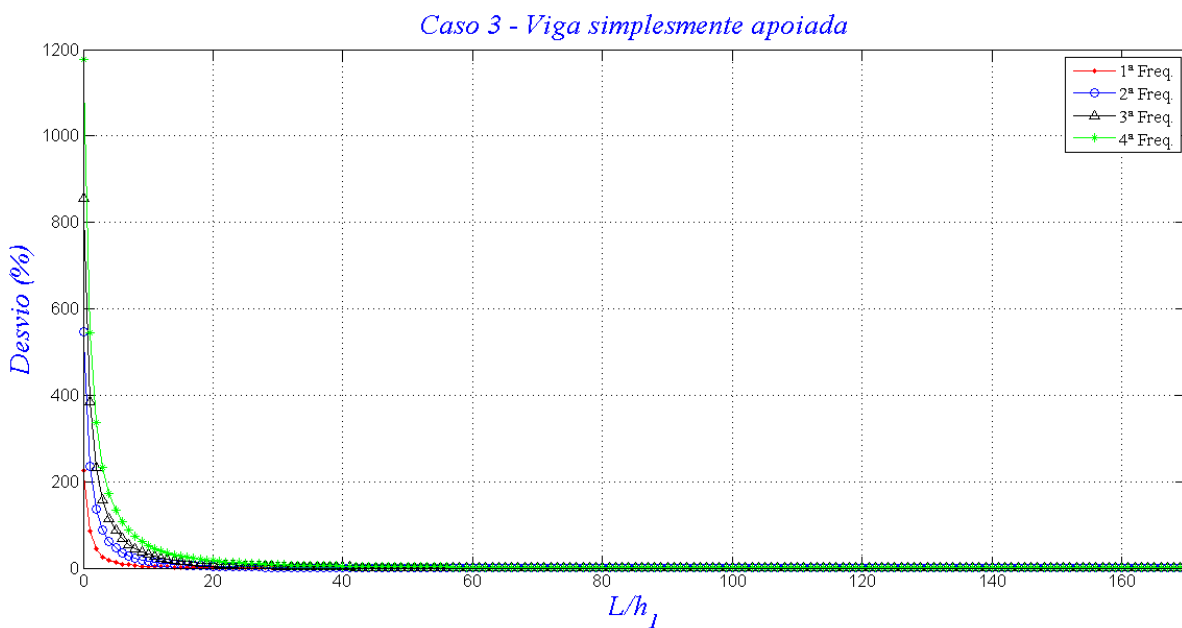


Figura 6.14 - Desvio relativo para as quatro primeiras frequências adimensionais - viga simplesmente apoiada.

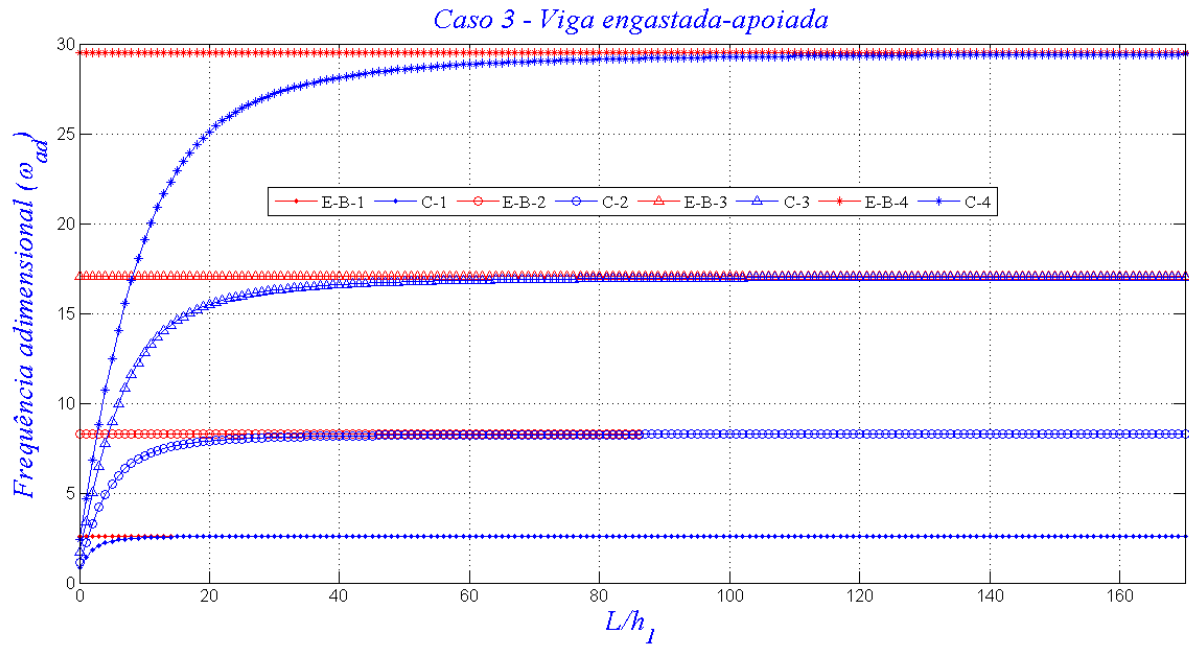


Figura 6.15 - Quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-apoiada.

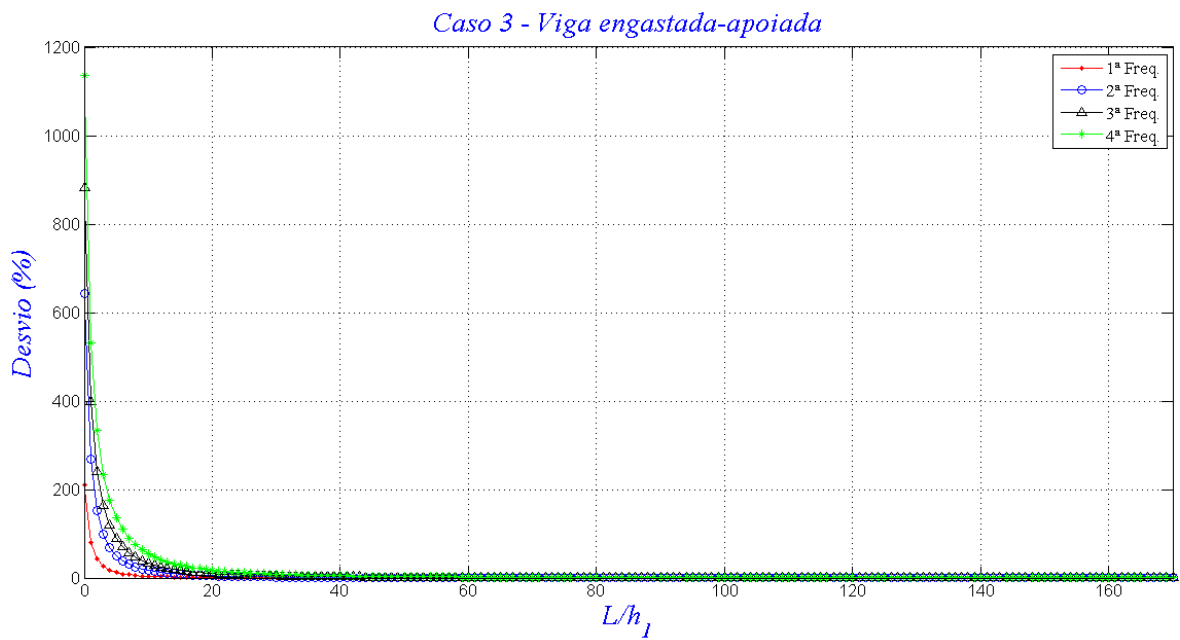


Figura 6.16 - Desvio relativo para as quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-apoiada.

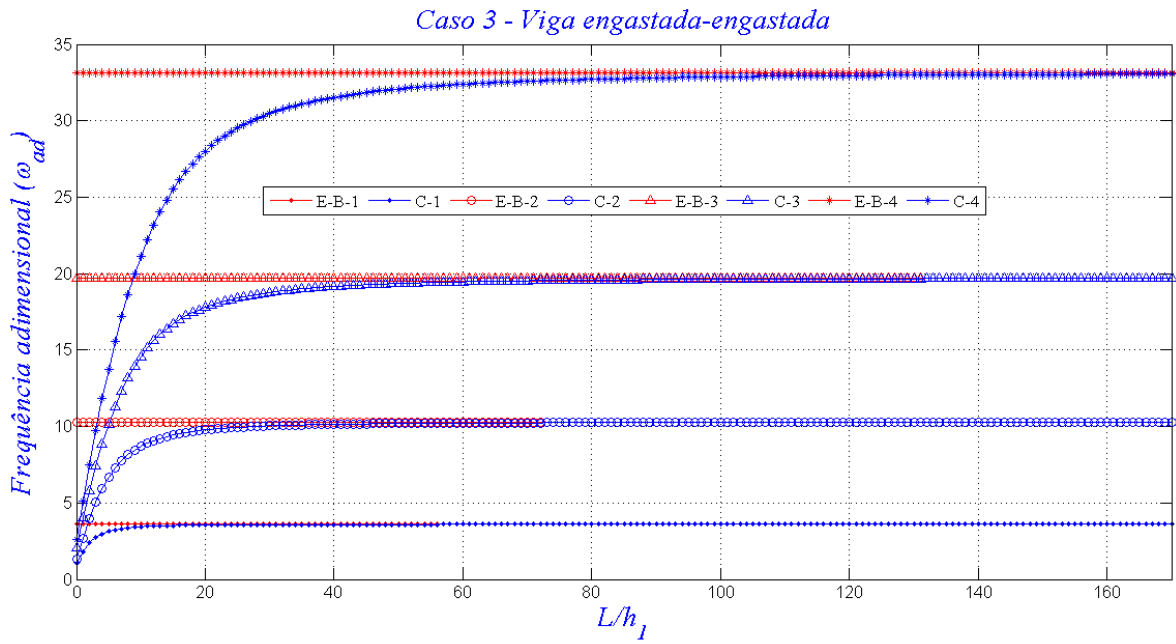


Figura 6.17 - Quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-engastada.

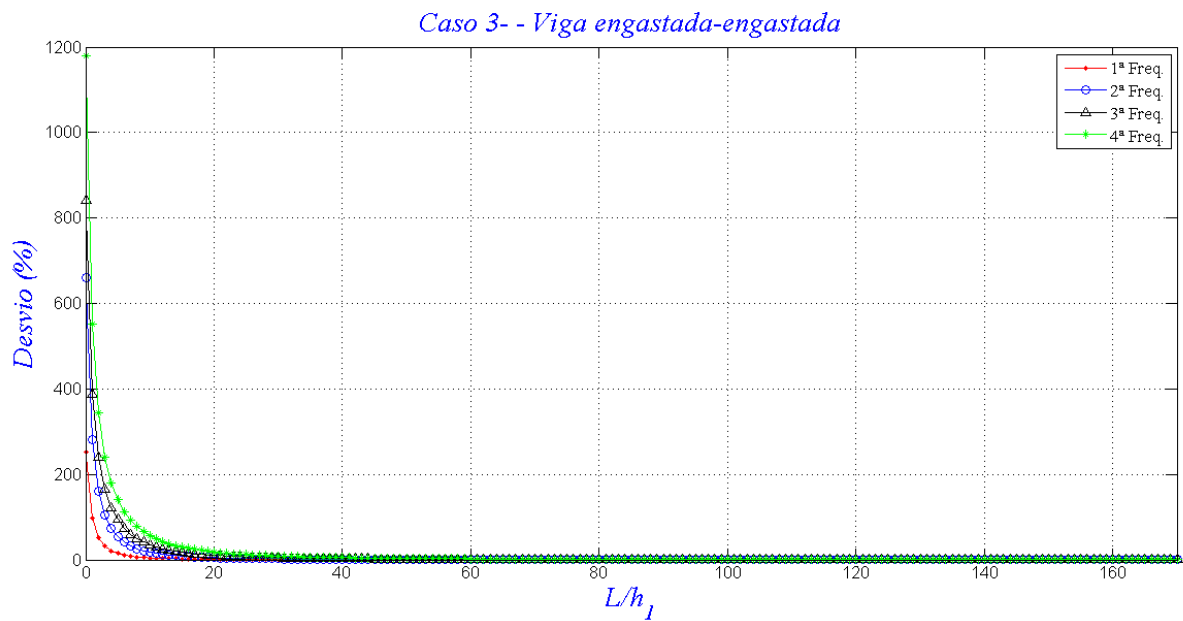


Figura 6.18 - Desvio relativo para as quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-engastada.



## 6.2 FREQUÊNCIAS NATURAIS ADIMENSIONAIS DE UMA VIGA COMPÓSITA ESCALONADA EM TRÊS PARTES

Trabalha-se agora, com vigas escalonadas em três partes, ou seja, com duas mudanças de seções. Aqui novamente os comprimentos dos trechos escalonados são iguais, e para a elaboração dos gráficos da variação das frequências adimensionais em função da relação  $\frac{L}{h_1}$ , o valor da espessura foi mantido constante, e a variável foi o valor do comprimento total da viga. As propriedades materiais e geométricas para esta viga estão presentes nas tabelas 6.1 e 6.2.

As tabelas 6.9 e 6.10 apresentam os valores das três primeiras frequências naturais adimensionais para uma viga escalonada em três partes e apoiada elasticamente nas extremidades para o Caso 1. Nota-se uma elevação nos valores das frequências adimensionais quando a comparação é feita para o mesmo Caso da viga escalonada em duas partes. Embora o comprimento total da viga escalonada em três partes seja maior que o da escalonada em duas partes, o primeiro trecho da viga teve a adição de duas camadas, fato este que elevou sua rigidez, e como a frequência natural é uma função da rigidez, a mesma também se eleva.

Tabela 6.9 – Três primeiras frequências adimensionais do Caso 1 – modelo de Euler-Bernoulli.

Caso 1 - Modelo de Euler-Bernoulli			
Condição	1ª Freq.	2ª Freq.	3ª Freq.
SS	3,2592	12,8186	30,0596
CC	7,2334	19,9006	40,5858
FF	7,9622	20,2010	40,5206
CF	1,6100	8,0629	20,2221
CS	5,3080	16,5328	34,8763

SS – simplesmente apoiada; CC – engastada nas duas extremidades; FF – livre-livre; CF – engastada-livre; CS – engastada-apoiada.

Já as figuras de 6.19 a 6.24 mostram a variação das frequências adimensionais em função da relação  $\frac{L}{h_1}$ , bem como o desvio relativo entre os dois modelos estudados, para as condições simplesmente apoiada e engastada-apoiada, ainda para o Caso 1.

Tabela 6.10 – Três primeiras frequências adimensionais do caso 1 – modelo de Cisalhamento.

Caso 1 - Modelo de Cisalhamento			
Condição	1ª Freq.	2ª Freq.	3ª Freq.
SS	3,0495	10,2529	19,8203
CC	6,6630	15,3545	25,9167
FF	7,3471	16,6919	25,8486
CF	1,6282	7,3811	15,6992
CS	4,9674	13,0994	22,6553

SS – simplesmente apoiada; CC – engastada nas duas extremidades; FF – livre-livre; CF – engastada-livre; CS – engastada-apoiada.

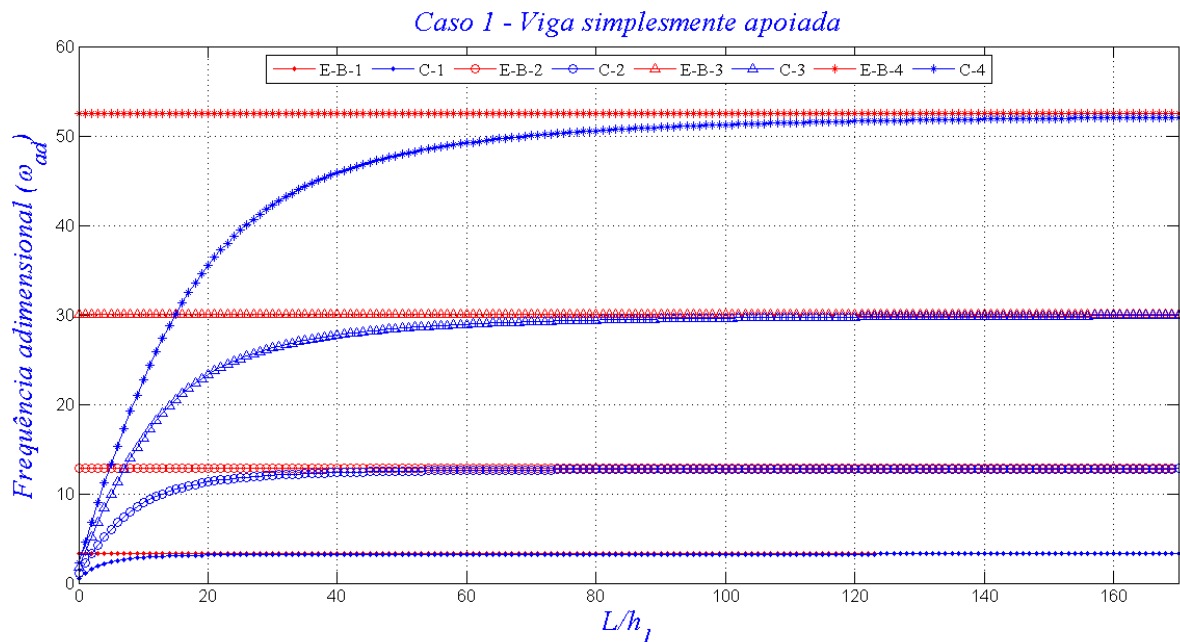


Figura 6.19 - Quatro primeiras frequências adimensionais - viga simplesmente apoiada.

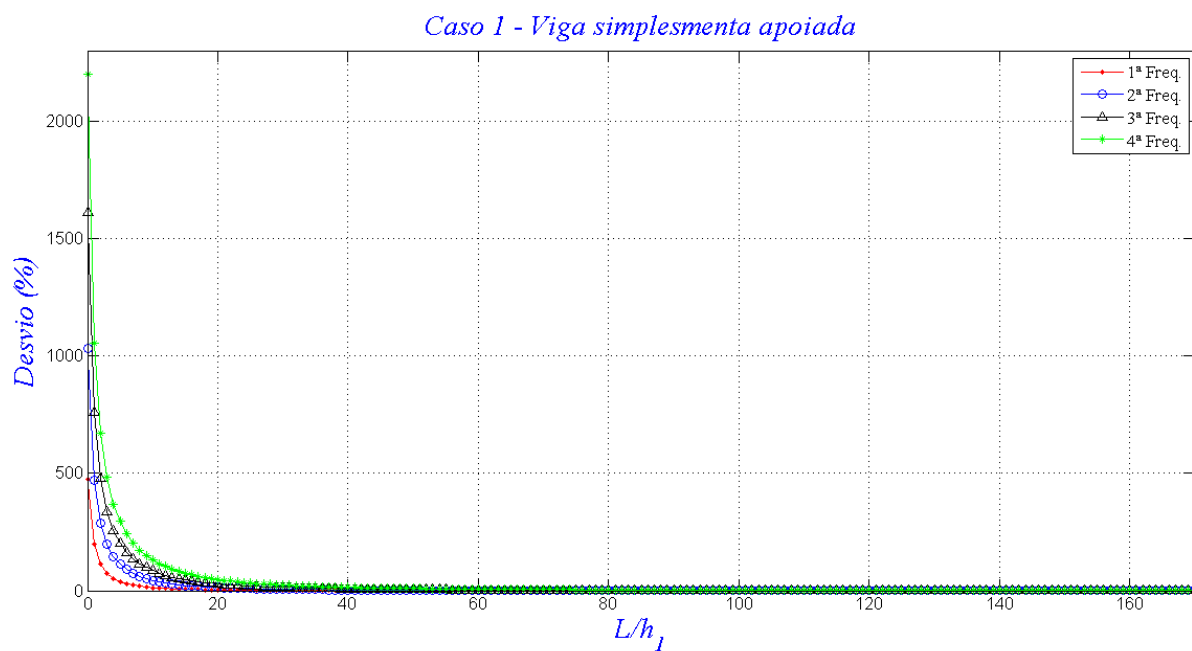


Figura 6.20 - Desvio relativo para as quatro primeiras frequências adimensionais - viga simplesmente apoiada.

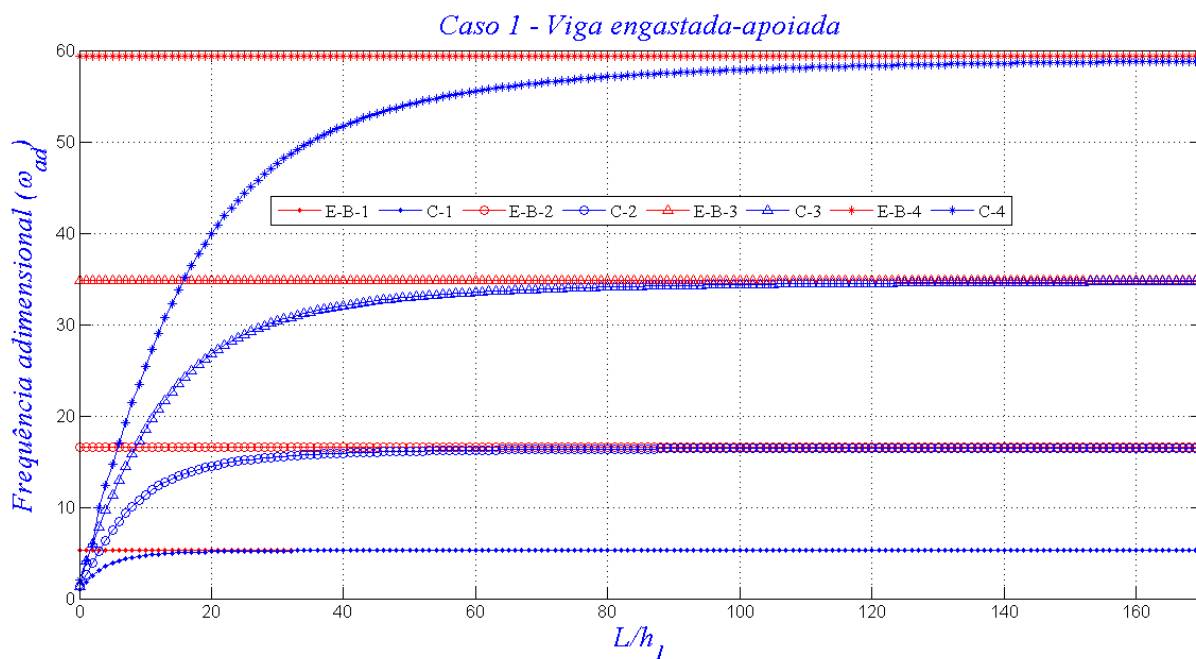


Figura 6.21 - Quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-apoiada.

Nota-se que a primeira frequência adimensional para os dois modelos se aproxima para uma relação  $\frac{L}{h_1}$  igual a 124, 124 e 139, respectivamente para as condições simplesmente apoiada, engastada-apoiada e engastada-engastada, e a partir desta relação, o desvio relativo entre os modelos torna-se menor que 0,10%. Já para a quarta frequência, o desvio relativo converge para 0,10% a partir de uma relação  $\frac{L}{h_1}$  de 417, 421 e 434, respectivamente para as condições simplesmente apoiada, engastada-apoiada e engastada-engastada.

É observada ainda uma boa proximidade entre os valores de  $\frac{L}{h_1}$  obtidos para as diferentes condições de apoios, sendo que para as condições simplesmente apoiada e engastada apoiada, os valores são mais próximos ainda.

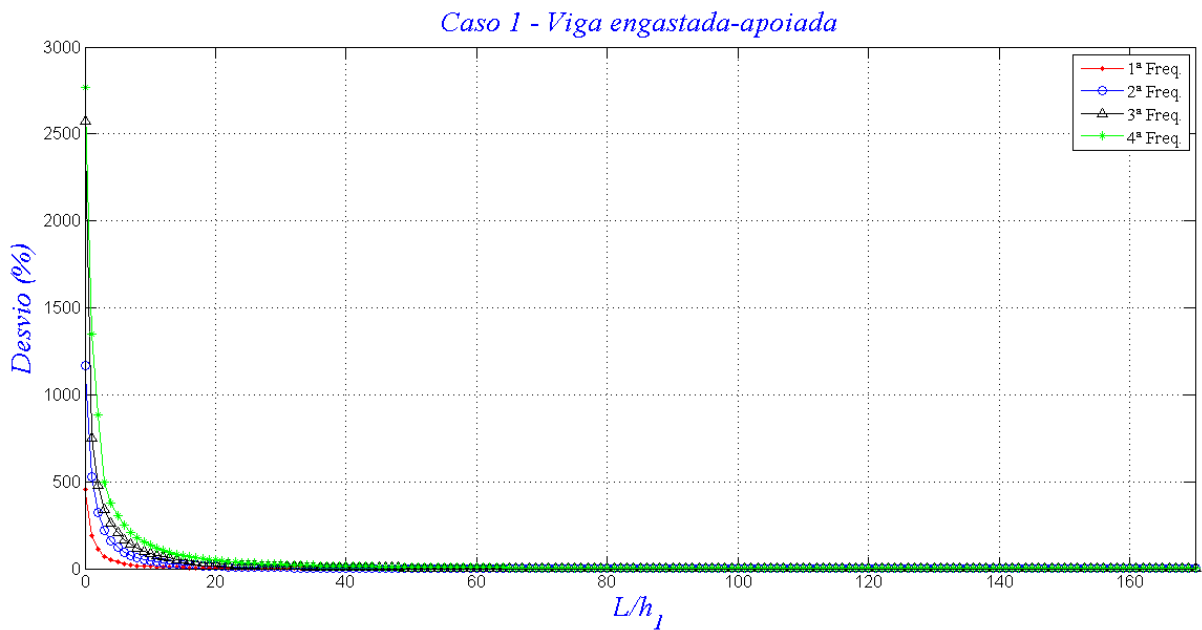


Figura 6.22 - Desvio relativo para as quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-apoiada.

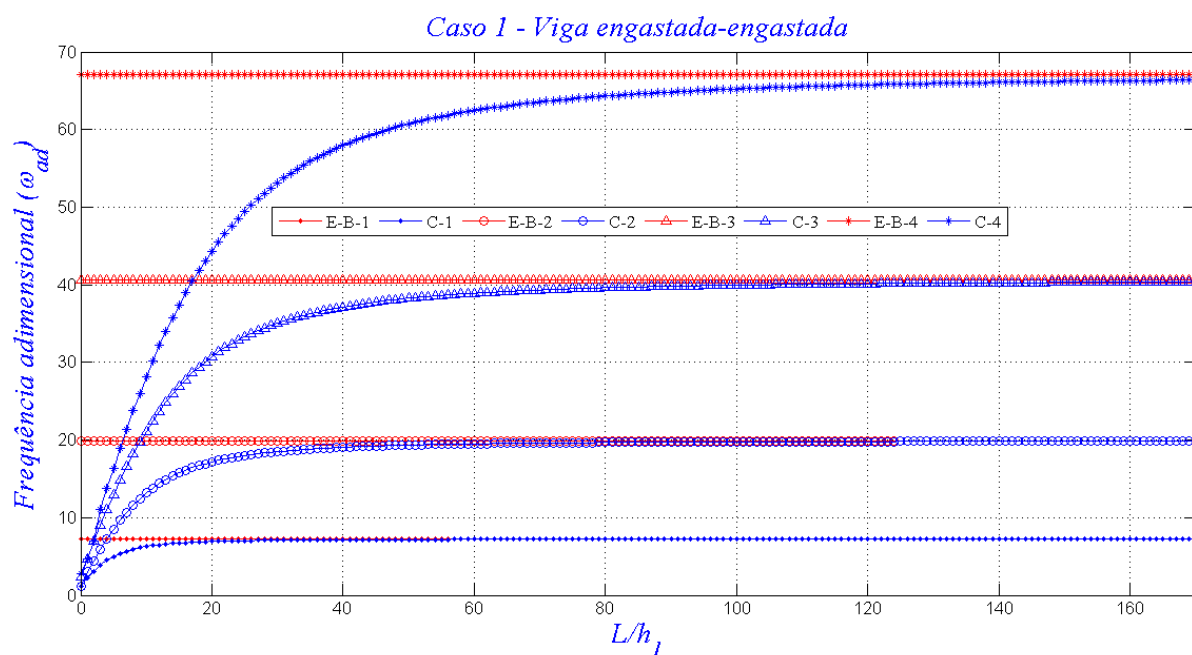


Figura 6.23 - Quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-engastada.

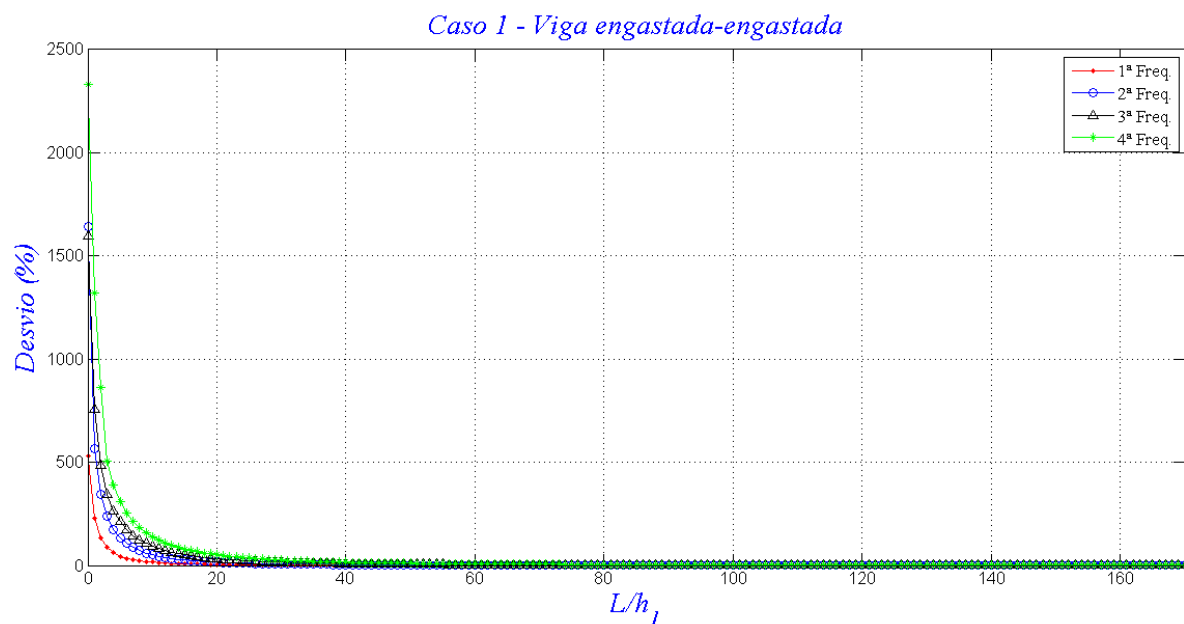


Figura 6.24 - Desvio relativo para as quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-engastada.

Nas tabelas 6.11 e 6.12 são mostradas as quatro primeiras frequências naturais adimensionais para o Caso 2, obtidas pelo modelo de Euler-Bernoulli e Cisalhamento, para dife-

rentes condições de apoios elásticos. Já as figuras de 6.25 a 6.30 mostram a variação das frequências adimensionais em função da relação  $\frac{L}{h_1}$ .

Tabela 6.11 – Três primeiras frequências adimensionais do caso 2 – modelo de Euler-Bernoulli.

Caso 2 - Modelo de Euler-Bernoulli			
Condição	1ª Freq.	2ª Freq.	3ª Freq.
SS	0,8414	3,3092	7,7600
CC	1,8673	5,1374	10,4774
FF	2,0555	5,2150	10,4605
CF	0,4156	2,0815	5,2204
CS	1,3703	4,2680	9,0035

SS – simplesmente apoiada; CC – engastada nas duas extremidades; FF – livre-livre; CF – engastada-livre; CS – engastada-apoiada.

Tabela 6.12 – Três primeiras frequências adimensionais do caso 2 – modelo de Cisalhamento.

Caso 2 - Modelo de Cisalhamento			
Condição	1ª Freq.	2ª Freq.	3ª Freq.
SS	0,8366	3,2372	7,3857
CC	1,8541	5,0056	9,9183
FF	2,0413	5,0840	9,9014
CF	0,4160	2,0662	5,0889
CS	1,3625	4,1713	8,5503

SS – simplesmente apoiada; CC – engastada nas duas extremidades; FF – livre-livre; CF – engastada-livre; CS – engastada-apoiada.

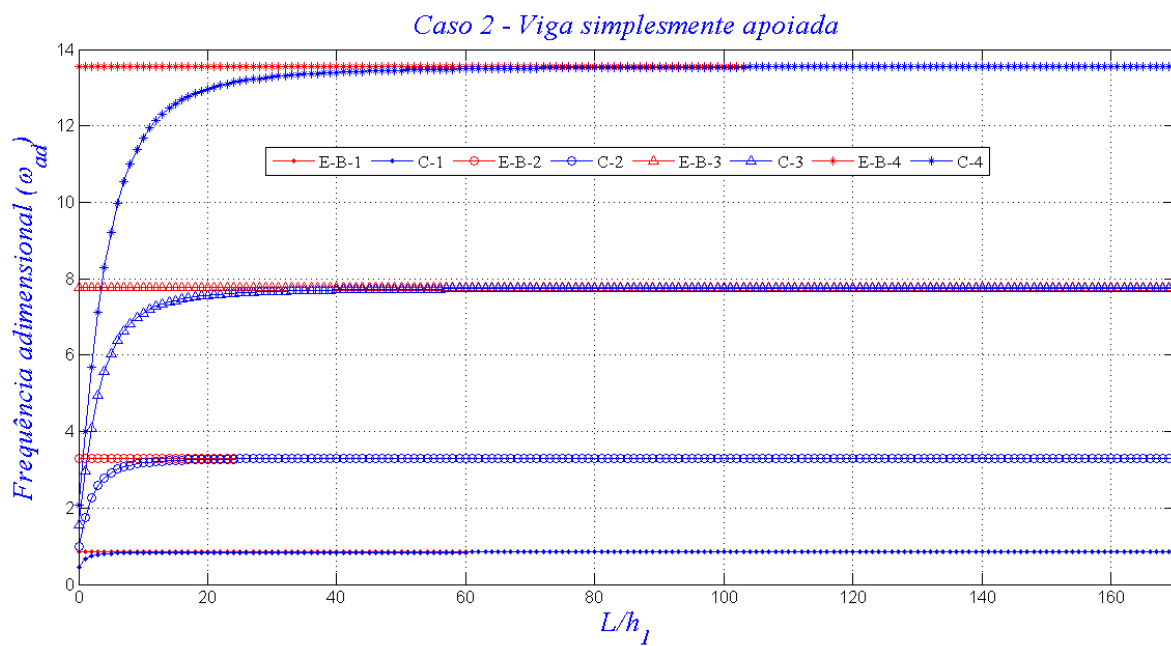


Figura 6.25 - Quatro primeiras frequências adimensionais - viga simplesmente apoiada.

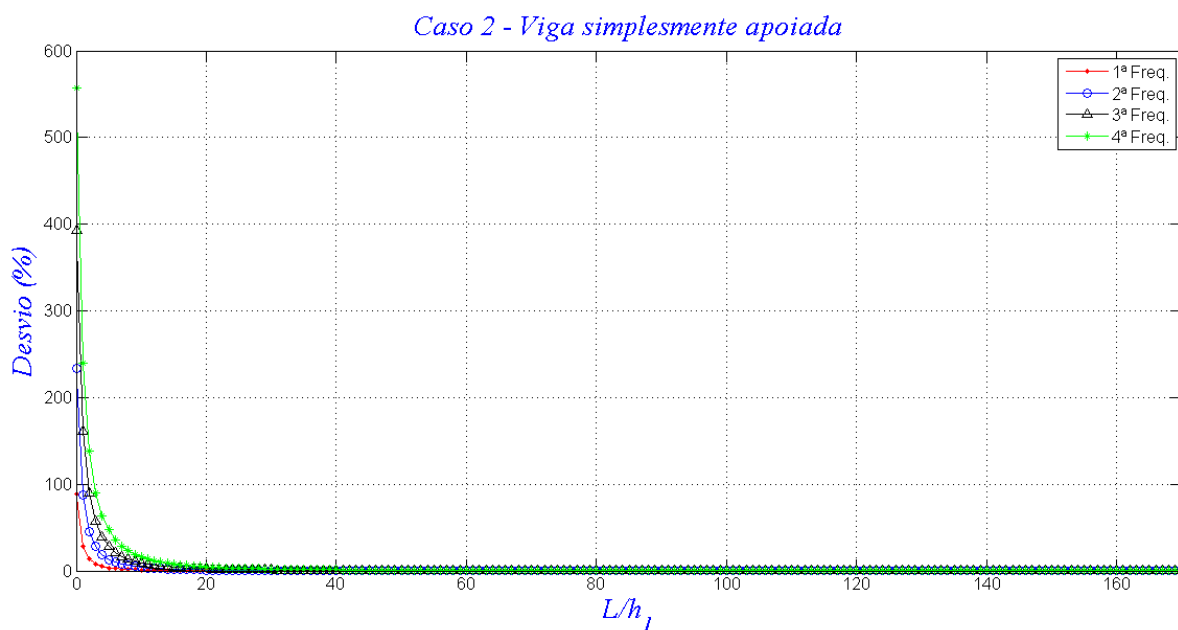


Figura 6.26 - Desvio relativo para as quatro primeiras frequências adimensionais - viga simplesmente apoiada.

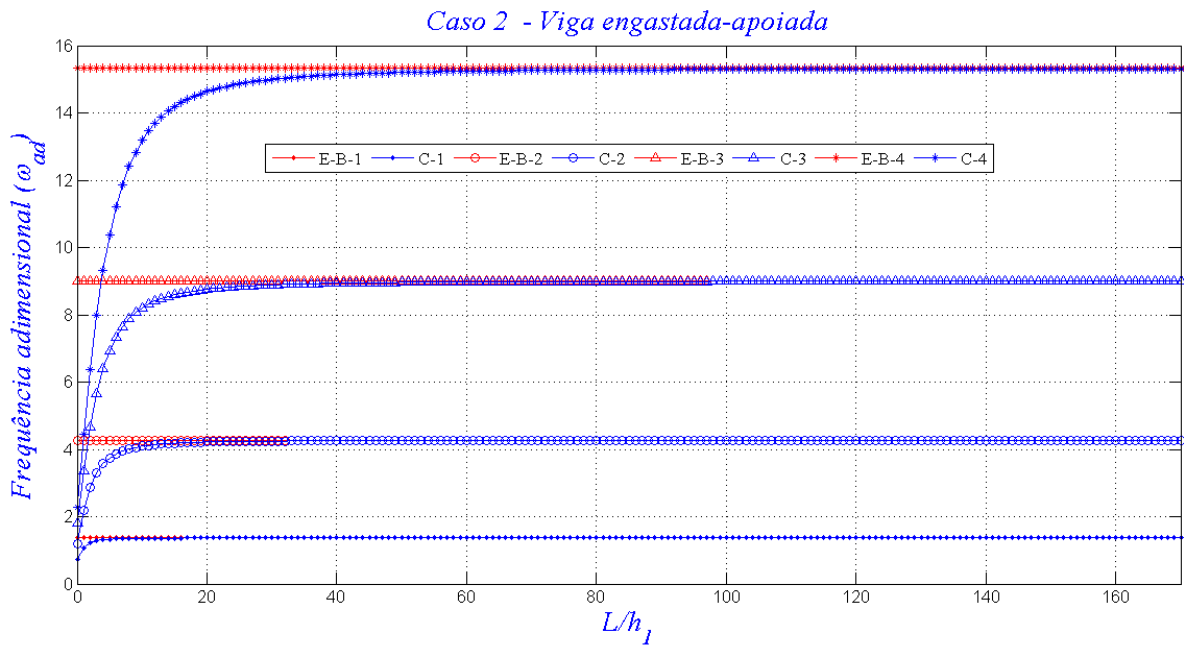


Figura 6.27 - Quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-apoiada.

Assim como para o Caso 1, as frequências adimensionais obtidas para o Caso 2, para a viga escalonada em três partes, são maiores que aquelas obtidas para o mesmo Caso para a viga escalonada em duas partes. A razão para isso é a mesma, a elevação da rigidez devida à adição de duas camadas ao primeiro trecho da viga. As frequências obtidas para o Caso 2 são menores que as do Caso 1, uma vez que no Caso 1 as fibras estão orientadas a  $0^\circ$ , e durante a flexão a resistência aos esforços é devida principalmente às fibras, enquanto que no Caso 2, onde as fibras estão orientadas a  $90^\circ$ , a resistência aos esforços é devida principalmente à matriz, o que diminui a rigidez, bem como as frequências naturais.

Para o Caso 2, a partir de uma relação  $\frac{L}{h_1}$  igual a 35, 35 e 40, respectivamente para as condições simplesmente apoiada, engastada-apoiada e engastada-engastada, o desvio relativo para a primeira frequência adimensional torna-se igual a 0,10%, e para a quarta frequência, o desvio relativo converge para o valor de 0,10% para uma relação de  $\frac{L}{h_1}$  igual a 142, 143 e 147, respectivamente para as condições de apoio citadas.



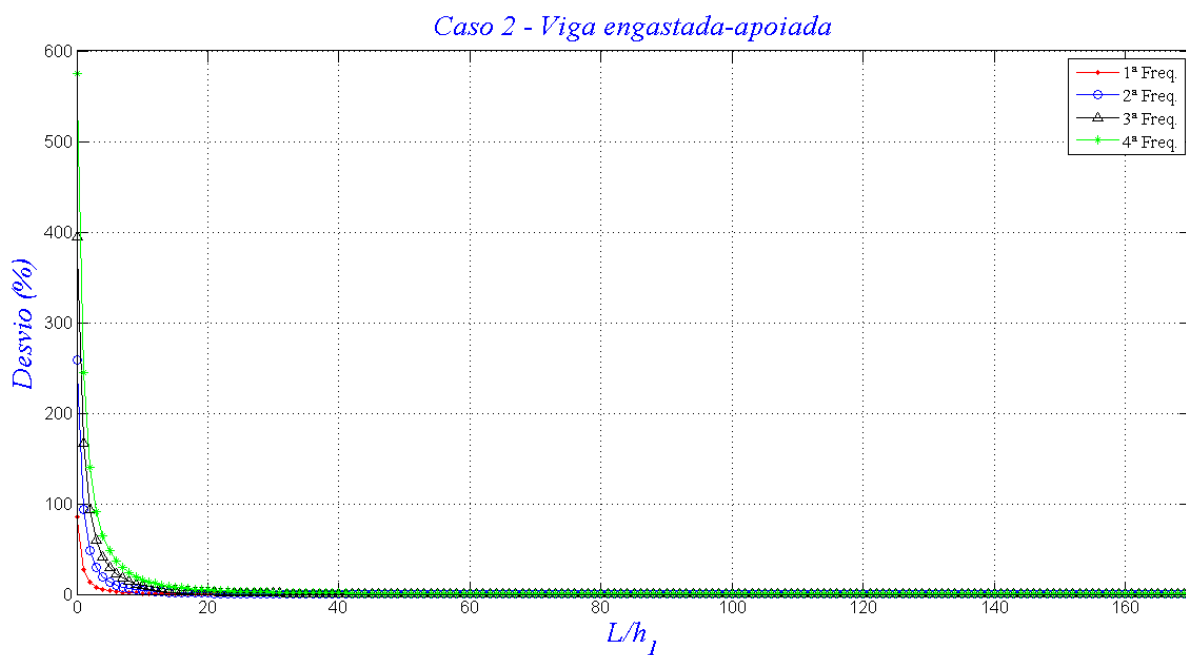


Figura 6.28 - Desvio relativo para as quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-apoiada.

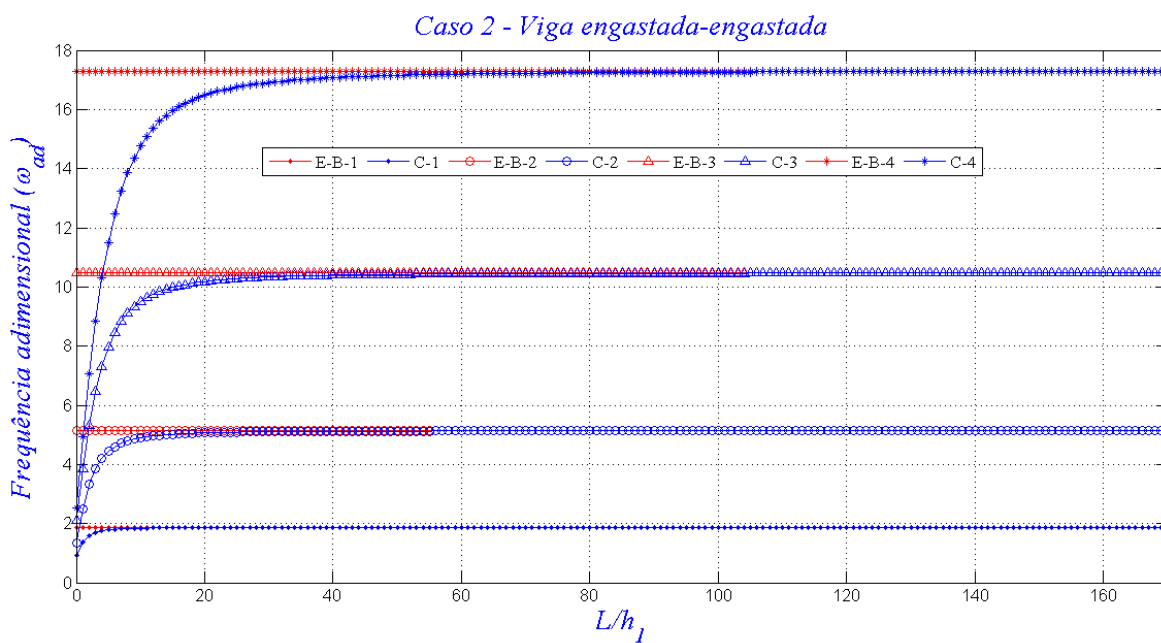


Figura 6.29 - Quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-engastada.

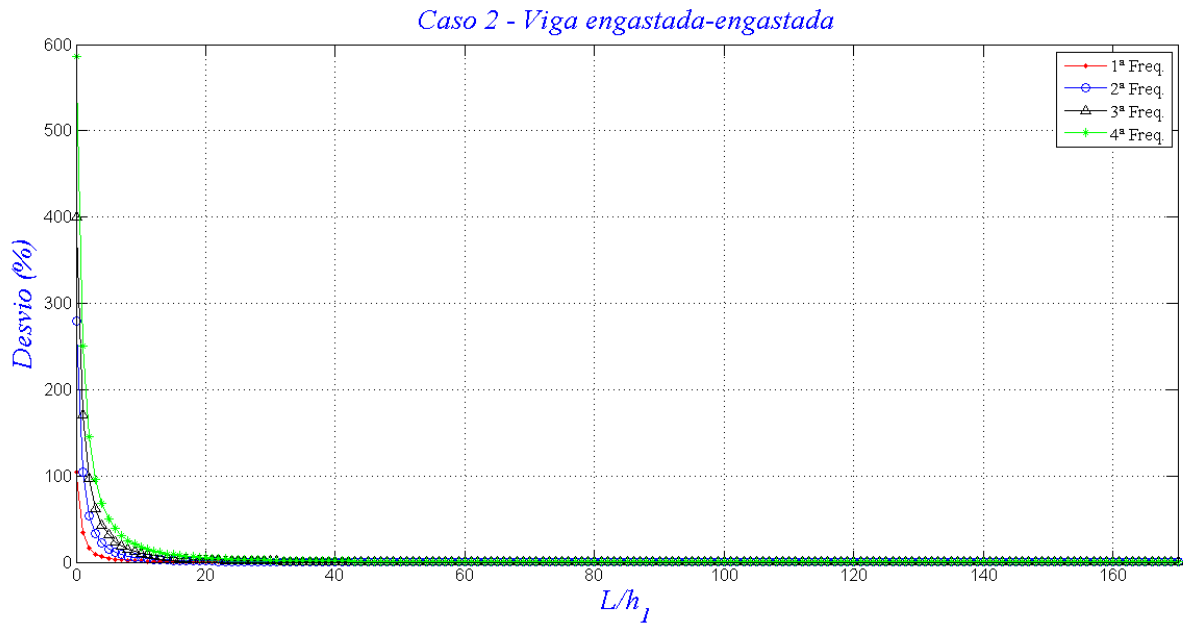


Figura 6.30 - Desvio relativo para as quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-engastada.

As tabelas 6.13 e 6.14 mostram as frequências obtidas para o Caso 3. Enquanto que as figuras de 6.31 a 6.36 mostram o comportamento da frequência adimensional em função da relação  $\frac{L}{h_1}$ . Das tabelas, percebe-se que as frequências adimensionais para o Caso 3 tiveram seus valores intermediários entre os Casos 1 e 2, assim como o ocorrido para a viga escalonada em duas partes. Pois uma vez as fibras estando orientadas a  $+45^\circ$  e a  $-45^\circ$ , a resistência aos esforços é devida tanto às fibras quanto à matriz durante a flexão, como explicado para a viga escalonada em duas partes.

Dos gráficos nota-se que as frequências fundamentais para os dois modelos se aproximam a partir de uma relação  $\frac{L}{h_1}$  igual a 72, 72 e 80, respectivamente para as condições simplesmente apoiada, engastada-apoiada e engastada-engastada, e a partir desta relação, o desvio relativo torna-se inferior a 0,10%. Para a quarta frequência, a relação  $\frac{L}{h_1}$  a partir da qual o desvio relativo torna-se inferior a 0,10% é de 241, 243 e 251, respectivamente para as condições simplesmente apoiada, engastada-apoiada e engastada-engastada.

Tabela 6.13 – Três primeiras frequências adimensionais do caso 3 – modelo de Euler-Bernoulli.

Caso 3 - Modelo de Euler-Bernoulli			
Condição	1ª Freq.	2ª Freq.	3ª Freq.
SS	1,8002	7,0802	16,6031
CC	3,9953	10,9918	22,4171
FF	4,3978	11,1578	22,3811
CF	0,8893	4,4535	11,1694
CS	2,9318	9,1317	19,2635

SS – simplesmente apoiada; CC – engastada nas duas extremidades; FF – livre-livre; CF – engastada-livre; CS – engastada-apoiada.

Tabela 6.14 – Três primeiras frequências adimensionais do caso 3 – modelo de Cisalhamento.

Caso 3 - Modelo de Cisalhamento			
Condição	1ª Freq.	2ª Freq.	3ª Freq.
SS	1,7590	6,4981	13,8711
CC	3,8816	9,9377	18,4045
FF	4,2757	10,1114	18,3692
CF	0,8926	4,3204	10,1184
CS	2,8648	8,3510	15,9743

SS – simplesmente apoiada; CC – engastada nas duas extremidades; FF – livre-livre; CF – engastada-livre; CS – engastada-apoiada.

Comparando-se os resultados obtidos para a viga escalonada em três partes com os obtidos para a viga escalonada em duas partes, as relações  $\frac{L}{h_1}$  a partir das quais as frequências naturais fundamentais adimensionais obtidas pelos modelos de Euler-Bernoulli e Cisalhamento têm seus valores iguais, de acordo com os desvios relativos adotados, variam em função principalmente da disposição das camadas do laminado, ou seja, essas relações são bem influ-

enciadas pelo ângulo de orientação das fibras das lâminas. E por fim, é percebido que o comportamento da variação das frequências em função do índice de esbeltez é muito semelhante para as vigas escalonadas em duas e em três partes.

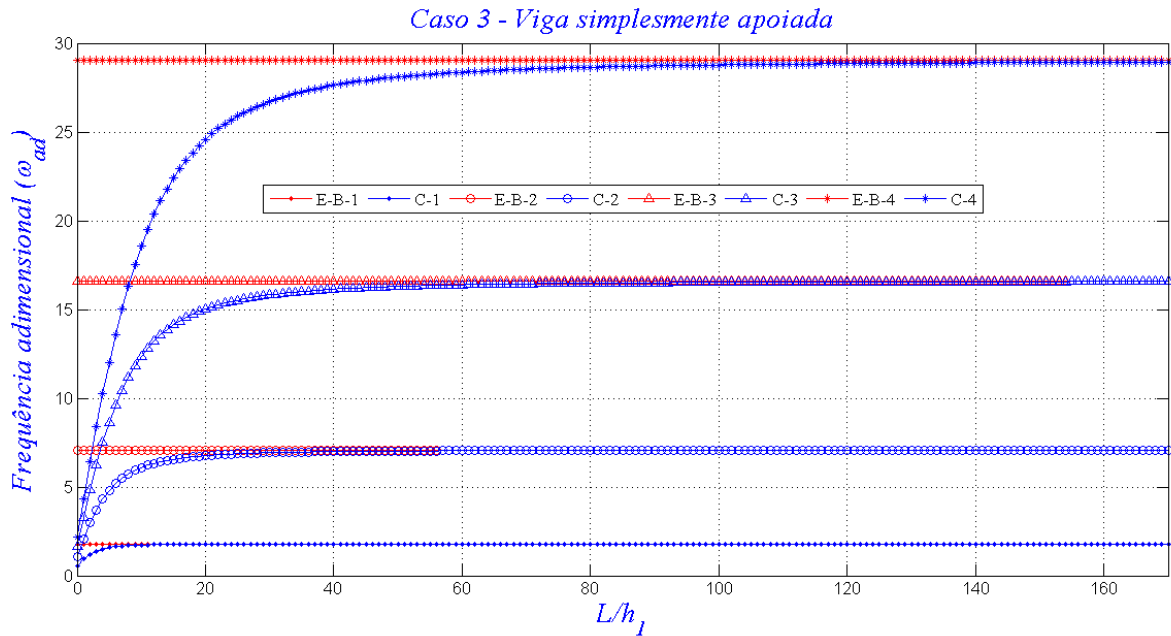


Figura 6.31 - Quatro primeiras frequências adimensionais - viga simplesmente apoiada.

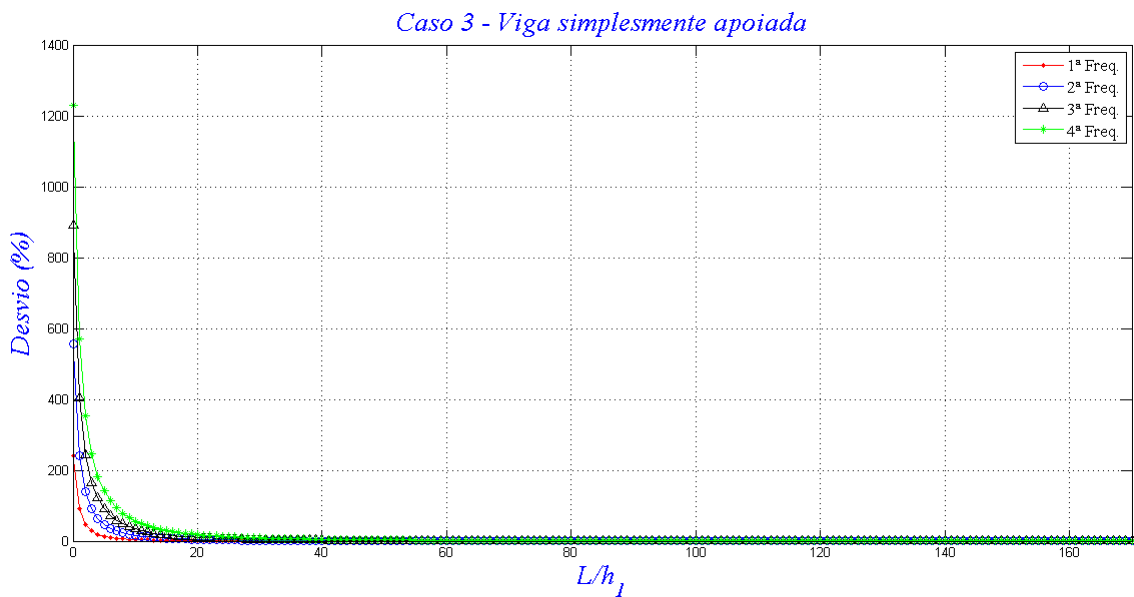


Figura 6.32 - Desvio relativo para as quatro primeiras frequências adimensionais - viga simplesmente apoiada.

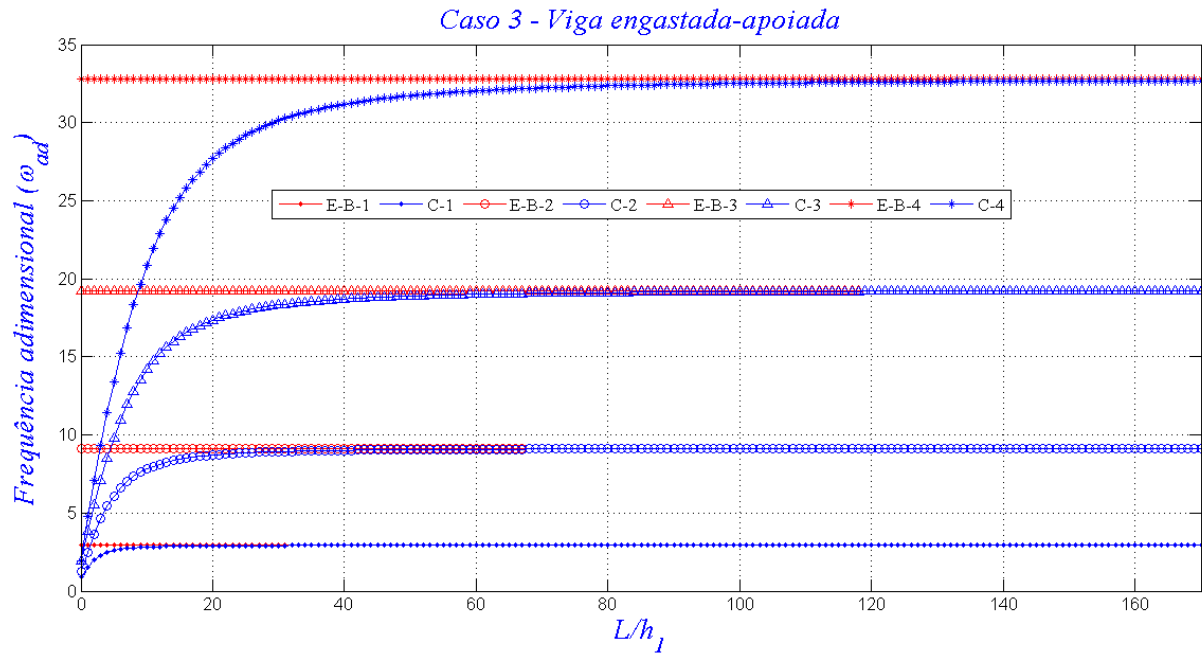


Figura 6.33 - Quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-apoiada.

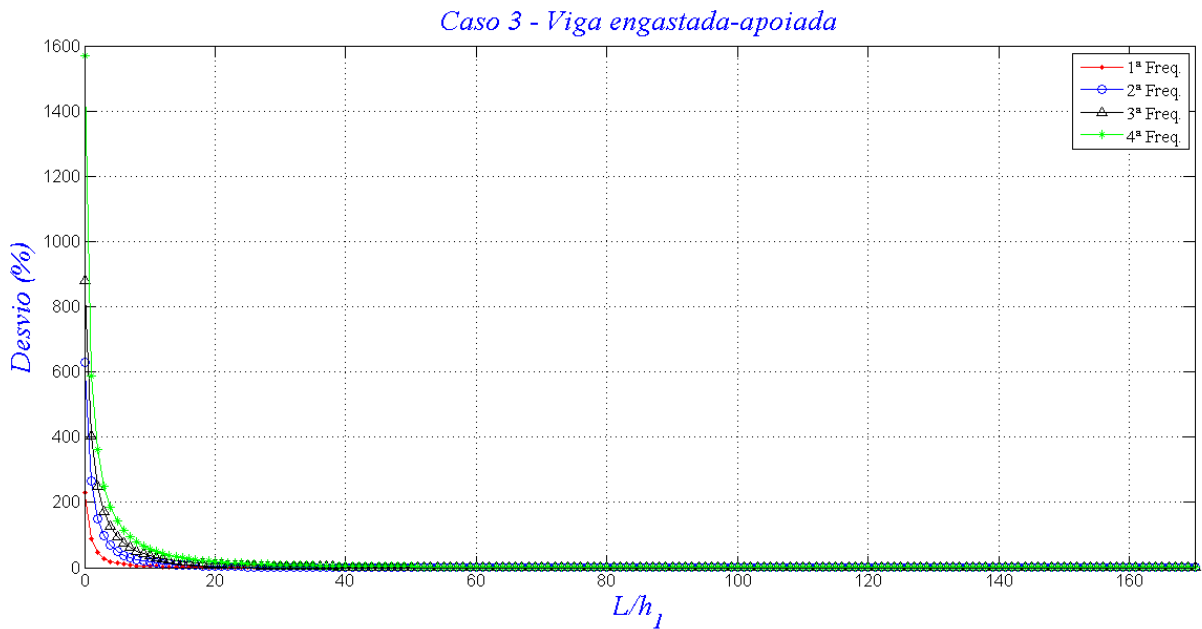


Figura 6.34 - Desvio relativo para as quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-apoiada.

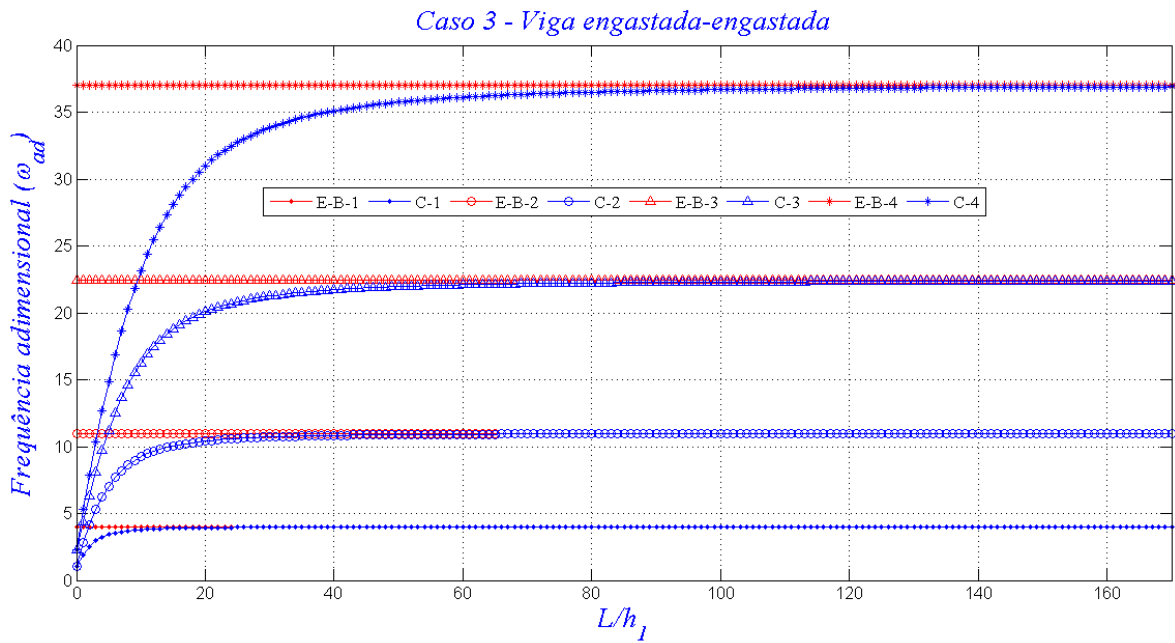


Figura 6.35 - Quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-engastada.

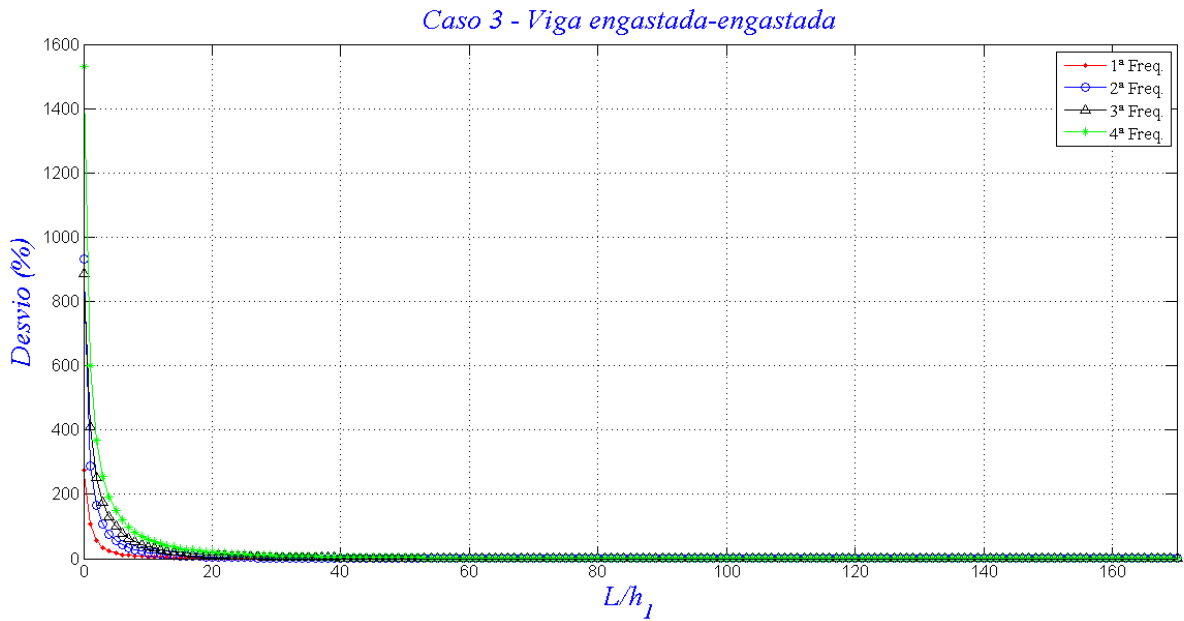


Figura 6.36 - Desvio relativo para as quatro primeiras frequências adimensionais - viga engastada-engastada.

## CAPÍTULO 7

# CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

### 7.1 CONCLUSÕES

Foi apresentada uma metodologia para análise dinâmica de vigas compósitas escalonadas sobre apoios elásticos. As frequências naturais dimensionais e adimensionais calculadas foram obtidas de acordo com dois modelos dinâmicos: o modelo de Euler-Bernoulli e o modelo de Cisalhamento. Estes métodos utilizados eliminam a necessidade do uso de malhas na solução de problemas dinâmicos.

A validação dos resultados calculados foi efetiva. Para a condição simplesmente apoiada e para as condições em que foram simulados casos com materiais isotrópicos, os desvios foram os menores. Já para as demais condições houve certo desvio entre os valores obtidos, contudo alguns desses erros foram coerentes com os erros obtidos por outros autores com relação à mesma referência.

O modelo de Euler -Bernoulli praticamente não sofreu a influência da relação  $\frac{L}{h_1}$ , enquanto que os resultados obtidos pelo modelo de Cisalhamento variaram em função dessa relação. Para os casos aqui estudados, embora as frequências adimensionais de vigas esca-

nadas sejam diferentes em função do número de trechos, notou-se que a relação  $\frac{L}{h_1}$  a partir da qual as frequências fundamentais adimensionais dos modelos de Euler-Bernoulli e Cisalhamento se aproximam depende também do esquema de laminação, ou seja, da orientação das fibras de cada lâmina constituinte da viga.

A maior relação  $\frac{L}{h_1}$  encontrada foi de 37 para o Caso 1, onde as fibras estão orientadas a  $0^\circ$ , tanto para a viga escalonada em duas partes quanto para a viga escalonada em três partes. Já o menor valor de  $\frac{L}{h_1}$  foi de 21 para o Caso 2, onde as fibras estão orientadas a  $90^\circ$ , para a viga escalonada em três partes. A principal vantagem do conhecimento desses valores diz respeito à tomada de decisão de quando se utilizar um ou outro modelo, uma vez que sabendo-se as condições nas quais os dois modelos se apresentam equivalentes, pode-se optar pela escolha do modelo de Euler-Bernoulli, uma vez que o mesmo é menos complexo que o modelo de Cisalhamento.

Notou-se que com a adição do efeito causado pelo cisalhamento ao modelo de Euler-Bernoulli, os valores das frequências encontradas aproximaram-se mais dos valores reais. Porém, o modelo de Cisalhamento precisa ser melhorado para os casos envolvendo materiais compósitos laminados. Para situações nas quais não se requer muito dos resultados, estes modelos podem ser utilizados, porém, o modelo de Cisalhamento é o que se aproxima mais da resposta real, dependendo da relação  $\frac{L}{h_1}$ .

Para projetos envolvendo materiais compósitos laminados, não se torna necessária a alteração dos valores de massa ou as propriedades geométricas da estrutura para obter a rigidez necessária para fornecer as frequências naturais esperadas, pois pode-se alterar a orientação das fibras das lâminas de modo a atingir os parâmetros requisitados pelo projeto. Assim, mostrou-se neste trabalho a influência da orientação das fibras das camadas do laminado sobre as frequências naturais de uma viga compósita.



## 7.2 PERSPECTIVAS FUTURAS

A partir do desenvolvimento matemático e das simulações realizadas neste trabalho, futuramente poderiam ser alteradas as posições dos suportes elásticos ao longo da viga, poderia ser adicionado o efeito do amortecimento sobre a estrutura, e ainda, pode ser realizada a simulação de forças externas aplicadas sobre a viga.

Uma boa tentativa para se melhorarem os resultados, seria adicionar ao modelo de Cisalhamento o efeito da inércia de rotação também, o que é conhecido como Teoria de Timoshenko, ou se estudarem outros modelos matemáticos que se mostraram mais eficientes de acordo com a literatura, entre eles a Teoria de Cisalhamento de Alta Ordem.

Uma outra proposta é realizar um estudo dinâmico envolvendo vigas de seções geométricas complexas, como vigas de seções circulares, ou vigas de seções retangulares com diferentes funções de escalonamentos, ou seja, com mudanças não bruscas nos escalonamentos (vigas "Drop-off"), devido à sua aplicação nas indústrias, e ainda o estudo de laminados não-simétricos.

Por fim, poderia-se também determinar as várias propriedades do laminado experimentalmente, de acordo com a normas e regras vigentes. Assim, seria possível um estudo da influência das propriedades obtidas experimentalmente e teoricamente sobre as frequências naturais.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABRAMOVICH, H., LIVSHITS, A. (1994)**, “Free Vibrations of Non-Symmetric Cross-Ply Laminated Composite Beams”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 176, n.5, pp. 597-612.
- ALMEIDA, A. C. (2012)**, *Análise Dinâmica de uma Viga Escalonada de Euler-Bernoulli, Vlasov, Cisalhamento e Timoshenko com Apoios Elásticos Variáveis*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, 131 p.
- BARBERO, E. J. (1998)**, *Introduction to Composite Material Design*, Taylor & Francis, Philadelphia, 484 p.
- BELO, I. M. (2006)**, *Análise Eficiente de Compósitos Laminados Planos Utilizando-se a Formulação de Elementos Finitos Corrigida A-Priori sem os Efeitos do Travamento*, Dissertação de Mestrado (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Departamento de Ciências Exatas e de Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 123 p.
- CALLISTER, W. D. (2002)**, *Ciência e Engenharia de Materiais: Uma Introdução*, 5ª Edição, LTC, 975 p.
- CHANDRASHEKHARA, K., KRISHNAMURTHY, K., ROY, S. (1990)**, “Free Vibration of Composite Beams Including Rotary Inertia and Shear Deformation”, *Composite Structures*, vol. 14, pp. 269-279.

- CHANDRASHEKHARA, K., BANGERA, K. M. (1992)**, “Free Vibration of Composite Beams Using a Refined Shear Flexible Beam Element”, *Comput and Struct*, vol. 43, pp. 719-727.
- CHEN, W. Q., LV, C. F., BIAN, Z. G. (2004)**, “Free Vibration Analysis of Generally Laminated Beams via State-Space-Based Differential Quadrature”, *Composite Structures*, vol. 63, pp. 417-425.
- CORREIA, A. Z. (1988)**, *Métodos e Processos para Fabricação de Materiais Compósitos*, EMBRAER, São Paulo, 193 p.
- COSTA, S. N. J. (2006)**, *O Modelo de Timoshenko em Vigas Elásticas, Estruturas Offshore e Nanotubos de Carbono Através da Resposta Fundamental de Valor Inicial*, Tese de Doutorado (Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 274 p.
- DANIEL, I. M., ISHAI, O. (1994)**, *Engineering Mechanics of Composite Materials*, New York: Oxford University Press, 382 p.
- FARGHALY, S. H., GADELRAH, R. M. (1995)**, “Free Vibration of a Stepped Composite Timoshenko Cantilever Beam”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 187, n. 5, pp. 886-896.
- GAY, D., HOA, S. V., TSAI, S. W (2002)**, *Composite Materials: Design and Applications*, CRC Press, 507 p.
- HAHN, H. T. (1980)**, “Simplified Formulas for Elastic Moduli of Unidirectional Continuous Fiber Composites”, *Composites Technology Review*, vol. 2, n 3, pp. 5-7.
- HAMADA, A. A. el H. (1995)**, “Vibration and Damping Analisis of Beams with Composite Coats”, *Composite Structures*, vol. 32, pp. 33-38.

- HAN, S. M., BENAROYA, H., WEIT, T. (1999)**, “Dynamics of Transversely Vibrating Beams Using Four Engineering Theories”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 225, n 5, p. 935-988.
- HONG, S. W., KIM, J. W. (1999)**, “Modal Analysis of Multi-Span Timoshenko Beams Connected or Supported by Resilient Joints with Dumping”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 227, n 4, pp. 787-806.
- HULL, D. (1988)**, *An Introduction to Composite Materials*, Cambridge University Press, Cambridge, 246 p.
- INMAN, D. J. (2001)**, *Engineering Vibration*, 2<sup>a</sup> ed., Prentice Hall, New Jersey, USA, 654 p.
- JANG, S. K., BERT, C. W. (1989)**, “Free vibration of Stepped Beams: Higher Modes Frequences and Effects of Steps on Frequencies”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 132, pp. 164-168.
- JAWORSKI, J. W., DOWELL, E. H. (2008)**, “Free Vibration of a Cantilevered Beam with Multiple Steps: Comparison of Several Theoretical Methods with Experiment”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 312, pp. 713-725.
- JONES, R. M. (1999)**, *Mechanics of Composite Materials*, 2<sup>a</sup> ed., Philadelphia: Taylor & Francis, 519 p.
- JUN, L., HONGXING, H. (2009)**, “Dynamic Stiffness Analysis of Laminated Composite Beams Using Trigonometric Shear Deformation Theory”, *Composite Structures*, vol. 89, pp. 433-442.
- KHDEIR, A. A., REDDY, J. N. (1994)**, “Free Vibration of Cross-Ply Laminated Beams with Arbitrary Boundary Conditions”, *Int. J. Engineering Science*, vol. 32, n. 12, pp. 1971-1980.

- KRISHNAWAMY, S., CHANDRASHEKHARA, K., WU, W. Z. B. (1992)**, “Analytical Solutions to Vibration of Generally Layered Composite Beams”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 159, n. 1, pp. 85-99.
- LAM, K. Y., SATHIYAMOORTHY, T. S. (1996)**, “Low-Velocity Impact Response for Laminated Stepped Beam”, *Composite Structures*, vol. 35, pp. 343-355.
- LIMA JR., J. J., ARANTES, R. F. (2000)**, “Estudo Dinâmico Adimensional dos Modelos de Viga de Euler-Bernoulli, Vlasov e Timoshenko”, *Anais do IX Congresso Chileno de Engenharia Mecânica e IV Congresso Nacional de Energia*, Valparaiso, Chile, 6 p.
- MAHER, A., RAMADAN, F., FERRA, M. (1999)**, “Modeling of Vibration Damping in Composite Structures”, *Composite Structures*, vol. 46, pp. 163-170.
- MATTHEWS, F. L., RAWLINGS, R. D. (1994)**, *Composite Materials: Engineering and Science*, Grã Bretanha: Chapman & Hall, 470 p.
- MAURIZI, M. J., BELLÉS, P. M. (1993a)**, “Free Vibration of Stepped Beams Elastically Restrained Against Translation and Rotation at One End”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 163, n 1, pp. 188-191.
- NABI, S. M., GANESAN, N. (1994)**, “A Generalized Element for the Free Vibration Analysis of Composite Beams”, *Computers & Structures*, vol. 51, n. 5, pp. 607-610.
- NAGULESWARAN, S. (2002a)**, “Natural Frequencies, Sensitivity and Mode Shape Details of an Euler-Bernoulli Beam With One-Step Change in Cross-Section and With Ends on Classical Supports”, *Journal of Sound and Vibration*, vol.252, n 4, pp. 751-767.
- NAGULESWARAN, S. (2002b)**, “Vibration of na Euler-Bernoulli on Elastic End Supports and with up to Three Step Changes in Cross-Section”, *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 44, pp. 2541-2555.

- NETO, F. L., PARDINI, L. C. (2006)**, *Compósitos Estruturais: Ciência e Tecnologia*, São Paulo: Edgard Blücher, 1ª Ed., 311 p.
- PERDIGÃO, L. F. S. (2010)**, *Análise Estática de Vigas em Materiais Compósitos usando Computação Simbólica*, Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Departamento de Engenharia Mecânica, Instituto Superior de Engenharia de Lisboa, Lisboa, 87 p.
- RAO, S. M., GANESAN, N. (1997)**, “Dynamic Response of Non-Uniform Composite Beams”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 200, pp. 563-577.
- RAO, M. K., DESAI, Y. M., CHITNIS, M. R. (2001)**, “Free Vibrations of Laminated Beams Using Mixed Theory”, *Composite Structures*, vol. 52, pp. 149-160.
- REDDY, J. N., MIRAVETE, A. (1995)**, *Practical Analysis of Composite Laminates*, CRC Press, 1ª Edição, 336 p.
- SINGH, K. V., LI, G., PANG, S. S. (2006)**, “Free Vibration and Physical Identification of Non-Uniform Composite Beams”, *Composite Structures*, vol. 74, pp. 37-50.
- SUBRAMANIAN, P. (2006)**, “Dynamic Analysis of Laminated Composite Beams Using Higher Order Theories and Finite Elements”, *Composite Structures*, vol. 73, p. 342-353.
- TEOH, L. S., HUANG, C. C. (1977)**, “The Vibration of Beams of Fibre Reinforced Material”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 51, pp. 467-473.
- TIMOSHENKO, S. (1921)**, *On the Correction for Shear of the Differential Equation for Transverse Vibrations of Prismatic Bars*, *Philosophical Magazine*, vol. 41, pp. 744-746.

- TIMOSHENKO, S. (1953)**, *History of Strength of Materials*, New York: Dover Publications, 452 p.
- TINÔ, S. R. L. (2010)**, *Descontinuidade na Seção Transversal em Laminados Compósitos Poliméricos: Efeitos e Propriedades*, Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Centro de Tecnologia, Universidade Federal do Rio Grande do Norte. 97 p.
- TITA, V. (1999)**, *Análise Dinâmica Teórica e Experimental de Vigas Fabricadas a Partir de Materiais Compósitos Poliméricos Reforçados*, Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Departamento de Engenharia Mecânica, Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, 120 p.
- TONG, X., TABARROK, B. (1995)**, “Vibration Analysis of Timoshenko Beams with Non-homogeneity and Varying Cross-Section”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 186, n 5, pp. 821-835.
- VAZ, J. D. C. (2008)**, *Análise do Comportamento Dinâmico de uma Viga de Euler-Bernoulli Escalonada com Apoios Elasticamente Variáveis*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, 94 p.
- VINSON, J. R., SIERAKOWSKI, R. L. (1987)**, *The Behavior of Structures Composed of Composite Materials*, 2ª ed., Waterloo, Ontario: Dordrecht, 396 p.
- YILDIRIM, V., KIRAL, E. (2000)**, “Investigation of the Rotary Inertia and Shear Deformation Effects on the Out-of-Plane Bending and Torsional Natural Frequencies of Laminated Beams”, *Composite Structures*, vol.49, pp. 313-320.

## **APÊNDICE A**

# **MODELO DE VIGA COMPÓSITA LAMINADA UNIFORME DE EULER-BERNOULLI**

A teoria da viga de Euler-Bernoulli dita que somente a flexão pura é considerada, sendo que a deformação causada pela distorção devida ao cisalhamento e o efeito da inércia de rotação sobre a viga são desprezados. Este modelo aplica-se a vigas esbeltas, ou seja, vigas nas quais o comprimento é muito maior que as dimensões da área transversal (base e altura).

## **A.1 EQUACIONAMENTO DO MODELO DE VIGA COMPÓSITA DE EULER-BERNOULLI**

Nesta seção é apresentado o desenvolvimento analítico do modelo de viga de Euler-Bernoulli aplicado a uma viga compósita laminada uniforme, onde admite-se a ocorrência de vibrações livres e ausência de amortecimento nos apoios.

Para o desenvolvimento do modelo, algumas considerações devem ser levadas em conta, são elas:



- As lâminas são perfeitamente unidas, de modo que não haja deslocamentos relativos entre as mesmas e a espessura da matriz (resina) presente entre uma lâmina e outra é considerada muito pequena, de modo que possa ser desprezada;
- Após a ocorrência da flexão, as seções planas da viga permanecem planas e normais à linha neutra;
- O valor do comprimento da viga é bem maior do que o valor das outras dimensões ( $\frac{L}{b} > 10$  ou  $\frac{L}{h} > 10$ );
- Os deslocamentos verticais, eixo  $z$ , de todos os pontos de uma seção transversal são pequenos;
- O deslocamento lateral segundo o eixo  $y$  é nulo;
- A inércia de rotação é desprezível;
- A viga é considerada na ausência de carregamento axial;
- O coeficiente de Poisson não é considerado;
- Não são consideradas as forças dissipativas.

Na figura A.1 é ilustrada uma viga laminada engastada com vibração na direção do eixo  $z$ . Na viga de Euler-Bernoulli, a vibração na direção do eixo  $z$  é geralmente chamada de vibração transversal ou vibração flexional. A viga em questão possui seção retangular  $A(x)$ , dada em  $m^2$ , base  $b$  (m), altura  $h$  (m) e comprimento  $L$  (m). O deslocamento vertical em uma seção transversal de abscissa  $x$  em um tempo  $t$ , é representado por  $w$ . Também são mostrados os momentos e forças atuantes sobre um diferencial de viga de comprimento  $dx$ .

Considera-se inicialmente que a viga possui carregamento vertical na direção  $z$ . Devido ao fato de uma viga ser esbelta ( $b \ll L$ ), as tensões são ignoradas na direção  $y$ , o que implica que os efeitos do coeficiente de Poisson podem ser ignorados também. Assim sendo, não há nenhuma dependência da direção  $y$  sobre qualquer quantidade envolvida no conjunto das equações governantes mostradas Capítulo 2. Logo, da equação (2.53), chega-se à seguinte equação:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} \\ B_{11} & D_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x_0} \\ k_x \end{Bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

E da equação (2.54), quando o cisalhamento for considerado:

$$Q_x = 2A_{55}\varepsilon_{xz} \quad (\text{A.2})$$

Se a viga for simétrica em relação ao seu plano central ( $B_{ij} = 0$ ), então o momento fletor da viga,  $M(x,t)$ , é dado como:

$$M(x,t) = b(x)D_{11}(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \quad (\text{A.3})$$

com  $M(x,t)$  momento fletor (Nm),  $D_{11}$  termo da matriz de rigidez à flexão (Nm) definido pela equação (2.52),  $b(x)$  base da viga (m) e  $w(x,t)$  deflexão ao longo do eixo  $z$  (m). O produto expresso por  $b(x)D_{11}(x)$  diz respeito à rigidez flexural para vigas compósitas de seção retangular, ao invés de  $EI(x)$  usada para materiais isotrópicos, com  $I$  momento de inércia de área ( $m^4$ ) e  $E$  módulo de elasticidade do material (Pa).

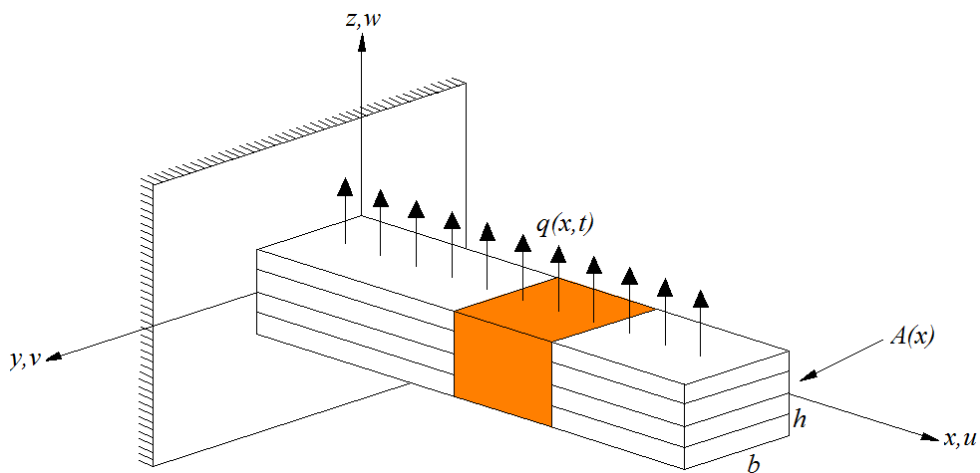


Figura A.1 – Modelo de uma viga contínua laminada de Euler-Bernoulli.

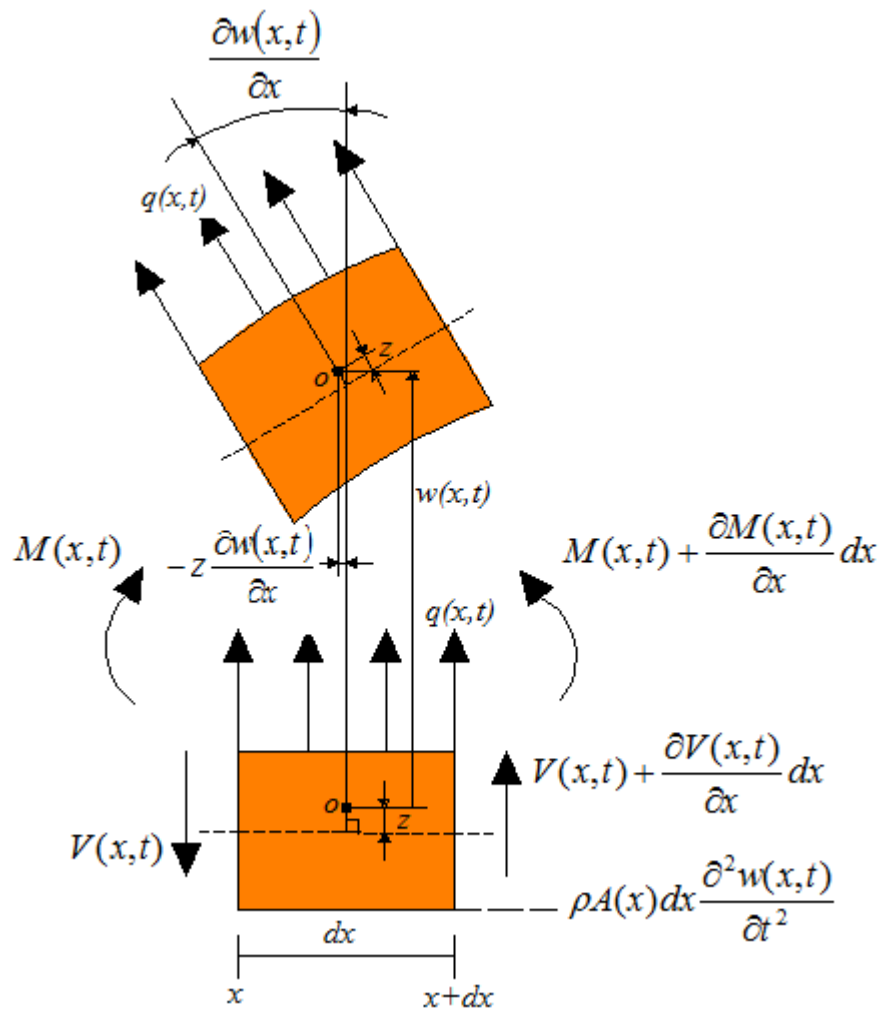


Figura A.2 – Elemento infinitesimal de um modelo de viga compósita laminada de Euler-Bernoulli.

Através da 2ª Lei de Newton aplicada ao elemento infinitesimal do modelo de viga laminada de Euler-Bernoulli, obtém-se o seguinte somatório de forças na direção  $z$ .

$$\sum F_z = dm \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (\text{A.4})$$

$$V(x+dx,t) - V(x,t) + q(x,t)dx = dm \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (\text{A.5})$$

$$\left( V(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx \right) - V(x,t) + q(x,t)dx = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (\text{A.6})$$

sendo  $V(x,t)$  força cortante (N),  $\rho$  a massa específica (kg/m<sup>3</sup>),  $A(x)$  área da seção transversal (m<sup>2</sup>) e  $q(x,t)$  a força distribuída por unidade de comprimento (N/m).

Fazendo-se agora o somatório de momentos igual a zero, uma vez que não é considerada a inércia de rotação:

$$M(x+dx,t) - M(x,t) + (q(x,t)dx) \frac{dx}{2} + V(x+dx,t)dx = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$M(x,t) + \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} dx - M(x,t) + q(x,t) \frac{dx^2}{2} + \left( V(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx \right) dx = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$\left( \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} + V(x,t) \right) dx + \left( \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} + \frac{q(x,t)}{2} \right) (dx)^2 = 0 \quad (\text{A.9})$$

Desprezando-se o termo diferencial de ordem superior ( $dx^2 \cong 0$ ) para o momento, tem-se:

$$V(x,t) = -\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} \quad (\text{A.10})$$

Isso mostra que a força cortante é proporcional à derivada do momento fletor em relação à  $x$ . A substituição da equação (A.10) na equação (A.6) produz:

$$-\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} dx + q(x,t)dx = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (\text{A.11})$$

A substituição adicional da equação (A.3) na equação (A.11), e ainda dividindo-se toda a equação por  $dx$ , leva a:

$$\rho A(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( b(x) D_{11}(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) = q(x,t) \quad (\text{A.12})$$

Se nenhuma força externa for aplicada, ou seja,  $q(x,t) = 0$ ,  $b(x)D_{11}(x)$  e  $A(x)$  são admitidos constantes ao longo da viga, a equação (A.12) simplifica-se de modo que a vibração livre é governada por:

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} = 0, \quad c = \sqrt{\frac{bD_{11}}{\rho A}} \quad (\text{A.13})$$

sendo  $c$  a velocidade de propagação da onda no meio sólido (m/s).

Como a equação governante da vibração livre do modelo de Euler-Bernoulli é uma equação diferencial de quarta ordem, são necessárias quatro condições de contorno de modo que se consiga determinar a sua solução. A presença das derivadas temporais de segunda ordem requer que sejam especificadas duas condições iniciais, uma para a deflexão e outra para a inclinação.

As condições de contorno necessárias para resolver a equação (A.13) no contexto de uma solução por separação de variáveis são obtidas considerando-se a deflexão  $w(x,t)$ , a derivada da deflexão  $\partial w(x,t)/\partial x$ , o momento fletor  $bD_{11} \partial^2 w(x,t)/\partial x^2$ , e a força cortante  $bD_{11} \partial^3 w(x,t)/\partial x^3$  em cada extremidade da viga, isto é, aplicando as devidas condições de contorno.

As equações de (A.14) a (A.21) são as condições de contorno clássicas para cada extremidade: livre, engastada, apoiada e deslizante.

Se uma viga em vibração transversal é livre em uma extremidade, as condições de contorno para a força cortante e o momento fletor devem ser nulos.

$$M(x,t) = bD_{11} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{momento fletor}) \quad (\text{A.14})$$

$$V(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} \left( bD_{11} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) = 0 \text{ (força cortante)} \quad (\text{A.15})$$

Se, por outro lado, a extremidade da viga for engastada, a condição de contorno impõe que a deflexão e a inclinação devem ser nulas nesse extremo.

$$w(x,t) = 0 \text{ (deflexão)} \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = 0 \text{ (inclinação)} \quad (\text{A.17})$$

Já em uma extremidade simplesmente apoiada, a deflexão e o momento de flexão são nulos.

$$w(x,t) = 0 \text{ (deflexão)} \quad (\text{A.18})$$

$$M(x,t) = bD_{11} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = 0 \text{ (momento fletor)} \quad (\text{A.19})$$

E por fim, em um apoio deslizante, a inclinação e a força cortante são nulos.

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = 0 \text{ (inclinação)} \quad (\text{A.20})$$

$$V(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} \left( bD_{11} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) = 0 \text{ (força cortante)} \quad (\text{A.21})$$

Podem haver outras condições não clássicas de contorno, sendo que a equação de movimento para essas condições são determinadas em função de balanços de forças e de momentos.

Além das quatro condições de contorno, a solução da equação (A.13), para a vibração livre, só pode ser determinada se duas condições iniciais forem especificadas.

$$w(x,t)|_{t=0} = w_0(x) \quad , \quad \left. \frac{dw(x,t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{dw_0(x)}{dt} \quad (\text{A.22})$$

Considerando que  $t = 0$  é o tempo inicial. Sabe-se que  $w_0(x)$  e  $dw_0(x)/dt$  não podem ser ambos nulos, ou não haveria movimento resultante.

A solução da equação (A.13) sujeita a quatro condições de contorno e duas condições iniciais seguem os passos convencionais usados nos problemas de contorno e de valor inicial, ou seja, são usadas para se obter um sistema de equações que determinam as constantes da solução geral. Para o desenvolvimento da solução da equação (A.13), será admitida a possibilidade de se escrever a solução na forma de separação de variáveis como na equação (A.23).

$$w(x,t) = X(x)T(t) \quad (\text{A.23})$$

Substituindo a equação (A.23) na equação (A.13), obtém-se:

$$c^2 \frac{d^4 X(x)}{dx^4} \frac{1}{X(x)} = - \frac{d^2 T(t)}{dt^2} \frac{1}{T(t)} = \omega^2 \quad (\text{A.24})$$

A escolha da constante de separação,  $\omega^2$ , é feita de modo que a equação temporal tenha solução harmônica e que  $\omega$  seja a frequência natural angular da viga em estudo.

Tomando o lado direito da equação (A.24), referente à parte temporal, vem:

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0 \quad (\text{A.25})$$

Assumindo-se para esta equação uma solução do tipo  $T(t) = Ce^{\lambda t}$ , a sua solução é dada então na forma:

$$T(t) = D \cos(\omega t - \theta) \quad (\text{A.26})$$

As constantes  $D$  e  $\theta$  são determinadas usando-se as condições iniciais especificadas e posteriormente combinando-as com a solução da equação em  $x$ .

A equação espacial surge do rearranjo da equação (A.24), o que leva a:

$$\frac{d^4 X(x)}{dx^4} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 X(x) = 0 \quad (\text{A.27})$$

Definindo:

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\rho A \omega^2}{b D_{11}} \quad (\text{A.28})$$

sendo  $\beta$  a frequência natural dimensional ( $m^{-1}$ ).

Assumindo para equação (A.27) uma solução na forma:

$$w(x, t) = Ce^{ax} \quad (\text{A.29})$$

vem

$$(a^4 - \beta^4) Ce^{ax} = 0 \quad (\text{A.30})$$

Como  $Ce^{ax} \neq 0$  para todo  $x$ , então:

$$(a^4 - \beta^4) = 0 \quad (\text{A.31})$$



Chega-se então a uma equação polinomial de quarto grau cuja solução é:

$$a_{1,2} = \pm\beta \text{ e } a_{3,4} = \pm i\beta \quad (\text{A.32})$$

A solução espacial da equação (A.27) é:

$$X(x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} + C_3 e^{i\beta x} + C_4 e^{-i\beta x} \quad (\text{A.33})$$

Aplicando as relações de Euler, equações (A.34) a (A.37), na equação (A.33), tem-se a equação (A.38).

$$e^{i\beta x} = \cos(\beta x) + i \operatorname{sen}(\beta x) \quad (\text{A.34})$$

$$e^{-i\beta x} = \cos(\beta x) - i \operatorname{sen}(\beta x) \quad (\text{A.35})$$

$$e^{\beta x} = \cosh(\beta x) + \operatorname{senh}(\beta x) \quad (\text{A.36})$$

$$e^{-\beta x} = \cosh(\beta x) - \operatorname{senh}(\beta x) \quad (\text{A.37})$$

$$X(x) = B_1 \sin(\beta x) + B_2 \cos(\beta x) + B_3 \sinh(\beta x) + B_4 \cosh(\beta x) \quad (\text{A.38})$$

A equação (A.38) representa o modo de vibração da viga em estudo, tal que para cada frequência natural, a viga possuirá uma forma diferente de vibração.

Com a aplicação das condições de contorno na viga a ser modelada obtém-se um sistema de equações lineares, equação (A.39), que é função de  $\beta$  e  $\{b\}$ . Devido o sistema linear ser homogêneo, existe uma combinação linear entre suas equações, de modo que o valor de uma das constantes que compõe o vetor  $\{b\} = [B_1 \ B_2 \ B_3 \ B_4]^T$  pode ter o seu valor arbitrado.

$$[H(\beta)]\{b\} = \{0\} \quad (\text{A.39})$$

A matriz  $[H]$  é a matriz dos coeficientes e  $\{b\}$  é o vetor de incógnitas. Para que o sistema tenha solução não trivial é necessário que  $\{b\} \neq \{0\}$ , o que implica que o determinante da matriz  $[H]$  seja igual a zero, equação (A.41).

A matriz  $[H]$  será uma função de  $\beta L$ , então pode-se fazer a adimensionalização da frequência natural, da seguinte maneira:

$$\hat{\beta} = \beta L \quad (\text{A.40})$$

E os valores dessa frequência são determinados por:

$$\det\left(\left[H\left(\hat{\beta}\right)\right]\right) = 0 \quad (\text{A.41})$$

sendo então  $\hat{\beta}$  a frequência natural adimensional,  $\beta$  a frequência natural dimensional ( $\text{m}^{-1}$ ) e  $L$  o comprimento total da viga (m).

Com a aplicação de  $\beta$  na equação (A.28), obtém-se a frequência angular (rad/s), e consequentemente, a frequência natural em Hz, obtida por (A.42).

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (\text{A.42})$$

## **APÊNDICE B**

# **MODELO DE VIGA UNIFORME COMPÓSITA LAMINADA DE CISALHAMENTO**

O modelo de Cisalhamento adiciona ao modelo de Euler-Bernoulli o efeito da distorção causada pelo cisalhamento, porém não leva em conta o efeito da inércia de rotação. A inclusão do efeito do cisalhamento sobre a análise do comportamento dinâmico de uma viga proporciona uma melhora considerável nos resultados, de modo que estes se aproximem de forma significativa do valor real (Almeida, 2012).

## **B.1 EQUACIONAMENTO DO MODELO DE VIGA LAMINADA DE CISALHAMENTO**

Na figura B.1, é ilustrado um elemento infinitesimal de um modelo de viga de cisalhamento. Para o desenvolvimento de todo o equacionamento analítico deste modelo, deve-se levar em conta as seguintes considerações:

- Assim como no modelo de Euler-Bernoulli, as lâminas são consideradas perfeitamente unidas, de modo que não haja deslocamentos relativos entre uma lâmina e outra, e

também a espessura da resina entre uma lâmina e outra é muito pequena de modo que pode ser desprezada;

- Após a deformação devida à flexão da viga, suas seções planas continuam planas à linha neutra, mas não necessariamente perpendiculares a esta linha, pois existe um giro adicional na seção devido à distorção causada pelo cisalhamento;
- O valor do comprimento da viga é maior do que o valor das outras dimensões;
- Os deslocamentos verticais, eixo  $z$ , de todos os pontos de uma seção transversal são pequenos;
- O deslocamento lateral segundo o eixo  $y$  é nulo;
- A inércia de rotação é desprezada;
- A viga é considerada não ter carregamento axial;
- O coeficiente de Poisson não é considerado;
- Não são consideradas as forças dissipativas.

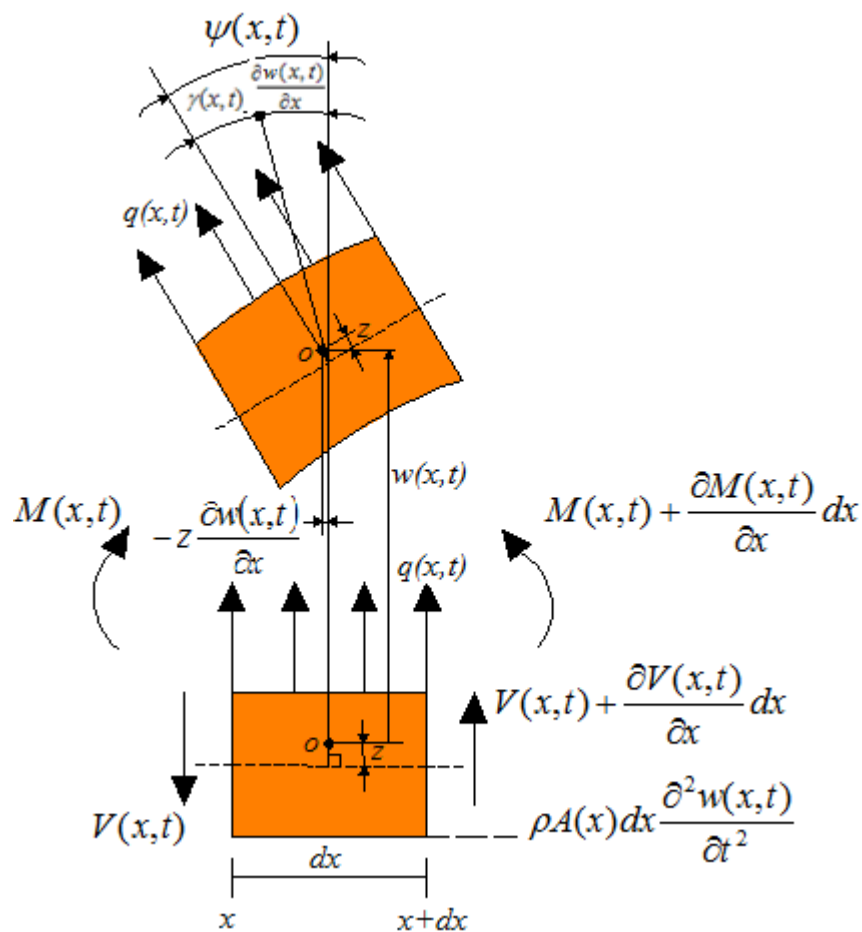


Figura B.1 – Elemento infinitesimal de um modelo de viga composta de Cisalhamento.

O momento fletor,  $M(x,t)$  e o esforço cortante,  $V(x,t)$  são apresentados nas equações (B.1) e (B.6), respectivamente, sendo que a força cortante por unidade de comprimento é dada pela equação (A.2):

$$M(x,t) = b(x)D_{11}(x)\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x} \quad (\text{B.1})$$

$$V(x,t) = b(x)Q_x \quad (\text{B.2})$$

Substituindo (A.2) em (B.2), vem:

$$V(x,t) = 2b(x)A_{55}\varepsilon_{xz} \quad (\text{B.3})$$

como

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\gamma}{2} \quad (\text{B.4})$$

e

$$\gamma = \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} - \psi(x,t) \quad (\text{B.5})$$

logo

$$V(x,t) = k_c b(x)A_{55}(x)\left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} - \psi(x,t)\right) \quad (\text{B.6})$$

sendo  $M(x,t)$  é o momento fletor (Nm),  $b(x)$  é o valor da base da viga (m),  $D_{11}$  é o termo da matriz de rigidez à flexão (N.m),  $A_{55}$  é o coeficiente de cisalhamento (N/m),  $\psi(x,t)$  rotação da seção transversal,  $V(x,t)$  esforço cortante (N),  $k_c$  fator numérico que depende da forma da seção transversal no cisalhamento,  $A(x)$  área da seção transversal (m<sup>2</sup>), e  $w(x,t)$  deflexão ao longo do eixo  $z$  (m).

Aplicando-se a 2ª Lei de Newton ao elemento infinitesimal do modelo de viga de Cisalhamento, obtém-se o seguinte somatório de forças na direção  $z$  :

$$\sum F_z = dm \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (\text{B.7})$$

$$V(x+dx,t) - V(x,t) + q(x,t)dx = dm \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (\text{B.8})$$

$$\left( V(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx \right) - V(x,t) + q(x,t)dx = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (\text{B.9})$$

sendo  $\rho$  a massa específica ( $\text{kg/m}^3$ ) e  $q(x,t)$  a força distribuída por unidade de comprimento ( $\text{N/m}$ ).

Simplificando a equação (B.9), temos:

$$\left( \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx \right) + q(x,t)dx = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (\text{B.10})$$

Fazendo a substituição da equação (B.6) na equação (B.10), temos:

$$k_c \frac{\partial}{\partial x} \left( b(x) A_{55}(x) \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right) dx - k_c \frac{\partial}{\partial x} (b(x) A_{55}(x) \psi(x,t)) dx + q(x,t)dx = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (\text{B.11})$$

Partindo-se agora para o somatório de momentos igual a zero, uma vez que é desconsiderada a inércia de rotação:

$$M(x+dx,t) - M(x,t) + (q(x,t)dx) \frac{dx}{2} + V(x+dx,t)dx = 0 \quad (\text{B.12})$$

$$M(x,t) + \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} dx - M(x,t) + q(x,t) \frac{dx^2}{2} + \left( V(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx \right) dx = 0 \quad (\text{B.13})$$

$$\left(\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} + V(x,t)\right)dx + \left(\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} + \frac{q(x,t)}{2}\right)dx^2 = 0 \quad (\text{B.14})$$

Desprezando-se o termo diferencial de ordem superior ( $dx^2 \cong 0$ ) para o momento, tem-se:

$$V(x,t) = -\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} \quad (\text{B.15})$$

Mais uma vez é mostrado que a força cortante é proporcional à derivada do momento fletor em relação à  $x$ . A substituição da expressão do momento fletor equação (B.1) e do esforço cortante equação (B.6) na equação (B.15), admitindo  $b(x)D_{11}(x)$  constantes ao longo da viga, leva a:

$$bk_c A_{55} \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} dx - k_c b A_{55} \psi(x,t) dx + b D_{11} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} dx = 0 \quad (\text{B.16})$$

Derivando-se inicialmente a equação (B.16), fazendo o acoplamento deste resultado com a equação (B.11), depois derivando-se mais duas vezes o resultado da primeira derivada e fazendo as manipulações matemáticas necessárias bem como as devidas substituições chega-se à equação (B.17):

$$\frac{b D_{11}}{\rho A} \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} - \frac{D_{11}}{k_c A_{55}} \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + q(x,t) = 0 \quad (\text{B.17})$$

Chamando-se de  $\mu$  a relação entre  $A_{55}$  e  $D_{11}$  e considerando-se que nenhuma força externa é aplicada, ou seja,  $q(x,t) = 0$ , a equação (B.17) simplifica-se de modo que a vibração livre do modelo de Cisalhamento é governada por:

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} - \frac{1}{k_c \mu} \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} = 0, \quad c = \sqrt{\frac{b D_{11}}{\rho A}} \quad (\text{B.17})$$

Onde  $c$  é a velocidade de propagação da onda no meio sólido (m/s).

Assim como no Apêndice A aqui será admitida a possibilidade de se escrever a solução da equação (B.18) na forma de separação de variáveis. Para isso substitui-se a equação (A.25) na equação (B.18) e obtém-se:

$$c^2 \frac{\frac{d^4 X(x)}{dx^4}}{X(x) - \frac{1}{k_c \mu} \frac{d^2 X(x)}{dx^2}} = - \frac{\frac{d^2 T(t)}{dt^2}}{T(t)} = \omega^2 \quad (\text{B.19})$$

A escolha da constante de separação,  $\omega^2$ , da equação (B.19) é feita de maneira que a equação temporal tenha solução harmônica e que  $\omega$  seja a frequência natural angular.

Tomando o lado direito da equação (B.19), equação temporal, vem:

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0 \quad (\text{B.20})$$

A solução para a equação (B.20) é dada na forma:

$$T(t) = D \cos(\omega t - \theta) \quad (\text{B.21})$$

As constantes  $D$  e  $\theta$  são determinadas usando-se as condições iniciais especificadas no Apêndice A, equação (A.22), e posteriormente combinando-as com a solução da equação em  $x$ .

A equação espacial surge do rearranjo da equação (B.19), tomando-se o lado esquerdo da mesma, o que leva a:

$$c^2 \frac{\frac{d^4 X(x)}{dx^4}}{X(x) - \frac{1}{k_c \mu} \frac{d^2 X(x)}{dx^2}} = \omega^2 \quad (\text{B.22})$$



$$\frac{d^4 X(x)}{dx^4} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{1}{k_c \mu} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 X(x) = 0 \quad (\text{B.23})$$

Fazendo-se a seguinte definição:

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\omega^2 \rho A}{bD_{11}} \quad (\text{B.24})$$

sendo  $\beta$  a frequência natural dimensional ( $m^{-1}$ ).

Aplicando-se agora a equação (B.24), na equação (B.23), vem:

$$\frac{d^4 X(x)}{dx^4} + \beta^4 \frac{1}{k_c \mu} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} - \beta^4 X(x) = 0 \quad (\text{B.25})$$

Assumindo para equação (B.25) uma solução dada pela equação (A.29), tem-se:

$$\left( a^4 + \beta^4 \frac{1}{k_c \mu} a^2 - \beta^4 \right) C e^{ax} = 0 \quad (\text{B.26})$$

Uma vez que  $C e^{ax} \neq 0$  para todo  $x$ , então:

$$\left( a^4 + \beta^4 \frac{1}{k_c \mu} a^2 - \beta^4 \right) = 0 \quad (\text{B.27})$$

A equação (B.27) tem uma solução polinomial do quarto grau a saber:

$$a_{1,2} = \pm \sqrt{-K_1^2} = \pm i K_1 \text{ e } a_{3,4} = \pm \sqrt{K_2^2} = \pm K_2 \quad (\text{B.28})$$

Definindo-se:

$$K_1^2 = \frac{\frac{1}{k_c \mu} \beta^4 + \sqrt{\left(\frac{1}{k_c \mu}\right)^2 \beta^8 + 4\beta^4}}{2} \text{ e } K_2^2 = \frac{-\frac{1}{k_c \mu} \beta^4 + \sqrt{\left(\frac{1}{k_c \mu}\right)^2 \beta^8 + 4\beta^4}}{2} \quad (\text{B.29})$$

A solução espacial é dada então pela seguinte equação:

$$X(x) = C_1 e^{iK_1 x} + C_2 e^{-iK_1 x} + C_3 e^{K_2 x} + C_4 e^{-K_2 x} \quad (\text{B.30})$$

Aplicando as relações de Euler, equações (A.34) a (A.37), na equação (B.30), chega-se a:

$$X(x) = B_1 \sin K_1 x + B_2 \cos K_1 x + B_3 \sinh K_2 x + B_4 \cosh K_2 x \quad (\text{B.31})$$

Assim como no Apêndice A, aplicam-se à equação (B.31) as condições de contorno da viga e chega-se a um sistema de equações lineares, equação (A.39), a partir da qual são encontradas as frequências naturais. Novamente atribui-se um valor a uma das constantes, devido ao fato de ser um sistema de equações linearmente dependentes. De posse das frequências adimensionais, chega-se ao valor das frequências angulares (rad/s), equação (B.24), e das frequências naturais em Hz, equação (A.42).

## APÊNDICE C

# INSTRUMENTAÇÃO

### ➤ **Vibrômetro**

Descrição: Vibrômetro OMETRON

Modelo: VQ-500-D

Faixa de frequência: 0,5 Hz à 22 kHz

Faixa de medição: 20 mm/s, 100 mm/s e 500 mm/s

Melhor resolução:  $0,02 \mu\text{m/s}/(\text{Hz}^{0,5})$



Fotografia C.1 – Vista frontal do vibrômetro laser.

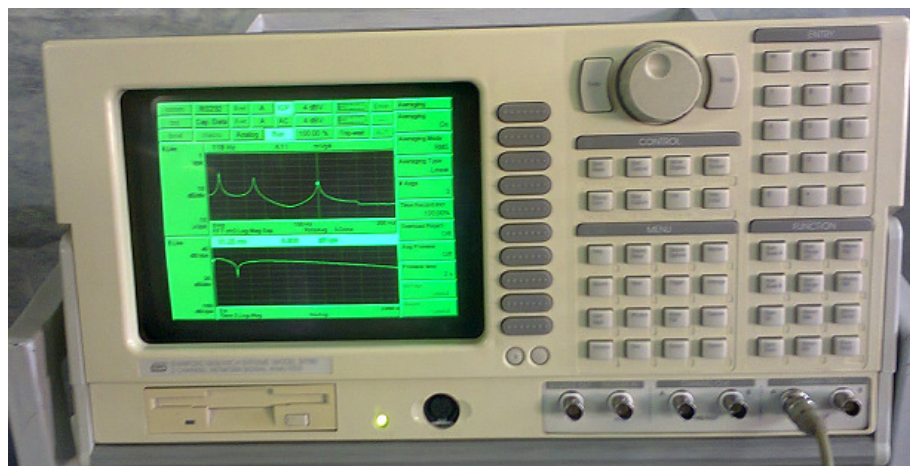
➤ **Analisador de sinais**

Descrição: Analisador de sinais - SRS (*Stanford Research Systems*)

Modelo: SR 780

Largura de banda: 102,4 kHz

Gama Dinâmica: 90 dB



Fotografia C.2 – Vista frontal do analisador de sinais.

➤ **Paquímetro digital**

Descrição: Paquímetro digital - DIGIMESS

Modelo: 100.178 BL

Resolução: 0,01 mm

Capacidade: 200 mm



Fotografia C.3 – Paquímetro utilizado.

➤ **Máquina de corte**

Descrição: Máquina de corte Norton

Modelo: Clipper TR 201E

Potência: 900 W



Fotografia C.4 - Máquina de corte utilizada.

➤ **Manta térmica**

Descrição: Manta térmica HIGHERFLEX

Material: Silicone



Fotografia C.5 - Manta térmica utilizada.

➤ **Controlador de tempo e temperatura**

Descrição: Controlador de tempo e temperatura Tholz

Modelo: Tholz MVL

Sensor de temperatura configurável



Fotografia C.6 – Controlador de tempo e temperatura.



➤ **Bomba de vácuo**

Descrição:

- Bomba de vácuo:
  - ✓ Modelo: Bush R5
  - ✓ Tipo: KB 0016 E 3Z0
  - ✓ Pressão: 2 mbar
- Motor:
  - ✓ Motor *Atas*
  - ✓ Potência: 880 W
- Cilindro:
  - ✓ Cilindro *Fibermaq Composites*



Fotografia C.7 – Bomba de vácuo.