

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

O PROBLEMA FOCO-CENTRO
EM \mathbb{R}^2 E \mathbb{R}^3

Jarne Donizetti Ribeiro

Orientador: Prof. Dr. Fábio Scalco Dias

ITAJUBÁ, 6 DE MARÇO DE 2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Jarne Donizetti Ribeiro

**O PROBLEMA FOCO-CENTRO
EM \mathbb{R}^2 E \mathbb{R}^3**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Matemática.

Área de Concentração: Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Fábio Scalco Dias

ITAJUBÁ – MG

6 DE MARÇO DE 2014

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Mauá
Bibliotecária Jacqueline Rodrigues de Oliveira Balducci-CRB_6/1698

R484p

Ribeiro, Jarne Donizetti.

O Problema Foco-Centro em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 . / Jarne Donizetti

Ribeiro. - Itajubá, (MG) : [s.n.], 2014.

78 p. : il.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Scalco Dias.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Itajubá.

1. Problema foco-centro. 2. Campos quadráticos planares.
3. Bautin e Campos quadráticos em \mathbb{R}^3 . I. Dias, Fábio Scalco,
orient. II. Universidade Federal de Itajubá. III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Jarne Donizetti Ribeiro

**O PROBLEMA FOCO-CENTRO
EM \mathbb{R}^2 E \mathbb{R}^3**

Dissertação aprovada por banca examinadora em 28 de fevereiro de 2014, conferindo ao autor o título de **Mestre em Ciências em Matemática.**

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Fábio Scalco Dias

Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello

Prof.^a Dr.^a Regilene Delazari dos Santos Oliveira

ITAJUBÁ – MG

6 DE MARÇO DE 2014

*Dedico este trabalho a minha família: Jarne, Marlene,
Ana Paula e André, sem vocês eu não teria chegado até aqui.
Dedico também a minha namorada Christiane, pela paciência e força.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que dá um sentido na minha vida, que guiou meus passos e que me deu forças nas horas difíceis.

Agradeço a minha mãe (Marlene) e meu pai (Jarne), pelo apoio incansável em todos os desafios da minha vida e pelo amor incondicional com quem sempre me educou e me criou, amo vocês e saibam que sempre serão meus exemplos de vida e meu combustível para enfrenta-la. Aos meus irmãos Ana Paula e André Luiz pela força e incentivo que deram quando vim para Itajubá, saibam que me espelhei nas lutas de vocês. Minha Família, meu tesouro, só estou aqui porque vocês me proporcionaram o primeiro empurrão e daí em diante caminhei sempre tendo como referência vocês.

Agradeço o meu orientador, Fábio Scalco Dias, pela paciência com que conduziu sua orientação, principalmente nos últimos meses. Deixo aqui minha gratidão por suas palavras de incentivo, por escutar minhas idéias, por me dar liberdade de pensamentos e escrita e por compreender meus momentos de angústias e euforia e, mais do que isso, obrigado por estar presente quando mais precisei. Sem dúvida seus ensinamentos, sua experiência e seu conhecimento com generosidade me conduziram ao verdadeiro aprendizado.

Agradeço a minha namorada, companheira e parceira Christiane, por me ouvir no celular horas e horas, por me aguentar quando eu estava por desistir, por passar horas difíceis ao meu lado nesses últimos dois anos, que não foram fáceis, mas que se tornaram menos árduo pelo fato que eu à tinha ao meu lado.

Agradeço aos meus professores da UNIFEI, não só pelos excelentes ensinamentos passados, mas por todo carinho e atenção que nos têm concedido. Agradeço em especial ao professor Luis Fernando de Osório Mello pela confiança e apoio.

Agradeço aos meus professores da UNIFAL que fizeram a diferença na minha formação.

Agradeço aos meus amigos do Mestrado (da salinha), Warlei, Edson (Pelé), Franco, Tiago, Antonio (Tony), Filipe, PH Silva, Tais, Mariana, Fernando, Carolina, Sueni, Alexandre, Carol, que direta ou indiretamente, contribuíram com este trabalho.

Agradeço aos meus amigos da Matemática da UNIFAL e aos meus amigos da Física da UNIFAL em especial ao Roger que me acolheu e me aturou dois meses em São Carlos.

Agradeço aos meus grandes amigos de República, Tiago (linguarudo), Edson (Gado), Antonio (Tony), Celso, Filipe e José Lucas pelos momentos de descontração e risadas que proporcionaram, você foram a família que eu tive em Itajubá. Em especial queria agradecer ao José Lucas pela paciência, companheirismo, conversas intermináveis, às vezes exaltadas, que só acontecem entre bons amigos.

Agradeço a CAPES, pelo apoio financeiro.

Enfim, gostaria de agradecer sinceramente a todos que, de alguma forma, me apoiaram ou contribuíram para que eu conseguisse terminar este trabalho.

"Que os vossos esforços desafiem as impossibilidades, lembrai-vos de que as grandes coisas do homem foram conquistadas do que parecia impossível. "

Chales Chaplin.

Resumo

O objetivo desta dissertação é estudar o Problema Foco–Centro para alguns sistemas de equações diferenciais definidos por campos vetoriais quadráticos em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 . Demonstramos o teorema de Bautin e para sistemas em \mathbb{R}^3 estudamos o problema usando as superfícies algébricas invariantes e múltiplos de Jacobi inverso.

Palavras–chave: Campos quadráticos planares, problema foco–centro, Bautin, Campos quadráticos em \mathbb{R}^3 , superfícies algébricas invariantes, múltiplos de Jacobi inverso.

Abstract

The objective of this dissertation is the study of the Center–Focus Problem for some systems defined by quadratic vector fields in \mathbb{R}^2 and \mathbb{R}^3 . We prove the Bautin Theorem and for system in \mathbb{R}^3 we study the problem by using invariant algebraic surfaces and inverse Jacobi multipliers.

Keywords: Planar quadratic vector fields, center–focus problem, Bautin, quadratic vector fields in \mathbb{R}^3 , invariant algebraic surface, inverse Jacobi multipliers.

Conteúdo

Agradecimentos	ii
Resumo	v
Abstract	vi
Índice	vii
Lista de Figuras	ix
1 Introdução	1
2 Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais	5
2.1 Campos vetoriais e fluxos	5
2.2 O teorema do fluxo tubular	7
2.3 Estrutura local dos pontos singulares hiperbólicos	8
3 Teorema de Bautin	11
3.1 O problema foco–centro em \mathbb{R}^2	11
3.2 Estabilidade local segundo Lyapunov	12
3.3 Valores focais e coeficientes de Lyapunov	14
3.4 Teoria de integrabilidade de Darboux	22
3.4.1 Curvas algébricas invariantes	25
3.4.2 Fator integrante e fator exponencial	27
3.5 Teorema de Bautin	30
3.6 Ciclicidade	37

4	Existência de Centro em \mathbb{R}^3 Sobre uma Variedade Central	42
4.1	Pontos de Hopf	42
4.2	Múltiplos de Jacobi inverso em \mathbb{R}^3	45
4.3	O Problema foco–centro sobre a variedade central local em \mathbb{R}^3	47
4.3.1	Propriedades dos múltiplos de Jacobi inverso	49
4.3.2	Demonstração do Teorema 4.3.4	56
4.4	Aplicações	57
4.4.1	Sistema de Moon–Rand	58
4.4.2	Sistema de Lü	66
4.4.3	Sistema de Lorenz	71
	Conclusões e Trabalhos Futuros	74
	Bibliografia	76

Lista de Figuras

2.1	Trajatórias do campo \mathcal{X}	6
2.2	Fluxo tubular local na vizinhança de um ponto regular.	8
2.3	Interpretação geométrica do Teorema de Hartman-Grobman.	10
3.1	Dois ciclos limites do sistema (3.40).	40
4.1	A superfície de Hopf, \mathcal{L}_{22} juntamente com a curva de centros \mathcal{L}_3	64

Capítulo 1

Introdução

O problema foco–centro é um dos problemas mais famosos da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias (EDOs). Para uma equação diferencial $u' = f(u)$ em \mathbb{R}^2 com um ponto de equilíbrio isolado na origem, $f(0) = 0$, e a parte linear $Df(0)$ com dois autovalores imaginários puros, o problema foco–centro (não degenerado) é simplesmente dar condições sobre $f(u)$ para distinguir se a origem é um foco ou um centro.

Embora date do fim do século XIX, este problema é totalmente resolvido somente para sistemas lineares e quadráticos devido às contribuições sucessivas de H. Dulac [9], W. Kapteyn [15], N. Bautin [1], e outros. Em 1939, usando a forma normal de Kapteyn, N. Bautin conseguiu exibir explicitamente um número finito de condições algébricas necessárias e suficientes para que o ponto de equilíbrio seja um centro de um sistema quadrático planar.

Cálculos relativamente simples mostram que, quando a linearização do sistema em um ponto de equilíbrio tem autovalores com partes reais e as partes imaginárias diferentes de zero, o ponto de equilíbrio é um foco (atrator ou repulsor). Se, no entanto, as partes reais dos autovalores são iguais a zero, então a estabilidade do ponto de equilíbrio depende dos termos não-lineares de uma forma não trivial. Um método geral, devido à Poincaré e Lyapunov reduz o problema foco–centro ao de resolver um sistema infinito de equações polinomiais. Ou seja, o problema foco–centro é reduzido ao problema de encontrar a variedade do ideal gerado por uma coleção de polinômios, chamado de quantidades focais (η_{2k}) do sistema. A variedade assim definida no espaço de coeficientes é chamada de

variedade central de Bautin. Segue do teorema da base de Hilbert que todo ideal polinomial é gerado por um número finito de polinômios. Desta forma, deve existir um $k \in \mathbb{N}$ tal que o ideal de Bautin, $\mathcal{B} = \langle \eta_2, \eta_4, \dots \rangle$, satisfaça $\mathcal{B} = \mathcal{B}_k = \langle \eta_2, \eta_4, \dots, \eta_{2k} \rangle$. Assim, o problema foco centro estará resolvido se encontrarmos um número k tal que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_k$. Na prática, encontrar um tal número k é muito difícil. Por outro lado, como estamos interessados apenas na variedade do ideal, não no próprio ideal e conhecendo o seguinte resultado: *Se I e J são ideais em $C[x_1, \dots, x_n]$, então $V(I) = V(J)$ se, e somente se, seus ideais radicais são iguais, ou seja, $\sqrt{I} = \sqrt{J}$* . Então, é suficiente encontrar um número k tal que o radical de \mathcal{B} seja igual ao radical de \mathcal{B}_k .

Um segundo problema, chamado problema da ciclicidade, é estimar o número de ciclos limites, isto é, soluções periódicas isoladas, que podem bifurcar de um centro ou um foco quando os coeficientes do sistema de equações diferenciais são perturbados por valores arbitrariamente pequenos. Este problema é uma parte do ainda não resolvido 16º Problema de Hilbert. A fim de encontrarmos um limite superior para a ciclicidade de um centro ou foco em um sistema polinomial é suficiente obtermos uma base para o ideal das quantidades focais acima mencionado. Assim, o estudo desses dois problemas famosos na teoria qualitativa das equações diferenciais podem ser estudados por meio do estudo de ideais polinomiais, isto é, através do estudo de um objeto de álgebra comutativa.

Ao contrário do caso planar, pouco se sabe sobre as condições de centro em dimensões maiores que dois. Em particular, para sistemas diferenciais analíticos em \mathbb{R}^3 , o problema foco–centro é um problema ainda em aberto, exceto para alguns casos específicos. Mais precisamente, dado um sistema analítico de equações diferenciais em \mathbb{R}^3

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \tag{1.1}$$

em que $\mathbf{x} = (x, y, z)$ e $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, suponha, sem perda de generalidade, que a origem $(0, 0, 0)$ seja um ponto singular isolado. Além disso, suponha que a matriz Jacobiana calculada na origem tenha um autovalor real não nulo e um par de autovalores complexos conjugados com partes reais nulas. O problema foco–centro em \mathbb{R}^3 é, sob estas hipóteses, decidir se todas as órbitas sobre a variedade central local na origem são periódicas, caso contrário a origem é um foco. Lembrando que a variedade central na origem do sistema (1.1), denotada por W^c , é uma superfície invariante que é tangente ao auto espaço gerado

pelos autovalores imaginários puros e contém todo o comportamento recorrente do sistema (1.1) numa vizinhança da origem em \mathbb{R}^3 .

Nesta dissertação apresentamos duas formas de solução para este problema: a primeira é o clássico Teorema de Poincaré-Lyapunov o qual é dado em termos de uma integral primeira, a outra solução é dada em termos de múltiplos de Jacobi inverso e pode ser vista como um resultado análogo em \mathbb{R}^3 ao critério de Reeb no plano.

Para uma visão completa desta dissertação, os capítulos subsequentes encontram-se assim organizados:

✓ CAPÍTULO 2: Apresentaremos neste capítulo um breve resumo da Teoria Qualitativa dos Sistemas Diferenciais, auxiliando-nos na compreensão do problema foco-centro que será também introduzido no capítulo seguinte.

✓ CAPÍTULO 3: Neste capítulo apresentaremos o problema foco-centro em \mathbb{R}^2 que é um dos mais importantes da Teoria Qualitativa. Daremos algumas ferramentas para auxiliar na compreensão deste problema tais como os coeficientes de Lyapunov, as curvas algébricas invariantes e a teoria de integrabilidade de Darboux. Em seguida apresentaremos a prova, utilizando as bases de Groebner, do famoso teorema de Bautin, enunciado da seguinte forma

Teorema. *O sistema de Bautin*

$$\begin{cases} x' = \lambda_1 x - y - \lambda_3 x^2 + (2\lambda_2 + \lambda_5)xy + \lambda_6 y^2, \\ y' = \lambda_1 y + x + \lambda_2 x^2 + (2\lambda_3 + \lambda_4)xy - \lambda_2 y^2, \end{cases} \quad (1.2)$$

com $\lambda_1 = 0$, tem a origem como um centro se, e somente se, uma das seguintes condições é satisfeita:

- i) $\lambda_4 = 0$ e $\lambda_5 = 0$;
- ii) $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_5 = 0$;
- iii) $\lambda_3 = \lambda_6$;
- iv) $\lambda_5 = \lambda_4 + 5(\lambda_3 - \lambda_6) = \lambda_3 \lambda_6 - \lambda_2^2 - 2\lambda_6^2 = 0$.

Finalizaremos este capítulo com um resultado sobre a ciclicidade para campos quadráticos planares e alguns exemplos. Este resultado será apresentado neste capítulo da

seguinte forma: Se um campo quadrático planar possui um ponto de equilíbrio na origem do tipo foco ou centro, então fazendo pequenas variações dos seus coeficientes o campo pode produzir não mais do que três ciclos limites em uma vizinhança deste ponto.

✓ CAPÍTULO 4: Inicialmente estudaremos os pontos de Hopf e definiremos o problema foco–centro sobre uma variedade central. A partir daí iremos apresentar algumas propriedades dos múltiplos Jacobi inverso essenciais para enunciarmos e demonstrarmos uma versão do critério de Reeb (\mathbb{R}^2) dada em termos de um múltiplo Jacobi inverso em \mathbb{R}^3 . Ao final deste capítulo, aplicaremos esta teoria para estudarmos a estabilidade dos pontos de equilíbrio em três sistemas de equações diferenciais, a saber: Sistema de Moon-Rand, sistema de Lü e sistema de Lorenz.

Capítulo 2

Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos e resultados fundamentais da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias, que serão utilizados no decorrer desta dissertação. Para um desenvolvimento mais amplo destes assuntos, recomendamos o livro [23].

2.1 Campos vetoriais e fluxos

Seja \mathcal{U} um subconjunto aberto do espaço euclidiano \mathbb{R}^n .

Definição 2.1.1. *Um campo vetorial de classe C^r , $r \geq 1$, em \mathcal{U} é uma aplicação $\mathcal{X} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^r .*

Definição 2.1.2. *O sistema*

$$x' = \mathcal{X}(x) \quad x' = \frac{dx}{dt} \tag{2.1}$$

é chamado de sistema diferencial associado ao campo de vetores \mathcal{X} . As soluções desta equação, isto é, as aplicações diferenciáveis $\varphi : I \rightarrow \mathcal{U}$ ($I \subset \mathbb{R}$) tais que

$$\varphi'(t) = \frac{d\varphi}{dt}(t) = \mathcal{X}(\varphi(t))$$

para todo $t \in I$, são chamadas trajetórias ou curvas integrais de \mathcal{X} .

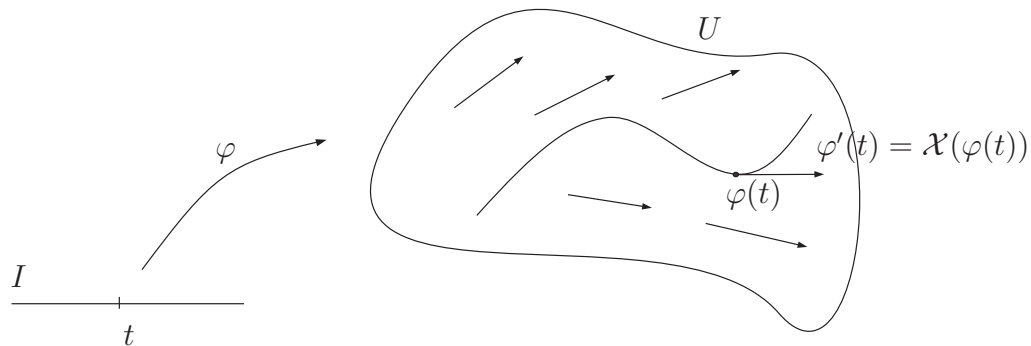


Figura 2.1: Trajetórias do campo \mathcal{X} .

Definição 2.1.3. Um ponto $p \in \mathcal{X}$ é chamado de **ponto de equilíbrio** ou **singularidade** de \mathcal{X} se $\mathcal{X}(p) = 0$ e **ponto regular** de \mathcal{X} se $\mathcal{X}(p) \neq 0$.

Definição 2.1.4. Uma trajetória $\varphi : I \rightarrow \mathcal{U}$ de \mathcal{X} chama-se **máxima** se para toda trajetória $\psi : J \rightarrow \mathcal{U}$ tal que $I \subseteq J$ e $\varphi = \psi|_I$ se tenha $I = J$ e conseqüentemente $\varphi = \psi$. Neste caso I chama-se **intervalo máximo**.

Definição 2.1.5. Seja $0 \in I(x)$, onde $I(x)$ é o intervalo máximo. Se existir $t \in \mathbb{R}$, tal que $t \in I(x)$ para todo $x \in \mathcal{U}$, dizemos que o **fluxo** no tempo t associado ao campo de vetores \mathcal{X} em $\Omega = \{(t, x); x \in \mathcal{U} \text{ e } t \in I(x)\}$ é a aplicação

$$\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

definida da seguinte maneira: dado $x \in \mathcal{U}$, tomamos a solução máxima $x : I(x) \rightarrow \mathcal{U}$ de \mathcal{X} , com $x(0) = x$ e então definimos

$$\varphi(t, x) = x(t).$$

Definição 2.1.6. O conjunto $\mathcal{O}(p) = \{\varphi(t, p); t \in I(p)\}$, isto é, a imagem da curva integral de \mathcal{X} pelo ponto p , chama-se **órbita** de \mathcal{X} pelo ponto p .

Observação 2.1.1. Duas órbitas de \mathcal{X} coincidem ou são disjuntas, ou seja,

$$q \in \mathcal{O}(p) \Leftrightarrow \mathcal{O}(p) = \mathcal{O}(q).$$

Da observação anterior, \mathcal{U} fica decomposto numa união disjunta de curvas diferenciáveis, podendo cada uma ser:

1. Imagem biunívoca de um intervalo de \mathbb{R} .
2. Um ponto.
3. Homeomorfo a um círculo.

No segundo caso $\{p\} = \mathcal{O}(p)$, a órbita chama-se **órbita singular**; no terceiro caso a órbita chama-se **fechada** ou **periódica**.

Definição 2.1.7. *Uma órbita periódica γ de \mathcal{X} é chamada de **ciclo limite** se existe uma vizinhança \mathcal{V} de γ tal que γ é a única órbita fechada de \mathcal{X} que intercepta \mathcal{V} .*

Definição 2.1.8. *O conjunto \mathcal{U} , munido da decomposição em órbitas de \mathcal{X} , chama-se **retrato de fase** de \mathcal{X} . As órbitas são orientadas no sentido das curvas integrais do campo \mathcal{X} .*

2.2 O teorema do fluxo tubular

Uma vez que dispomos de um recurso para a representação de um campo vetorial, seu retrato de fase, devemos procurar meios para comparar duas representações e dizer quando são equivalentes (possuem as mesmas propriedades essenciais). Introduzimos a seguir a noção de conjugação entre dois campos vetoriais, as quais permitem comparar seus retratos de fase.

Definição 2.2.1. *Sejam $\varphi_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\varphi_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ os fluxos gerados pelos campos $\mathcal{X}_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{X}_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, respectivamente. Dizemos que \mathcal{X}_1 é **topologicamente conjugado** (resp. **C^r -conjugado**) a \mathcal{X}_2 quando existe um homeomorfismo (resp. um difeomorfismo de classe C^r) $h : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{U}_2$ tal que*

$$h(\varphi_1(t, x)) = \varphi_2(t, h(x)) \quad \text{para todo } (t, x) \in \Omega_1.$$

O homeomorfismo h chama-se **conjugação topológica** (resp. **C^r -conjugação**) entre \mathcal{X}_1 e \mathcal{X}_2 .

Um aspecto essencial da conjugação h entre \mathcal{X}_1 e \mathcal{X}_2 é a preservação dos pontos singulares e das órbitas periódicas juntamente com seu período. São estas características que tornam estas relações úteis para a comparação de retratos de fase.

Vejamos agora que o esboço do retrato de fase de um campo \mathcal{X} é trivial numa vizinhança de um ponto regular. Ver figura 2.2.

Teorema 2.2.1. (Fluxo Tubular.) *Seja p um ponto regular de um campo vetorial \mathcal{X} , de classe C^r , $r \geq 1$. Então existe um difeomorfismo de classe C^r que conjuga \mathcal{X} , em uma vizinhança de p , com o campo constante $\mathcal{Y} = (1, 0, 0, \dots, 0)$ restrito a uma vizinhança da origem.*

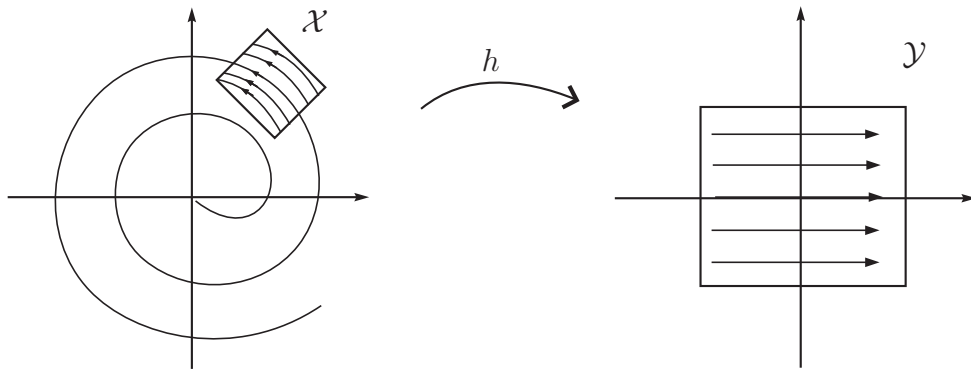


Figura 2.2: Fluxo tubular local na vizinhança de um ponto regular.

2.3 Estrutura local dos pontos singulares hiperbólicos

Tendo em vista o teorema do fluxo tubular, podemos considerar satisfatório o conhecimento qualitativo local das órbitas de um campo vetorial em torno de pontos regulares, sendo que existe apenas uma classe de conjugação diferenciável local. Por outro lado, se p é uma singularidade, a situação é bem mais complexa. Mesmo nos sistemas lineares já se apresentam várias classes diferentes de conjugação diferenciável. Começamos por definir os tipos de pontos singulares.

Definição 2.3.1. *O ponto singular p de \mathcal{X} é chamado de **hiperbólico** quando a matriz Jacobiana $A = D\mathcal{X}(p)$ possui todos autovalores com partes reais diferente de zero. Se a parte real de algum autovalor for nula a singularidade é chamada de **não hiperbólica**.*

Definição 2.3.2. Um ponto singular hiperbólico p de \mathcal{X} é chamado de um **nó** se a matriz Jacobiana $A = D\mathcal{X}(p)$ possui todos autovalores reais de mesmo sinal. Se este sinal for negativo, p é dito ser um **nó atrator** e se for positivo, um **nó repulsor**.

Definição 2.3.3. Um ponto singular hiperbólico $p \in \mathbb{R}^2$ de \mathcal{X} é chamado de um **foco** se a matriz Jacobiana $A = D\mathcal{X}(p)$ possui 2 autovalores complexos conjugados com parte real não nulas. A direção do campo é dada pelo sinal da parte real destes autovalores, se for negativa temos que p é um **foco atrator**, se a parte real for positiva temos que p é um **foco repulsor**.

Definição 2.3.4. Um ponto singular $p \in \mathbb{R}^2$ de \mathcal{X} é chamado de um **centro**, se existir uma vizinhança $V_{(p)}$ de p totalmente preenchida por órbitas fechadas. Uma condição necessária para isso, mas não suficiente, é a seguinte: a matriz Jacobiana $A = D\mathcal{X}(p)$ possuir 2 autovalores imaginários puros e não nulos.

O seguinte Teorema de Hartman-Grobman afirma que se a singularidade for hiperbólica, o sistema linearizado descreve o comportamento do sistema não linear próximo do ponto singular, ou seja, o comportamento numa vizinhança de um ponto singular é sempre modelado pelo comportamento da parte linear.

Teorema 2.3.1. (Hartman-Grobman). *Sejam $\mathcal{X} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^1 e $p \in \mathcal{U}$ um ponto singular hiperbólico. Então, existem vizinhanças V de p em \mathcal{U} e W de $0 \in \mathbb{R}^n$ tais que \mathcal{X} restrito a \mathcal{U} é topologicamente conjugado a $D\mathcal{X}(p)|_W$, onde $D\mathcal{X}(p)$ representa a matriz Jacobiana aplicada no ponto singular p .*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [23].

Na Figura 2.3 temos representado os retratos de fase de um campo não linear numa vizinhança de um ponto singular hiperbólico e de seu linearizado.

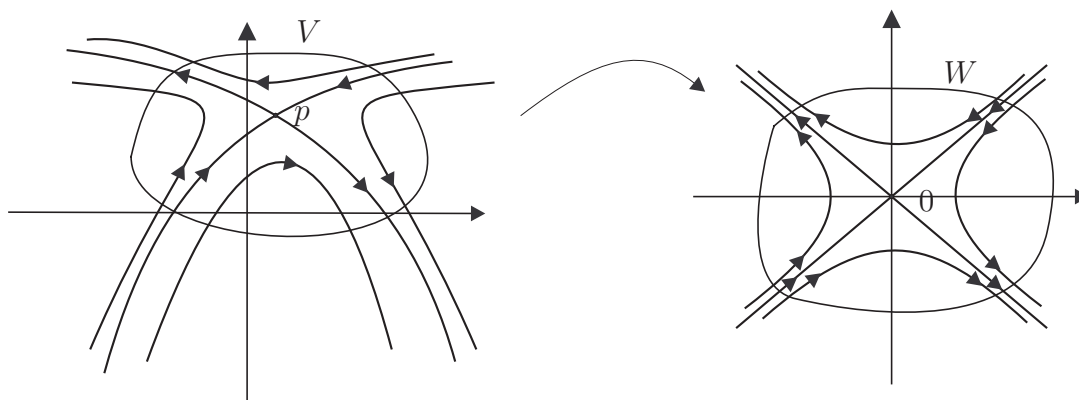


Figura 2.3: Interpretação geométrica do Teorema de Hartman-Grobman.

Capítulo 3

Teorema de Bautin

Neste capítulo discutiremos um dos mais importantes problemas da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais. Sob condições bastante gerais o problema foco–centro é completamente entendido para o caso dos campos quadráticos planares, através do teorema de Bautin que apresentaremos neste capítulo. Em resumo, o teorema de Bautin fornece condições necessárias e suficientes para que um ponto singular de um sistema quadrático planar seja um centro. Iniciaremos o capítulo com algumas definições e resultados necessários para o entendimento deste teorema.

3.1 O problema foco–centro em \mathbb{R}^2

Consideremos o sistema

$$\begin{cases} x' = \tilde{P}(x, y) \\ y' = \tilde{Q}(x, y) \end{cases} \quad (3.1)$$

onde \tilde{P} e \tilde{Q} são funções analíticas. Suponha que a origem seja um ponto de equilíbrio isolado do sistema (3.1), ou seja, existe uma vizinhança contendo a origem na qual ela é o único ponto singular. Considere $\mathcal{X}(x, y) = (\tilde{P}(x, y), \tilde{Q}(x, y))$ o campo de vetores associado ao sistema (3.1). Suponha ainda que a matriz Jacobiana $J(0, 0) = D\mathcal{X}(0, 0)$ tenha autovalores complexos conjugados. Esta última hipótese garante que numa vizinhança suficientemente próxima da origem, as soluções de (3.1) circulem a origem.

O problema foco–centro é, sob as hipóteses acima, decidirmos se a origem é um foco (repulsor ou atrator) ou um centro.

Exemplo 3.1.1. *Considere os seguintes sistemas*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -y + y^2, \\ \dot{y} = x, \end{array} \right. \quad e \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -y - x^3, \\ \dot{y} = x - y^3. \end{array} \right.$$

Em ambos a origem é uma singularidade não hiperbólica e os autovalores da matriz Jacobiana na origem têm a forma

$$\lambda_{1,2} = \pm i.$$

Como veremos mais adiante, no primeiro caso, a origem é um centro, pois o sistema é Hamiltoniano, enquanto que no segundo caso, a origem é um foco atrator.

Se a origem for um ponto singular hiperbólico, ou seja, os autovalores da matriz Jacobiana $J(0,0) = D\mathcal{X}(0,0)$ forem da forma

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$$

com $\alpha \neq 0$, então o teorema de Hartman-Grobman nos diz que numa vizinhança suficientemente pequena da origem, o sistema é topologicamente conjugado à sua parte linear, isto é, podemos ignorar os termos de ordem superior. Neste caso, veremos mais adiante que a origem é um foco atrator ($\alpha < 0$) ou um foco repulsor ($\alpha > 0$).

Desta forma, é de nosso interesse o problema foco-centro quando os autovalores da matriz Jacobiana $J(0,0) = D\mathcal{X}(0,0)$ forem da forma

$$\lambda_{1,2} = \pm i\beta$$

com $\beta \neq 0$. Notemos, neste caso, que a origem é uma singularidade não hiperbólica e, portanto, o sistema linearizado não descreve necessariamente o comportamento do sistema não linear próximo da origem. Veremos mais adiante como resolver efetivamente este problema para o caso dos campos quadráticos planares, através do teorema de Bautin.

3.2 Estabilidade local segundo Lyapunov

Uma ferramenta essencial para o estudo da estabilidade de uma singularidade é o critério de Lyapunov. Nesta seção apresentamos um breve resumo deste resultado.

Definição 3.2.1. Dados $\mathcal{X} : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial e $p \in \mathcal{U}$ uma singularidade de X , temos que:

- a) p é **estável** se dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $\|x - p\| < \delta$ implica $\|\varphi(t, x) - p\| < \varepsilon$, para todo $t > 0$;
- b) p é **instável** se não for estável;
- c) p é **assintoticamente estável** se p é estável e, além disso, existe $\varepsilon > 0$, tal que $\|x - p\| < \varepsilon$ implica $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x) = p$;
- d) p é **assintoticamente instável** se p é instável e, além disso, existe $\varepsilon > 0$, tal que $\|x - p\| < \varepsilon$ implica $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, x) = p$.

Considere um campo vetorial \mathcal{X} e $V : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 . Definimos a derivada de V na direção do campo \mathcal{X} no ponto $p \in \mathcal{U}$ por

$$\dot{V}(p) = \nabla V(p) \cdot X(p).$$

Definição 3.2.2. Dados o campo \mathcal{X} e a função V como acima. Considere $p \in \mathcal{U}$ um ponto singular de \mathcal{X} , temos que

- a) V é **função de Lyapunov** para o campo \mathcal{X} se $V(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathcal{U}$, $V(x) = 0$ se, e somente se, $x = p$ e $\dot{V} \leq 0$, para todo $x \in \mathcal{U}$;
- b) V é **função de Lyapunov estrita** para o campo \mathcal{X} se V é função de Lyapunov e, além disso, $\dot{V} < 0$, para todo $x \in \mathcal{U}$.

Teorema 3.2.1. (Critério de Lyapunov). Seja p um ponto de equilíbrio isolado do campo \mathcal{X} . Se existir uma função de Lyapunov V definida em algum domínio $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ contendo p , então p é uma **singularidade estável**. Se V for uma função de Lyapunov estrita então p será uma **singularidade assintoticamente estável**.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada no livro [23].

Exemplo 3.2.1. O segundo sistema dado no Exemplo 3.1.1 possui

$$V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{4}xy(x^2 - y^2)$$

como função de Lyapunov estrita. Desta forma segue do Teorema 3.2.1 que a origem é um foco atrator.

3.3 Valores focais e coeficientes de Lyapunov

Nesta seção apresentaremos um processo computacional eficiente, criado por Lyapunov para calcular os coeficientes de Lyapunov, tais coeficientes darão informações sobre a estabilidade de uma singularidade.

Considere o campo $\mathcal{X} = (\tilde{P}, \tilde{Q})$ associado ao sistema (3.1), logo sua linearização na origem apresenta um foco ou um centro. Com mudanças adequadas de coordenadas, o sistema (3.1) pode ser escrito como

$$\begin{cases} x' = y + \lambda x + P(x, y) \\ y' = -x + \lambda y + Q(x, y), \end{cases} \quad (3.2)$$

onde P e Q são funções analíticas cujos desenvolvimentos de Taylor na origem começa com, pelo menos, termos quadráticos. Considere a função de Lyapunov

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \dot{V} = \nabla V \cdot \mathcal{X} &= (x, y)(y + \lambda x + P, -x + \lambda y + Q), \\ &= \lambda x^2 + xP + \lambda y^2 + yQ, \\ &= \lambda(x^2 + y^2) + xP + yQ. \end{aligned}$$

Desta forma o sinal de \dot{V} em uma vizinhança da origem é determinado pelo sinal de λ . Se $\lambda \neq 0$ dizemos que a origem é um **foco forte**. Pelo Teorema 3.2.1, se $\lambda < 0$ a origem é assintoticamente estável e se $\lambda > 0$ a origem é instável. Quando $\lambda = 0$ dizemos que a origem é um **foco fraco** ou um centro. Daqui para frente queremos estudar a estabilidade do equilíbrio $(0, 0)$ quando $\lambda = 0$. Desta forma, o sistema (3.2) assume a forma

$$\begin{cases} x' = y + P(x, y) \\ y' = -x + Q(x, y), \end{cases} \quad (3.3)$$

com

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \sum_{k=2}^m P_k(x, y) + O(\|(x, y)\|^{m+1}) \\ Q(x, y) &= \sum_{k=2}^m Q_k(x, y) + O(\|(x, y)\|^{m+1}) \end{aligned}$$

onde

$$P_k(x, y) = \sum_{j=0}^k p_{k-j,j} x^{k-j} y^j,$$

$$Q_k(x, y) = \sum_{j=0}^k q_{k-j,j} x^{k-j} y^j.$$

A notação O denota a expansão em série de Taylor, em torno da origem, iniciando-se nos termos de ordem $m + 1$ no mínimo.

Considere a função de Lyapunov dada por

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \sum_{k=3}^{m+1} V_k(x, y) + O(\|(x, y)\|^{m+2}), \quad (3.4)$$

com

$$V_k(x, y) = \sum_{j=0}^k V_{k-j,j} x^{k-j} y^j$$

polinômios homogêneos de grau k nas variáveis x e y . Tomando a expansão em série de Taylor até os termos de ordem 3, o sistema (3.3) assume a forma

$$\begin{cases} x' = y + P_2(x, y) + P_3(x, y) + O(\|(x, y)\|^4) \\ y' = -x + Q_2(x, y) + Q_3(x, y) + O(\|(x, y)\|^4), \end{cases} \quad (3.5)$$

com

$$P_2(x, y) = p_{20}x^2 + p_{11}xy + p_{02}y^2,$$

$$P_3(x, y) = p_{30}x^3 + p_{21}x^2y + p_{12}xy^2 + p_{03}y^3,$$

$$Q_2(x, y) = q_{20}x^2 + q_{11}xy + q_{02}y^2,$$

$$Q_3(x, y) = q_{30}x^3 + q_{21}x^2y + q_{12}xy^2 + q_{03}y^3.$$

A função de Lyapunov (3.4) com $m = 3$ é dada por

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + V_3(x, y) + V_4(x, y) + O(\|(x, y)\|^5), \quad (3.6)$$

com

$$V_3(x, y) = V_{30}x^3 + V_{21}x^2y + V_{12}xy^2 + V_{03}y^3,$$

$$V_4(x, y) = V_{40}x^4 + V_{31}x^3y + V_{22}x^2y^2 + V_{13}xy^3 + V_{04}y^4.$$

Diferenciando (3.6) ao longo das órbitas de (3.5) segue que

$$\dot{V}(x, y) = \left(R_3(x, y) + \left(y \frac{\partial V_3}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial V_3}{\partial y}(x, y) \right) \right) + \left(R_4(x, y) + \left(y \frac{\partial V_4}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial V_4}{\partial y}(x, y) \right) \right) + O(\|(x, y)\|^5), \quad (3.7)$$

com

$$R_3(x, y) = xP_2(x, y) + yQ_2(x, y),$$

$$R_4(x, y) = xP_3(x, y) + yQ_3(x, y) + P_2(x, y)\frac{\partial V_3}{\partial x}(x, y) + Q_2(x, y)\frac{\partial V_3}{\partial y}(x, y).$$

Consideremos os seguintes espaços vetoriais

$$P_n = \left\{ p(x, y) = \sum_{j=0}^n a_{n-j,j} x^{n-j} y^j : \text{grau}(p(x, y)) < n + 1, a_{n-j,j} \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathbb{R}^{n+1} = \left\{ u : u = \sum_{j=0}^n u_{n-j,j} e_{j+1}, u_{n-j,j} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Os conjuntos $B_P^n = \{x^n, x^{n-1}y, \dots, xy^{n-1}, y^n\}$ e $B_{\mathbb{R}}^{n+1} = \{e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}\}$ são bases para P_n e \mathbb{R}^{n+1} , respectivamente. A base $B_{\mathbb{R}}^{n+1}$ é a canônica em \mathbb{R}^{n+1} . A transformação linear de P_n em \mathbb{R}^{n+1} tem a seguinte construção

$$S_n : P_n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

$$p(x, y) = \sum_{j=0}^n a_{n-j,j} x^{n-j} y^j \mapsto u = \sum_{j=0}^n a_{n-j,j} e_{j+1}.$$

Considere agora a seguinte transformação linear

$$T_n : P_n \rightarrow P_n$$

$$p(x, y) \mapsto T_n(p(x, y)) = y \frac{\partial p}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial p}{\partial y}(x, y).$$

Tomando-se as bases B_P^3 e B_P^4 para P_3 e P_4 , respectivamente, as matrizes A_3 e A_4 com relação a essas bases, são respectivamente,

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposição 3.3.1. *A transformação linear T_3 é um isomorfismo. O núcleo da transformação T_4 tem dimensão 1 e a imagem dimensão 4. Uma base para o núcleo é $\{(x^2 + y^2)^2\}$.*

Demonstração: O núcleo da transformação linear T_3 é trivial, visto que $\text{Det}(A_3) = 9$. Logo, T_3 é injetora. Para provar que T_3 é sobre, basta observar que a $\dim(\text{Im}(T_3)) = 4$ e

que $\{T_3(x^3), T_3(x^2y), T_3(xy^2), T_3(y^3)\}$ é uma base para a imagem T_3 e para P_3 . Como T_3 é bijetora, admite uma transformação inversa o qual é também linear, bijetora. A matriz A_4 é equivalente por linhas a matriz escalonada reduzida por linhas

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, o $\text{posto}(A_4) = 4$ e, conseqüentemente, o núcleo de T_4 tem dimensão 1 e a imagem dimensão 4. De um cálculo simples $A_4 S_4(p(x, y)) = 0$, $p(x, y) \in P_4$, segue que $S_4^{-1}(1, 0, 2, 0, 1) = (x^2 + y^2)^2$. ■

Resulta da Proposição 3.3.1 que $V_3(x, y)$ pode ser escolhido de maneira única de forma a cancelar os termos de grau 3 de (3.7). Tal escolha é feita resolvendo-se o sistema linear

$$A_3 S_3(V_3(x, y)) = -S_3(xP_2(x, y) + yQ_2(x, y)),$$

onde

$$S_3(V_3(x, y)) = (V_{30}, V_{21}, V_{12}, V_{03}),$$

$$S_3(xP_2(x, y) + yQ_2(x, y)) = (p_{20}, p_{11} + q_{20}, p_{02} + q_{11}, q_{02}).$$

Segue que

$$(V_{30}, V_{21}, V_{12}, V_{03}) = \left(-\frac{1}{3}(p_{11} + q_{20} + 2q_{02}), p_{20}, -q_{02}, \frac{1}{3}(p_{02} + 2p_{20} + q_{11}) \right).$$

A mesma metodologia não pode ser aplicada para escolha dos coeficientes de $V_4(x, y)$, pois T_4 não é isomorfismo. Contudo, $V_4(x, y)$ pode ser escolhido de forma que $\dot{V}(x, y)$ tenha um sinal bem definido. Isto pode ser feito impondo que os termos de ordem 4 de (3.7) pertençam ao núcleo de T_4 . Assim, os coeficientes de $V_4(x, y)$ podem ser obtidos através de

$$A_4 \left(S_4 \left(xP_3(x, y) + yQ_3(x, y) + P_2(x, y) \frac{\partial V_3}{\partial x}(x, y) + Q_2(x, y) \frac{\partial V_3}{\partial y}(x, y) \right) + A_4 S_4(V_4(x, y)) \right) = 0,$$

onde

$$S_4(V_4(x, y)) = (V_{40}, V_{31}, V_{22}, V_{13}, V_{04}),$$

$$S_4 \left(xP_3(x, y) + yQ_3(x, y) + P_2(x, y) \frac{\partial V_3}{\partial x}(x, y) + Q_2 \frac{\partial V_3}{\partial y}(x, y) \right) = (s_{40}, s_{31}, s_{22}, s_{13}, s_{04}),$$

com

$$\begin{aligned}
s_{40} &= p_{11}p_{20} + p_{30} + 2p_{20}q_{02}, \\
s_{31} &= p_{11}^2 - 2p_{20}^2 + p_{21} - p_{20}q_{11} + 2q_{20}q_{02} + p_{11}(q_{20} + 2q_{02}) + q_{30}, \\
s_{22} &= p_{12} - 2p_{20}p_{11} + p_{02}(p_{11} + 2q_{02}) + 2q_{11}q_{02} - 2p_{20}q_{20} - q_{11}q_{20} + q_{21}, \\
s_{13} &= p_{03} + p_{11}q_{02} + 2q_{02}^2 - 2p_{20}q_{11} - q_{11}^2 - p_{02}(2p_{20} + q_{11}) + q_{12}, \\
s_{04} &= -2p_{20}q_{02} - q_{11}q_{02} + q_{03}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
V_{40} &= \frac{1}{4} \left(2q_{02}q_{20} - q_{12} - 3p_{20}q_{11} - q_{30} - 2p_{20}^2 + p_{11}^2 + 3q_{02}p_{11} + p_{11}q_{20} - p_{21} + \right. \\
&\quad \left. 2q_{02}^2 - q_{11}p_{02} - q_{11}^2 - p_{03} - 2p_{20}p_{02} \right) + 1, \\
V_{31} &= \frac{1}{8} \left(5p_{30} - 7p_{20}p_{11} - 16q_{02}p_{20} - 3q_{03} - q_{21} - q_{02}q_{11} - 2p_{20}q_{20} - q_{20}q_{11} + p_{02}p_{11} + \right. \\
&\quad \left. 2q_{02}p_{02} - p_{12} \right), \\
V_{22} &= \frac{1}{2} \left(2q_{02}^2 - q_{11}p_{02} - 2p_{20}q_{11} - q_{11}^2 + q_{02}p_{11} - q_{12} - p_{03} - 2p_{20}p_{02} \right) + 2, \\
V_{13} &= \frac{1}{8} \left(3p_{30} - p_{20}p_{11} - 16q_{02}p_{20} - 5q_{03} + q_{21} - 7q_{02}q_{11} + 2p_{20}q_{20} - p_{02}p_{11} + \right. \\
&\quad \left. q_{20}q_{11} - 2q_{02}p_{02} + p_{12} \right), \\
V_{04} &= 1.
\end{aligned}$$

Com estas escolhas feitas para $V_3(x, y)$ e $V_4(x, y)$, segue que

$$\dot{V}(x, y) = \eta_4(x^2 + y^2)^2 + O(\|(x, y)\|^5), \quad (3.8)$$

com

$$\eta_4 = \frac{1}{8} \left(3q_{03} - p_{20}p_{11} + 3p_{30} + q_{21} + q_{02}q_{11} + 2p_{20}q_{20} + q_{20}q_{11} - p_{02}p_{11} - 2q_{02}p_{02} + p_{12} \right).$$

A equação (3.8) determina a estabilidade da origem. De fato, a função

$$V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + V_3(x, y) + V_4(x, y) \quad (3.9)$$

é uma função de Lyapunov em alguma vizinhança da origem. Assim, do Teorema 3.2.1, obtemos que se $\eta_4 < 0$, então a singularidade é assintoticamente estável. Se $\eta_4 > 0$, então a singularidade é instável. Quando $\eta_4 = 0$ ainda não podemos determinar a estabilidade da origem.

Na verdade, o processo criado por Lyapunov para estudar a estabilidade da origem do sistema (3.3), é um processo puramente algébrico. A idéia desse processo é construir recursivamente funções de Lyapunov para o sistema (3.3).

Primeiramente a Proposição 3.3.1 é verdadeira no caso geral.

Proposição 3.3.2. *Quando n é ímpar, T_n é um isomorfismo. Quando n é par, T_n possui um núcleo de dimensão um gerado por $(x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}}$.*

A demonstração desta proposição pode ser encontrada em [14], página 350.

Desta forma, se $\eta_4 = 0$ na equação (3.8), podemos proceder de forma análoga ao que já fizemos para obter η_4 e produzir uma nova série V , garantida pela Proposição 3.3.2 tal que o termo líder da expressão para \dot{V} é $\eta_6(x^2 + y^2)^3$, e assim por diante.

Em resumo, V pode ser escolhida de tal forma que

$$\dot{V} = \eta_4(x^2 + y^2)^2 + \eta_6(x^2 + y^2)^3 + \dots + \eta_{2k}(x^2 + y^2)^k + \dots$$

Observação 3.3.1. *Este resultado sobre estabilidade não exige que o campo vetorial \mathcal{X} seja analítico. Além disto, os cálculos formais com a série V são justificados porque a função de Lyapunov (3.9), que é um requisito para a aplicação do Teorema 3.2.1, acaba por ser um polinômio.*

Apresentamos agora um teorema bastante útil sobre a estabilidade.

Teorema 3.3.1. *Se $\eta_{2k} = 0$, $k = 2, \dots, N$, mas $\eta_{2k+2} \neq 0$, então a estabilidade da singularidade na origem é determinada:*

- *Se $\eta_{2k+2} < 0$, então a singularidade é assintoticamente estável.*
- *Se $\eta_{2k+2} > 0$, a singularidade é instável.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [5].

As constantes η_{2k} são chamadas de **valores focais**. Do método exposto acima juntamente com o Teorema 3.3.1 temos que, se após um número finito de etapas determinarmos um valor focal não nulo, então poderemos produzir uma função de Lyapunov polinomial e assim a usarmos para determinar a estabilidade do ponto singular. Contudo, ainda não esgotamos todas as possibilidades: o que acontece se todos os valores focais forem nulos? Esta pergunta é esclarecida no teorema abaixo.

Teorema 3.3.2. (Centro de Lyapunov). *Se o campo vetorial \mathcal{X} é analítico e $\eta_{2k} = 0$ para $n = 2, \dots, \infty$ então a origem é um centro. Além disto, a série que define V é convergente numa vizinhança da origem e representa uma função cujos conjuntos de nível contém as órbitas do sistema correspondente ao campo \mathcal{X} .*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [5].

Como η_{2k} é relevante somente quando $\eta_{2l} = 0$ para todo $l < k$, tomamos

$$\eta_2 = \eta_4 = \dots = \eta_{2k-2} = 0$$

nas expressões de η_{2k} . As quantidades obtidas dessa maneira são chamadas de **coeficientes de Lyapunov**, e serão denotadas por $L_k = \eta_{2k+2}$, para $k = 0, 1, 2, \dots, \infty$.

Se trabalharmos com P e Q polinômios, segue do teorema da base de Hilbert que existe uma constante m tal que $L(k) = 0$ para todo k se, e somente se, $L_k = 0$ se $k \leq m$. A base

$$\mathcal{B} = \{L_0, L_1, L_2, \dots, L_m\}$$

é chamada de **base focal**.

Desta forma é necessário calcular somente um número finito de coeficientes de Lyapunov. Contudo, dado um sistema qualquer, não sabemos a priori quantos coeficientes temos que calcular para termos a base focal \mathcal{B} , com exceção de alguns casos específicos. Em geral, os cálculos dos coeficientes de Lyapunov são muito longos e complicados, exceto em alguns casos mais simples, e assim vários métodos computacionais tem sido desenvolvidos.

Como exemplo, aplicaremos este processo em um sistema conhecido como sistema de Bautin. Estudaremos este sistema na seção 3.5.

Exemplo 3.3.1. *Considere o sistema de Bautin*

$$\begin{cases} x' = \lambda_1 x - y - \lambda_3 x^2 + (2\lambda_2 + \lambda_5)xy + \lambda_6 y^2, \\ y' = \lambda_1 y + x + \lambda_2 x^2 + (2\lambda_3 + \lambda_4)xy - \lambda_2 y^2, \end{cases} \quad (3.10)$$

com $\lambda_1 = 0$. Seguindo o processo de Lyapunov descrito acima, consideremos a função de Lyapunov dada por

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + V_3(x, y) + V_4(x, y)$$

com

$$V_3(x, y) = \frac{1}{3} (\lambda_2 + \lambda_5) x^3 + \lambda_3 x^2 y - \lambda_2 x y^2 - \frac{1}{3} (\lambda_6 + \lambda_4) y^3 \quad e$$

$$V_4(x, y) = \frac{1}{8} (7\lambda_3 \lambda_5 + \lambda_6 \lambda_5) x^3 y - \frac{1}{2} (\lambda_4 \lambda_3 + 3\lambda_2 \lambda_5 + \lambda_5^2) x^2 y^2 +$$

$$+ \frac{1}{8} (\lambda_3 \lambda_5 + 8\lambda_2 \lambda_4 - \lambda_6 \lambda_5) x y^3 + \frac{1}{4} (\lambda_4 \lambda_3 - 2\lambda_2 \lambda_5 - \lambda_5^2 + \lambda_6 \lambda_4 + \lambda_4^2) y^4.$$

Desta forma, com esses valores de V_3 e V_4 temos que

$$\dot{V} = \nabla V \cdot \mathcal{X} = \eta_4 (x^2 + y^2)^2 + \dots$$

Assim, obtemos que o primeiro coeficiente de Lyapunov do sistema (3.10) na origem é dado por

$$L_1 = \eta_4 = -\lambda_5 (\lambda_3 - \lambda_6).$$

Com cálculos realizados no programa computacional MAPLE, obtemos também o segundo e terceiro coeficientes de Lyapunov. Omitiremos os valores de V_k pelas suas extensões.

Desta forma, com valores específicos dos V_k obtemos que

$$\dot{V} = \nabla V \cdot \mathcal{X} = \eta_4 (x^2 + y^2)^2 + \eta_6 (x^2 + y^2)^3 + \eta_8 (x^2 + y^2)^4 + \dots$$

onde

- $L_1 = \eta_4 = -\lambda_5 (\lambda_3 - \lambda_6),$
- $L_2 = \eta_6 = (\lambda_3 - \lambda_6) (30 \lambda_3^2 \lambda_5 + 20 \lambda_2 \lambda_4 \lambda_3 - 40 \lambda_6 \lambda_3 \lambda_5 - 17 \lambda_3 \lambda_5 \lambda_4 + 4 \lambda_2 \lambda_4^2 + 3 \lambda_5 \lambda_4^2 +$
 $+ 13 \lambda_6 \lambda_5 \lambda_4 + 32 \lambda_2 \lambda_5^2 + 23 \lambda_5^3 - 20 \lambda_2 \lambda_6 \lambda_4 + 10 \lambda_6^2 \lambda_5).$
- $L_3 = \eta_8 = (\lambda_3 - \lambda_6) (-2352 \lambda_6^2 \lambda_2 \lambda_5^2 + 2580 \lambda_6^2 \lambda_2 \lambda_4^2 + 5502 \lambda_3 \lambda_5^3 \lambda_4 + 920 \lambda_2 \lambda_6^3 \lambda_4 +$
 $2560 \lambda_3 \lambda_6^3 \lambda_5 + 1800 \lambda_6^3 \lambda_5 \lambda_4 - 168 \lambda_6 \lambda_2 \lambda_4^3 - 489 \lambda_6^2 \lambda_5 \lambda_4^2 - 12060 \lambda_6^2 \lambda_3^2 \lambda_5 +$
 $8000 \lambda_2^2 \lambda_6^2 \lambda_5 + 9778 \lambda_6 \lambda_3 \lambda_5^3 - 3978 \lambda_6 \lambda_5^3 \lambda_4 + 360 \lambda_2 \lambda_4 \lambda_3^3 + 10560 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \lambda_5 +$
 $+ 2560 \lambda_2^3 \lambda_4 \lambda_3 + 472 \lambda_2 \lambda_4^3 \lambda_3 - 3097 \lambda_3^2 \lambda_5 \lambda_4^2 - 100 \lambda_2 \lambda_4^4 + 2760 \lambda_6 \lambda_2 \lambda_4 \lambda_3^2 -$
 $18560 \lambda_6 \lambda_3 \lambda_2^2 \lambda_5 - 111 \lambda_5 \lambda_4^4 - 1553 \lambda_6^2 \lambda_5^3 - 5984 \lambda_2 \lambda_5^2 \lambda_3^2 + 6480 \lambda_6 \lambda_3^3 \lambda_5 + 224 \lambda_2^3 \lambda_4^2 -$
 $1184 \lambda_2^3 \lambda_5^2 - 8864 \lambda_2 \lambda_5^4 + 9456 \lambda_6 \lambda_3 \lambda_2 \lambda_5^2 + 3514 \lambda_6 \lambda_3 \lambda_5 \lambda_4^2 - 694 \lambda_6 \lambda_5 \lambda_4^3 -$
 $7072 \lambda_2^2 \lambda_4 \lambda_3 \lambda_5 - 1716 \lambda_2 \lambda_5^2 \lambda_4^2 - 2560 \lambda_6 \lambda_2^3 \lambda_4 + 1170 \lambda_3^4 \lambda_5 + 7116 \lambda_3^3 \lambda_5 \lambda_4 -$
 $954 \lambda_5^3 \lambda_4^2 + 7840 \lambda_6 \lambda_2^2 \lambda_5 \lambda_4 - 4040 \lambda_3 \lambda_2 \lambda_6^2 \lambda_4 + 512 \lambda_2 \lambda_5^2 \lambda_3 \lambda_4 - 632 \lambda_2^2 \lambda_4^2 \lambda_5 -$
 $7096 \lambda_2^2 \lambda_5^3 + 4932 \lambda_2 \lambda_4^2 \lambda_3^2 - 3195 \lambda_5^5 + 1968 \lambda_6 \lambda_2 \lambda_5^2 \lambda_4 + 5116 \lambda_3 \lambda_6^2 \lambda_5 \lambda_4 -$
 $14032 \lambda_6 \lambda_3^2 \lambda_5 \lambda_4 + 826 \lambda_3 \lambda_5 \lambda_4^3 + 1850 \lambda_6^4 \lambda_5 - 7288 \lambda_6 \lambda_2 \lambda_4^2 \lambda_3 - 5417 \lambda_3^2 \lambda_5^3).$

3.4 Teoria de integrabilidade de Darboux

Agora, apresentaremos algumas definições e resultados sobre a Teoria de integrabilidade algébrica dos sistemas diferenciais polinomiais reais tomando com referência o livro [10]. Estas ferramentas serão necessárias na demonstração do teorema de Bautin. Observamos que a maioria das definições e teoremas podem ser estendidos para sistemas complexos e sistemas não polinomiais em dimensões arbitrárias.

Denotaremos por $\mathbb{C}[x, y]$ (ou $\mathbb{R}[x, y]$) o anel de polinômios nas variáveis x e y e coeficientes em \mathbb{C} (ou \mathbb{R}).

Seja \mathcal{U} um subconjunto aberto do \mathbb{R}^2 . Um **campo de vetores polinomial** (P, Q) definido em \mathcal{U} é uma aplicação que associa para cada ponto $(x, y) \in \mathcal{U}$ um vetor $\mathcal{X} = (P(x, y), Q(x, y))$ em \mathbb{R}^2 , onde

$$P(x, y) = \sum_{i+j=0}^k a_{ij} x^i y^j, \quad Q(x, y) = \sum_{i+j=0}^l b_{ij} x^i y^j$$

são polinômios em duas variáveis.

Definição 3.4.1. *O sistema*

$$\begin{cases} x' = P(x, y) \\ y' = Q(x, y) \end{cases} \quad (3.11)$$

é chamado de sistema diferencial polinomial associado ao campo de vetores \mathcal{X} .

Definição 3.4.2. *O grau do sistema (3.11) é o número máximo entre os graus dos polinômios P e Q , ou seja, $n = \max\{\text{grau}(P), \text{grau}(Q)\}$.*

Definição 3.4.3. *O sistema (3.11) é **integrável** em um aberto \mathcal{U} de \mathbb{C}^2 se existe uma função não constante $H : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$, chamada **integral primeira** do sistema em \mathcal{U} que é constante em todas as curvas soluções $(x(t), y(t))$ do sistema (3.11) contidas em \mathcal{U} .*

Observação 3.4.1. *Tomemos H como na Definição 3.4.3. Assim, $H(x(t), y(t)) = \text{constante}$ para todos os valores de t para a qual a solução $(x(t), y(t))$ está definida e contida em \mathcal{U} . Claramente H é uma integral primeira para o sistema (3.11) em \mathcal{U} se, e somente se,*

$$\mathcal{X}H = PH_x + QH_y \equiv 0 \quad \text{em } \mathcal{U}.$$

Considerando sistemas (3.11) com coeficientes reais, a existência de uma integral primeira $H : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ determina completamente seu retrato de fase, pois as curvas de nível

$$\{(x, y) : H(x, y) = h\} \subseteq \mathcal{U}$$

contém as órbitas do sistema em \mathcal{U} .

Exemplo 3.4.1. *Considere o seguinte sistema*

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x. \end{cases} \quad (3.12)$$

As soluções deste sistema são todas da forma

$$(x(t), y(t)) = (k_1 \cos(t) - k_2 \sin(t), k_1 \sin(t) + k_2 \cos(t))$$

onde k_1 e k_2 são constantes. Tomando $H(x, y) = x^2 + y^2$, temos que H não é constante, porém

$$H(x(t), y(t)) = (k_1 \cos(t) - k_2 \sin(t))^2 + (k_1 \sin(t) + k_2 \cos(t))^2 = k_1^2 + k_2^2$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. Portanto, H é uma integral primeira para o sistema (3.12).

Definição 3.4.4. *A **divergência** do campo vetorial \mathcal{X} associado ao sistema (3.11) é definida por*

$$\operatorname{div}(\mathcal{X}) = \operatorname{div}(P, Q) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Definição 3.4.5. *O sistema (3.11) é dito **Hamiltoniano** se existe uma integral primeira H (chamada função Hamiltoniana) tal que*

$$P = -\frac{\partial H}{\partial y} \quad e \quad Q = \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (3.13)$$

Portanto, os campos vetoriais planares mais simples possuindo uma integral primeira são os Hamiltonianos, uma vez que toda função Hamiltoniana é uma integral primeira.

Exemplo 3.4.2. *O primeiro sistema dado no Exemplo 3.1.1,*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + y^2, \\ \dot{y} = x, \end{cases}$$

possui a seguinte função Hamiltoniana

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{x^2}{2}.$$

Veremos agora que as possibilidades de classificação dos pontos de equilíbrio (não degenerado) para um sistema Hamiltoniano são selas ou centros.

Proposição 3.4.1. *Seja $p \in \mathbb{R}^2$ uma singularidade para o sistema (3.13). Então, os autovalores do seu sistema linearizado são ou $\pm\lambda$ ou $\pm i\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Consideremos o sistema Hamiltoniano dado por

$$\dot{x} = P = -\frac{\partial H}{\partial y} \quad \text{e} \quad \dot{y} = Q = \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (3.14)$$

e seja p um ponto de equilíbrio de (3.14). Assim o sistema linearizado é dado por

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial y} \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial x} & -\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} \end{bmatrix}$$

com o polinômio característico

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A).$$

Logo, os autovalores de A são dados por

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr}(A) \pm \sqrt{\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A)}}{2}.$$

Daí como $\text{tr}(A) = 0$, obtemos

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\det(A)}.$$

Portanto,

1. Se $\det(A) > 0$ temos que os autovalores são imaginários puros.
2. Se $\det(A) < 0$ temos que os autovalores são reais.

■

Em seguida, apresentaremos dois teoremas que auxiliam na prova da existência de um centro em um sistema analítico planar.

Teorema 3.4.1. (Teorema de Poincaré-Lyapunov) *O sistema analítico planar*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + F_1(x, y), \\ \dot{y} = x + F_2(x, y), \end{cases}$$

onde F_1 e F_2 são funções analíticas com desenvolvimentos de Taylor na origem começando com pelo menos termos quadráticos, possui um centro na origem se, e somente se, admite uma integral primeira da forma

$$H(x, y) = x^2 + y^2 + \dots$$

em uma vizinhança da origem em \mathbb{R}^2 , onde os pontos significam termos de ordem superior.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [22].

Definição 3.4.6. Um sistema (3.11) é do tipo **tempo-reversível** se existe uma aplicação $R: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$\frac{d}{dt}(R(z)) = -f(R(z))$$

onde $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $f(z) = dz/dt$.

Exemplo 3.4.3. Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + xy, \\ \dot{y} = x - y^2. \end{cases}$$

Tomando $R(x, y) = (x, -y)$ é fácil ver que $d/dt(R(x, y)) = -f(R(x, y))$ e portanto este sistema é do tipo tempo-reversível.

Teorema 3.4.2. Todo sistema da forma (3.3) do tipo tempo-reversível tem um centro na origem.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [22].

3.4.1 Curvas algébricas invariantes

Nesta seção tomamos como referência o livro [10]. Inicialmente vamos definir e obter alguns resultados para sistemas planares, porém alguns desses resultados são válidos para sistemas de dimensões maiores, $n \geq 2$.

Definição 3.4.7. Seja $f \in \mathbb{C}[x, y]$, f não identicamente nula. A curva algébrica $f = 0$ é uma **curva algébrica invariante** para \mathcal{X} se para algum polinômio $K \in \mathbb{C}[x, y]$ temos

$$\mathcal{X}f = P \frac{\partial f}{\partial x} + Q \frac{\partial f}{\partial y} = Kf. \quad (3.15)$$

O polinômio K é chamado **cofator** para a curva algébrica invariante $f = 0$.

Notemos que dado um sistema polinomial de grau n , seu cofator tem grau no máximo $n - 1$.

Lema 3.4.1. *Sejam $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$. Suponhamos f e g relativamente primos em $\mathbb{C}[x, y]$. Então para o campo de vetores \mathcal{X} dado em (3.11), $fg = 0$ é uma curva algébrica invariante com cofator K_{fg} se, e somente se, $f = 0$ e $g = 0$ são curvas algébricas invariantes com os respectivos cofatores K_f e K_g . Além disso, $K_{fg} = K_f + K_g$.*

Demonstração: Primeiramente é fácil ver que

$$\mathcal{X}(fg) = (\mathcal{X}f)g + f(\mathcal{X}g). \quad (3.16)$$

Suponha $fg = 0$ uma curva algébrica invariante do sistema (3.11) com cofator K_{fg} . Então, pela Definição 3.4.7,

$$\mathcal{X}(fg) = K_{fg}fg,$$

e da igualdade (3.16) temos,

$$K_{fg}fg = (\mathcal{X}f)g + f(\mathcal{X}g).$$

Portanto, como f e g são relativamente primos, obtemos que f divide $\mathcal{X}f$ e g divide $\mathcal{X}g$. Se tomarmos K_f como sendo o quociente $\mathcal{X}f/f$ e K_g o quociente $\mathcal{X}g/g$, temos que $f = 0$ e $g = 0$ são curvas algébricas invariantes com cofatores K_f e K_g , respectivamente. Além disso,

$$K_{fg} = K_f + K_g.$$

A prova da recíproca, segue de maneira similar, usando novamente a igualdade (3.16). ■

Proposição 3.4.2. *Suponha $f \in \mathbb{C}[x, y]$ e seja $f = f_1^{n_1} \cdot \dots \cdot f_r^{n_r}$ sua fatoração em fatores irredutíveis em $\mathbb{C}[x, y]$. Então para o campo de vetores \mathcal{X} , $f = 0$ é uma curva algébrica invariante com o cofator K_f se, e somente se, $f_i = 0$ é uma curva algébrica invariante para cada $i = 1, \dots, r$ com os respectivos cofatores K_{f_i} . Além disso $K_f = n_1 K_{f_1} + \dots + n_r K_{f_r}$.*

Demonstração: A partir do Lema 3.4.1 sabemos que $f = 0$ é uma curva algébrica invariante com o cofator K_f se, e somente se, $f_i^{n_i}$ é a curva algébrica invariante com os respectivos cofatores $K_{f_i^{n_i}}$ para $i = 1, \dots, r$, além disso, $K_f = K_{f_1^{n_1}} + \dots + K_{f_r^{n_r}}$.

Agora para mostrar a proposição é suficiente mostrar que para cada $i = 1, \dots, r$, $f_i^{n_i} = 0$ é uma curva algébrica invariante com o cofator $K_{f_i^{n_i}}$ se, e somente se, $f_i = 0$ é uma curva algébrica invariante com o cofator K_{f_i} e tal que $K_{f_i^{n_i}} = n_i K_{f_i}$.

Assumiremos que $f_i^{n_i} = 0$ é uma curva algébrica invariante com o cofator $K_{f_i^{n_i}}$. Então

$$\begin{aligned} K_{f_i^{n_i}} f_i^{n_i} &= \mathcal{X}(f_i^{n_i}) \\ &= n_i (f_i^{n_i})^{-1} \mathcal{X}(f_i) \end{aligned}$$

ou equivalentemente,

$$\mathcal{X}(f_i) = \frac{1}{n_i} K_{f_i^{n_i}} f_i.$$

Assim, definindo $K_{f_i} = K_{f_i^{n_i}}/n_i$, obtemos que $f_i = 0$ é uma curva algébrica invariante com o cofator K_{f_i} tal que $K_{f_i^{n_i}} = n_i K_{f_i}$. A prova da volta é semelhante. ■

3.4.2 Fator integrante e fator exponencial

Apresentaremos nesta subseção uma ferramenta que auxilia na obtenção de uma integral primeira para os sistemas (3.11).

Definição 3.4.8. *Seja $I : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica que não é identicamente nula em \mathcal{U} . Uma função I é um **fator integrante** para o sistema polinomial (3.11) em \mathcal{U} se uma das seguintes três condições equivalentes é verdadeira sobre \mathcal{U} :*

- a) $\frac{\partial}{\partial x}(IP) = -\frac{\partial}{\partial y}(IQ)$;
- b) $\text{div}(IP, IQ) = 0$;
- c) $\mathcal{X}I = -I \text{div}(P, Q)$.

Com a proposição abaixo temos uma receita para construir uma integral primeira para o sistema (3.11).

Proposição 3.4.3. *A integral primeira H associada ao fator integrante I é dada por*

$$H(x, y) = \int I(x, y)P(x, y)dy + h(x) \quad (3.17)$$

em que $h(x)$ é escolhido de tal forma que $\frac{\partial H}{\partial x} = -IQ$ e o domínio de integração \mathcal{U} esteja bem definido. Então

$$x' = IP = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad y' = IQ = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Demonstração: A demonstração desta proposição é trivial. ■

Proposição 3.4.4. *Se o sistema (3.11) tem dois fatores integrantes I_1 e I_2 , então a função I_1/I_2 define uma integral primeira no conjunto aberto $\mathcal{U} \setminus \{I_2 = 0\}$, visto que I_1/I_2 é não constante.*

Demonstração: Seja I_i um fator integrante. Assim ele satisfaz $\mathcal{X}I_i = -I_i \operatorname{div}(P, Q)$ para $i = 1, 2$. Desta forma a proposição é demonstrada imediatamente observando que

$$\mathcal{X} \left(\frac{I_1}{I_2} \right) = \frac{(\mathcal{X}I_1)I_2 - I_1(\mathcal{X}I_2)}{I_2^2} = 0.$$

■

O fator exponencial é uma outra ferramenta que desempenha um papel semelhante aos das curvas algébricas invariantes na obtenção de uma integral primeira para campos de vetores \mathcal{X} . Antes de definirmos, vamos explicar como a notação surge naturalmente. Suponhamos que temos as curvas algébricas invariantes $h_\varepsilon = h + \varepsilon g + O(\varepsilon^2) = 0$ com cofatores K_{h_ε} para $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ onde ε_0 é suficientemente pequeno. Usando o fato que $\mathcal{X}(h_\varepsilon) = K_{h_\varepsilon} h_\varepsilon$ e se expandirmos o cofator K_{h_ε} como uma séries de potências em ε obtemos que $K_{h_\varepsilon} = K_h + \varepsilon K + O(\varepsilon^2)$ onde K é algum polinômio de grau no máximo $n - 1$.

Podemos agora fazer um estudo local perto de um ponto onde h é não nula. Uma vez que

$$\begin{aligned} \mathcal{X} \left(\frac{h_\varepsilon}{h} \right) &= \frac{\mathcal{X}(h_\varepsilon)h - (h_\varepsilon)\mathcal{X}h}{h^2} \\ &= \frac{K_{h_\varepsilon}(h_\varepsilon)h - (h_\varepsilon)K_h h}{h^2} \\ &= \frac{(K_\varepsilon + \varepsilon K + O(\varepsilon^2))(h + \varepsilon g + O(\varepsilon^2))h - (h + \varepsilon g + O(\varepsilon^2))K_h h}{h^2} \\ &= \varepsilon K + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Daí temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{X} \left(\left(\frac{h_\varepsilon}{h} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \right) &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{h_\varepsilon}{h} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \left(\frac{h_\varepsilon}{h} \right)^{-1} \mathcal{X} \left(\frac{h_\varepsilon}{h} \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{h_\varepsilon}{h} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}} (1 + O(\varepsilon))(\varepsilon K + O(\varepsilon^2)) \\ &= (K + O(\varepsilon)) \left(\frac{h_\varepsilon}{h} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Portanto a função

$$\left(\frac{h + \varepsilon g + O(\varepsilon^2)}{h} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}}$$

tem cofator $K + O(\varepsilon)$. Assim quando $\varepsilon \rightarrow 0$ temos que a função tende a

$$\exp\left(\frac{g}{h}\right) \quad (3.19)$$

e a partir de (3.18) obtemos que

$$\mathcal{X}\left(\exp\left(\frac{g}{h}\right)\right) = K \exp\left(\frac{g}{h}\right). \quad (3.20)$$

Portanto, a função (3.19) satisfaz a equação (3.15) implicando que ela é uma curva algébrica invariante com o cofator de grau $(n - 1)$.

Definição 3.4.9. *Sejam $h, g \in \mathbb{C}[x, y]$ e assumamos que h e g são relativamente primos no anel $\mathbb{C}[x, y]$ ou que $h \equiv 1$. Então a função $\exp(g/h)$ é chamada **fator exponencial** para o sistema (3.11) se existe pelo menos um polinômio $K \in \mathbb{C}[x, y]$ de grau no máximo $(n - 1)$ que satisfaça a equação (3.20). Como antes dizemos então que K é o **cofator** do fator exponencial $\exp(g/h)$.*

O seguinte teorema será de grande valia na prova do Teorema de Bautin. Optamos aqui por apresentar uma versão mais simples e somente os itens que utilizaremos neste trabalho. Uma demonstração deste teorema (em sua versão mais geral) pode ser encontrada em [10].

Teorema 3.4.3. (Integrabilidade de Darboux)

Suponha que o sistema (3.11) admita p curvas algébricas invariantes irredutíveis $f_i = 0$ com cofatores K_i para $i = 1, \dots, p$, q fatores exponenciais $\exp\left(\frac{g_i}{h_j}\right)$ com cofatores L_j para $j = 1, \dots, q$ e $(x_0, y_0) \in \mathbb{C}^2$ um ponto singular tal que $f_i(x_0, y_0) \neq 0$ para $i = 1, \dots, p$. Então

- i) *Existem $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ não nulos tais que $\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j = 0$, se e somente se, a função*

$$f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} \left(\exp\left(\frac{g_1}{h_1}\right) \right)^{\mu_1} \dots \left(\exp\left(\frac{g_q}{h_q}\right) \right)^{\mu_q} \quad (3.21)$$

é uma integral primeira para o sistema (3.11).

- ii) *Existem $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ não nulos tais que $\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j = -\text{div}(P, Q)$, se e somente se, a função (3.21) é um fator integrante do sistema (3.11).*

3.5 Teorema de Bautin

Estamos agora em condições de apresentar um belo resultado conhecido como teorema de Bautin. Para a prova deste teorema necessitamos do conhecimento da teoria das bases de Groebner. Referências para este assunto podem ser encontradas por exemplo em [7] e [22]. Denotaremos a partir de agora por \mathbb{F} os conjuntos \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Definição 3.5.1. *O ideal $\mathcal{B} = \langle L_1, L_2, \dots \rangle$ gerado pelas quantidades focais é chamado de ideal de Bautin.*

Definição 3.5.2. *A variedade do ideal de Bautin $V(\mathcal{B})$ é chamada de variedade central do sistema.*

Corolário 3.5.1. *Toda sequência de ideais $I_1 \subset I_2 \dots$ em um anel de polinômios sobre um corpo \mathbb{F} se estabiliza. Isto é, existe $m \geq 1$ tal que para cada $j \geq m$ $I_j = I_m$.*

Demonstração: Seja $I_1 \subset I_2 \dots$ uma sequência de ideais crescente em $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ e seja $I = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$. Claramente I é um ideal em $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$.

Pelo teorema da base de Hilbert existem f_1, \dots, f_s em $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ tais que

$$I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle.$$

Escolha qualquer $n \in \mathbb{N}$ tal que $F = \{f_1, \dots, f_s\} \subset I_n$ e suponha que $g \in I_p$ para algum $p \geq n$. Uma vez que $g \in I$ e F é uma base para I , então existem $h_1, \dots, h_s \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ tais que

$$g = h_1 f_1 + h_2 f_2 + \dots + h_s f_s.$$

Portanto, $g \in I_n$ o que implica que $F \subset I_n$ e I_n é um ideal.

Assim $I_p \subset I_n$, como a sequência é crescente segue que $I_p = I_n \forall p \geq n, p \in \mathbb{N}$. ■

Na proposição seguinte, iremos considerar um sistema planar quadrático e colocá-lo na forma "canônica" para simplificar a demonstração do teorema de Bautin.

Proposição 3.5.1. *Considere o sistema polinomial planar quadrático com uma singularidade isolada na origem dado por,*

$$\begin{cases} x' = a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \\ y' = b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2. \end{cases} \quad (3.22)$$

onde $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$ para $i, j = 0, 1, 2$ e $(a_{10} - b_{01})^2 + 4a_{01}b_{10} < 0$. Então através de uma mudança de variável e um escalonamento no tempo podemos considerá-lo da seguinte forma:

$$\begin{cases} x' = \lambda_1 x - y - \lambda_3 x^2 + (2\lambda_2 + \lambda_5)xy + \lambda_6 y^2, \\ y' = \lambda_1 y + x + \lambda_2 x^2 + (2\lambda_3 + \lambda_4)xy - \lambda_2 y^2, \end{cases}$$

Demonstração: Considere o sistema (3.22) com a seguinte hipótese

$$(a_{10} - b_{01})^2 + 4a_{01}b_{10} < 0. \quad (3.23)$$

É fácil ver que a origem é um ponto singular do sistema (3.22). Por outro lado, a condição (3.23) nos fornece que a parte linear do sistema (3.22) tem autovalores complexos conjugados $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \beta \neq 0$. Deste modo, efetuando uma mudança de coordenadas do tipo homotetia-rotação

$$\begin{cases} x = h\zeta + k\eta, \\ y = -k\zeta + h\eta, \end{cases}$$

os termos de primeiro grau do sistema permanecem invariantes. O sistema então assume a seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \alpha x - \beta y + A_{20}x^2 + A_{11}xy + A_{02}y^2, \\ \frac{dy}{d\tau} = \beta x + \alpha y + B_{20}x^2 + B_{11}xy + B_{02}y^2, \end{cases}$$

É possível escolher h e k tais que $B_{20} + B_{02} = 0$, a menos que $B_{20} + B_{02} = A_{20} + A_{02} = 0$, de tal forma que o sistema finalmente pode ser escrito como

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda_1 x - y - \lambda_3 x^2 + (2\lambda_2 + \lambda_5)xy + \lambda_6 y^2, \\ \frac{dy}{dt} = \lambda_1 y + x + \lambda_2 x^2 + (2\lambda_3 + \lambda_4)xy - \lambda_2 y^2, \end{cases}$$

onde $\beta\tau = t, \lambda_1 = \frac{\alpha}{\beta}, \beta \neq 0$ por (3.23). Os coeficientes λ_4, λ_5 são introduzidos na equação da forma dada para simplificar as condições para um centro na origem. ■

Definição 3.5.3. *O sistema*

$$\begin{cases} x' = \lambda_1 x - y - \lambda_3 x^2 + (2\lambda_2 + \lambda_5)xy + \lambda_6 y^2, \\ y' = \lambda_1 y + x + \lambda_2 x^2 + (2\lambda_3 + \lambda_4)xy - \lambda_2 y^2, \end{cases}$$

onde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ são as variáveis de estado e $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6) \in \mathbb{R}^6$ são parâmetros reais é chamado de **sistema de Bautin**.

Estamos agora em condições de enunciar e demonstrar o teorema de Bautin.

Teorema 3.5.1. (Teorema de Bautin)

O sistema de Bautin

$$\begin{cases} x' = \lambda_1 x - y - \lambda_3 x^2 + (2\lambda_2 + \lambda_5)xy + \lambda_6 y^2, \\ y' = \lambda_1 y + x + \lambda_2 x^2 + (2\lambda_3 + \lambda_4)xy - \lambda_2 y^2, \end{cases} \quad (3.24)$$

com $\lambda_1 = 0$, tem a origem como um centro se, e somente se, uma das seguintes condições é satisfeita:

- i) $\lambda_4 = 0$ e $\lambda_5 = 0$;
- ii) $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_5 = 0$;
- iii) $\lambda_3 = \lambda_6$;
- iv) $\lambda_5 = \lambda_4 + 5(\lambda_3 - \lambda_6) = \lambda_3\lambda_6 - \lambda_2^2 - 2\lambda_6^2 = 0$.

Demonstração: De agora em diante vamos nos referir ao sistema de Bautin tomando $\lambda_1 = 0$, pois caso contrário, temos um foco.

Sabemos que a variedade central $\mathbf{V}(\mathcal{B})$ do ideal de Bautin $\mathcal{B} = \langle L_1, L_2, \dots \rangle$ está bem definida mesmo que os coeficientes de Lyapunov não sejam necessariamente únicos. Pelo teorema da base de Hilbert existe um inteiro m tal que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_m = \langle L_1, L_2, \dots, L_m \rangle = \mathcal{B}$. Nosso trabalho agora é encontrar o valor de m .

Vamos calcular os coeficientes de Lyapunov L_1, L_2, \dots até que a cadeia de variedades

$$\mathbf{V}(\mathcal{B}_1) \supset \mathbf{V}(\mathcal{B}_2) \supset \mathbf{V}(\mathcal{B}_3) \supset \dots$$

se estabilize, isto é, encontrar k_0 tal que $\mathbf{V}(\mathcal{B}_{k_0}) = \mathbf{V}(\mathcal{B}_{k_0+1})$. Então com isto temos que mostrar que

$$\mathbf{V}(\mathcal{B}) = \mathbf{V}(\mathcal{B}_{k_0}).$$

Observamos que neste caso $k_0 = 3$. Uma inclusão é trivial, ou seja, $\mathbf{V}(\mathcal{B}) \subset \mathbf{V}(\mathcal{B}_3)$. Para mostrarmos que as variedades são iguais basta mostrarmos que

$$\mathbf{V}(\mathcal{B}) \supset \mathbf{V}(\mathcal{B}_3).$$

Para isto, calculamos no Exemplo 3.10 os três primeiros coeficientes de Lyapunov. Com esses coeficientes em mãos, calculamos a base de Groebner do ideal gerado por eles. Em resumo, temos que a base de Groebner deste ideal é gerado pelos seguintes polinômios, que também chamaremos de L_1, L_2 e L_3 , dados por

- 1) $L_1 = -\lambda_5(\lambda_3 - \lambda_6)$,
- 2) $L_2 = \lambda_2\lambda_4(\lambda_3 - \lambda_6)(\lambda_4 + 5\lambda_3 - 5\lambda_6)$,
- 3) $L_3 = -\lambda_2\lambda_4(\lambda_3 - \lambda_6)^2(\lambda_3\lambda_6 - \lambda_2^2 - 2\lambda_6^2)$.

Vamos mostrar que todos coeficientes em $\mathbf{V}(\mathcal{B}_3) = \mathbf{V}(\langle L_1, L_2, L_3 \rangle)$, isto é, as condições sobre os parâmetros do sistema (3.24) em que $L_1 = L_2 = L_3 = 0$, tem a origem como centro, desta forma $\mathbf{V}(\mathcal{B}_3) \subset \mathbf{V}(\mathcal{B})$. Desta forma temos os seguintes casos a considerar:

Caso A $\lambda_4 = \lambda_5 = 0$.

Substituindo esses valores dos parâmetros no sistema (3.24) obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} x' = -y - \lambda_3x^2 + 2\lambda_2xy + \lambda_6y^2, \\ y' = x + \lambda_2x^2 + 2\lambda_3xy - \lambda_2y^2. \end{cases} \quad (3.25)$$

Tal sistema é um sistema Hamiltoniano com a seguinte Hamiltoniana

$$H(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{\lambda_2x^3}{3} - \frac{\lambda_6y^3}{3} - \lambda_2xy^2 + \lambda_3x^2y.$$

Portanto, pelo Teorema 3.4.1, a origem do sistema (3.25) é um centro.

Caso B $\lambda_2 = \lambda_5 = 0$.

Com esses valores dos parâmetros o sistema (3.24) se torna

$$\begin{cases} x' = -y - \lambda_3x^2 + \lambda_6y^2, \\ y' = x + (2\lambda_3 + \lambda_4)xy. \end{cases} \quad (3.26)$$

Defina $R(x, y) = (-x, y)$ e seja $\mathcal{X}(x, y)$ o campo associado ao sistema (3.26), então temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(R(x, y)) &= (-x', y') \\ &= (y + \lambda_3x^2 - \lambda_6y^2, x + (2\lambda_3 + \lambda_4)xy) \\ &= -(-y - \lambda_3x^2 + \lambda_6y^2, -x - (2\lambda_3 + \lambda_4)xy) \\ &= -\mathcal{X}(R(x, y)). \end{aligned}$$

Portanto, temos que o sistema (3.26) é do tipo tempo-reversível, logo pelo Teorema 3.4.2, a origem do sistema (3.26) é um centro.

Caso C $\lambda_3 = \lambda_6$.

Substituindo esses valores dos parâmetros no sistema (3.24) obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} x' = -y - \lambda_3 x^2 + (2\lambda_2 + \lambda_5)xy + \lambda_3 y^2, \\ y' = x + \lambda_2 x^2 + (2\lambda_3 + \lambda_4)xy - \lambda_2 y^2. \end{cases} \quad (3.27)$$

Rotacionando os eixos de coordenadas por um ângulo φ , obteremos um novo sistema de coordenadas, onde o coeficiente A de x^2 da equação de y' do sistema (3.27), no novo sistema é dado por

$$A(\varphi) = \lambda_2 \cos^2(\varphi) + (3\lambda_3 + \lambda_4) \cos^2(\varphi) \sin(\varphi) + (-3\lambda_2 - \lambda_5) \sin^2(\varphi) \cos(\varphi) - \lambda_3 \sin^3(\varphi).$$

Queremos encontrar φ tal que $A(\varphi)$ se anule. Analisaremos o caso em que $\cos(\varphi) \neq 0$.

Dividindo $A(\varphi)$ por $\cos^3(\varphi)$ obtemos

$$A(\varphi) = \lambda_2 + (3\lambda_3 + \lambda_4) \tan(\varphi) + (-3\lambda_2 - \lambda_5) \tan^2(\varphi) - \lambda_3 \tan^3(\varphi). \quad (3.28)$$

Assim, teremos pelo menos uma raiz real satisfazendo (3.28). Logo, sempre podemos escolher φ tal que $A(\varphi) = 0$. Portanto, se $\lambda_2 \neq 0$ podemos encontrar φ tal que $A(\varphi) = 0$. Desta forma vamos assumir que $\lambda_2 = 0$ e conseqüentemente $\lambda_5 \neq 0$, pois caso contrário estaríamos no Caso B. Portanto podemos considerar o seguinte sistema (continuaremos a usar x e y como variáveis)

$$\begin{cases} x' = -y - \lambda_3 x^2 + \lambda_5 xy + \lambda_3 y^2, \\ y' = x + (2\lambda_3 + \lambda_4)xy. \end{cases} \quad (3.29)$$

As curvas $f_1(x, y) = 0$ e $f_2(x, y) = 0$ são curvas algébricas invariantes do sistema (3.29), onde

$$f_1(x, y) = 1 + (2\lambda_3 + \lambda_4)y \quad \text{e} \quad f_2(x, y) = (1 - \lambda_3 y)^2 - \lambda_5(1 - \lambda_3 y)x - \lambda_3(3\lambda_3 + \lambda_4)x^2$$

com os respectivos cofatores

$$K_1(x, y) = (2\lambda_3 + \lambda_4)x, \quad \text{com} \quad (2\lambda_3 + \lambda_4) \neq 0 \quad \text{e} \quad K_2(x, y) = -2\lambda_3 x + \lambda_5 y. \quad (3.30)$$

Observe que calculando a divergência do campo temos que ela é igual a $-K_1 - K_2$, assim pelo Teorema de Darboux 3.4.3 (ii) obtemos um fator integrante dado por

$$I(x, y) = f_1^{-1} f_2^{-1} = \frac{1}{(1 + (2\lambda_3 + \lambda_4)y)(1 - \lambda_5 x - 2\lambda_3 y - \lambda_3(3\lambda_3 + \lambda_4)x^2 + \lambda_3^2 y^2 + \lambda_3 \lambda_5 xy)}.$$

Portanto, segue da Proposição 3.4.3 que uma integral primeira para o sistema (3.29) associada ao fator integrante I é da forma

$$H(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\ln(1 - \lambda_5 x - 2\lambda_3 y - \lambda_3(3\lambda_3 + \lambda_4)x^2 + \lambda_3^2 y^2 + \lambda_3 \lambda_5 xy)}{\lambda_3(3\lambda_3 + \lambda_4)} - \frac{\operatorname{arctanh}\left(\frac{-2\lambda_3 + 2\lambda_3^2 y + \lambda_5 \lambda_3 x}{\sqrt{12\lambda_3^4 x^2 + 4\lambda_3^3 \lambda_4 x^2 + \lambda_5^2 \lambda_3^2 x^2}}\right) \lambda_5}{(3\lambda_3 + \lambda_4) \sqrt{12\lambda_3^4 + 4\lambda_3^3 \lambda_4 + \lambda_5^2 \lambda_3^2}} + \frac{\ln(1 + 2\lambda_3 y + \lambda_4 y)}{(3\lambda_3 + \lambda_4)(2\lambda_3 + \lambda_4)}.$$

Segue então do Teorema 3.4.1 que a origem é um centro.

Para completar a prova do Caso C temos que analisar a equação (3.30), quando $(2\lambda_3 + \lambda_4) = 0$. Neste caso f_1 não é uma curva algébrica para o sistema (3.29), mas olhando para a divergência do campo associado ao sistema podemos ver que é igual ao cofator $-K_2$, sendo assim, podemos definir um fator integrante do sistema (3.29) dado por

$$I(x, y) = f_2^{-1} = \frac{1}{(1 - \lambda_5 x - 2\lambda_3 y - \lambda_3^2 x^2 + \lambda_3^2 y^2 + \lambda_3 \lambda_5 xy)}.$$

Portanto, pela Proposição 3.4.3, podemos definir um integral primeira para o sistema (3.29) associado ao fator integrante I da forma

$$H(x, y) = \frac{y}{\lambda_3} + \frac{1}{2} \frac{\ln(1 - \lambda_5 x - 2\lambda_3 y - \lambda_3^2 x^2 + \lambda_3^2 y^2 + \lambda_3 \lambda_5 xy)}{\lambda_3^2} - \frac{\operatorname{arctanh}\left(\frac{-2\lambda_3 + 2\lambda_3^2 y + \lambda_5 \lambda_3 x}{\sqrt{4\lambda_3^4 x^2 + \lambda_5^2 \lambda_3^2 x^2}}\right) \lambda_5}{\lambda_3 \sqrt{4\lambda_3^4 + \lambda_5^2 \lambda_3^2}},$$

que está definida na origem e novamente pelo Teorema 3.4.1 temos que a origem é um centro.

Vamos para o último caso.

Caso D $\lambda_5 = 0, \lambda_4 = -5(\lambda_3 - \lambda_6)$ e $\lambda_3 \lambda_6 - \lambda_2^2 - 2\lambda_6^2 = 0$.

Neste caso iremos considerar dois subcasos, quando $\lambda_6 = 0$ e quando $\lambda_6 \neq 0$:

Caso D1 $\lambda_6 = 0$.

Neste caso temos $\lambda_6 = \lambda_5 = \lambda_2 = 0$ e $\lambda_4 = -5\lambda_3$. Substituindo esses valores dos parâmetros no sistema (3.24) obtemos o novo sistema.

$$\begin{cases} x' = -y - \lambda_3 x^2, \\ y' = x - 3\lambda_3 xy. \end{cases} \quad (3.31)$$

Defina $R(x, y) = (-x, y)$ e seja $\mathcal{X}(x, y)$ o campo associado ao sistema (3.31), então temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(R(x, y)) &= (-x', y') \\ &= (y + \lambda_3 x^2, x - 3\lambda_3 xy) \\ &= -(-y - \lambda_3 x^2, -x + 3\lambda_3 xy) \\ &= -\mathcal{X}(R(x, y)). \end{aligned}$$

Portanto, temos que o sistema (3.31) é do tipo tempo-reversível, logo pelo Teorema 3.4.2, a origem do sistema (3.31) é um centro.

Caso D2 $\lambda_6 \neq 0$.

Neste caso temos que $\lambda_5 = 0$, $\lambda_4 = -5(\lambda_3 - \lambda_6)$ e $\lambda_3 = (\lambda_2^2 + 2\lambda_6^2)/\lambda_6$. Substituindo esses valores de parâmetros no sistema (3.24) obtemos o novo sistema.

$$\begin{cases} x' = -y - \left(\frac{\lambda_2^2 + 2\lambda_6}{\lambda_6}\right)x^2 + 2\lambda_2 xy + \lambda_6 y^2, \\ y' = x + \lambda_2 x^2 - \left(\frac{3\lambda_2^2 + \lambda_6^2}{\lambda_6}\right)xy - \lambda_2 y^2. \end{cases} \quad (3.32)$$

Este sistema tem uma curva algébrica invariante

$$f_1(x, y) = (\lambda_2^2 + \lambda_6^2)((-\lambda_6 y - \lambda_2 x)^2 - 2\lambda_6 y) + \lambda_6^2$$

com o cofator

$$K_1(x, y) = \frac{2(\lambda_2^2 + \lambda_6^2)}{-\lambda_6}x.$$

Assim observando que a divergência do campo é igual a $-\frac{5}{2}K_1$ temos pelo Teorema de Darboux 3.4.3 (ii) que o fator integrante do sistema é dado por

$$I(x, y) = f_1^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{((\lambda_2^2 + \lambda_6^2)((-\lambda_6 y - \lambda_2 x)^2 - 2\lambda_6 y) + \lambda_6^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Portanto, pela Proposição 3.4.3 podemos definir um integral primeira para o sistema (3.32) associado ao fator integrante da forma

$$\begin{aligned} H(x, y) &= -\frac{1}{3} \frac{-\lambda_6^2 + (3\lambda_2^2 \lambda_6 + 3\lambda_6^3)y + (-3\lambda_6^4 - 3\lambda_2^2 \lambda_6^2)y^2 + (-3\lambda_6^3 \lambda_2 - 3\lambda_2^3 \lambda_6)xy + (3\lambda_6^3 \lambda_2^2 + 3\lambda_2^4 \lambda_6)yx^2}{\lambda_6^2 \lambda_2^2 (\lambda_2^2 + \lambda_6^2) (\lambda_2^2 \lambda_6^2 y^2 + 2\lambda_2^3 \lambda_6 yx + \lambda_2^4 x^2 - 2\lambda_2^2 \lambda_6 y + \lambda_6^4 y^2 + 2\lambda_6^3 y \lambda_2 x + \lambda_6^2 \lambda_2^2 x^2 - 2\lambda_6^3 y + \lambda_6^2)^{3/2}} \\ &\quad + \frac{(3\lambda_6^2 \lambda_2^3 + 3\lambda_6^4 \lambda_2)xy^2 + (\lambda_6^2 \lambda_2^3 + \lambda_6^5)x^3 + (\lambda_6^3 \lambda_2^2 + \lambda_6^5)y^3}{\lambda_6^2 \lambda_2^2 (\lambda_2^2 + \lambda_6^2) (\lambda_2^2 \lambda_6^2 y^2 + 2\lambda_2^3 \lambda_6 yx + \lambda_2^4 x^2 - 2\lambda_2^2 \lambda_6 y + \lambda_6^4 y^2 + 2\lambda_6^3 y \lambda_2 x + \lambda_6^2 \lambda_2^2 x^2 - 2\lambda_6^3 y + \lambda_6^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

cuja expansão de Taylor na origem (depois de uma mudança de coordenadas adequada) tem a forma

$$H(x, y) = x^2 + y^2 + \dots$$

Logo pelo Teorema 3.4.1, a origem é um centro.

■

3.6 Ciclicidade

Nesta seção apresentaremos um resultado sobre a ordem de ciclicidade para equilíbrios de sistemas quadráticos.

Definição 3.6.1. *Consideremos o sistema quadrático planar*

$$\begin{cases} x' = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \\ y' = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2, \end{cases} \quad (3.33)$$

satisfazendo as condições $a_{10}b_{01} - a_{01}b_{10} > 0$ e $a_{10} + b_{01} = 0$.

*O ponto de equilíbrio $(0, 0)$ possui **ciclicidade** de ordem m , $m \geq 0$, com relação a um ponto P do espaço de coeficientes $(a_{ik}, b_{ik}); 1 \leq i + k \leq 2$, se:*

- a) *é possível encontramos números $\varepsilon_0 > 0$ e $\delta_0 > 0$ tais que numa ε_0 -vizinhança do ponto P , não exista nenhum ponto de modo que o sistema (3.33) possua mais do que m ciclos limites numa δ_0 -vizinhança da origem no plano xy ;*
- b) *para qualquer escolha de números positivos $\varepsilon < \varepsilon_0$ e $\delta < \delta_0$, é sempre possível encontrar um ponto numa ε -vizinhança do ponto P , de modo que o sistema (3.33) possua m ciclos limites numa δ -vizinhança da origem.*

Proposição 3.6.1. *O Ideal \mathcal{B}_3 do sistema de Bautin é um ideal radical.*

Demonstração: A prova desta proposição pode ser encontrada em [22], página 270 .

■

Observação 3.6.1. *Temos que os coeficientes de Lyapunov obtidos de um sistema real e os coeficientes de Lyapunov obtidos de um sistema complexo podem ser muito diferentes um do outro, porém eles definem a mesma variedade.*

Apresentaremos agora um resultado sobre a ordem da ciclicidade do sistema de Bautin. Este resultado também é uma contribuição do matemático Bautin.

Teorema 3.6.1. *Se um campo quadrático planar possui um ponto de equilíbrio do tipo foco ou centro, então fazendo pequenas variações dos seus coeficientes o campo pode produzir não mais do que três ciclos limites em uma vizinhança deste ponto. Há posições de*

equilíbrio em que a ordem de ciclicidade com respeito ao espaço de coeficientes (a_{ik}, b_{ik}) é zero, um, dois ou três.

Demonstração: Pela Proposição 3.5.1 podemos tomar o sistema quadrático planar na forma de Bautin. Pelo teorema de Bautin temos que

$$\mathbf{V}(\mathcal{B}) = \mathbf{V}(\mathcal{B}_3). \quad (3.34)$$

Assim para mostrar que a ciclicidade do sistema (3.33) é no máximo 3 basta mostrarmos que

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_3.$$

É trivial ver que $\mathcal{B}_3 \subset \mathcal{B}$. Assim, resta mostrar que $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_3$. Para esta afirmação necessitamos mostrar que

$$L_k |_{\mathbf{V}(\mathcal{B}_3)} = 0 \quad \forall k.$$

Pelo teorema forte de Nullstellensatz temos que

$$I(\mathbf{V}(\mathcal{B}_3)) = \sqrt{\mathcal{B}_3},$$

onde $\sqrt{\mathcal{B}_3}$ significa o radical do ideal \mathcal{B}_3 . Portanto segue de (3.34) que

$$I(\mathbf{V}(\mathcal{B})) = I(\mathbf{V}(\mathcal{B}_3)) = \sqrt{\mathcal{B}_3}. \quad (3.35)$$

Por outro lado aplicando novamente o teorema forte de Nullstellensatz temos que

$$I(\mathbf{V}(\mathcal{B})) = \sqrt{\mathcal{B}}. \quad (3.36)$$

Logo por (3.35) e (3.36) temos que

$$\sqrt{\mathcal{B}} = \sqrt{\mathcal{B}_3}.$$

Como \mathcal{B}_3 é radical segue que

$$\sqrt{\mathcal{B}} = \sqrt{\mathcal{B}_3} = \mathcal{B}_3.$$

Notemos agora que $\mathcal{B} \subset \sqrt{\mathcal{B}}$, pois se $f \in \mathcal{B}$ então basta tomar $p = 1$ e teremos $f^1 \in \mathcal{B}$. Desta forma

$$\mathcal{B} \subset \sqrt{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_3.$$

Portanto, $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_3$ concluindo que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_3$, o que completa a prova. ■

Observação 3.6.2. *O fato do ideal \mathcal{B}_3 ser radical é essencial na prova do Teorema 3.6.1. Um teorema mais geral do que Teorema 3.6.1 pode ser encontrado em [22], página 268.*

Apresentaremos agora alguns exemplos interessantes para evidenciar a importância do ideal de Bautin ser radical. Para uma discussão sobre a ciclicidade dos focos em determinadas famílias e o papel da radicalidade do ideal formado pelas constantes de Lyapunov recomendamos a referência [22].

O primeiro exemplo que apresentaremos é o sistema de Liénard dado pelo sistema

$$\mathcal{X} = \begin{cases} x' = y - f(x), \\ y' = -x, \end{cases} \quad (3.37)$$

onde f é um polinômio de grau $2n + 1$ ou $2n + 2$. Mais especificamente, $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_dx^d$, com $d = 2n + 1$ ou $d = 2n + 2$.

O teorema a seguir apresenta os coeficientes de Lyapunov para o sistema (3.37).

Teorema 3.6.2. *Considere o sistema (3.37). Então,*

$$L_k = -a_{2k+1},$$

para $k = 0, 1, \dots, n$. Além disso, o conjunto $\{-a_1, -a_3, \dots, -a_{2n+1}\}$ é uma base focal.

A prova deste teorema pode ser encontrada em [3]. De posse dos coeficientes de Lyapunov do sistema, é fácil ver que o ideal

$$\langle L_1, L_2, \dots, L_n \rangle = \langle -a_1, -a_3, \dots, -a_{2n+1} \rangle$$

é um ideal radical. Assim, é de se esperar que a ciclicidade do sistema (3.37) seja no máximo n . Isto é confirmado no teorema abaixo, cuja prova também pode ser encontrada em [3].

Teorema 3.6.3. *Considere o sistema (3.37). Então:*

- a) *A ciclicidade do sistema é no máximo n .*
- b) *Se $a_1, a_3, \dots, a_{2n+1}$ são escolhidos de forma que*

$$a_{2k-1}a_{2k+1} < 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3.38)$$

e

$$|a_1| \ll |a_3| \ll \dots \ll |a_{2n+1}| \quad (3.39)$$

então existem n ciclos limites de pequenas amplitudes.

Exemplo 3.6.1. *O sistema*

$$\begin{cases} x' = y + x - 12x^3 + 25x^5, \\ y' = -x, \end{cases} \quad (3.40)$$

apresenta dois ciclos limites que podem ser vistos na Figura 3.1.

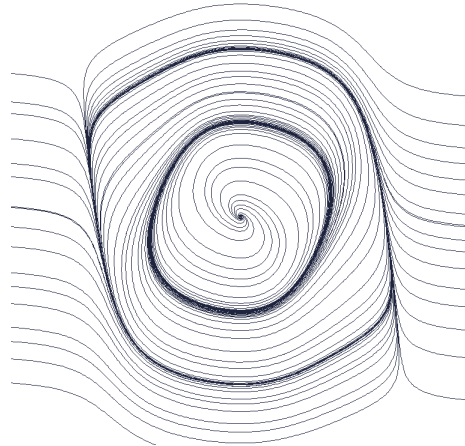


Figura 3.1: Dois ciclos limites do sistema (3.40).

A Figura 3.1 foi gerada no programa ODEinR2. Este programa pode ser obtido em [19].

O próximo exemplo foi retirado de [12] e apresenta um resultado surpreendente pois, usualmente, para obter muitos ciclos limites precisamos estudar equações diferenciais com ponto singular muito degenerado. Do contrário o sistema (3.41) tem o primeiro coeficiente de Lyapunov como o maior coeficiente de Lyapunov não nulo.

Teorema 3.6.4. *Consideremos a seguinte família de sistemas diferenciais a 1-parâmetro*

$$\begin{cases} x' = -y + a^k x(x^2 + y^2) + aP(x, y), \\ y' = x + a^k y(x^2 + y^2) + aQ(x, y), \end{cases} \quad (3.41)$$

onde P e Q são funções analíticas cujo desenvolvimento de Taylor na origem começa pelo menos com grau 4 em x e y , e $k \geq 1$ é um número inteiro. Então:

i) *O primeiro coeficiente de Lyapunov é dado por*

$$L_1 = a^k$$

e a origem é um centro se, e somente se, $a = 0$.

ii) *A ciclicidade da origem é no máximo $(k - 1)$ e existem funções analíticas P e Q , para os quais este limite é atingido.*

Demonstração: Faremos somente a prova do item (i). A demonstração do item (ii) pode ser encontrada em [12].

(i) Definindo o campo vetorial associado ao sistema (3.41) por \mathcal{X} e tomando simplesmente

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

obtemos que

$$\dot{V} = \nabla V \cdot \mathcal{X} = \eta_4(x^2 + y^2)^2 + \dots$$

onde $\eta_4 = L_1 = a^k$. ■

Normalmente, a alta ciclicidade de um ponto crítico é uma conseqüência da existência de focos fracos de ordem alta no sistema. No entanto, no sistema (3.41), a alta ciclicidade é causada pelo fato de que a única constante de Lyapunov significativa, $L_1 = a^k$ é tal que o ideal gerado por L_1 está longe de ser radical.

Capítulo 4

Existência de Centro em \mathbb{R}^3 Sobre uma Variedade Central

Neste capítulo exploraremos o problema foco–centro para pontos de Hopf de sistemas analíticos em \mathbb{R}^3 . Uma solução clássica deste problema é dada pelo Teorema Poincaré–Lyapunov. Aqui, apresentaremos uma nova solução para o problema foco–centro dada em termos de múltiplos de Jacobi inverso, o qual pode ser visto como um resultado análogo em \mathbb{R}^3 ao Critério de Reeb. Referências para este capítulo podem ser encontradas em [4] e [11].

4.1 Pontos de Hopf

Consideremos a equação diferencial

$$\dot{x} = f(x, \mu) \quad f \in C^\infty, \quad (4.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^3$ e $\mu \in \mathbb{R}^n$ são, respectivamente, as variáveis de estado e parâmetros. Assuma que f seja de classe C^∞ em $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^n$. Suponha que (4.1) tenha um ponto de equilíbrio $x = x_0$ quando $\mu = \mu_0$ e denotando a variável $x - x_0$ também por x , escrevemos

$$F(x) = f(x, \mu_0).$$

Suponha ainda que (x_0, μ_0) seja um ponto de equilíbrio de (4.1), onde a matriz Jacobiana

$$A = Df(x_0, \mu_0)$$

possui um par de autovalores imaginários puros

$$\lambda_{2,3} = \pm i\omega_0, \quad \omega_0 > 0,$$

e o outro autovalor $\lambda_1 \neq 0$. Seja E^c o auto espaço gerado pelos autovalores $\lambda_{2,3}$ da matriz A . Isto significa que E^c é um subespaço não vazio invariante por A gerado pelos autovetores associados aos autovalores $\lambda_{2,3}$.

Definição 4.1.1. *O ponto de equilíbrio (x_0, μ_0) do sistema (4.1) é chamado **ponto de Hopf**.*

Definição 4.1.2. *Um **ponto de Hopf de codimensão 1** é um ponto de equilíbrio (x_0, μ_0) tal que a parte linear do campo vetorial f possui autovalores $\lambda_2 = \lambda$ e $\lambda_3 = \bar{\lambda}$ com*

$$\lambda = \lambda(\mu) = \gamma(\mu) + i\eta(\mu),$$

$\gamma(\mu_0) = 0$, $\eta(\mu_0) = \omega_0 > 0$, o outro autovalor $\lambda_1(\mu)$ com

$$\lambda_1(\mu_0) \neq 0$$

e o primeiro coeficiente de Lyapunov, $L_1(\mu_0)$, é diferente de zero.

Definição 4.1.3. *Um ponto de Hopf **transversal** é um ponto de Hopf de codimensão 1 no qual os autovalores complexos dependentes do parâmetro μ , interceptam o eixo imaginário com derivadas não nulas quando $\mu = \mu_0$.*

Definição 4.1.4. *Um **ponto de Hopf de codimensão 2** é um ponto de equilíbrio (x_0, y_0) de f que satisfaz a definição de ponto de Hopf de codimensão 1, exceto para $L_1(\mu_0) = 0$, e com a condição adicional de que o segundo coeficiente de Lyapunov, $L_2(\mu_0)$, é não nulo. Este ponto é transversal se os conjuntos $\gamma^{-1}(0)$ e $L_1^{-1}(0)$ possuem intersecção transversal.*

Definição 4.1.5. *Um **ponto de Hopf de codimensão 3** é um ponto de Hopf de codimensão 2 onde, $L_2(\mu_0) = 0$, mas $L_3(\mu_0) \neq 0$. Um ponto de Hopf de codimensão 3 é chamado **transversal** se os conjuntos $\gamma^{-1}(0)$, $L_1^{-1}(0)$ e $L_2^{-1}(0)$ se interceptam transversalmente.*

O próximo teorema nos permitirá entender o problema foco-centro em \mathbb{R}^3 restrito a uma variedade central local, visto que, sobre a variedade central local, a equação diferencial

se comporta como no plano. Mais precisamente, o teorema da variedade central local garante a existência de uma variedade invariante bidimensional W^c , numa vizinhança do ponto de Hopf (x_0, μ_0) que é tangente ao auto espaço central E^c em (x_0, μ_0) e contém todo o comportamento recorrente local do sistema (4.1).

Teorema 4.1.1. (Teorema da Variedade Central local) *Localmente, existe um conjunto invariante W^c de (4.1) que é tangente a E^c em (x_0, μ_0) . Tal conjunto é o gráfico de uma aplicação suave, cujas derivadas parciais de todas as ordens são unicamente determinadas. Se φ^t denota o fluxo associado a (4.1), então existe uma vizinhança \mathcal{U} de (x_0, μ_0) , tal que, se $\varphi^t(x) \in \mathcal{U}$ para todo $t \geq 0$ ($t \leq 0$), então $\varphi^t \rightarrow W^c(x_0, \mu_0)$ para $t \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow -\infty$).*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [16].

Definição 4.1.6. W^c é chamado de *variedade central local*.

Observação 4.1.1. i) W^c não é única. O sistema

$$\begin{cases} x' = -y - x(x^2 + y^2), \\ y' = x - y(x^2 + y^2), \\ z' = -z, \end{cases}$$

possui o ponto de equilíbrio $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, e a matriz Jacobiana do sistema na origem possui um autovalor real negativo e um par de autovalores imaginários puros

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_{2,3} = \pm i,$$

ou seja, o equilíbrio é do tipo Hopf. Neste exemplo, existe uma família de variedades centrais locais bidimensionais do sistema dadas por

$$W_\beta^c(0) = \{(x, y, z); z = \phi_\beta(x, y)\},$$

onde

$$\phi_\beta(x, y) = \begin{cases} \beta \exp\left(\frac{-1}{2(x^2+y^2)}\right), & \text{se } x^2 + y^2 > 0, \\ 0 & \text{se } x = y = 0. \end{cases}$$

- ii) Uma variedade central local W^c possui a mesma classe de diferenciabilidade (finita) de f (se $f \in C^k$ para algum k finito, W^c é também uma variedade de classe C^k) em alguma vizinhança \mathcal{U} de (x_0, μ_0) . Porém, quando $k \rightarrow \infty$, a vizinhança \mathcal{U} pode diminuir, podendo resultar na não existência de uma variedade W^c de classe C^∞ , para algum sistema C^∞ .

4.2 Múltiplos de Jacobi inverso em \mathbb{R}^3

Daremos agora algumas propriedades dos múltiplos de Jacobi inverso. Para maiores detalhes, recomendamos [4].

Consideremos o sistema diferencial polinomial real

$$\begin{cases} x' = P(x, y, z), \\ y' = Q(x, y, z), \\ z' = R(x, y, z), \end{cases} \quad (4.2)$$

onde P, Q e R são polinômios nas variáveis x, y e z com coeficientes reais e

$$m = \max\{\text{grau}(P), \text{grau}(Q), \text{grau}(R)\}$$

é o grau do sistema polinomial. Denotaremos o campo vetorial associado ao sistema (4.2) por

$$\mathcal{X}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)).$$

Definição 4.2.1. O sistema polinomial (4.2) é **integrável** em um aberto \mathcal{U} de \mathbb{C}^3 se existe uma função não constante $H : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$, chamada **integral primeira** do sistema em \mathcal{U} que é constante em todas as curvas soluções $(x(t), y(t), z(t))$ do sistema (4.2) contida em \mathcal{U} , isto é, $H(x(t), y(t), z(t)) = \text{constante}$ para todos os valores de t para a qual a solução $(x(t), y(t), z(t))$ esta definida e contida em \mathcal{U} . Claramente H é uma integral primeira para o sistema (4.2) em \mathcal{U} se, e somente se,

$$\mathcal{X}H = PH_x + QH_y + RH_z \equiv 0 \quad \text{em } \mathcal{U}.$$

Definição 4.2.2. Duas integrais primeiras H_1 e H_2 são ditas **independentes**, se seus gradientes são vetores linearmente independentes para todos os pontos $(x, y, z) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}^3$,

exceto num conjunto de medida nula. Se o sistema (4.2) possui duas integrais primeiras independentes, dizemos que ele é **totalmente integrável**.

Observação 4.2.1. i) Se o sistema (4.2) é totalmente integrável, então as órbitas do sistema estarão contidas nas curvas

$$\{(x, y, z) : H_1(x, y, z) = h_1\} \cap \{(x, y, z) : H_2(x, y, z) = h_2\},$$

onde h_1 e h_2 variam nas imagens de H_1 e H_2 . Daí, a importância de sabermos se um sistema é totalmente integrável.

ii) Se existe uma integral primeira para um sistema dado, qualquer função dela é também uma integral primeira.

Uma ferramenta clássica no estudo de sistemas diferenciais é o fator integrante inverso. Veremos que para os sistemas dinâmicos n -dimensionais, em particular, tridimensionais, os fatores integrantes inversos são chamados de múltiplos de Jacobi inverso.

Definição 4.2.3. Uma função não nula $V : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 , é dita ser o **múltiplo de Jacobi inverso** de \mathcal{X} , se ela satisfaz a EDP linear de primeira ordem

$$\mathcal{X}V = P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} + R \frac{\partial V}{\partial z} = V \operatorname{div} \mathcal{X}, \quad (4.3)$$

Observação 4.2.2. Da equação (4.3), temos que o gradiente da função V é ortogonal ao campo vetorial \mathcal{X} ao longo de $V^{-1}(0)$. Assim, \mathcal{X} é tangente a $V = 0$. Então, esta superfície contém as trajetórias do campo \mathcal{X} .

Outra ferramenta importante desta teoria é a superfície algébrica invariante, que é o análogo à curva algébrica invariante em \mathbb{R}^3 , a qual nos auxiliará na resolução do problema foco-centro em \mathbb{R}^3 .

Definição 4.2.4. Seja $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$, f não identicamente nula. A superfície algébrica $f = 0$ é uma **superfície algébrica invariante** para \mathcal{X} se para algum polinômio $K \in \mathbb{C}[x, y, z]$ temos

$$\mathcal{X}f = \frac{P \partial f}{\partial x} + \frac{Q \partial f}{\partial y} + \frac{R \partial f}{\partial z} = Kf.$$

O polinômio K é chamado **cofator** para a superfície algébrica invariante $f = 0$.

Nos pontos da superfície algébrica $f = 0$, o gradiente $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ de f é ortogonal ao campo vetorial $\mathcal{X} = (P, Q, R)$, portanto para cada ponto $f = 0$ o campo vetorial \mathcal{X} é tangente a $f = 0$, de modo que $f = 0$ é formado pela trajetória do campo vetorial \mathcal{X} . O que justifica o nome "superfície algébrica invariante" já que é invariante sobre o fluxo definido por \mathcal{X} .

4.3 O Problema foco–centro sobre a variedade central local em \mathbb{R}^3

Consideremos agora o sistema diferencial analítico real em \mathbb{R}^3 dado por

$$\begin{cases} x' = \tilde{P}(x, y, z), \\ y' = \tilde{Q}(x, y, z), \\ z' = \tilde{R}(x, y, z), \end{cases} \quad (4.4)$$

onde $\tilde{P}(x, y, z)$, $\tilde{Q}(x, y, z)$ e $\tilde{R}(x, y, z)$ são funções analíticas. Suponha que a origem $(0, 0, 0)$ seja um ponto singular isolado. Seja $\mathcal{X}(x, y, z) = (\tilde{P}(x, y, z), \tilde{Q}(x, y, z), \tilde{R}(x, y, z))$ o campo de vetores associado ao sistema (4.4). Suponha também que a matriz Jacobiana $J(0, 0, 0) = D\mathcal{X}(0, 0, 0)$ tenha um autovalor real não nulo e um par de autovalores complexos conjugados. Qualquer sistema analítico (ou polinomial) como (4.4) que tenha uma singularidade de Hopf, pode ser transformado (por uma mudança de coordenadas, uma translação e um escalonamento no tempo) no sistema

$$\begin{cases} x' = -y + P(x, y, z), \\ y' = x + Q(x, y, z), \\ z' = \lambda z + R(x, y, z) \end{cases} \quad (4.5)$$

onde $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $F = (P, Q, R) : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é real analítica em uma vizinhança da origem $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3$ onde $F(0) = 0$ e a matriz Jacobiana $DF(0) = 0$.

Denotaremos, de agora em diante, por \mathcal{X} , o campo vetorial associado do sistema (4.5)

$$\mathcal{X} = (-y + P(x, y, z), x + Q(x, y, z), \lambda z + R(x, y, z)).$$

Investigaremos a natureza do fluxo local numa vizinhança da origem restrito a uma variedade central local, \mathcal{W}^c , na origem. O problema foco–centro em \mathbb{R}^3 , grosseiramente

falando, é distinguir se a origem é um foco ou um centro sobre uma variedade central local. Neste sentido, o problema foco–centro para o sistema (4.5) pode ser visto como um problema bidimensional, pois coincide com o problema foco–centro restrito a uma variedade central local. Por esta razão apresentamos dois resultados clássicos para o problema foco–centro em \mathbb{R}^2 .

O primeiro é o clássico Teorema Poincaré-Lyapunov 3.4.1, o qual é dado em termos de uma integral primeira.

Teorema 4.3.1. (Teorema Poincaré-Lyapunov) *O sistema analítico planar*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + F_1(x, y), \\ \dot{y} = x + F_2(x, y), \end{cases} \quad (4.6)$$

onde F_1 e F_2 são funções analíticas com desenvolvimentos de Taylor na origem começando com pelo menos termos quadráticos, possui um centro na origem se, e somente se, admite uma integral primeira da forma

$$H(x, y) = x^2 + y^2 + \dots .$$

em uma vizinhança da origem em \mathbb{R}^2 .

O segundo é o Critério de Reeb o qual é dado em termos de um fator integrante inverso V .

Teorema 4.3.2. (Critério de Reeb) *O sistema (4.6) tem um centro na origem se, e somente se, admite um fator integrante inverso real analítico da forma $V(x, y) = 1 + \dots$ em uma vizinhança da origem em \mathbb{R}^2 .*

Portanto, se para o sistema (4.5) conhecermos a variedade central analítica local numa vizinhança da origem, o problema foco–centro possuirá uma resposta via adaptações dos teoremas acima.

Teorema 4.3.3. *A origem é um centro para o sistema (4.5) se, e somente se, o sistema admite um integral primeira local analítica da forma*

$$H(x, y, z) = x^2 + y^2 + \dots$$

em uma vizinhança da origem em \mathbb{R}^3 . Além disso, quando existir um centro, a variedade central local é única e analítica.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [2], capítulo 13.

O teorema seguinte pode ser considerado como um resultado análogo ao critério de Reeb em \mathbb{R}^3 .

Teorema 4.3.4. *O sistema (4.5) tem um centro na origem se, e somente se, admite um múltiplo de Jacobi inverso da forma*

$$V(x, y, z) = z + \dots$$

em uma vizinhança da origem em \mathbb{R}^3 . Além disso quando existir tal V a variedade central local analítica $W^c \subseteq V^{-1}(0)$.

Na seção seguinte apresentaremos algumas propriedades dos múltiplos de Jacobi inverso necessárias para o entendimento da prova da suficiência do Teorema 4.3.4, prova esta, que apresentaremos na seção 4.3.2.

4.3.1 Propriedades dos múltiplos de Jacobi inverso

Daremos aqui um procedimento para encontrar um fator integrante inverso não trivial para o sistema (4.5). Somente o próximo teorema é dado para campos de vetores suaves, os outros resultados desta seção diz respeito ao sistema (4.5).

Teorema 4.3.5. *Seja $\mathcal{X} = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$ um campo vetorial suave definido em um conjunto aberto $U \subseteq \mathbb{R}^3$. Assuma que exista um múltiplo de Jacobi inverso C^∞ da forma*

$$V(x, y, z) = (z - h(x, y))W(x, y, z)$$

onde $W(x, y, h(x, y)) \neq 0$. Então $M = \{(x, y, z) \in U; z = h(x, y)\}$ é uma variedade invariante de \mathcal{X} e $v(x, y) = W(x, y, h(x, y))$ é um fator integrante inverso restrito ao campo $\mathcal{X}|_M = (f_1(x, y, h(x, y)), f_2(x, y, h(x, y)))$.

Demonstração: Seja V um múltiplo de Jacobi inverso C^∞ da forma $V(x, y, z) = (z - h(x, y))W(x, y, z)$ onde $W(x, y, z) \neq 0$. Temos que

$$\mathcal{X}V = \operatorname{div}(\mathcal{X})V = V\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right) = (z - h(x, y))W(x, y, z)\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right). \quad (4.7)$$

Portanto, $V = 0$, define uma superfície invariante para \mathcal{X} . Observe que $F(x, y, z) = z - h(x, y) = 0$ e $W(x, y, z) = 0$ também são superfícies invariantes de \mathcal{X} e consequentemente existem cofatores associados $K(x, y, z)$ e $L(x, y, z)$ respectivamente. Logo $\mathcal{X}F = KF$ e $\mathcal{X}W = LW$. Como $F(x, y, z) = 0$ e $W(x, y, z) = 0$ são superfícies invariantes segue que $F(x, y, z)W(x, y, z) = 0$ também é uma superfície invariante com o seguinte cofator $K + L$, ou seja,

$$\mathcal{X}FW = (K + L)FW. \quad (4.8)$$

Logo por (4.7) e (4.8) temos

$$\operatorname{div}(\mathcal{X}) = K(x, y, z) + L(x, y, z).$$

Definindo a função $v(x, y, z) = W(x, y, h(x, y))$ e calculando a derivada temos

$$\begin{aligned} (\mathcal{X} |_M) v(x, y) &= f_1 \frac{\partial v}{\partial x} + f_2 \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= f_1 \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + f_2 \left(\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \quad \text{em } M. \end{aligned}$$

Avaliando $\mathcal{X}F = KF$ sobre M obtemos

$$f_1 \frac{\partial h}{\partial x} + f_2 \frac{\partial h}{\partial y} = f_3. \quad (4.9)$$

Portanto

$$\begin{aligned} (\mathcal{X} |_M) v &= f_1 \frac{\partial W}{\partial x} + f_1 \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial x} + f_2 \frac{\partial W}{\partial y} + f_2 \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial y} \\ &= f_1 \frac{\partial W}{\partial x} + f_2 \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \left(f_1 \frac{\partial h}{\partial x} + f_2 \frac{\partial h}{\partial y} \right) \\ &= f_1 \frac{\partial W}{\partial x} + f_2 \frac{\partial W}{\partial y} + f_3 \frac{\partial W}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Agora calculando $\mathcal{X}W = LW$ sobre M e usando as equações (4.9) e (4.10) temos

$$f_1 \frac{\partial W}{\partial x} + f_2 \frac{\partial W}{\partial y} + f_3 \frac{\partial W}{\partial z} = LW. \quad (4.11)$$

Das igualdades (4.10) e (4.11), obtemos

$$(\mathcal{X} |_M) v = LW = Lv. \quad (4.12)$$

Tomando a derivada com respeito a z em $\mathcal{X}F = KF$ e avaliando em M obtemos

$$-\frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = K \quad \text{em } M.$$

Como $K + L = \operatorname{div}(\mathcal{X})$ segue da igualdade acima que

$$L = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial y} = \operatorname{div}(\mathcal{X}|_M) \quad \text{em } M.$$

Logo por (4.12) temos

$$(\mathcal{X}|_M)v = Lv = \operatorname{div}(\mathcal{X}|_M)v.$$

Portanto, $v(x, y)$ é um fator integrante inverso restrito ao campo vetorial $\mathcal{X}|_M$. ■

Proposição 4.3.1. *Todo múltiplo de Jacobi inverso C^∞ local de (4.5) tem uma expressão*

$$V(x, y, z) = z(x^2 + y^2)^k + \dots$$

para algum $k \geq 0$.

Demonstração: Denotemos por V_m a maior ordem não nula do polinômio homogêneo de grau $m \geq 0$ na expansão de Taylor em torno da origem de algum V , múltiplo de Jacobi inverso C^∞ não-flat do sistema (4.5). Então V_m satisfaz a EDP de primeira ordem

$$-y \frac{\partial V_m}{\partial x} + x \frac{\partial V_m}{\partial y} + \lambda z \frac{\partial V_m}{\partial z} = \lambda V_m$$

cuja solução geral é

$$F(x^2 + y^2, ze^{\lambda \arctan(\frac{x}{|y|})}) e^{-\lambda \arctan(\frac{x}{|y|})}.$$

Portanto, como V_m é um polinômio, devemos ter $V_m = z(x^2 + y^2)^k$ onde $m = 2k + 1$. ■

A relação especial entre a variedade central local e o múltiplo de Jacobi inverso é parcialmente revelada no próximo resultado. Praticamente, quando a origem do sistema (4.5) é um centro, a situação é completamente compreendida, ou seja, qualquer múltiplo de Jacobi inverso C^∞ deve ser nulo sobre a variedade central local. Por outro lado, quando a origem é um foco, a situação é mais complicada e não abordaremos aqui.

Teorema 4.3.6. *Seja V um múltiplo de Jacobi inverso C^∞ local para o sistema (4.5) e $W^c = \{z = h(x, y)\}$ uma variedade central local C^∞ na origem. Considere a função restrita*

$$V|_{W^c}: (x, y) \mapsto V(x, y, h(x, y)).$$

Então temos as seguintes afirmações:

1. $V|_{W^c}$ é uma função flat na origem.
2. Quando $W^c \subseteq V^{-1}(0)$, ou seja $V|_{W^c} \equiv 0$, existe uma função $W(x, y, z) \in C^\infty$ tal que $W(x, y, h(x, y)) \neq 0$ e a seguinte fatoração ocorre

$$V(x, y, z) = (z - h(x, y))W(x, y, z).$$

Além disso, $v(x, y) = W|_{W^c} = W(x, y, h(x, y))$ é um fator integrante inverso para $\mathcal{X}|_{W^c}$.

3. No caso em que o sistema (4.5) tem um centro na origem devemos ter que $W^c \subseteq V^{-1}(0)$.

Demonstração: Prova do item (1). Como $W^c = \{z = h(x, y)\}$ é uma superfície invariante para o campo de vetores \mathcal{X} , definindo $T(x, y, z) = z - h(x, y)$ temos que $T = 0$ é uma superfície invariante, ou seja

$$\mathcal{X}T = KT$$

onde $K(x, y, z)$ é o cofator de T . Então temos a seguinte relação

$$(-y + P)\frac{\partial h}{\partial x} + (x + Q)\frac{\partial h}{\partial y} = (\lambda z + R) \quad \text{sobre } W^c. \quad (4.13)$$

Sabemos por hipótese que

$$\mathcal{X}V = \text{div}(\mathcal{X})V. \quad (4.14)$$

Assim por (4.13) e (4.14) temos que a função $u(x, y) = V(x, y, h(x, y))$ satisfaz a EDP de primeira ordem dada por

$$(-y + P)\frac{\partial u}{\partial x} + (x + Q)\frac{\partial u}{\partial y} = u(\lambda + \text{div}(F)) \quad \text{sobre } W^c. \quad (4.15)$$

fazendo $x = y = 0$ em (4.15) e tendo em conta que $\lambda \neq 0$ obtemos que

$$P(0, 0, z)\frac{\partial u(0, 0)}{\partial x} + Q(0, 0, z)\frac{\partial u(0, 0)}{\partial y} = u(0, 0)\left(\lambda\frac{\partial P(0, 0, z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(0, 0, z)}{\partial y} + \frac{\partial R(0, 0, z)}{\partial z}\right).$$

Portanto $u(0, 0) = 0$. De fato, se $u(x, y)$ não fosse flat, e denotemos $S_m(x, y)$ pela maior ordem do polinômio homogêneo não nulo de grau $m \geq 1$ na sua expansão em serie de

Taylor ao redor da origem.

Substituindo está serie de Taylor em (4.15) temos

$$-y \frac{\partial S_m}{\partial x} + x \frac{\partial S_m}{\partial y} + P \frac{\partial S_m}{\partial x} + Q \frac{\partial S_m}{\partial y} = \lambda S_m + S_m \frac{\partial P}{\partial x} + S_m \frac{\partial Q}{\partial y} + S_m \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Considerando apenas os termos de grau m temos

$$-y \frac{\partial S_m}{\partial x} + x \frac{\partial S_m}{\partial y} = \lambda S_m. \quad (4.16)$$

Tendo em conta que S_m é um polinômio homogêneo de grau m , temos que ele é também uma solução para a equação de Euler dada por

$$x \frac{\partial S_m}{\partial x} + y \frac{\partial S_m}{\partial y} = m S_m. \quad (4.17)$$

Multiplicando a equação (4.17) por $-\frac{\lambda}{m}$ e somando com (4.16) obtemos

$$(\lambda x + m y) \frac{\partial S_m}{\partial x} + (-m x + \lambda y) \frac{\partial S_m}{\partial y} = 0.$$

Assim, S_m é uma integral primeira polinomial para o seguinte sistema

$$\begin{cases} x' = \lambda x + m y, \\ y' = -m x + \lambda y \end{cases}$$

que tem um foco na origem, o que é impossível. Portanto temos uma contradição e provamos que a função $u = V|_{W^c}$ é uma função flat na origem.

Prova do item (2). Suponhamos primeiramente que a variedade central local da origem seja $W^c = \{z = 0\}$. Assim, por hipótese temos que $V(x, y, 0) \equiv 0$. Então existe $m \geq 1$ e uma função W suave e não flat tal que

$$W(x, y, 0) \neq 0 \quad \text{e} \quad V(x, y, z) = z^m W(x, y, z).$$

Provamos na Proposição 4.3.1 que a maior ordem não nula do polinômio homogêneo na serie de Taylor de V é $z(x^2 + y^2)^k$, portanto devemos ter $m = 1$.

Para demonstrar o caso geral note que realizando uma mudança de variável da forma $(x, y, z) \mapsto (x, y, Z)$ onde $Z = z - h(x, y)$ o sistema (4.5) torna-se

$$\begin{cases} x' = -y + \tilde{P}(x, y, Z), \\ y' = x + \tilde{Q}(x, y, Z), \\ Z' = \lambda Z + \tilde{R}(x, y, Z). \end{cases} \quad (4.18)$$

onde $\tilde{P}(x, y, Z)$, $\tilde{Q}(x, y, Z)$ e $\tilde{R}(x, y, Z)$ são os termos não lineares e observando que $z = Z + h(x, y)$, temos $\tilde{R}(x, y, 0) = 0$. Deste modo, dado uma variedade central local para o sistema (4.5), ela é transformado em uma variedade central local $Z = 0$ para o sistema (4.18). Por outro lado, dado um campo vetorial \mathcal{X} possuindo um múltiplo Jacobi inverso V e um difeomorfismo ψ tal que $\tilde{\mathcal{X}} = \psi\mathcal{X}$, então

$$\tilde{V} = J_\psi^{-1}V \circ \psi^{-1}$$

é um múltiplo Jacobi inverso de $\tilde{\mathcal{X}}$ onde J_ψ denota o determinante do Jacobiano de ψ . No nosso caso temos que $\psi(x, y, z) = (x, y, Z)$ onde $Z = z - h(x, y)$ de modo que

$$J_\psi = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -h_x & -h_y & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Assim, a relação entre V e o múltiplo Jacobi inverso $\tilde{V}(x, y, Z)$ do sistema (4.18) é

$$\begin{aligned} \tilde{V}(x, y, Z) &= J_\psi^{-1}V \circ \psi^{-1} \\ &= V(\psi^{-1}(x, y, Z)) \\ &= V(x, y, z + h(x, y)) \\ &= V(x, y, z). \end{aligned}$$

Concluindo o resultado. Para concluir a demonstração do item (2) basta observar que pelo Teorema 4.3.5 a função $\psi(x, y, h(x, y))$ é um fator integrante inverso de $\mathcal{X}|_{W^c}$.

Prova do item (3). Defina a curva $C = (x, 0, h(x, 0)) \subset W^c$ com $x \in (0, \epsilon]$ e $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Afirmamos que a curva C é uma seção transversal do fluxo do sistema (4.5) restrito a W^c . Para ver isso, seja

$$u(x) = (1, 0, \frac{\partial h}{\partial x}(x, 0))$$

o vetor tangente a C em $(x, 0, h(x, 0))$. A terceira componente do produto cartesiano $u(x) \times \mathcal{X}(x, 0, h(x, 0))$ é $x + Q(x, 0, h(x, 0)) = x + \mathcal{O}(x^2)$ e portanto nunca se anula ao longo da curva C . Assim $u(x)$ não é paralelo a $\mathcal{X}(x, 0, h(x, 0))$ o que prova a afirmação.

Uma propriedade interessante dos múltiplos de Jacobi inverso é que eles podem ser calculados ao longo das órbitas de \mathcal{X} . Assim, seja $\phi_t(x, y, z)$ o fluxo do sistema (4.5) tal

que $\phi_0(x, y, z) = (x, y, z)$. Usando as funções características para a EDP, $\mathcal{X}V = V \operatorname{div}(\mathcal{X})$, obtemos que

$$V(\phi_t(x, 0, h(x, 0))) = V(x, 0, h(x, 0)) \exp \left(\int_0^t \operatorname{div} \mathcal{X}(\phi_s(x, 0, h(x, 0))) ds \right). \quad (4.19)$$

Lembrando que

$$\operatorname{div}(\mathcal{X}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} + \lambda.$$

Denotaremos por $T(x)$ o tempo que a órbita de (4.5) começando no ponto inicial $(x, 0, h(x, 0))$ leva até voltar a seção transversal C . Sabe-se que $T(x) = 2\pi + \mathcal{O}(x)$. Esta afirmação é provada realizando a mudança de coordenadas polares no campo vetorial $\mathcal{X}|_{W^c}$ que leva a equação diferencial das órbitas de $\mathcal{X}|_{W^c}$ para uma equação da forma

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{rR(r, \theta)}{1 + \Theta(r, \theta)}. \quad (4.20)$$

Então, denotando por $r(\theta; x)$ a solução da equação (4.20) tal que $r(0; x) = x$ a função periódica $T(x)$ é dada por

$$T(x) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \Theta(r(\theta; x), \theta)} = \int_0^{2\pi} (1 + \mathcal{O}(x)) d\theta = 2\pi + \mathcal{O}(x).$$

Tendo em consideração que ϕ_t é um difeomorfismo e usando a hipótese sobre nosso campo, obtemos que

$$\int_0^{T(x)} \operatorname{div}(\mathcal{X})(\phi_s(x, 0, h(x, 0))) ds = \lambda T(x) + \mathcal{O}(x) = 2\pi\lambda + \mathcal{O}(x). \quad (4.21)$$

A órbita de (4.5) que passa pelo ponto $(x, 0, h(x, 0))$ de C é fechada, isto é

$$\phi_{T(x)}(x, 0, h(x, 0)) = (x, 0, h(x, 0)) \quad \forall x \in (0, \epsilon).$$

Avaliando (4.19) em $t = T(x)$ e usando (4.21) obtemos

$$V(x, 0, h(x, 0)) = V(x, 0, h(x, 0))(2\pi\lambda + \mathcal{O}(x)).$$

Isto implica que $V(x, 0, h(x, 0)) \equiv 0$ e ainda por (4.19) e usando que C é uma seção transversal obtemos que o fluxo do sistema (4.5) fornece $V(x, y, h(x, y)) \equiv 0$. ■

4.3.2 Demonstração do Teorema 4.3.4

Estamos em condições de apresentar a prova do Teorema 4.3.4. Nesta dissertação necessitaremos apenas de uma implicação do teorema, a qual exibiremos a demonstração. A prova da outra implicação pode ser encontrada com detalhes em [4].

Demonstração: Mostraremos que se o sistema (4.5) admite um múltiplo de Jacobi inverso da forma $V(x, y, z) = z + \dots$, então a origem é um centro.

Suponhamos então que o sistema (4.5) tenha um múltiplo de Jacobi inverso analítico na origem da forma

$$V(x, y, z) = z + \dots \quad (4.22)$$

Assim, o Teorema da Função Implícita aplicado em $V(x, y, z) = 0$ garante a existência de uma única função analítica $h(x, y)$ de classe C^1 definida em uma vizinhança da origem tal que $h(0, 0) = 0$ e $V(x, y, h(x, y)) \equiv 0$. Além disso, $Dh(0, 0) = 0$. Logo, a partir da invariância de $V(x, y, z) = 0$ sobre o fluxo, da definição de variedade central local e do item (2) do Teorema 4.3.6, concluímos que $W^c = \{z = h(x, y)\}$ é uma variedade central analítica local na origem e existe uma função W analítica C^∞

$$W(x, y, h(x, y)) \neq 0 \quad \text{tal que} \quad V(x, y, z) = (z - h(x, y))W(x, y, z).$$

Da equação (4.22) e $W(0, 0, h(0, 0)) = W(0, 0, 0) \neq 0$ temos que $W(0, 0, 0) = 1$. Além disso $v(x, y) = W(x, y, h(x, y))$ é um fator integrante inverso analítico para o campo $\mathcal{X}|_{W^c}$. Observe que

$$v(0, 0) = W(0, 0, h(0, 0)) = W(0, 0, 0) = 1.$$

Como agora estamos no plano podemos usar o Teorema de Reeb que garante que a origem é um centro para $\mathcal{X}|_{W^c}$. ■

O próximo corolário, é uma consequência direta do Teorema 4.3.4, e será de extrema importância na análise do sistema de Lü.

Corolário 4.3.1. *Considere o sistema tridimensional analítico*

$$\dot{x} = f(x) \quad (4.23)$$

o qual possui um ponto de Hopf em $x = x_0 \in \mathbb{R}^3$. Este sistema possui um centro em $x = x_0$ se, e somente se, admite um múltiplo de Jacobi inverso analítico local V em x_0 com

$$\text{grad}V(x_0) \neq 0,$$

onde $\text{grad}V(x_0)$ é o vetor gradiente de V em x_0 .

Demonstração: Usando a mudança de coordenadas linear inversível

$$\xi = P(x - x_0)$$

e um escalonamento no tempo, o sistema (4.23) pode ser transformado num sistema da forma (4.5), cuja parte linear está na forma canônica de Jordan. Se denotarmos por V um múltiplo de Jacobi inverso do sistema (4.23), então

$$\tilde{V}(\xi) = (\det P)V(P^{-1}\xi + x_0)$$

é um múltiplo de Jacobi inverso do sistema transformado. A recíproca também é verdadeira. Em particular, deduzimos que

$$\nabla\tilde{V}(0) = (\det P)\nabla V(x_0)P^{-1}. \quad (4.24)$$

Temos as seguintes equivalências: o sistema (4.23) possui um centro em $x = x_0$ se, e somente se, o sistema transformado da forma canônica (4.5) possui um centro em $\xi = 0$ se, e somente se, admite um múltiplo de Jacobi inverso analítico local \tilde{V} tal que $\nabla\tilde{V}(0) \neq 0$ se, e somente se, o sistema (4.23) admite um múltiplo de Jacobi inverso analítico local V , tal que

$$\nabla V(x_0) \neq 0.$$

Ao estabelecer estas equivalências, usamos o Teorema 4.3.4 e a relação (4.24). ■

4.4 Aplicações

Os resultados obtidos no Capítulo 4 serão usados nesta seção em três sistemas bastante conhecidos na literatura, a saber: Sistema de Moon–Rand, sistema de Lü e sistema de Lorenz. O objetivo das subseções seguintes é estudar o problema foco–centro em cada um destes sistemas.

4.4.1 Sistema de Moon–Rand

O sistema de Moon-Rand foi introduzido em [20], para o contexto de modelagem de estruturas flexíveis. Faremos aqui uma análise deste sistema de modo a resolver o problema foco–centro sobre uma variedade central local dando condições sobre os parâmetros a fim de que a origem seja um centro.

O sistema de Moon-Rand é dado por

$$\begin{cases} u' = v, \\ v' = -u - uw, \\ w' = -\lambda w + c_{20}u^2 + c_{11}uv + c_{02}v^2, \end{cases} \quad (4.25)$$

onde $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ são variáveis de estado e $(\lambda, c_{20}, c_{11}, c_{02}) \in \mathbb{R}^4$ são parâmetros reais com $\lambda \neq 0$. Em notação vetorial, o sistema (4.25) pode ser escrito como $\dot{x} = \mathcal{X}(x, \xi)$, onde

$$\mathcal{X}(x, \xi) = (v, -u - uw, -\lambda w + c_{20}u^2 + c_{11}uv + c_{02}v^2),$$

$x = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ e $\xi = (\lambda, c_{20}, c_{11}, c_{02}) \in \mathbb{R}^4$, $\lambda \neq 0$.

Para que possamos fazer um estudo do comportamento dinâmico do sistema (4.25) iniciaremos introduzindo uma mudança de coordenadas no sistema (4.25) para colocá-lo na forma do sistema (4.5). Considerando a seguinte mudança de variáveis,

$$x = -u, \quad y = v, \quad z = w$$

obtemos o seguinte novo sistema

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x + xz, \\ z' = -\lambda z + c_{20}x^2 - c_{11}xy + c_{02}y^2. \end{cases} \quad (4.26)$$

A origem, a qual denotaremos por $Q_0 = (0, 0, 0)$, é um ponto de equilíbrio do sistema (4.26) para quaisquer valores dos parâmetros. Além da origem, o sistema (4.26) apresenta um par de equilíbrios $Q_{\pm} = \left(\pm\sqrt{\frac{-\lambda}{c_{20}}}, 0, -1\right)$, quando $\lambda/c_{20} < 0$.

Análise dos pontos Q_{\pm} .

Examinaremos a estabilidade dos pontos de equilíbrio Q_{\pm} do ponto de vista linear. Primeiramente observamos que basta realizar a análise para o ponto de equilíbrio Q_+ devido à simetria em relação ao eixo z . De fato, tomemos a reflexão em torno do eixo z em \mathbb{R}^3 , $g(x, y, z) = (-x, -y, z)$ e observemos que

$$\mathcal{X}(g(x, y, z)) = (y, -x - xz, -\lambda z + c_{20}x^2 - c_{11}xy + c_{02}y^2) = g(\mathcal{X}(x, y, z))$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e para todo $(\lambda, c_{20}, c_{11}, c_{02}) \in \mathbb{R}^4$. Desta forma a estabilidade de Q_- pode ser obtida através da estabilidade de Q_+ . A linearização de (4.26) em Q_+ nos dá a seguinte matriz Jacobiana

$$A = D\mathcal{X}(Q_+) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{-\lambda}{c_{20}}} \\ 2c_{20}\sqrt{\frac{-\lambda}{c_{20}}} & -c_{11}\sqrt{\frac{-\lambda}{c_{20}}} & -\lambda \end{bmatrix},$$

cujo polinômio característico pode ser escrito como

$$p(t) = t^3 + \lambda t^2 - \frac{\lambda c_{11}}{c_{20}} t - 2\lambda. \quad (4.27)$$

Para o estudo da estabilidade do equilíbrio Q_+ , faremos uso do Lema a seguir, conhecido como critério de Routh-Hurwitz.

Lema 4.4.1. (Routh-Hurwitz) *Considere o polinômio $p(t) = t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$. As raízes de $p(t)$ têm partes reais negativas se, e somente se,*

$$a_2 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_0 > 0, \quad a_2 a_1 > a_0.$$

Demonstração: Pode ser encontrada em Pontryagin [21].

Proposição 4.4.1. *O equilíbrio Q_+ é instável.*

Demonstração: Como o coeficiente de t^2 e o termo constante do polinômio característico (4.27) têm sinais opostos segue diretamente do Lema 4.4.1 que o equilíbrio Q_+ é instável. ■

Análise do ponto Q_0

A linearização de (4.26) em $Q_0 = (0, 0, 0)$ nós dá a seguinte matriz Jacobiana

$$B = D\mathcal{X}(Q_0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix},$$

cujos polinômio característico pode ser escrito como

$$p(t) = t^3 + \lambda t^2 + t + \lambda.$$

Defina o seguinte conjunto

$$S = \{(\lambda, c_{10}, c_{11}, c_{02}) \in \mathbb{R}^4; \lambda \neq 0\}.$$

Se $(\lambda, c_{20}, c_{11}, c_{02}) \in S$, então a matriz Jacobiana de \mathcal{X} em Q_0 possui um autovalor real $t_1 = -\lambda$ e um par de autovalores imaginários puros $t_{2,3} = \pm i$. Da Definição 4.1.1 temos que o ponto Q_0 é um ponto de Hopf.

Observação 4.4.1. *Do teorema da variedade central, para o ponto de Hopf Q_0 , uma variedade bidimensional está bem definida e é invariante pelo fluxo gerado por (4.26) e pode ser continuada com classe arbitrária de diferenciabilidade para valores de parâmetros próximos. Veja [16]. A variedade central local é atratora (respectivamente, repulsora) quando $\lambda > 0$ (respectivamente, $\lambda < 0$). Desta forma é suficiente estudar a estabilidade de Q_0 para o fluxo restrito à uma variedade central local e sua continuação.*

Assim, estudaremos agora a estabilidade de Q_0 para parâmetros em S . Para isto, definiremos os seguintes subconjuntos de S :

$$S_1 = \{(\lambda, c_{20}, c_{11}, c_{02}) \in S; \quad \lambda c_{11} + 2c_{20} < 2c_{02}\},$$

$$S_2 = \{(\lambda, c_{20}, c_{11}, c_{02}) \in S; \quad \lambda c_{11} + 2c_{20} > 2c_{02}\}.$$

Com isso temos o seguinte teorema.

Teorema 4.4.1. *Considere o sistema (4.26). O primeiro coeficiente de Lyapunov associado ao equilíbrio Q_0 para valores de parâmetros em S é dado por*

$$L_1(\lambda, c_{20}, c_{11}, c_{02}) = \frac{1}{8} \frac{\lambda c_{11} + 2c_{20} - 2c_{02}}{\lambda^2 + 4}.$$

Se $(\lambda c_{11} + 2c_{20} - 2c_{02}) \neq 0$, então o sistema (4.26) possui um ponto de Hopf transversal em Q_0 para $(\lambda, c_{20}, c_{11}, c_{02}) \in S$.

Mais precisamente, se $(\lambda, c_{20}, c_{11}, c_{02}) \in S_1 \cup S_2$, então o sistema tem um ponto de Hopf de codimensão 1 em Q_0 . Se $(\lambda, c_{20}, c_{11}, c_{02}) \in S_2$, então Q_0 é instável (foco repulsor fraco).

Se $(\lambda, c_{20}, c_{11}, c_{02}) \in S_1$, então Q_0 é assintoticamente estável (foco atrator fraco).

Demonstração: Seguindo o processo de Lyapunov descrito na seção 3.3, consideremos a função de Lyapunov dada por:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 + V_3(x, y, z) + V_4(x, y, z) + \dots, \quad (4.28)$$

onde

$$V_3 = -\frac{1}{\lambda^2 + 4}zy^2 + \frac{\lambda}{\lambda^2 + 4}yxz + \frac{1}{\lambda^2 + 4}zx^2$$

e

$$\begin{aligned} V_4 = & \frac{3}{4(\lambda^4 + 5\lambda^2 + 4)}y^2z^2 + \frac{(-\lambda c_{20} - \lambda c_2)}{4(\lambda^2 + 4)}y^4 - \frac{3\lambda}{2(\lambda^4 + 5\lambda^2 + 4)}xyz^2 + \\ & + \frac{(2\lambda^2 - 1)}{4(\lambda^2 + 4)(\lambda^2 + 1)}x^2z^2 - \frac{(2c_{20} + \lambda c_{11} + 6c_2)}{8(\lambda^2 + 4)}xy^3 + \frac{(-\lambda c_{20} - c_{11})}{2(\lambda^2 + 4)}x^2y^2 + \\ & + \frac{(-6c_{20} + \lambda c_{11} - 2c_2)}{8(\lambda^2 + 4)}x^3y. \end{aligned}$$

Diferenciando (4.28) ao longo das órbitas de (4.26) obtemos que

$$\dot{V} = \nabla V \cdot \mathcal{X} = \eta_4(x^2 + y^2)^2 + \dots,$$

onde o primeiro coeficiente de Lyapunov do sistema na origem é dado por

$$L_1 = \eta_4 = \frac{2c_{20} + \lambda c_{11} - 2c_2}{8(\lambda^2 + 4)}. \quad (4.29)$$

Notemos que o sinal do primeiro coeficiente de Lyapunov é determinado pelo sinal do numerador de (4.29), uma vez que o denominador é sempre positivo, o que conclui a prova do teorema. ■

Defina agora o seguinte subconjunto \mathcal{L}_1 de S ,

$$\mathcal{L}_1 = \left\{ (\lambda, c_{20}, c_{11}, c_{02}) \in S; \quad c_{20} = -\frac{\lambda c_{11}}{2} + c_{02} \right\}.$$

É fácil ver que o primeiro coeficiente de Lyapunov se anula sobre \mathcal{L}_1 . Este subconjunto divide o conjunto S em duas componentes conexas denotadas por S_1 e S_2 , onde $L_1 < 0$ e $L_1 > 0$, respectivamente.

No próximo teorema, estudaremos o sinal do segundo coeficiente de Lyapunov ao longo de \mathcal{L}_1 , onde o primeiro coeficiente de Lyapunov se anula. Definimos, os seguintes subconjuntos do conjunto \mathcal{L}_1 .

$$\begin{aligned} N_1 &= \left\{ (\lambda, c_{20}, c_{11}, c_{02}) \in \mathcal{L}_1; \quad c_{02} < 0 \quad \text{e} \quad c_{11} < \frac{4c_{02}}{\lambda} \right\}, \\ N_2 &= \left\{ (\lambda, c_{20}, c_{11}, c_{02}) \in \mathcal{L}_1; \quad c_{02} > 0 \quad \text{e} \quad c_{11} > \frac{4c_{02}}{\lambda} \right\}, \\ M_1 &= \left\{ (\lambda, c_{20}, c_{11}, c_{02}) \in \mathcal{L}_1; \quad c_{02} > 0 \quad \text{e} \quad c_{11} < \frac{4c_{02}}{\lambda} \right\}, \\ M_2 &= \left\{ (\lambda, c_{20}, c_{11}, c_{02}) \in \mathcal{L}_1; \quad c_{02} < 0 \quad \text{e} \quad c_{11} > \frac{4c_{02}}{\lambda} \right\}. \end{aligned}$$

Temos o seguinte teorema.

Teorema 4.4.2. *Considere o sistema (4.26). O segundo coeficiente de Lyapunov associado ao equilíbrio Q_0 ao longo de \mathcal{L}_1 é dado por*

$$L_2 |_{\mathcal{L}_1} = \frac{c_{02}(\lambda c_{11} - 4c_{02})}{\lambda(\lambda^2 + 4)}. \quad (4.30)$$

Se $c_{02}(\lambda c_{11} - 4c_{02}) \neq 0$, então o sistema (4.26) possui um ponto de Hopf transversal Q_0 para $(\lambda, c_{20}, c_{11}, c_{02}) \in \mathcal{L}_1$.

Mais precisamente, se $(\lambda, c_{20}, c_{11}, c_{02}) \in N_i \cup M_i$, $i = 1, 2$, então o sistema tem um ponto de Hopf de codimensão 2 em Q_0 . Se $(\lambda, c_{20}, c_{11}, c_{02}) \in N_1 \cup N_2$, então o ponto de Hopf Q_0 é instável (foco repulsor fraco). Se $(\lambda, c_{20}, c_{11}, c_{02}) \in M_1 \cup M_2$, então o ponto de Hopf Q_0 é assintoticamente estável (foco atrator fraco).

Demonstração: De forma análoga à prova do Teorema 4.4.1, obtemos polinômios homogêneos V_5 e V_6 tais que a função de Lyapunov dada por:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 + V_3(x, y, z) + V_4(x, y, z) + V_5(x, y, z) + V_6(x, y, z) + \dots, \quad (4.31)$$

onde V_3 e V_4 são os polinômios encontrados em (4.28). Os polinômios V_5 e V_6 foram encontrados com cálculos realizados no programa computacional MAPLE. Omitiremos os

valores de V_5 e V_6 pela sua extensão. Assim com valores específicos dos polinômios V_5 e V_6 e diferenciando (4.31) ao longo das órbitas de (4.26) obtemos que

$$\dot{V} = \nabla V \cdot \mathcal{X} = \eta_6(x^2 + y^2)^3 + \dots,$$

onde o segundo coeficiente de Lyapunov do sistema na origem é dado por

$$L_2 = \eta_6 = \frac{c_{02}(\lambda c_{11} - 4c_{02})}{16(\lambda^2 + 4)\lambda}.$$

Notemos que $L_2 > 0$ quando os parâmetros estão em $N_1 \cup N_2$ e $L_2 < 0$ quando os parâmetros estão em $M_1 \cup M_2$. ■

Defina os seguintes subconjuntos de \mathcal{L}_1 ,

$$\mathcal{L}_{21} = \{(\lambda, c_{20}, c_{11}, c_{02}) \in \mathcal{L}_1; c_{02} = 0\}$$

e

$$\mathcal{L}_{22} = \left\{ (\lambda, c_{20}, c_{11}, c_{02}) \in \mathcal{L}_1; c_{02} = \frac{\lambda c_{11}}{4} \right\}.$$

É fácil ver que o segundo coeficiente de Lyapunov se anula sobre os subconjuntos \mathcal{L}_{21} e \mathcal{L}_{22} . A superfície \mathcal{L}_{22} pode ser vista na Figura 4.1. Note que \mathcal{L}_1 é dividido em quatro componentes conexas denotadas aqui por N_i e M_i , $i = 1, 2$, onde $L_2 > 0$ e $L_2 < 0$, respectivamente.

Agora, no seguinte teorema analisamos o sistema (4.26) com parâmetros ao longo do conjunto \mathcal{L}_{21} .

Teorema 4.4.3. *Considere o sistema (4.26) com parâmetros em \mathcal{L}_{21} . Então o equilíbrio Q_0 é um centro para o fluxo do sistema (4.26) restrito a uma variedade central local.*

Demonstração: Provaremos este teorema de duas maneiras distintas. Para a primeira prova usaremos o Teorema 4.3.4. Já para a segunda prova usaremos o conceito de superfície algébrica invariante.

Prova 1: Seja $(\lambda, c_{20}, c_{11}, c_{02}) \in \mathcal{L}_{21}$. Então fazendo as devidas substituições em (4.26) obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} u' = -v, \\ v' = u + uv, \\ w' = -\lambda w + c_{20}u^2 - 2\frac{c_{20}}{\lambda}uv. \end{cases} \quad (4.32)$$

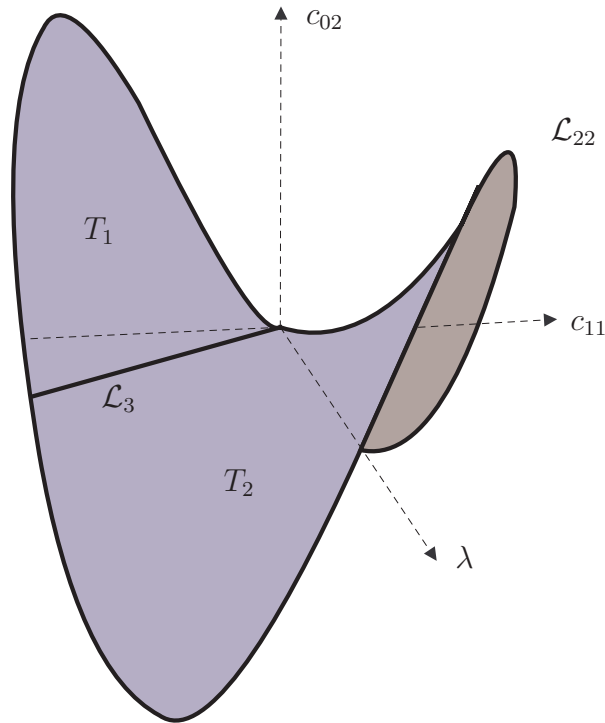


Figura 4.1: A superfície de Hopf, \mathcal{L}_{22} juntamente com a curva de centros \mathcal{L}_3 .

Defina $V(u, v, w) = -c_{20}u^2 + \lambda w$ e observe que a divergência do campo \mathcal{X} para o sistema (4.32) é dado por $\text{div}(\mathcal{X}) = -\lambda$ assim temos a seguinte igualdade

$$\mathcal{X}V = \text{div}(\mathcal{X})V.$$

Logo V é um múltiplo de Jacobi inverso. Então pelo Teorema 4.3.4, a origem é um centro para o sistema (4.32). Além disso, a variedade central analítica $W^c \subseteq V^{-1}(0)$.

Prova 2: O sistema (4.32) possui uma superfície algébrica invariante dada por

$$F_\lambda(u, v, w) = -c_{20}u^2 + \lambda w. \quad (4.33)$$

De fato,

$$\mathcal{X}F_\lambda = KF_\lambda$$

onde $K(u, v, w) = -\lambda$ é o cofator da superfície algébrica invariante $F_\lambda = 0$. E ainda, $F_\lambda(0, 0, 0) = 0$, assim, a superfície invariante dada por (4.33) contém o equilíbrio. O auto espaço central E_0^c em Q_0 é gerado pelos vetores

$$V_{t_2} = (1, 1, 0) \quad e \quad V_{t_3} = (-1, 1, 0).$$

O gradiente de F_λ em Q_0 é dado por $\nabla F_\lambda(Q_0) = (0, 0, \lambda)$. Logo, $\nabla F_\lambda(Q_0)$ é ortogonal aos vetores V_{t_2} e V_{t_3} . Portanto, numa vizinhança da origem, existe uma variedade central local

$$W^c \subset F_\lambda^{-1}(0).$$

Assim, resolvendo (4.33) em função de w e substituindo nas duas primeiras equações de (4.32), obtemos o seguinte sistema em coordenadas locais

$$\begin{cases} u' = -v, \\ v' = u + \frac{c_{20}}{\lambda}u^3. \end{cases} \quad (4.34)$$

Este sistema é Hamiltoniano com a função Hamiltoniana dada por

$$H(u, v) = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{c_{20}}{4\lambda}u^4.$$

Segue do Teorema 3.4.1 que a origem é um centro. ■

O próximo teorema realiza o estudo do sinal do terceiro coeficiente de Lyapunov do sistema (4.26) com parâmetros sobre o conjunto \mathcal{L}_{22} , onde o primeiro e o segundo coeficientes de Lyapunov se anulam. Definiremos, os seguintes subconjuntos do conjunto \mathcal{L}_{22} :

$$T_1 = \{(\lambda, c_{20}, c_{11}, c_{02}) \in \mathcal{L}_{22}; \quad c_{02} > 0\},$$

$$T_2 = \{(\lambda, c_{20}, c_{11}, c_{02}) \in \mathcal{L}_{22}; \quad c_{02} < 0\}.$$

Temos o seguinte teorema.

Teorema 4.4.4. *Considere o sistema (4.26). O terceiro coeficiente de Lyapunov associado ao equilíbrio Q_0 para valores de parâmetros em \mathcal{L}_{22} é dado por*

$$L_3 |_{\mathcal{L}_{22}} = \frac{1}{16} \frac{(\lambda^2 + 10)c_{02}^3}{(\lambda^4 + 20\lambda^2 + 64)\lambda^2}. \quad (4.35)$$

Se $c_{02} \neq 0$, então o sistema (4.26) possui um ponto de Hopf transversal em Q_0 para $(\lambda, c_{20}, c_{11}, c_{02}) \in \mathcal{L}_{22}$.

Mais precisamente, se $(\lambda, c_{20}, c_{11}, c_{02}) \in T_1 \cup T_2$, então o sistema tem um ponto de Hopf de codimensão 3 em Q_0 . Se $(\lambda, c_{20}, c_{11}, c_{02}) \in T_1$ (respectivamente, $(\lambda, c_{20}, c_{11}, c_{02}) \in T_2$) então o ponto de Hopf em Q_0 é instável (respectivamente, estável) uma vez que $L_3 > 0$ (respectivamente, $L_3 < 0$).

Demonstração: A prova do teorema segue de forma análoga ao Teorema 4.4.1. ■

Defina o seguinte subconjunto de \mathcal{L}_{22} ,

$$\mathcal{L}_3 = \{(\lambda, c_{20}, c_{11}, c_{02}) \in \mathcal{L}_{22}; c_{02} = 0\}.$$

É fácil ver que o terceiro coeficiente de Lyapunov se anula sobre o subconjunto \mathcal{L}_3 de \mathcal{L}_{22} . Este subconjunto divide o conjunto \mathcal{L}_{22} em duas componentes conexas denotadas por V_1 e V_2 onde $L_3 < 0$ e $L_3 > 0$, respectivamente.

Teorema 4.4.5. *Considere o sistema (4.26) com parâmetros em \mathcal{L}_3 . Então o equilíbrio Q_0 é um centro para o fluxo do sistema (4.26) restrito a uma variedade central local.*

Demonstração: Seja $(\lambda, c_{20}, c_{11}, c_{02}) \in \mathcal{L}_3$. Como $\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_{22} \subset \mathcal{L}_1$, segue que $c_{02} = c_{11} = c_{20} = 0$. Assim segue do Teorema 4.4.3 que o ponto de equilíbrio Q_0 é um centro. ■

A curva de centros \mathcal{L}_3 pode ser vista na Figura 4.1. Em resumo, mostramos o seguinte teorema:

Teorema 4.4.6. *Considere o sistema de Moon-Rand (4.25). Então o equilíbrio Q_0 é um centro para o fluxo do sistema restrito a variedade central W^c se, e somente se,*

$$c_{02} = -\frac{1}{2}\lambda c_{11} + c_{20} = 0.$$

4.4.2 Sistema de Lü

Nesta subseção aplicaremos a teoria estudada no Capítulo 4 em outro sistema bastante conhecido na literatura, a saber, o sistema de Lü.

Considere o sistema de Lü dado por

$$\begin{cases} x' = a(y - x), \\ y' = cy - xz, \\ z' = -bz + xy. \end{cases} \quad (4.36)$$

onde $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ são as variáveis de estado e $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ são os parâmetros reais. Em notação vetorial, o sistema (4.36) pode ser escrito como $\dot{x} = f(x, \zeta)$, onde

$$f(x, \zeta) = (a(y - x), cy - xz, -bz + xy),$$

$x = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e $\zeta = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

A origem, a qual iremos denotar por Q_0 é um ponto de equilíbrio do sistema (4.36) para quaisquer valores dos parâmetros. Além da origem, o sistema (4.36) apresenta um par de equilíbrios simétricos $Q_{\pm} = (\pm\sqrt{bc}, \pm\sqrt{bc}, c)$ quando $bc > 0$. As estabilidades desses pontos de equilíbrios foram bastante estudados em [18] e [6].

Estudaremos as bifurcações de Hopf em Q_+ . A análise para o ponto Q_- segue de forma semelhante devido à simetria do campo em relação ao eixo z . Analisemos portanto a estabilidade do equilíbrio Q_+ . Fazendo a translação para a origem, segundo a transformação

$$\begin{cases} x_1 = x - x_0, \\ y_1 = y - y_0, \\ z_1 = z - z_0, \end{cases}$$

onde $(x_0, y_0, z_0) = (\sqrt{bc}, \sqrt{bc}, c)$, com $bc > 0$, obtemos o novo sistema

$$\begin{cases} x'_1 = a(y_1 - x_1), \\ y'_1 = c(y_1 + \sqrt{bc}) - (x_1 + \sqrt{bc})(z_1 + c), \\ z'_1 = -b(z_1 + c) + (x_1 + \sqrt{bc})(y_1 + \sqrt{bc}). \end{cases} \quad (4.37)$$

A linearização de (4.37) em Q_+ , que agora está na origem, nos dá a seguinte matriz Jacobiana

$$A = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ -c & c & -\sqrt{bc} \\ \sqrt{bc} & \sqrt{bc} & -b \end{bmatrix}, \quad (4.38)$$

cujo polinômio característico pode ser escrito como

$$p(\lambda) = \lambda^3 + (a + b - c)\lambda^2 + ab\lambda + 2abc.$$

Assim, aplicando o Lema 4.4.1 obtemos a seguinte proposição.

Proposição 4.4.2. *Defina*

$$c_c = \frac{a + b}{3}.$$

- 1) *Se $a = 0$, então Q_+ é um equilíbrio degenerado, pois a matriz Jacobiana (4.38) possui pelo menos duas raízes nulas. Para tanto, consideremos abaixo os casos em que $a \neq 0$;*

2) Considere $a \neq 0$, $b > 0$ e $c > 0$. Temos as seguintes situações:

2.1) Se $a < 0$, então o equilíbrio Q_+ é instável;

2.2) Se $a > 0$ e $0 < c < c_c$, (respectivamente, $c > c_c$), então Q_+ é assintoticamente estável (respectivamente, instável);

3) Considere $b < 0$ e $c < 0$. Neste caso, Q_+ é sempre instável, para $a \neq 0$.

Da análise linear do sistema (4.36) em Q_+ temos o seguinte resultado, a qual está provado em [17].

Proposição 4.4.3. *Definamos a superfície de Hopf*

$$\mathcal{R} = \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : ab > 0, c = c_c = \frac{(a+b)}{3} \right\}. \quad (4.39)$$

Se $(a, b, c) \in \mathcal{R}$ e $c_c > 0$ (respectivamente, $c_c < 0$) então a matriz Jacobiana de (4.4.2) em Q_+ possui um autovalor real negativo (respectivamente, positivo) λ_1 e um par de autovalores imaginários puros $\lambda_{2,3}$.

Observação 4.4.2. *Do teorema da variedade central 4.1.1, para o ponto de Hopf Q_+ uma variedade bidimensional está bem definida, ela é invariante pelo fluxo gerado por (4.36). A variedade central é atratora (respectivamente, repulsora) quando $c_c > 0$ (respectivamente, $c_c < 0$). Então, é suficiente estudar a estabilidade de Q_+ para o fluxo restrito a uma variedade central.*

Assim, estudaremos agora a estabilidade de Q_+ para parâmetros em \mathcal{R} . Definimos, os seguintes subconjuntos da superfície de Hopf \mathcal{R} ,

$$R_1 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; a > 0, a/5 < b < 2a, c = c_c\},$$

$$R_2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; a < 0, a/5 < b < 0, c = c_c\},$$

$$R_3 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; a < 0, b < 2a, c = c_c\},$$

$$G_1 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; a > 0, 0 < b < a/5, c = c_c\},$$

$$G_2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; a > 0, b > 2a, c = c_c\},$$

$$G_3 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; a < 0, 2a < b < a/5, c = c_c\}.$$

No seguinte teorema, que encontra-se provado em [6] ou [8], estudamos o sinal do primeiro coeficiente de Lyapunov associado ao equilíbrio Q_+ para valores em \mathcal{R} .

Teorema 4.4.7. *Considere o sistema (4.36). O primeiro coeficiente de Lyapunov associado ao equilíbrio Q_+ para valores de parâmetros em \mathcal{R} é dado por*

$$L_1 = \frac{243a^2(a-5b)(2a-b)b}{(4a+b)^2(a^4+16a^3b+60a^2b^2+49ab^3+4b^4)}. \quad (4.40)$$

Se $(a-5b)(2a-b) \neq 0$, então o sistema (4.36) possui um ponto de Hopf transversal em Q_+ para $(a, b, c) \in \mathcal{R}$.

Mais precisamente, se $(a, b, c) \in R_i \cup G_i$, $i = 1, 2$ e 3 , então o sistema tem um ponto de Hopf de codimensão 1 em Q_+ . Se $(a, b, c) \in G_1 \cup G_2 \cup G_3$, então o ponto de Hopf Q_+ é instável (foco repulsor). Se $(a, b, c) \in R_1 \cup R_2 \cup R_3$, então o ponto de Hopf em Q_+ é assintoticamente estável (foco atrator).

Demonstração: A prova deste teorema segue análoga à prova do Teorema 4.4.1. ■

Notemos que o sinal do primeiro coeficiente de Lyapunov é determinado pelo sinal do numerador de (4.40), uma vez que o denominador é positivo.

Observação 4.4.3. *É fácil ver que o primeiro coeficiente de Lyapunov anula-se sobre as retas*

$$D_1 = \{(a, b, c) \in \mathcal{R} : a \neq 0, b = a/5, c = c_c\}$$

e

$$D_2 = \{(a, b, c) \in \mathcal{R} : a \neq 0, b = 2a, c = c_c\}.$$

Estas retas dividem a superfície de Hopf \mathcal{R} em seis componentes conexas denotadas por R_i e G_i , $i = 1, 2, 3$, onde $L_1 < 0$ e $L_1 > 0$, respectivamente.

O próximo teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em [6] ou [8], estuda o sinal do segundo coeficiente de Lyapunov ao longo da reta D_1 , onde o primeiro coeficiente de Lyapunov se anula.

Teorema 4.4.8. *Considere o sistema (4.36). O segundo coeficiente de Lyapunov associado ao equilíbrio Q_+ para valores de parâmetros em D_1 é dado por*

$$L_2|_{D_1} = \frac{3625}{83692b^3}.$$

Como $b \neq 0$, então o sistema (4.36) possui um ponto de Hopf transversal de codimensão 2 em Q_+ . Se $b > 0$ (respectivamente, $b < 0$) então o ponto de Hopf em Q_+ é instável (respectivamente, estável) uma vez que $L_2 > 0$ (respectivamente, $L_2 < 0$).

Para os parâmetros $(a, b, c) \in D_2$ temos que o sistema (4.36) tem a origem como um centro conforme o teorema a seguir.

Teorema 4.4.9. *Considere o sistema (4.36) com parâmetros em D_2 . Então o equilíbrio Q_+ é um centro para o fluxo do sistema (4.36) restrito a uma variedade central local. Além disso $W^c \subset V^{-1}(0)$.*

Demonstração: Suponha $(a, b, c) \in D_2$ então substituindo os valores dos parâmetros $b = 2a$ e $c = c_c = a$ no sistema (4.36), obtemos

$$\begin{cases} x' = a(y - x), \\ y' = ay - xz, \\ z' = -2az + xy. \end{cases} \quad (4.41)$$

Denotando por \mathcal{X} o campo associado ao sistema (4.41) temos que

$$\mathcal{X} \cdot V = -2aV,$$

onde, $V(x, y, z) = x^2 - 2az$ e $\text{div}(\mathcal{X}) = -2a$. Portanto, V é um múltiplo de Jacobi inverso. Por outro lado, temos que

$$\nabla V(Q_\pm) = (\pm 2 | a | \sqrt{2}, 0, -2a),$$

o qual é um vetor não nulo. Segue do Corolário 4.3.1, que o equilíbrio correspondente Q_+ é centro. Para finalizar a prova do teorema, denote por W^c a variedade central em Q_+ . Pelo Teorema 4.3.6 item 3, temos que

$$W^c \subset V^{-1}(0).$$

■

4.4.3 Sistema de Lorenz

O sistema de Lorenz é sem dúvida o mais famoso de todos os sistemas diferenciais caóticos. Foi formulado em 1963 por E. N. Lorenz na tentativa de criar um sistema de equações diferenciais no qual explicaria alguns dos comportamentos imprevisíveis do clima. A maioria dos modelos viáveis para o tempo envolvem equações diferenciais parciais; Lorenz buscava um sistema mais simples e mais fácil de analisar.

O sistema de Lorenz original é dada da forma

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x), \\ y' = rx - y - xz, \\ z' = -bz + xy, \end{cases} \quad (4.42)$$

onde σ, r e b são parâmetros positivos com $\sigma > b + 1$. Uma boa referência para o estudo dinâmico e caótico do sistema de Lorenz é o livro [13].

Faremos aqui uma ligeira modificação no sistema (4.4.3) a fim de aplicarmos a teoria estudada nesta dissertação.

Iniciaremos introduzindo o sistema de Lorenz da seguinte forma

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x), \\ y' = rx - y - xz, \\ z' = -bz + xy. \end{cases} \quad (4.43)$$

onde $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ são variáveis de estado e os parâmetros reais assumindo os seguintes valores: $\sigma = -1$ e $b \neq 0$.

O sistema (4.43) possui os seguintes pontos de equilíbrio, $Q_0 = (0, 0, 0)$ para quaisquer valores dos parâmetros e um par de equilíbrios simétricos

$$Q_{\pm} = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1),$$

quando $b(r-1) > 0$. Para o estudo das bifurcações de Hopf em Q_{\pm} , basta realizar a análise o equilíbrio Q_+ , devido a simetria do campo. Analisemos a estabilidade para o equilíbrio Q_+ .

Fazendo a translação de Q_+ para a origem, com a seguinte transformação

$$\begin{cases} u = x - x_0, \\ v = y - y_0, \\ w = z - z_0, \end{cases} \quad (4.44)$$

onde $(x_0, y_0, z_0) = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$, com $b(-1+r) > 0$, obtemos o sistema (4.43), em novas coordenadas, como segue

$$\begin{cases} u' = -v + u, \\ v' = -v + u - \sqrt{b(r-1)}w - uw, \\ w' = -bw + \sqrt{b(r-1)}u + \sqrt{b(r-1)}v + uv. \end{cases} \quad (4.45)$$

A linearização de (4.45) em Q_+ , que agora está na origem, nos dá a seguinte matriz Jacobiana

$$A = \begin{bmatrix} & 1 & -1 & 0 \\ & 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & & -b \end{bmatrix}, \quad (4.46)$$

cujo polinômio característico pode ser escrito como

$$p(t) = t^3 + bt^2 + b(r-1)t - 2b(r-1).$$

Segue diretamente do Lema 4.4.1 (Routh-Hurwitz) que o conjunto de Hopf do equilíbrio Q_+ é da forma

$$S = \{(r, b) \in \mathbb{R}^2; b = -2 \text{ e } r - 1 < 0\}.$$

Então a matriz Jacobiana de (4.45) em Q_+ com parâmetros em S possui agora um autovalor real $t_1 = 2$ e um par de autovalores imaginários puros $t_{2,3} = \sqrt{2}\sqrt{(1-r)}i$.

No próximo teorema mostramos que o equilíbrio Q_+ é um centro restrito a uma variedade central local.

Teorema 4.4.10. *Para parâmetros em S , o sistema de Lorenz (4.45) possui uma família de superfícies algébricas invariantes $F_r^{-1}(0)$, dada por*

$$F_r(u, v, w) = \sqrt{-2(r-1)}u + w + \frac{u^2}{2}.$$

Além disso, $W^c \subset F_r^{-1}(0)$ e o fluxo do sistema (4.45) restrito a $F_r^{-1}(0)$ possui um centro em Q_{\pm} .

Demonstração: Seja $(r, b) \in S$, ou seja, substituindo $b = -2$ e $1 - r > 0$ no sistema (4.45), obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} u' = -v + u, \\ v' = -v + u - \sqrt{-2(r-1)}w - uw, \\ w' = 2w + \sqrt{-2(r-1)}u + \sqrt{-2(r-1)}v + uv. \end{cases} \quad (4.47)$$

O sistema (4.47) possui uma família de superfícies algébricas invariantes dada por

$$F_r(u, v, w) = \sqrt{-2r+2}u + w + \frac{u^2}{2} = 0. \quad (4.48)$$

De fato,

$$\mathcal{X}F_r = KF_r,$$

onde $K = 2$ é o cofator da superfície algébrica invariante $F_r = 0$ e \mathcal{X} é o campo vetorial associado ao sistema (4.47). Além disso, $F_r(0, 0, 0) = 0$ e portanto a superfície invariante dada por (4.48) contém o equilíbrio.

O auto espaço central E_+^c em Q_+ é gerado pelos vetores

$$V_{t_2} = \left(\frac{\sqrt{-2r+2}}{2(r-1)}, \frac{-\sqrt{-2r+2}(2r-3)}{2(r-1)(\sqrt{2r-2}+1)}, 1 \right)$$

e

$$V_{t_3} = \left(\frac{\sqrt{-2r+2}}{2(r-1)}, \frac{\sqrt{-2r+2}(2r-3)}{2(r-1)(\sqrt{2r-2}-1)}, 1 \right).$$

Como

$$\nabla F_r(0, 0, 0) = (\sqrt{-2r+2}, 0, 1)$$

segue que $\nabla F_r(0, 0, 0)$ é ortogonal aos vetores V_{t_2} e V_{t_3} . Portanto, numa vizinhança da origem, existe a variedade central local

$$W^c \subset F_r^{-1}(0).$$

Logo resolvendo (4.48) em função de w e substituindo esta solução nas duas primeiras equações de (4.47), obtemos o seguinte sistema em coordenadas locais

$$\begin{cases} u' = -v + u, \\ v' = -v + 3u - 2ur + 3/2\sqrt{-2r+2}u^2 + 1/2u^3. \end{cases} \quad (4.49)$$

Mas, este sistema, é Hamiltoniano com função Hamiltoniana

$$H(u, v) = \left(\frac{3}{2} - r\right)u^2 + \frac{v^2}{2} - uv + \frac{1}{2}\sqrt{-2r+2}u^3 + \frac{u^4}{8}.$$

E isto finda a prova do teorema. Portanto, o equilíbrio Q_+ é de fato um centro restrito a uma variedade central local. ■

Conclusões e Trabalhos Futuros

Nesta dissertação estudamos o problema foco–centro para sistemas de equações diferenciais em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 . Demonstramos o Teorema de Bautin, o qual responde o problema foco–centro para sistema quadráticos em \mathbb{R}^2 , com o auxílio da Teoria das bases de Groebner. Em seguida, apresentamos alguns tópicos necessários para o estudo do problema foco–centro em \mathbb{R}^3 , tais como: múltiplo de Jacob inverso e superfície algébrica invariante. Finalizamos esta dissertação aplicando estes resultados nos sistemas de Moon–Rand, sistema de Lü e sistema de Lorenz.

Como sugestões para trabalhos futuros podemos citar:

1) Resolver a seguinte conjectura:

Conjectura *Considere uma equação diferencial em \mathbb{R}^3 definida por um campo de vetores polinomial \mathcal{X} . Suponha que exista um equilíbrio isolado E_0 desta equação diferencial tal que $D\mathcal{X}(E_0)$ tenha autovalores da forma*

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, \quad \omega_0 \neq 0 \quad e \quad \lambda_3 \neq 0.$$

Se o fluxo desta equação diferencial restrito a uma variedade central local de E_0 tem um centro, então esta variedade central local está contida numa superfície algébrica invariante.

Esta conjectura foi proposta em um seminário ministrado pelo professor Luis Fernando Mello no IME–USP em abril de 2012.

2) Considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} x' = -y - x^2 + y^2, \\ y' = x - 3xy, \\ z' = 2y - z, \end{cases}$$

É fácil ver que a origem é um ponto de equilíbrio do sistema. Calculamos os quatro

primeiros coeficientes de Lyapunov e vimos que esses são nulos. Desta forma surge a pergunta, é o equilíbrio um foco ou um centro?

3) Estudar o problema foco–centro para sistemas cúbicos de equações diferenciais no plano e em \mathbb{R}^3 .

Bibliografia

- [1] BAUTIN, N.N., *On the number of limit cycles which the variations of coefficients from an equilibrium state of the type focus or center.* Amer. Math. Soc. Translations, 100, 1-19, (1954).
- [2] BIBIKOV, Y.N., *Local Theory of Nonlinear Analytic Ordinary Differential Equations.* Lecture Notes in Math., vol. 702, Springer-Verlag, New York, (1979).
- [3] BLOWS, T. R., LLOYD, N. G., *The number of small-amplitude limit cycles of Liénard equations.* Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 95, 359-366, (1984).
- [4] BUICĂ, A., GARCÍA, I. A., MAZA, S., *Existence of inverse Jacobi multipliers around Hopf points in \mathbb{R}^3 : Emphasis on the center problem.* J. Differential Equations, 252 6324-6336 (2012).
- [5] CHICONE, C., *Ordinary Differential Equations with Applications.* Applied Mathematical, Springer-Verlag, New York, (1999).
- [6] COELHO, S. F., MELLO, L. F., *Degenerate Hopf bifurcations in the Lü system.* Physics Letters A, 373, 1116-1120, (2009).
- [7] COX, D., LITTLE, J E OSHEA, D., *Ideal, Varieties, and Algorithms.* Springer-Verlag (1992).
- [8] COELHO, SINVAL FERREIRA, *Estudo da Estabilidade e das Bifurcações de Hopf em um Sistema Tipo Lorenz,* Dissertação de Mestrado do Instituto de Ciências Exatas, UNIFEI, (2008).
- [9] DULAC, H., *Recherches sur les points singuliers des équations différentielles,* J. de l'École Polytechnique, 9, 1-25, (1904).

- [10] DUMORTIER, F., LLIBRE, J., ARTÉS, J. C., *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*. Springer Verlag, New York, (2006).
- [11] EDNERAL, V.F., MAHDI, A., ROMANOVSKI, V. G., SHAFER, D. S., *The center problem on a center manifold in \mathbb{R}^3* . J. Differential Equations 252, 6324-6336, (2012).
- [12] GASULL, A., GINÉ, J., *Cyclicity versus Center Problem*. Qual. Theory Dyn. Syst. 9, 101-113, (2010).
- [13] HIRSCH, M., SMALE, S., DEVANEY, R., *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Academic Press, New York, (2003).
- [14] HUBBARD, J. H., WEST, B. H., *Differential Equations: A Dynamical Systems Approach, Higher-Dimensional Systems*. (Texts in Applied Mathematics), Springer Verlag, New York, (1991).
- [15] KAPTEYN, W., *On the centra of the integral curves which satisfy differential equations of the first order and the first degree*. Proc. Kon. Akad. Wet., 13, 1241-1252, (1911).
- [16] KUZNETSOV, Y.A., *Elements of Applied Bifurcation Theory*. second edition, Springer-Verlag, New York, (1998).
- [17] Lü, Z., DUAN, L., *Codimension-2 Bautin bifurcation in the Lü system*. Phys. Lett. A, 366, 442-446, (2007).
- [18] MAHDI. A., PESSOA, C., SHAFER, D. S., *Centers on center manifolds in the Lü system*. Phys. Lett. A, 375, 3509-3511, (2011).
- [19] MONTESINOS-AMILIBIA, A. ODEinR2, software disponível em <http://www.uv.es/montesin>.
- [20] MOON F.C., RAND R.H., *Parametric stiffness control of flexible structures*. Jet Propulsion Laboratory Publication 85-29, Vol. II, California Institute of Technology 329-342, (1985).
- [21] PONTRYAGIN, L.S., *Ordinary Differential Equations*. Addison-Wesley Publishing Company Inc., (1962).

- [22] ROMANOVSKI, V.G., SHAFER, D.S., *The Center and Cyclicity Problems: A Computational Algebra Approach*. Boston-Basel-Berlin: Birkhauser, (2009).
- [23] J. SOTOMAYOR, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, (1979).