

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# Órbitas Birkhoff na Ferradura Rotacional

Guilherme Porfírio Marson

Orientador: Prof. Dr. Bráulio Augusto Garcia

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

ITAJUBÁ, 2 DE JULHO DE 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# Órbitas Birkhoff na Ferradura Rotacional

**Guilherme Porfírio Marson**

**Orientador: Prof. Dr. Bráulio Augusto Garcia**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em  
Matemática como parte dos requisitos para obtenção do  
Título de Mestre em Ciências em Matemática

**Área de Concentração: Topologia/Geometria**

ITAJUBÁ – MG

2 DE JULHO DE 2017

*Dedico este trabalho à memória do meu avô José Porfírio, que nos ensinou com simplicidade que a humildade e a educação são os bens mais valiosos de uma pessoa.*

# Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por ter me dado saúde e forças para realizar este sonho.

Aos meus pais, Maria José e Gilberto, pelo carinho e apoio incondicional em todos os momentos de minha vida.

Aos meus irmãos, Gabriela e Gustavo, por me ouvirem e estarem sempre presentes nas horas boas e ruins.

À minha namorada Paula, por diariamente ser leal, atenciosa e companheira, me incentivando a seguir em frente nas situações mais difíceis.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Bráulio Augusto Garcia, por tantos ensinamentos valiosos com competência e simplicidade.

Aos professores do Instituto de Matemática e Computação da UNIFEI, pela receptividade, cordialidade e profissionalismo, em especial, ao Prof. Dr. Denis de Carvalho Braga, por sua disponibilidade e amizade sincera.

Aos colegas e amigos do Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Itajubá pelo saudável convívio durante o curso.

A todas as pessoas que direta, ou indiretamente, contribuíram para a elaboração deste trabalho os meus sinceros agradecimentos.

*“Na maior parte das ciências uma geração põe abaixo o que a outra construiu e o que uma estabeleceu, a outra desfaz. Somente na Matemática é o que cada geração constrói um novo andar sobre a antiga estrutura.”*

*Hankel.*

# Resumo

Neste trabalho, estudamos difeomorfismos de classe  $C^1$  do anel com uma órbita homoclínica transversal  $K$ -rotacional a um ponto fixo hiperbólico. Primeiramente, recuperamos um resultado clássico de Poincaré, Birkhoff e Smale: Um ponto homoclínico implica a existência de uma ferradura topológica para alguma iterada. Além disso, obtemos informações interessantes sobre o comportamento rotacional das órbitas em um conjunto de Cantor invariante e maximal (chamado ferradura rotacional). Usando conjugação e dinâmica simbólica associada ao conjunto de Cantor não-errante da ferradura, provamos a existência de um intervalo de rotação não trivial  $I$ , e de incontáveis conjuntos de Cantor invariantes para cada número de rotação irracional em  $I$ . Finalizamos o trabalho caracterizando a codificação das órbitas Birkhoff da aplicação de duplicação em  $\mathbb{S}^1$ , as quais implicam a existência de órbitas Birkhoff da ferradura rotacional.

**Palavras-chave:** Anel, Ferradura Rotacional, Intervalo de Rotação, Órbitas Birkhoff.

# Abstract

In this work, we consider  $C^1$  diffeomorphisms of the annulus with a  $K$ -rotational transverse homoclinic orbit to a hyperbolic fixed point. We first recover the well know classic result of Poincaré, Birkhoff and Smale: Homoclinic point imply a topological horseshoe for some iterate. Furthermore, we obtain interesting information about the rotational behavior of orbits in the maximal invariant Cantor set (called rotational horseshoe). Using conjugation and symbolic dynamics associated with the non-wandering Cantor set of the horseshoe, we prove the existence of a non-trivial rotation interval  $I$ , and uncountable many invariant Cantor set of each irrational rotation number in  $I$ . We conclude the work by characterizing, in the simbolic level, the Birkhoff orbits of the doubling application in  $\mathbb{S}^1$ , which implies the existence of Birkhoff orbits of the rotational horseshoe.

**Keywords:** Annulus, Birkhoff Orbits, Rotational Horseshoe, Rotation Interval.

# Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Índice	vi
Lista de Figuras	viii
<b>1 Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1 Espaços Simplesmente Conexos e Recobrimento Universal . . . . .	1
1.2 Sistemas Dinâmicos, Pontos Homoclínicos e Números de Rotação . . . . .	6
<b>2 Principais Resultados</b>	<b>18</b>
2.1 Ferradura Rotacional e Intervalo de Rotação . . . . .	18
2.1.1 Terminologia e Modelo Geométrico . . . . .	31
2.2 Rotação Rígida Irracional e Conjuntos de Cantor Minimais . . . . .	32
2.3 Um Método Geométrico para Construir Órbitas Simbólicas Rotacionais . . . . .	45
<b>3 Órbitas Birkhoff</b>	<b>53</b>
3.1 Ordem Cíclica e Órbitas que Preservam Orientação . . . . .	53
3.2 Aplicação de Duplicação e Ferradura Rotacional . . . . .	58
3.2.1 Aplicações Induzidas . . . . .	61
3.3 Caracterização das Órbitas que preservam Orientação . . . . .	68

3.3.1	Decomposição em Soma de Farey . . . . .	91
	<b>Conclusões</b>	<b>93</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>94</b>

# Lista de Figuras

1.1	Variedade estável local e variedade instável local de um ponto hiperbólico $p$ .	12
1.2	À esquerda, $q$ é um ponto homoclínico a $p$ transversal rotacional. À direita, $q$ é um ponto homoclínico a $p$ transversal não rotacional. . . . .	15
2.1	Construção das faixas $V_1$ e $H_1$ . . . . .	20
2.2	Faixas $V_0, V_1, H_0$ e $H_1$ com suas respectivas interseções. . . . .	20
2.3	Primeira etapa da construção de um conjunto de Cantor sobre $W_{loc}^s(p)$ . . .	21
2.4	Primeira etapa da construção de um conjunto de Cantor $W_{loc}^s(p)$ . . . . .	21
2.5	Primeira etapa da construção de dois conjuntos de Cantor sobre $W_{loc}^u(p)$ . . .	22
2.6	Primeira etapa da construção de um conjunto de Cantor em $U$ . . . . .	22
2.7	$\{G^j(\tilde{x}_a)\}_{j \in \mathbb{N}}$ é densa em $\Gamma^{-1}(\Lambda^N)$ . . . . .	31
2.8	Um modelo da ferradura rotacional. . . . .	32
2.9	Partições $\mathcal{P}'_\alpha(c)$ e $\mathcal{P}_\alpha(c)$ de $\mathbb{S}^1$ . . . . .	33
2.10	Os pontos representam os termos da sequência $P_\alpha^j(d)$ para cada $j \in \mathbb{Z}$ . . . . .	46
3.1	Ordem cíclica dos pontos $a, b, c \in \mathbb{S}^1$ . . . . .	54
3.2	Representação geométrica das órbitas $\{\psi^j(t_0)\}_{j \in \mathbb{Z}}$ e $\{\psi^j(t_1)\}_{j \in \mathbb{Z}}$ . . . . .	55
3.3	Uma órbita que não preserva a ordem cíclica não pode preservar orientação em $\mathbb{S}^1$ . . . . .	57
3.4	Faixas $V'_0, V_0$ e $V_1$ em $U$ . . . . .	58
3.5	Ação da projeção $\pi$ sobre as faixas $V'_0, V_0$ e $V_1$ . . . . .	61
3.6	A aplicação $g$ leva seguimentos verticais de $V'_0 \cup V_1$ em seguimentos verticais em $U$ . . . . .	62

3.7	Representação topológica do gráfico de $\hat{g}$ . . . . .	63
3.8	Ordem cíclica dos pontos $a, b, c \in E$ . . . . .	72
3.9	Escadaria do ponto $x = 4/5$ . . . . .	75
3.10	Escadarias extremas do ponto $x = 4/5$ . . . . .	76
3.11	Árvore de Farey. . . . .	92

# Capítulo 1

## Preliminares

Este capítulo é constituído de várias noções e resultados que servem como pré-requisitos para o estudo que estamos interessados em realizar, ele está dividido em duas partes. Na primeira, introduzimos as noções de espaço simplesmente conexo e recobrimento universal, as quais serão utilizadas na segunda, onde definimos os conceitos de órbita homoclínica transversal  $K$ -rotacional e de número de rotação. Destacamos nesta segunda parte, os Teoremas (1.2.1) e (1.2.2) amplamente utilizados ao longo do texto.

### 1.1 Espaços Simplesmente Conexos e Recobrimento Universal

**Definição 1.1.1.** *Uma coleção  $\tau$  de subconjuntos de um conjunto  $X$  é dita ser uma topologia em  $X$  se  $\tau$  verifica as seguintes propriedades:*

- (i)  $\emptyset \in \tau$  e  $X \in \tau$ .
- (ii) Se  $A_i \in \tau$  para  $i = 1, \dots, n$ , então  $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \tau$ .
- (iii) Se  $\{A_\alpha\}$  é uma coleção arbitrária de elementos de  $\tau$ , então  $\bigcup_\alpha A_\alpha \in \tau$ .

Se  $\tau$  é uma topologia em  $X$ , então  $X$  é chamado um espaço topológico e os elementos de  $\tau$  são ditos conjuntos abertos em  $X$ . Em alguns momentos, utilizaremos a notação  $(X, \tau)$  para indicar que o conjunto  $X$  está munido com a topologia  $\tau$ .

**Exemplo 1.1.1. (i) (topologias triviais)** Dado um conjunto  $X$ , podemos torná-lo um espaço topológico de um modo absolutamente simples, basta munir  $X$  com as seguintes topologias

$$\tau = \{V; V \subseteq X\} = \mathbb{P}(X) \quad \text{ou} \quad \rho = \{\emptyset, X\}.$$

É claro que  $\tau$  e  $\rho$  satisfazem as condições da Definição 1.1.1 ( $\tau$  é chamada topologia discreta e  $\rho$ , topologia caótica.)

**(ii)** Em  $\mathbb{R}^n$ , o conjunto de todas as uniões arbitrárias de conjuntos da forma

$$(a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n),$$

onde  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$  para  $i = 1, \dots, n$ , é uma topologia em  $\mathbb{R}^n$  chamada topologia usual. A menos que dissermos o contrário, sempre consideraremos  $\mathbb{R}^n$  com esta topologia.

Uma fonte de exemplos de espaços topológicos é dada pela categoria dos subespaços topológicos de um espaço  $(X, \tau)$ . Tomando um subconjunto  $B \subset X$ , o conjunto

$$\tau_B = \{V \cap B : V \in \tau\}$$

é uma topologia em  $B$  denominada topologia induzida por  $X$  em  $B$ . O espaço topológico  $(B, \tau_B)$  chama-se então um subespaço topológico do espaço  $(X, \tau)$ .

**Definição 1.1.2.** Uma aplicação  $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$  é dita ser uma aplicação contínua se  $f^{-1}(A) \in \tau_X$  para todo  $A \in \tau_Y$ .

Seja  $\sim$  uma relação de equivalência no espaço topológico  $(X, \tau)$ . O conjunto  $X/\sim$ , das classes de equivalência  $[x]$ , tal que  $x \in X$ , é chamado conjunto quociente de  $X$  pela relação de equivalência  $\sim$ , onde  $[x] = \{y \in X : y \sim x\}$ . Utilizando a aplicação

$$\begin{aligned} \Psi : X &\longrightarrow X/\sim \\ x &\longmapsto \Psi(x) = [x], \end{aligned} \tag{1.1}$$

denominada projeção canônica de  $X$  sobre  $X/\sim$ , podemos munir  $X/\sim$  com uma topologia  $\tilde{\tau}$  definida do seguinte modo:

$\tilde{V}$  é aberto em  $X/\sim$  se, e somente se,  $\Psi^{-1}(\tilde{V})$  é aberto em  $X$ .

A topologia  $\tilde{\tau}$  é denominada **topologia quociente** e é a maior topologia, segundo a relação de inclusão, que torna a projeção canônica  $\Psi$  uma aplicação contínua. O espaço topológico  $(\tilde{X}, \tilde{\tau})$  chama-se então, **espaço topológico quociente**.

**Definição 1.1.3.** *Uma aplicação  $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$  é dita ser um homeomorfismo se é bijetora, contínua, e sua inversa,  $f^{-1} : (Y, \tau_Y) \longrightarrow (X, \tau_X)$  também é uma aplicação contínua.*

Denotamos o espaço dos homeomorfismos de  $X$  em  $Y$  por  $\text{Homeo}(X, Y)$ , no caso em que  $X = Y$ , denotamos este espaço simplesmente por  $\text{Homeo}(X)$ . Quando  $\text{Homeo}(X, Y) \neq \emptyset$  os espaços topológicos  $X$  e  $Y$  são ditos homeomorfos, tais espaços são indistinguíveis no que diz respeito às suas propriedades topológicas, ou seja, representam o mesmo objeto na categoria dos espaços topológicos.

**Exemplo 1.1.2.** *Fixados  $a \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$ , consideremos no intervalo  $[a, a + n]$  a seguinte relação de equivalência:*

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}. \quad (1.2)$$

*E em  $\mathbb{R}^2$ , o subespaço topológico*

$$\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| = 1\}$$

*onde,  $\|(x, y)\| = (x^2 + y^2)^{1/2}$ . Munindo  $[a, a + n]/\sim$  com a topologia quociente, a aplicação*

$$\begin{aligned} \lambda : [a, a + n]/\sim &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ [x] &\longmapsto \lambda([x]) = e^{2\pi i x} \end{aligned} \quad (1.3)$$

*é um homeomorfismo entre  $[a, a + n]/\sim$  e  $\mathbb{S}^1$ .*

*Note que  $\lambda$  está bem definida, pois se  $y \in [x]$  existe  $m \in \mathbb{Z}$  tal que,  $y = m + x$  e portanto,*

$$\lambda([y]) = e^{2\pi i y} = e^{2\pi i m} e^{2\pi i x} = e^{2\pi i x} = \lambda([x]).$$

*Agora, tomando  $[x], [y] \in [a, a + n]/\sim$  tais que  $\lambda([x]) = \lambda([y])$ , temos pela periodicidade da exponencial complexa que  $y = x + m$  para algum  $m \in \mathbb{Z}$ , donde segue que  $[x] = [y]$ .*

*Para ver que  $\lambda$  é sobrejetiva, fixado  $z \in \mathbb{S}^1$ , existe  $0 \leq t < 1$  tal que,*

$$z = \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t) = e^{2\pi i t},$$

logo  $z = \lambda([t])$ . A continuidade de  $\lambda$  é obtida observando que  $\lambda = \exp \circ \Psi$ , ou seja,  $\lambda$  é composição de aplicações contínuas (vide 1.1). Por outro lado,  $\lambda$  é uma aplicação aberta, isto é, leva abertos de  $[a, a+n]/\sim$  em abertos de  $\mathbb{S}^1$ , donde segue a continuidade de  $\lambda^{-1}$ .

Devido ao homeomorfismo 1.3 do Exemplo 1.1.2 os espaços  $[a, a+n]/\sim$  são chamados de círculos ou toros unidimensionais. Ao longo do texto,  $\mathbb{T}$  denotará o círculo  $[0, 1]/\sim$ .

Até o fim desta seção,  $X$  e  $Y$  denotarão espaços topológicos.

**Definição 1.1.4.** *Seja  $f : X \rightarrow Y$ . Um aberto  $V$  de  $Y$  é dito ser uma vizinhança distinguida com respeito a aplicação  $f$  se*

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha},$$

onde os  $U_{\alpha}$ 's são abertos em  $X$ , dois a dois disjuntos, e cada  $U_{\alpha}$  se aplica por  $f$  homeomorficamente sobre  $V$ .

**Definição 1.1.5.** *Uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$  é dita uma aplicação de recobrimento (ou simplesmente um recobrimento) se cada ponto  $y \in Y$  pertence a uma vizinhança distinguida  $V_y$  com respeito à aplicação  $f$ .*

**Definição 1.1.6.** *Duas aplicações contínuas  $f, g : X \rightarrow Y$  dizem-se homotópicas quando existe uma aplicação contínua*

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

tal que,  $H(x, 0) = f(x)$  e  $H(x, 1) = g(x)$  para todo  $x \in X$ . A aplicação  $H$  chama-se então uma homotopia entre  $f$  e  $g$ , que denotamos por  $H : f \approx g$ .

Note que dada uma homotopia  $H : f \approx g$ , para cada  $t \in [0, 1]$ , podemos definir a aplicação

$$\begin{aligned} H_t : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto H_t = H(x, t). \end{aligned}$$

Assim, dar uma homotopia  $H$  entre duas aplicações  $f$  e  $g$  equivale a definir uma família de aplicações contínuas a um parâmetro  $(H_t)_{t \in I}$  de  $X$  em  $Y$  que começa em  $f$

e termina em  $g$ , de modo que a aplicação  $(x, t) \mapsto H_t(x)$  seja contínua. Quando cada aplicação  $H_t$  for um homeomorfismo dizemos que  $H$  é uma isotopia entre  $f$  e  $g$ . Note que o fluxo em Equações Diferenciais Ordinárias é um exemplo importante de tal homotopia da identidade.

**Definição 1.1.7.** *Um caminho em  $X$  é uma aplicação contínua  $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow X$ . No caso particular que  $f(a) = f(b)$  dizemos que  $f$  é um caminho fechado em  $X$ .*

Note que um caso particular de caminho fechado é um caminho constante  $f(t) = x$  para todo  $t \in [a, b]$ , onde  $x \in X$ .

Usando a noção de caminho fechado e a definição (1.1.6) temos o importante conceito de espaço simplesmente conexo.

**Definição 1.1.8.** *Dizemos que  $X$  é simplesmente conexo quando todo caminho fechado em  $X$  é homotópico a um caminho constante em  $X$ .*

**Definição 1.1.9.** *Dizemos que  $X$  é conexo por caminhos se dados quaisquer dois pontos  $p, q \in X$  existe um caminho em  $X$  que conecta  $p$  a  $q$ . Isto é, existe uma função contínua  $f : [a, b] \rightarrow X$  tal que,  $f(a) = p$  e  $f(b) = q$ . Além disso, dizemos que  $X$  é localmente conexo por caminhos se todo ponto  $x \in X$  pertence a uma vizinhança  $V_x$  que é conexa por caminhos.*

**Teorema 1.1.1. (Recobrimento Universal).** *Seja  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  um recobrimento, cujo domínio  $\tilde{X}$  é simplesmente conexo e localmente conexo por caminhos. Para todo recobrimento  $q : \tilde{Y} \rightarrow X$  com  $\tilde{Y}$  conexo, existe um recobrimento  $f : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$  tal que  $q \circ f = p$ .*

**Definição 1.1.10.** *Seja  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  um recobrimento com  $\tilde{X}$  simplesmente conexo e localmente conexo por caminhos. Então  $\tilde{X}$  chama-se um recobrimento universal do espaço  $X$ .*

O termo recobrimento universal usado na definição (1.1.10) é devido ao Teorema (1.1.1), pois se  $\tilde{X}$  é simplesmente conexo, localmente conexo por caminhos e recobre  $X$ , então  $\tilde{X}$  recobre qualquer outro recobrimento de  $X$ .

## 1.2 Sistemas Dinâmicos, Pontos Homoclínicos e Números de Rotação

**Definição 1.2.1.** Dado um conjunto  $X \neq \emptyset$ . Dizemos que  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  é uma métrica sobre  $X$  se as seguintes condições se verificam para quaisquer  $x, y, z \in X$ :

- (i)  $d(x, y) \geq 0$  e  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ;
- (ii)  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
- (iii)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Nessas condições, cada imagem  $d(x, y)$  recebe o nome de distância de  $x$  a  $y$  e o par  $(X, d)$ , onde  $d$  é uma métrica sobre  $X$  é chamado de espaço métrico.

Dado um espaço métrico  $(X, d)$ , um ponto  $a \in X$  e um número real  $r > 0$ , temos os seguintes conjuntos:

- (i) A bola aberta de centro  $a$  e raio  $r$

$$B(a, r) = \{x \in X; d(a, x) < r\}.$$

- (ii) A bola fechada de centro  $a$  e raio  $r$

$$B[a, r] = \{x \in X; d(a, x) \leq r\}.$$

- (iii) A esfera de centro  $a$  e raio  $r$

$$S[a, r] = \{x \in X; d(a, x) = r\}.$$

**Exemplo 1.2.1.** Em  $\mathbb{R}^2$  com a métrica euclidiana, a saber,

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = ((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)^{\frac{1}{2}}$$

o conjunto

$$\mathbb{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r_1 \leq \|(x, y)\| \leq r_2\}$$

é dito ser um anel em  $\mathbb{R}^2$ , onde  $0 < r_1 < r_2$  e  $\|(x, y)\| = d((x, y), (0, 0))$ . Note que este conjunto não é simplesmente conexo, basta tomar qualquer caminho fechado  $\gamma$  em  $\mathbb{A}$  de tal forma que a componente conexa limitada de  $\gamma$  contenha os pontos  $(x, y) \in \mathbb{A}$  tais que  $\|(x, y)\| = r_1$ .

Ao longo do texto chamaremos de anel qualquer conjunto homeomorfo a  $\mathbb{A}$ .

**Definição 1.2.2.** Seja  $\Sigma_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ , isto é, o conjunto de todas sequências bi-infinitas cujos termos são “0” ou “1”. Dados dois pontos  $a = (a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  e  $b = (b_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  em  $\Sigma_2$ , defina

$$d(a, b) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{|a_j - b_j|}{2^{|j|}}.$$

O par  $(\Sigma_2, d)$  é um espaço métrico, o qual chamaremos de espaço simbólico.

Dado  $a \in \Sigma_2$ , o número  $R^+(a)$  definido por,

$$R^+(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j \quad (1.4)$$

é a frequência de 1's para frente do código simbólico  $a$ , sempre que o limite 1.4 existir.

Analogamente, o número  $R^-(a)$  definido por

$$R^-(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n a_{-j} \quad (1.5)$$

é a frequência de 1's para trás do código simbólico  $a$ , sempre que o limite 1.5 existir.

**Observação 1.2.1.** A terminologia “frequência de 1's para frente”, respectivamente “para trás”, empregada na Definição 1.2.2 será provisória, pois após apresentarmos o Teorema (2.1.1) no próximo capítulo, os números  $R^+(a)$  e  $R^-(a)$ , associados a uma sequência simbólica  $a \in \Sigma_2$ , ganharão uma interpretação “rotacional”, e por este motivo, passarão a ser chamados de número de rotação simbólico para frente, respectivamente, número de rotação simbólico para trás.

A aplicação  $\sigma$  a seguir é denominada *shift* (ou deslocamento) e possui um papel fundamental para as conclusões do trabalho

$$\begin{aligned} \sigma : \quad \Sigma_2 &\longrightarrow \Sigma_2 \\ a = (a_j)_{j \in \mathbb{Z}} &\longmapsto \sigma(a) = (a_{j+1})_{j \in \mathbb{Z}}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Ao longo do texto, chamaremos de **palavra** qualquer sequência finita cujos termos são 0 ou 1. Dada uma palavra  $W \in \{0, 1\}^n$ , para algum  $n \in \mathbb{N}$ , o símbolo  $(W)^{+\infty}$  indicará o elemento de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  obtido pela concatenação da palavra  $W$ , ou seja,

$$(W)^{+\infty} = WWW \dots$$

Chamaremos o espaço  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  de espaço simbólico positivo e o denotaremos por  $\Sigma_2^+$ .

Dada uma palavra  $W$  o símbolo  $\overline{W}$  denotará a palavra que é obtida trocando os zeros de  $W$  por uns e vice versa. Se  $W_1 = a_{-1} \dots a_{-n}$  e  $W_2 = b_1 \dots b_m$ , a palavra  $\widehat{W}_1 = a_{-n} \dots a_{-1}$  é chamada a palavra reversa de  $W_1$  e o símbolo  $(W_1, W_2)^\infty$  denotará o elemento de  $\Sigma_2$  dado pela concatenação de  $\widehat{W}_1$  para trás e de  $W_2$  para frente, isto é,

$$(W_1, W_2)^\infty = \dots a_{-n} a_{-n+1} \dots a_{-1} b_1 \dots b_m \dots$$

Além disso, dado uma palavra  $W = a_1 \dots a_n$  seu comprimento  $|W|$ , e sua magnitude ( $n^\circ$  de 1's)  $|W|_1$ , são definidos por,

$$|W| = n \quad e \quad |W|_1 = \#\{i \in \{1, \dots, n\} : a_i = 1\}.$$

**Definição 1.2.3.** Chamamos de sistema dinâmico discreto o par  $(X, f)$ , onde  $X$  é um espaço métrico e  $f : X \rightarrow X$  uma aplicação. Além disso, dado um ponto  $x_0 \in X$  temos que:

### 1. A sequência

$$\{x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f^2(x_0), \dots, x_n = f^n(x_0), \dots\}$$

é denominada órbita do ponto  $x_0$  e é denotada por  $\{f^n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ , onde  $f^i(x_0)$  denota a  $i$ -ésima iterada da aplicação  $f$  sobre o ponto  $x_0$ .

2. Se  $f(x_0) = x_0$ , então  $x_0$  é dito um ponto fixo da aplicação  $f$  e neste caso sua órbita é a sequência constante

$$\{x_0, x_0, \dots, x_0, \dots\}.$$

3. Dizemos que  $x_0$  é um ponto periódico de período  $n$  da aplicação  $f$  se  $f^n(x_0) = x_0$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ . Note que a órbita de um ponto periódico de período  $n$  tem a forma

$$\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0, \dots\}.$$

Se  $x_0$  é um ponto periódico de  $f$ , dizemos que  $x_0$  possui período mínimo  $n$  se  $n$  é o menor inteiro positivo tal que  $f^n(x_0) = x_0$ . Um ponto fixo é um ponto periódico de período  $n = 1$ .

Podemos interpretar  $x_0$  como um estado inicial em  $X$  e  $x_n = f^n(x_0)$  como o estado futuro no tempo  $n$ , ou seja,  $x_0$  evolui no espaço  $X$  sob aplicações sucessivas da lei dinâmica  $f$ . Nesse sentido, estudar a dinâmica  $f$  é entender a evolução de cada estado inicial.

O número de rotação  $R^+(a)$  de um ponto  $a \in \Sigma_2$ , introduzido na Definição 1.2.2, é na verdade atribuído à órbita do ponto  $a$  sobre  $\sigma$  quando consideramos o sistema dinâmico  $(\Sigma_2, \sigma)$ . Tal atribuição faz sentido devido ao resultado a seguir, que mostra que o número de rotação de um código simbólico é invariante por  $\sigma$ .

**Afirmção 1.1.** *Seja  $a \in \Sigma_2$  e suponha que  $R^+(a)$  existe. Então,  $R^+(\sigma(a)) = R^+(a)$ .*

**Demonstração:** Por definição temos que,

$$R^+(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j \quad \text{e} \quad R^+(\sigma(a)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{j+1}.$$

Assim, pondo para cada  $n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j \quad \text{e} \quad c_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{j+1}, \quad (1.7)$$

segue que

$$R(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad \text{e} \quad R^+(\sigma(a)) = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n. \quad (1.8)$$

Mas, por 1.7, para cada  $n \in \mathbb{N}$  temos que

$$b_n = \frac{a_1}{n} - \frac{a_{n+1}}{n} + c_n.$$

Agora, como a sequência  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é limitada e  $1/n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$  temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Logo, por 1.8 temos que  $R^+(\sigma(a)) = R^+(a)$ .

■

Vale um resultado inteiramente análogo ao da Afirmação (1.1) com respeito ao número de rotação  $R^-(a)$ .

Devido ao resultado anterior, dado  $a \in \Sigma_2$ , algumas vezes, nos referiremos a  $R^+(a)$  (resp.  $R^-(a)$ ) como sendo o número de rotação simbólico para frente (resp. para trás) da órbita  $\{\sigma^j(a)\}_{j \in \mathbb{N}}$ . Uma órbita simbólica para a qual existe seu número de rotação para frente (resp. para trás) será chamada de órbita simbólica rotacional para frente (resp. para trás), ou simplesmente, órbita simbólica rotacional.

A seguir apresentaremos alguns conceitos de uma dinâmica diferenciável (hiperbólica).

**Definição 1.2.4.** *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^k$  aberto e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  uma aplicação diferenciável. Um ponto  $p$  é dito ponto fixo hiperbólico para  $f$  se  $p$  for ponto fixo de  $f$  e  $df(p)$  não tem autovalores sobre o círculo unitário. Se  $p$  é um ponto periódico de período  $n$ , então  $p$  é ponto periódico hiperbólico se  $df^n(p)$  não tem autovalores sobre o círculo unitário.*

**Se uma aplicação  $f$  possui um ponto periódico hiperbólico  $p$  de período  $n$ , podemos classifica-lo de três formas:**

1. Dizemos que  $p$  é um atrator, ou ponto periódico atrator, se todos os autovalores de  $df^n(p)$  têm módulo menor que 1.
2. Dizemos que  $p$  é uma fonte, ou ponto periódico repulsor, se todos os autovalores de  $df^n(p)$  têm módulo maior que 1.
3. Dizemos que  $p$  é uma sela se  $df^n(p)$  possuir pelo menos um autovalor com módulo maior que 1 e outro com módulo menor que 1.

(Veja Definição 6.2, p.215, [3])

**Teorema 1.2.1. (Hartman-Grobman).** *Sejam  $\Delta \subset \mathbb{R}^k$  aberto,  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^k$  um difeomorfismo  $C^1$  sobre sua imagem e  $p \in \Delta$  um ponto fixo hiperbólico de  $f$ . Então, existem vizinhanças  $U$  de  $p$  em  $\Delta$  e  $W$  de  $0$  em  $\mathbb{R}^k$ , e existe um homeomorfismo  $h : U \rightarrow W$  tais que*

$$h \circ f = df(p) \circ h.$$

(Veja, por exemplo, Teorema 8, p.286, [10])

O Teorema (1.2.1) diz que o comportamento da dinâmica  $f$  nas proximidades do ponto fixo hiperbólico  $p$  pode ser compreendido através do estudo dinâmico da transformação linear  $df(p) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  nas proximidades do ponto  $h(p)$ . Ao longo deste trabalho, faremos uso contínuo deste resultado, e estaremos interessados em estudar o comportamento dinâmico de difeomorfismos definidos em um anel fechado  $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^2$  que possuem um ponto fixo hiperbólico do tipo sela. Veremos que a dinâmica dada por tais difeomorfismos são complicadas quando existem os chamados *pontos homoclínicos rotacionais* a estes pontos hiperbólicos. Para definirmos a noção de um ponto homoclínico rotacional a um ponto fixo hiperbólico  $p$ , precisaremos introduzir dois objetos de importância fundamental, a saber, as variedades estável e instável em  $p$ . O Teorema (1.2.2) a seguir nos permitirá definir tais objetos.

**Teorema 1.2.2.** *Sejam  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$  aberto e  $p \in \Delta$  um ponto fixo tipo sela de  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Então, existe  $\epsilon > 0$  e uma curva  $C^1$*

$$\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

*tal que:*

1.  $\gamma(0) = p$ .
2.  $\gamma'(t) \neq 0$ .
3.  $\gamma'(0)$  é um autovetor instável para  $df(p)$ .
4.  $\gamma$  é  $f^{-1}$  invariante.

5.  $f^{-n}(\gamma(t)) \rightarrow p$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

6. Se  $\|f^{-n}(q) - p\| < \epsilon$  para todo  $n \geq 0$ , então  $q = \gamma(t)$  para algum  $t$ .

(Teorema 6.5, p.217, [3]).

A curva  $\gamma$  dada pelo Teorema 1.2.2 é chamada de **variedade instável local** de  $p$  e é denotada por  $W_{loc}^u(p)$ . Vale um resultado semelhante ao Teorema 1.2.2 trocando a palavra **instável** pela palavra **estável** no item 3 e  $-n$  por  $n$  nos itens 5 e 6, este teorema resulta na definição da **variedade estável local** em  $p$ , a qual será denotada por  $W_{loc}^s(p)$ . Essencialmente,  $W_{loc}^u(p)$  e  $W_{loc}^s(p)$  são curvas regulares passando por  $p$  que têm a propriedade de que quaisquer pontos sobre estas curvas tende a  $p$  sob iterações para trás, respectivamente, para frente da aplicação  $f$  e seus vetores tangentes em  $p$  são autovetores da matriz jacobiana  $df(p)$ .

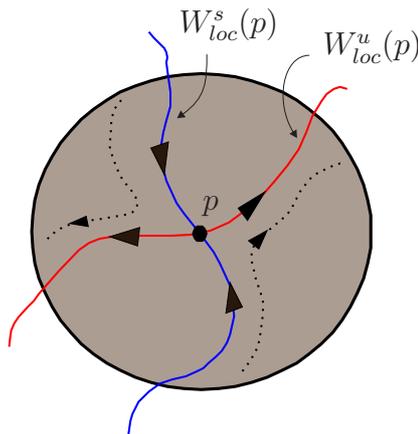


Figura 1.1: Variedade estável local e variedade instável local de um ponto hiperbólico  $p$ .

**Definição 1.2.5.** Sejam  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$  aberto,  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $p \in \Delta$  um ponto fixo hiperbólico de  $f$ . Supondo que  $\gamma_u$  seja a variedade instável local em  $p$ , a **variedade instável** em  $p$ , denotada por  $W^u(p)$  é definida do seguinte modo,

$$W^u(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(\gamma_u).$$

De modo análogo, se  $\gamma_s$  é a variedade estável local em  $p$ , então definimos a **variedade estável** em  $p$  por,

$$W^s(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(\gamma_s).$$

**Definição 1.2.6.** *Suponha  $f : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tenha um fixo hiperbólico  $p$ . Um ponto  $q \neq p$  é dito ser um ponto homoclínico a  $p$  se  $q \in W^u(p) \cap W^s(p)$ .*

**Definição 1.2.7.** *Sejam  $\Pi : \tilde{\mathbb{A}} \rightarrow \mathbb{A}$  uma aplicação de recobrimento e  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  uma aplicação contínua. Uma aplicação  $F : \tilde{\mathbb{A}} \rightarrow \tilde{\mathbb{A}}$  é dita ser um levantamento de  $f$  com respeito a  $\Pi$  se o seguinte diagrama for comutativo.*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbb{A}} & \xrightarrow{F} & \tilde{\mathbb{A}} \\ \Pi \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \Pi \\ \mathbb{A} & \xrightarrow{f} & \mathbb{A} \end{array}$$

**Definição 1.2.8 (Número de Voltas).** *Sejam  $z \in \mathbb{R}^2$  e  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  um caminho fechado tal que  $z \notin \text{Im}(\gamma)$ . Considere a aplicação*

$$\begin{aligned} \xi : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ t &\mapsto \xi(t) = \frac{\gamma(t) - z}{\|\gamma(t) - z\|}, \end{aligned}$$

e seja  $\tilde{\xi} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  um levantamento de  $\xi$  para o recobrimento universal do círculo. O número

$$\eta(\gamma, z) = \tilde{\xi}(1) - \tilde{\xi}(0)$$

é um inteiro que coincide com o número de voltas que o caminho  $\gamma$  realiza ao redor do ponto  $z$  quando  $t$  varia no intervalo  $[0, 1]$ .

O número  $\eta$  definido anteriormente não depende da escolha do levantamento  $\tilde{\xi}$  nem da parametrização de  $\gamma$ , desde que preserve a orientação.

**Proposição 1.2.1.** *Se  $f \in \text{Homeo}(\mathbb{A})$  é homotópico à identidade, então  $F : \tilde{\mathbb{A}} \rightarrow \tilde{\mathbb{A}}$  é um levantamento de  $f$  se, e somente se, vale a igualdade*

$$F(\tilde{x} + n, \tilde{y}) = F(\tilde{x}, \tilde{y}) + (n, 0)$$

para todo  $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \tilde{\mathbb{A}}$  e para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

Seja  $F$  um levantamento de  $f$  em  $\tilde{\mathbb{A}}$  e  $n_0$  um número inteiro fixado. Definindo

$$F_{n_0}(\tilde{x}, \tilde{y}) = F(\tilde{x}, \tilde{y}) + (n_0, 0) \tag{1.9}$$

temos pela Proposição (1.2.1) acima que  $F_{n_0}$  é um levantamento de  $f$ . Além disso, decorre da mesma proposição e da igualdade (1.9) que  $F$  é único a menos de translações por um fator  $n$  na primeira coordenada do recobrimento universal. Mais especificamente, todos os levantamentos de  $f$  são da forma  $F_n$  para algum  $n \in \mathbb{Z}$ .

Agora estamos em condições de definir um objeto que terá um papel fundamental no estudo que estamos interessados em realizar, a saber, os chamados pontos homoclínicos rotacionais.

Considere o cilindro  $\mathbb{A} = \mathbb{S}^1 \times [a, b]$  e o seu recobrimento universal  $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{R} \times [a, b]$ , onde  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$  é o círculo centrado na origem de raio 1 e  $0 \leq a < b < \infty$ . Note que  $\mathbb{A}$  é homeomorfo a um anel fechado em  $\mathbb{R}^2$ , por este motivo, às vezes nos referiremos a  $\mathbb{A}$  como sendo um anel sem fazer mais comentários a respeito do homeomorfismo aí existente.

**Deste ponto em diante,  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  denotará um difeomorfismo de classe  $C^1$  homotópico à identidade em  $\text{Homeo}(\mathbb{A})$  e  $F : \tilde{\mathbb{A}} \rightarrow \tilde{\mathbb{A}}$  um levantamento de  $f$  em  $\tilde{\mathbb{A}}$ .**

**Definição 1.2.9.** *Suponha que  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  tenha um ponto homoclínico  $q$  a um ponto fixo hiperbólico  $p$ .*

1. *Dizemos que  $q$  é um ponto homoclínico transversal a  $p$  se, a interseção da variedade instável local em  $p$  com a variedade estável local em  $p$  que define o ponto homoclínico  $q$  ocorrer de forma transversal, isto é, se os vetores tangentes a estas variedades no ponto  $q$  não forem paralelos. Denotaremos o conjunto dos pontos homoclínicos transversais a  $p$  por*

$$W^u(p) \pitchfork W^s(p).$$

2. *Sejam  $m$  e  $l$  os menores inteiros positivos tais que*

$$q \in f^l(W_{loc}^u(p)) \cap f^{-m}(W_{loc}^s(p)).$$

*Se o conjunto*

$$f^l(W_{loc}^u(p)) \cup f^{-m}(W_{loc}^s(p)) \cup \{p\}$$

contém um caminho fechado  $\gamma$ , homotopicamente não trivial, e tal que  $\eta(\gamma, z) = K$ , dizemos que  $q$  é um ponto homoclínico a  $p$   $K$ -rotacional e a sua órbita é dita uma órbita homoclínica  $K$ -rotacional. No caso em que  $K = 1$ , dizemos simplesmente que  $q$  é um ponto homoclínico a  $p$  rotacional e sua órbita é dita uma órbita homoclínica rotacional.

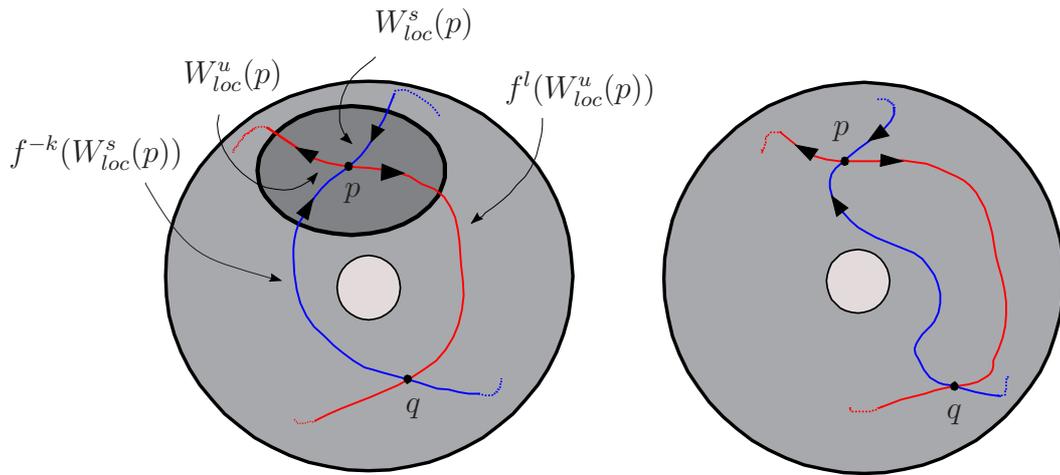


Figura 1.2: À esquerda,  $q$  é um ponto homoclínico a  $p$  transversal rotacional. À direita,  $q$  é um ponto homoclínico a  $p$  transversal não rotacional.

**Definição 1.2.10.** Dado  $x \in \mathbb{A}$ , chamamos de número de rotação de  $x$  para frente com respeito à aplicação  $f$  ao número  $\rho^+(x)$  definido por,

$$\rho^+(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\Pi_1 \circ F^n(\tilde{x}) - \Pi_1(\tilde{x})] \quad (1.10)$$

desde que o limite (1.10) exista, onde  $\tilde{x} \in \Pi^{-1}(x)$ .

De modo semelhante, o número de rotação para trás do ponto  $x$  com respeito à aplicação  $f$  é definido por,

$$\rho^-(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\Pi_1 \circ F^{-n}(\tilde{x}) - \Pi_1(\tilde{x})], \quad (1.11)$$

sempre que o limite (1.11) existir.

Note que a Definição 1.2.10 de fato está bem posta, pois se  $\tilde{y} \in \Pi^{-1}(x)$  for qualquer outro representante de  $x$  em  $\tilde{\mathbb{A}}$  temos que existe  $m \in \mathbb{Z}$  tal que,  $\tilde{y} = \tilde{x} + (m, 0)$ . Logo,

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\Pi_1 \circ F^n(\tilde{y}) - \Pi_1(\tilde{y})] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\Pi_1 \circ F^n(\tilde{x} + (m, 0)) - \Pi_1(\tilde{x} + (m, 0))] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\Pi_1(F^n(\tilde{x})) + \Pi_1(m, 0) - \Pi_1(\tilde{x}) - \Pi_1(m, 0)] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\Pi_1(F^n(\tilde{x})) - \Pi_1(\tilde{x})].
\end{aligned}$$

Análogo para o limite 1.11.

O número  $\rho^+(x)$  definido anteriormente é chamado de número de rotação para frente do ponto  $x \in \mathbb{A}$ , pois representa o número médio de voltas dadas pelo ponto  $x$  em torno de  $\mathbb{A}$  a cada iteração para frente da aplicação  $f$ . De modo análogo, o número  $\rho^-(x)$  representa o número médio de voltas dadas pelo ponto  $x$  em torno de  $\mathbb{A}$  a cada iteração para trás da aplicação  $f$ . Ao longo do texto, sempre que nos referirmos ao número de rotação de um determinado ponto entenderemos o seu número de rotação para frente, o qual denotaremos simplesmente por  $\rho(x)$ . Resultados envolvendo números de rotação para trás serão devidamente especificados. Quando for necessário sermos mais específicos a respeito da aplicação segundo a qual estamos tomando o número de rotação, denotaremos com subíndices, por exemplo,  $\rho_f(x)$  denota o número de rotação para frente do ponto  $x$  com respeito à aplicação  $f$ .

Mediante a Definição 1.2.10 e os comentários anteriores, o conjunto  $\mathcal{R}(f)$  definido a seguir é chamado **conjunto de rotação da aplicação  $f$**

$$\mathcal{R}(f) = \{\alpha \in \mathbb{R}; \exists x \in \mathbb{A} \text{ e } \rho(x) = \alpha\}.$$

**Observação 1.2.2.** *A noção de número de rotação e conseqüentemente de conjunto de rotação apresentadas anteriormente não são intrínsecas do anel e podem ser definidas em contextos mais gerais. Estudar o conjunto de rotação de uma aplicação representa por si só algo interessante, pois em várias situações pode-se obter informações importantes a respeito do comportamento da aplicação conhecendo propriedades do seu conjunto de rotação. Por exemplo, o conjunto de rotação de um homeomorfismo do anel é sempre fechado, além disso, uma dinâmica do anel que possui um conjunto de rotação com interior*

*não vazio possui infinitos pontos cujas órbitas são periódicas ([4]). É possível mostrar também que o conjunto de rotação associado a uma aplicação é um invariante topológico, ou seja, se duas aplicações são conjugadas por um homeomorfismo, então estas possuem o mesmo conjunto de rotação ([2]).*

# Capítulo 2

## Principais Resultados

Neste capítulo, demonstramos os resultados mais importantes do trabalho, a saber, os Teoremas (2.1.1), (2.1.2) e (2.2.1). Tais resultados mostram que um difeomorfismo no anel que possui um ponto homoclínico transversal  $K$ -rotacional a um ponto fixo hiperbólico, tem características interessantes, tanto do ponto de vista dinâmico, quanto do ponto de vista topológico. Com efeito, o Teorema (2.1.1) garante a existência de uma ferradura de Smale (conjunto totalmente invariante homeomorfo ao espaço de dois símbolos onde a dinâmica é conjugada ao *shift*) nas proximidades do ponto fixo hiperbólico, a qual, pelo Teorema (2.1.2), possui um intervalo de rotação não trivial. Por sua vez, o Teorema (2.2.1) relaciona a complexidade dinâmica da ferradura com seu caráter rotacional, fornecendo, para cada valor irracional escolhido no intervalo de rotação, incontáveis conjuntos de Cantor, disjuntos e invariantes, cujo número de rotação é exatamente o valor escolhido no intervalo ([5]). Na prova dos Teoremas citados, utilizamos amplamente dinâmicas simbólicas no espaço  $\Sigma_2$ .

### 2.1 Ferradura Rotacional e Intervalo de Rotação

O principal objetivo desta seção é construir uma aplicação em  $\mathbb{A}$  denominada ferradura rotacional e mostrar que esta possui um intervalo não trivial como conjunto de rotação.

**Teorema 2.1.1.** *Suponha que  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  tem um ponto fixo hiperbólico  $p$  com uma órbita*

homoclínica transversal  $K$ -rotacional. Então, existe um conjunto de Cantor não errante  $\Lambda \subset \mathbb{A}$ , um inteiro  $N$ , um subconjunto  $\Lambda^N \subset \Lambda$  e um homeomorfismo  $h : \Lambda^N \rightarrow \Sigma_2$  tal que

$$f^N \Big|_{\Lambda^N} = h^{-1} \circ \sigma \circ h. \quad (2.1)$$

Além disso,  $\Lambda$  e  $\Lambda^N$  podem ser escolhidos de modo que a sequência  $a = h(x)$  reflita o comportamento rotacional de  $x$ , mais especificamente, para cada  $x \in \Lambda^N$  temos

$$\rho(x) = \frac{K}{N} R(h(x)) \quad (2.2)$$

desde que o limite que define  $\rho(x)$  exista. Se  $\rho(x)$  não existe, o mesmo ocorrerá com  $R(h(x))$ .

**Demonstração:** Primeiramente, construiremos o conjunto de Cantor  $\Lambda^N$ . Fixe um ponto  $q$  na órbita homoclínica e tome uma vizinhança  $U$  de  $p$  suficientemente pequena (conforme o Teorema 1.2.1). Sejam  $k$  e  $l$  os menores inteiros positivos tais que,

$$q \in V = f^l(U) \cap f^{-k}(U).$$

Note que ajustando  $U$ , se necessário, podemos garantir que:

1.  $V$  tem apenas uma componente conexa.
2. As imagens  $f^j(V)$  são duas a duas disjuntas se  $-l < j < k$ .
3.  $f^{-l}(V)$  e  $f^k(V)$  estão contidos em  $U$  e sua interseção é apenas uma componente conexa contida em  $U$ .

Sejam

$$W^u = W^u(p) \cap V \quad e \quad W^s = W^s(p) \cap V$$

contendo  $q$ . Pelo  $\lambda$ -Lema (Lema 7.1, p.142, [9]), temos que

$$f^j(W^u) \rightarrow W_{loc}^u(p) \quad e \quad f^{-j}(W^s) \rightarrow W_{loc}^s(p)$$

quando  $j \rightarrow \infty$ . Assim, temos que  $f^k(V)$  e  $f^{-l}(V)$  são faixas finas em  $U$  praticamente paralelas às variedades  $W_{loc}^u(p)$  e  $W_{loc}^s(p)$  respectivamente. A figura 3.9 (a), a seguir, resume este argumentos.

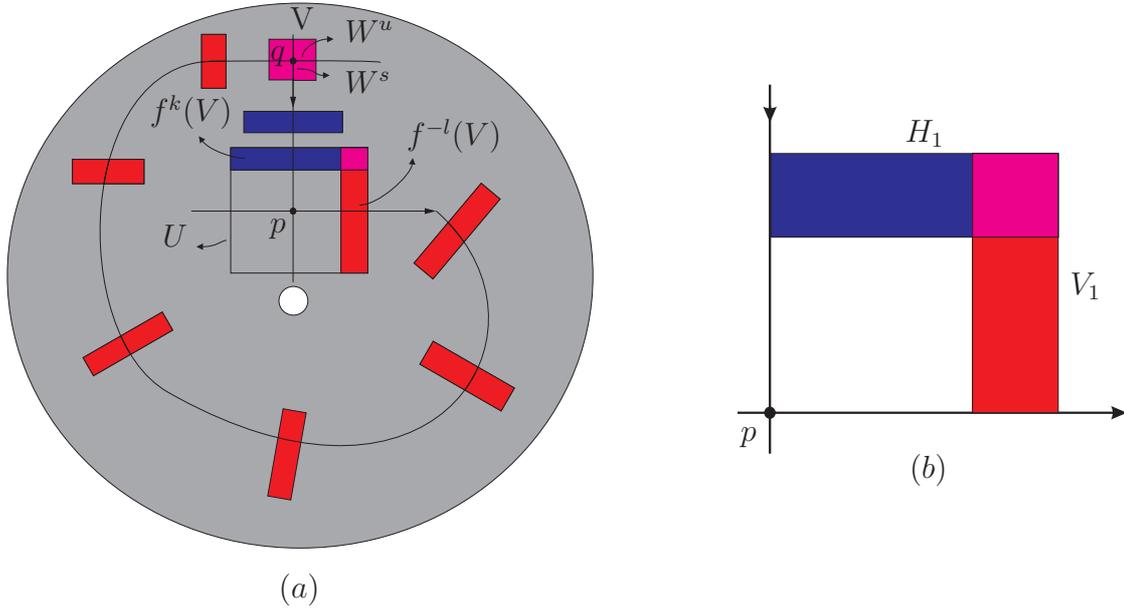


Figura 2.1: Construção das faixas  $V_1$  e  $H_1$ .

Sejam  $V_1 \subset f^{-l}(V)$  e  $H_1 \subset f^k(V)$  faixas paralelas às variedades  $W_{loc}^s(p)$  e  $W_{loc}^u(p)$  respectivamente, tais que  $V_1 \cap H_1 \neq \emptyset$  (figura 3.9 (b)). Agora, escolha uma faixa  $V_0 \subset U$  de modo que  $W_{loc}^u(p)$  e  $W_{loc}^s(p)$  sejam ambas fronteiras de  $V_0$  com  $H_1 \cap V_0 \neq \emptyset$ , e suficientemente fina na direção de  $W^u(p)$  para que tenhamos  $f^{k+l}(V_0) \cap V_1 \neq \emptyset$  e  $f^j(V_0) \subset U$  para  $0 \leq j \leq k+l$ . Assim, tomando  $N = k+l$  e pondo  $H_0 = f^N(V_0)$ , temos duas faixas  $V_i$ ,  $i = 0, 1$ , tais que ambas as imagens  $H_i$  por  $f^N$  intersectam  $V_0$  e  $V_1$ .

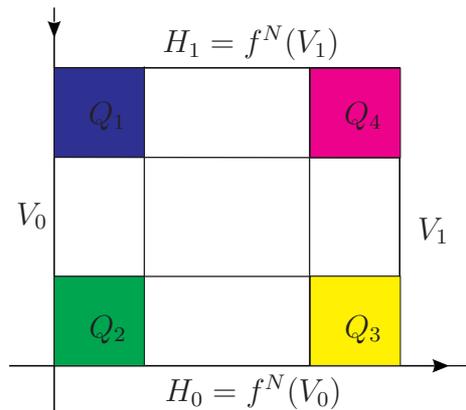


Figura 2.2: Faixas  $V_0, V_1, H_0$  e  $H_1$  com suas respectivas interseções.

Estamos agora em condições de construir os conjuntos  $\Lambda$  e  $\Lambda^N$ .

Na figura (2.2), considere os quadrados  $Q_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Por construção,  $H_0 = f^N(V_0)$ , segue que as imagens dos quadrados  $Q_1$  e  $Q_2$  por  $f^N$  são as faixas  $F_1^{H_0}$  e  $F_2^{H_0}$  em  $H_0$  respectivamente.

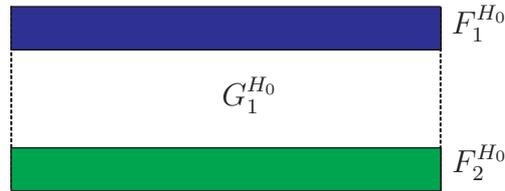


Figura 2.3: Primeira etapa da construção de um conjunto de Cantor sobre  $W_{loc}^s(p)$ .

De modo análogo, as imagens dos quadrados  $Q_4$  e  $Q_3$  são as faixas  $F_1^{H_1}$  e  $F_2^{H_1}$  em  $H_1$  respectivamente.

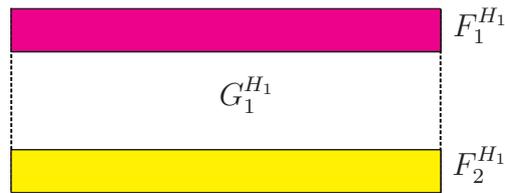


Figura 2.4: Primeira etapa da construção de um conjunto de Cantor  $W_{loc}^s(p)$ .

Note que o resultado obtido na iteração dos quadrados  $Q_1, Q_2$  e  $Q_3, Q_4$  por  $f^N$  é a eliminação das faixas  $G_1^{H_0}$  e  $G_1^{H_1}$  de  $H_0$  e  $H_1$  respectivamente. A eliminação das faixas  $G_1^{H_i}$  é o primeiro passo da construção de dois conjuntos de Cantor sobre  $W_{loc}^s(p)$ , correspondendo à eliminação do terço médio na construção clássica do conjunto de Cantor no intervalo  $[0, 1]$  (p.55, [7]).

Agora, iterando os quadrados  $Q_4$  e  $Q_1$  para trás usando  $f^N$ , obtemos as faixas  $F_1^{V_1}$  e  $F_2^{V_1}$  em  $V_1$ , ou seja, excluiremos a faixa  $G_1^{V_1}$  de  $V_1$ . De modo análogo, iterando os quadrados  $Q_2$  e  $Q_3$  para trás usando  $f^N$ , obtemos as faixas  $F_1^{V_0}$  e  $F_2^{V_0}$ , o que equivale a excluímos de  $V_0$  a faixa  $G_1^{V_0}$ .

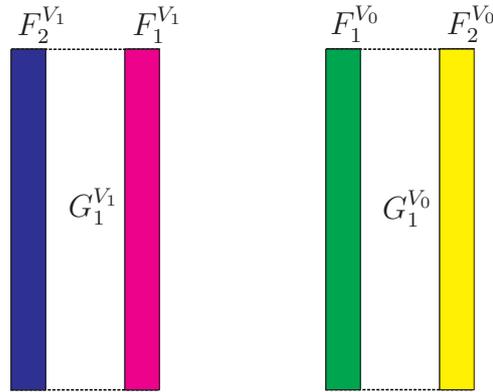


Figura 2.5: Primeira etapa da construção de dois conjuntos de Cantor sobre  $W_{loc}^u(p)$ .

Como no caso anterior, a eliminação das faixas  $G_1^{V_0}$  e  $G_1^{V_1}$  de  $V_0$  e  $V_1$  respectivamente, constitui o primeiro passo da construção de dois conjuntos de Cantor sobre  $W_{loc}^u(p)$ . Assim, ao iterarmos os quadrados  $Q_1, Q_2, Q_3$  e  $Q_4$  para frente e para trás utilizando  $f^N$ , ou seja, ao eliminarmos as faixas  $G_1^{V_0}, G_1^{V_1}, G_1^{H_0}$ , e  $G_1^{H_1}$ , temos a primeira etapa da construção de um conjunto de Cantor em  $U$ .

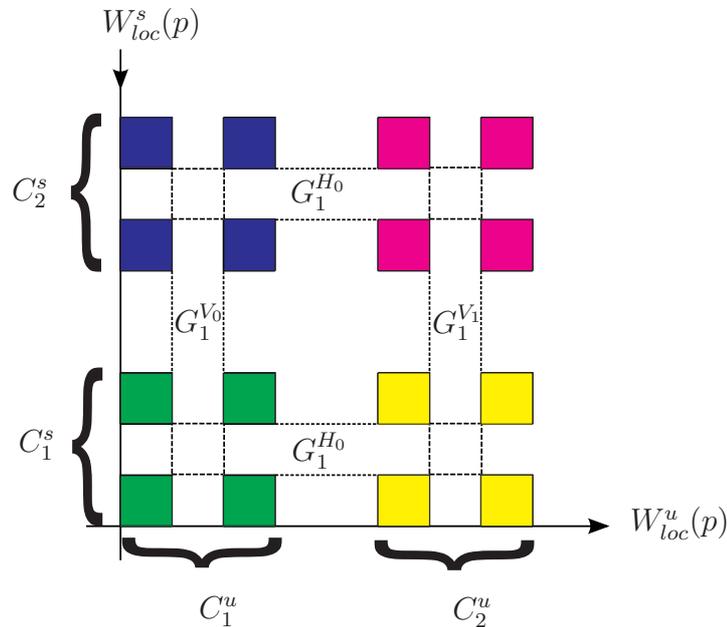


Figura 2.6: Primeira etapa da construção de um conjunto de Cantor em  $U$ .

O conjunto de Cantor em  $U$  obtido pela continuação do processo descrito anteriormente

será denotado por  $\Lambda^N$ , o qual por construção é dado por

$$\Lambda^N = (C_1^u \times C_1^s) \cup (C_1^u \times C_2^s) \cup (C_2^u \times C_1^s) \cup (C_2^u \times C_2^s),$$

onde os conjuntos  $C_i^s$  e  $C_i^u$ ,  $i = 1, 2$ , são os conjuntos de Cantor sobre  $W_{loc}^s(p)$  e  $W_{loc}^u(p)$  respectivamente, obtidos pela exclusão das faixas  $G_n^{V_0}$ ,  $G_n^{V_1}$ ,  $G_n^{H_0}$ , e  $G_n^{H_1}$  em  $V_0, V_1, H_0$  e  $H_1$  respectivamente, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , vide figura (2.6).

Note que cada uma das faixas  $G_n^{V_i}$  e  $G_n^{H_i}$ ,  $i = 0, 1$ , são na verdade  $2^n/2$  faixas disjuntas para  $n > 1$ , sendo  $2^n$  o número de seguimentos obtidos na  $n$ -ésima etapa da construção do conjunto de Cantor clássico no intervalo  $[0,1]$ . Além disso, pelo modo como definimos o conjunto  $\Lambda^N$  temos que,

$$\Lambda^N = \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} (f^N)^j(V_0 \cup V_1). \quad (2.3)$$

Considerando em  $\Lambda^N$  a métrica induzida de  $\mathbb{R}^2$  é possível mostrar (p.212, [5]) que a aplicação  $h : \Lambda^N \rightarrow \Sigma_2$  definida por

$$h_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } f^{jN}(x) \in V_0 \\ 1 & \text{se } f^{jN}(x) \in V_1 \end{cases},$$

é um homeomorfismo (denominado itinerário de  $x$ ) que conjuga  $\sigma$  e  $f|_{\Lambda^N}$ , isto é, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^N & \xrightarrow{f^N} & \Lambda^N \\ h \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow h \\ \Sigma_2 & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_2 \end{array}$$

Assim, temos uma descrição simbólica da dinâmica  $f^N$  restrita a  $\Lambda^N$ ,

$$f^N(x) = (h^{-1} \circ \sigma \circ h)(x) \quad \forall x \in \Lambda^N.$$

Agora, vamos mostrar que escolhendo-se um levantamento adequado de  $f$ , a igualdade (2.2) com respeito ao conjunto de rotação é verificada para todo  $x \in \Lambda^N$ .

Como motivação à escolha de tal levantamento, considere o ponto  $p$ . Sabemos que  $f^j(p) = p$  para todo  $j \in \mathbb{Z}$ , logo  $f^j(p) \in V_0$  para todo  $j \in \mathbb{Z}$  e portanto,  $h(p) = (0, 0)^\infty$ , donde segue que  $R(h(p)) = 0$ .

Desta forma, para que a igualdade (2.2) seja satisfeita no ponto  $p$ , é suficiente encontrarmos um levantamento  $F$  de  $f$  que tenha  $\tilde{p}$  como ponto fixo, sendo  $\tilde{p} \in \tilde{\mathbb{A}}$  um ponto na pré-imagem de  $p$  por  $\Pi$ .

Seja  $G$  um levantamento de  $f$  arbitrariamente fixado, pela definição (1.2.7) temos

$$\Pi(G(\tilde{p})) = f(\Pi(\tilde{p})) = f(p) = p = \Pi(\tilde{p}),$$

o que implica

$$G(\tilde{p}) = \tilde{p} + (n_1, 0),$$

para algum  $n_1 \in \mathbb{Z}$ . Portanto, pela Proposição (1.2.1) temos que

$$F = G - (n_1, 0) \tag{2.4}$$

é um levantamento de  $f$  em  $\tilde{\mathbb{A}}$  e além disso,  $F(\tilde{p}) = \tilde{p}$ . Assim, utilizando o levantamento (2.4), segue que

$$\rho(p) = 0 = R(h(p)).$$

Vamos mostrar que para este mesmo levantamento, a relação (2.2) é válida para todo  $x \in \Lambda^N$ .

De fato, tome  $x \in \Lambda^N$  e suponha que  $\rho(x)$  exista. Então, dado  $\epsilon > 0$ ,  $\exists M \in \mathbb{N}$  tal que,  $j > M$  implica

$$\left| \frac{1}{Nj} [(\Pi_1 \circ F^{Nj})(\tilde{x}) - \Pi_1(\tilde{x})] - \rho(x) \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por outro lado, temos que

$$(\Pi_1 \circ F^{Nj})(\tilde{x}) = \Pi_1(\tilde{x}) + m_j + \alpha_j \tag{2.5}$$

para algum  $m_j \in \mathbb{N}$  e para algum  $\alpha_j \in [0, 1)$ . Logo, para  $j > M$  temos

$$\left| \frac{m_j + \alpha_j}{Nj} - \rho(x) \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

e portanto,

$$\left| \rho(x) - \frac{m_j}{Nj} \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{Nj}.$$

Assim, podemos escolher  $j_0 \in \mathbb{N}$  tal que,  $j > j_0$  implica

$$\left| \rho(x) - \frac{m_j}{Nj} \right| < \epsilon. \tag{2.6}$$

Agora, por 2.5 e pela definição de  $\tilde{\mathbb{A}}$ , temos que  $m_j$  é exatamente o número de voltas que  $x$  realiza em torno de  $\mathbb{A}$  em  $Nj$  iteradas de  $f$ . Finalmente, usando o fato de que  $\{f^j(q)\}_{j \in \mathbb{Z}}$  é uma órbita homoclínica  $K$ -rotacional segue que,

$$m_j = K \sum_{i=0}^{j-1} h_i(x)$$

e por (2.6),  $j > j_0$  implica

$$\left| \rho(x) - \frac{K}{Nj} \sum_{i=0}^{j-1} h_i(x) \right| < \epsilon.$$

Donde segue,

$$\rho(x) = \frac{K}{N} R(h(x)) \quad \forall x \in \Lambda^N.$$

■

Dado  $x \in \Lambda^N$ , a conjugação 2.1, a relação rotacional 2.2 e a Afirmação (1.1), implicam que cada ponto da órbita  $\{f^{jN}(x)\}_{j \in \mathbb{N}}$  possui número de rotação para frente igual a  $\rho^+(x)$ . Por este motivo, às vezes, nos referiremos a  $\rho^+(x)$  como sendo o número de rotação para frente da órbita  $\{f^{jN}(x)\}_{j \in \mathbb{N}}$ . (Análogo para  $\rho^-(x)$ .)

**Teorema 2.1.2.** *Suponha que  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  tenha uma órbita homoclínica transversal  $K$ -rotacional a um ponto fixo hiperbólico. Então verificam-se as seguintes afirmações:*

- (i) *O conjunto  $\mathcal{R}(g)$  contém um intervalo fechado não trivial  $I$ .*
- (ii) *Para cada  $\alpha \in I$  existe um conjunto incontável  $\Lambda_\alpha^+ \subset \mathbb{A}$  tal que  $\rho^+(x) = \alpha$  para todo  $x \in \Lambda_\alpha^+$ .*
- (iii) *Para cada  $\alpha \in I$  existe um conjunto incontável  $\Lambda_\alpha^- \subset \mathbb{A}$  tal que  $\rho^-(x) = \alpha$  para todo  $x \in \Lambda_\alpha^-$ .*
- (iv) *Existe um conjunto incontável  $\mathcal{D} \subset \mathbb{A}$  tal que se  $x \in \mathcal{D}$  então,  $\rho^+(x)$  e  $\rho^-(x)$  não existem.*

**Demonstração:**

Ao longo desta prova, denotaremos por  $g$  a  $N$ -ésima iterada de  $f$ , onde  $N \in \mathbb{N}$  é dado pelo Teorema (2.1.1).

(i) Mostraremos que  $I = [0, K/N] \subset \mathcal{R}(g)$ . Começemos inicialmente mostrando que todo número racional em  $I$  está no conjunto de rotação de  $g$ . De fato, seja  $r/s \in I \cap \mathbb{Q}$  irredutível e tome qualquer palavra simbólica  $G$  tal que,

$$|G| = Ks \quad e \quad |G|_1 = Nr.$$

Note que  $Nr \leq Ks$  para todo  $r/s \in I \cap \mathbb{Q}$ . Em seguida, considere o ponto  $a = (G, G)^\infty \in \Sigma_2$ , segue que  $R(a) = Nr/Ks$ , e pela relação rotacional (2.2) temos que

$$\rho(x_a) = \frac{K}{N}R(a) = \frac{r}{s} \quad ,$$

onde  $x_a = h^{-1}(a)$ . Logo,  $r/s \in \mathcal{R}(g)$ .

Para concluirmos o item (i) deste teorema resta mostrarmos que todo número irracional em  $I$  também está em  $\mathcal{R}(g)$ . Até o término da prova, enumeraremos as coordenadas de pontos que pertencem a  $\Sigma_2$  com índices superiores para evitar ambiguidades.

Escolha arbitrariamente  $\alpha \in I - \mathbb{Q}$ , e seja  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de racionais em  $I$  tal que,

$$r_n \rightarrow \alpha \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty.$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , escolha  $a_n \in \Sigma_2$  tal que,

$$R(a_n) = \frac{Nr_n}{K}. \tag{2.7}$$

Como  $\Sigma_2$  é compacto, existe uma subsequência  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  que é convergente, digamos para um ponto  $b = (b^k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \Sigma_2$ . Além disso, para cada termo  $b_n$  desta subsequência, seja  $t_n$  o correspondente termo da sequência  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfazendo (2.7). Como  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma subsequência de  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é claro que  $t_n \rightarrow \alpha$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Finalmente, pondo  $x_b = h^{-1}(b)$  temos por (2.2) que,

$$\begin{aligned}
\rho(x_b) &= \frac{K}{N} R(b) \\
&= \frac{K}{N} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} b^k \\
&= \frac{K}{N} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lim_{j \rightarrow \infty} b_j^k \\
&= \frac{K}{N} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} b_j^k \right) \\
&= \frac{K}{N} \lim_{j \rightarrow \infty} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} b_j^k \right) \tag{2.8} \\
&= \frac{K}{N} \lim_{j \rightarrow \infty} R(b_j) \\
&= \frac{K}{N} \left( \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{N t_j}{K} \right) = \alpha
\end{aligned}$$

Logo,  $\alpha \in \mathcal{R}(g)$  e portanto,  $I \subset \mathcal{R}(g)$ .

Para justificar a passagem 2.8 vamos mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} b_j^k \right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} b_j^k \right).$$

De fato,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} b_j^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lim_{j \rightarrow \infty} b_j^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} b^k.$$

Agora seja  $\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} b^k$ , então é suficiente mostrarmos que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} b_j^k \right) - \mu \right] = 0. \quad (2.9)$$

Mas,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} b_j^k \right) - \mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} b_j^k - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} b^k \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (b_j^k - b^k) \end{aligned}$$

e como  $b_j^k \rightarrow b^k$  quando  $j \rightarrow \infty$ , existe  $j_0 \in \mathbb{N}$  tal que,

$$j > j_0 \Rightarrow |b_j^k - b^k| < \frac{1}{2^k}.$$

Assim, para  $j > j_0$  temos que

$$\left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} b_j^k - b^k \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |b_j^k - b^k| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0. \quad (2.10)$$

Portanto, resulta de 2.10 que

$$j > j_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} b_j^k \right) - \mu = 0$$

logo,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} b_j^k \right) - \mu \right] = 0.$$

provando 2.9.

(ii) Escolha  $\alpha \in [0, k/N]$  arbitrário, logo existe  $x \in A$  tal que  $\rho(x) = \alpha$ . Agora, pelo Teorema (2.1.1) temos que

$$\rho(x) = \frac{K}{N} R(h(x)),$$

onde  $h(x) = (a_j)_{j \in \mathbb{Z}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ . Lembrando que o conjunto  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  é incontável, para cada  $(b_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  consideremos a sequência  $c = (c_j)_{j \in \mathbb{Z}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  de definida por,

$$c_j = \begin{cases} a_j & \text{se } j \geq 0 \\ b_j & \text{se } j < 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

É claro que  $R(h(x)) = R(c)$ . Agora, pondo  $x_c = h^{-1}(c)$ , temos novamente pelo Teorema (2.1.1) que

$$\rho(x_c) = \frac{K}{N} R(h(x_c)) = \frac{K}{N} R(h(x)) = \rho(x).$$

Como há incontáveis maneiras de construir os pontos da forma  $x_c$ , definimos o conjunto  $\Lambda^+(\alpha)$  como sendo o conjunto de todos os pontos  $x_c$  dados por 2.11. Donde segue o resultado desejado.

(iii) A prova deste item é análoga à do item (ii).

(iv) Seja  $a = (\mathcal{T}, \mathcal{W}) \in \Sigma_2$ , onde  $\mathcal{T}$  e  $\mathcal{W}$  representam permutações de todas as possíveis palavras de zeros e uns de comprimentos 1, 2, 3, .... Fazendo  $\mathcal{T} = \hat{\mathcal{W}}$ , um exemplo de uma tal sequência simbólica é dado tomando

$$\mathcal{W} = (\underbrace{0}_1 \underbrace{1}_1 \underbrace{00}_2 \underbrace{01}_2 \underbrace{10}_2 \underbrace{11}_2 \underbrace{000}_3 \underbrace{001}_3 \underbrace{010}_3 \dots),$$

(onde os subíndices são os respectivos comprimentos das palavras) e considerando

$$a = (\mathcal{T}, \mathcal{W}) = (\dots 00011000100100011000\dots). \quad (2.12)$$

Mostraremos que o número rotação das sequências simbólicas  $a = (\mathcal{T}, \mathcal{W})$  não existem, e uma vez que há incontáveis pontos  $a$  desta forma, pois há incontáveis permutações  $\mathcal{T}$  e  $\mathcal{W}$ , concluiremos a prova deste item.

Sejam  $a = (\mathcal{T}, \mathcal{W})$ ,  $b = \{b_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \in \Sigma_2$  e  $\epsilon > 0$  arbitrariamente fixados. Dado  $k \in \mathbb{N}$ , pela definição do ponto  $a$ , existe  $j(k) \in \mathbb{N}$  tal que a sequência simbólica  $\{c_j\}_{j \in \mathbb{Z}} = \sigma^{j(k)}(a)$  satisfaz a seguinte condição:

$$c_j = b_j \quad \text{se} \quad -k \leq j \leq k.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
d(\sigma^{j(k)}(a), b) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{|c_j - b_j|}{2^{|j|}} \\
&= \sum_{j=-\infty}^{-k-1} \frac{|c_j - b_j|}{2^{|j|}} + \sum_{j=-k}^k \frac{|c_j - b_j|}{2^{|j|}} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{|c_j - b_j|}{2^{|j|}} \\
&\leq \sum_{j=-\infty}^{-k-1} \frac{|c_j| + |b_j|}{2^{|j|}} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{|c_j| + |b_j|}{2^{|j|}} \\
&= \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \\
&= \frac{1}{2^{k-2}}, \tag{2.13}
\end{aligned}$$

e portanto, tomando  $k$  suficientemente grande segue que  $d(\sigma^{j(k)}(a), b) < \epsilon$ , ou seja, a órbita  $\{\sigma^j(a)\}_{j \in \mathbb{N}}$  é densa em  $\Sigma_2$ . Agora, pela conjugação 2.1 temos que

$$g^j(x) = (h^{-1} \circ \sigma^j \circ h)(x) \quad \forall x \in \Lambda^N,$$

e pondo  $x_a = h^{-1}(a)$ , segue da densidade  $\{\sigma^j(a)\}_{j \in \mathbb{N}}$  em  $\Sigma_2$  que a órbita  $\{g^j(x_a)\}_{j \in \mathbb{N}}$  é densa em  $\Lambda^N$ .

Sejam  $G : \tilde{\mathbb{A}} \rightarrow \tilde{\mathbb{A}}$  um levantamento de  $g$  com respeito a uma aplicação de recobrimento  $\Gamma : \tilde{\mathbb{A}} \rightarrow \mathbb{A}$ , e  $\tilde{x}_a$  um representante de  $x_a$  em  $\tilde{\mathbb{A}}$ . Tomando  $\tilde{y} \in \Gamma^{-1}(\Lambda^N)$  e  $\epsilon > 0$  arbitrariamente fixados, seja  $M = V_{\tilde{y}} \cap B(\tilde{y}, \epsilon)$ , onde  $V_{\tilde{y}}$  é uma vizinhança de  $\tilde{y}$  escolhida de modo que  $\Gamma|_{V_{\tilde{y}}}$  é um homeomorfismo sobre sua imagem. Agora, como  $\{g^j(x_a)\}_{j \in \mathbb{N}}$  denso em  $\Lambda^N$ , existe  $j_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $g^{j_1}(x_a) \in \Gamma(M)$ , e portanto,  $\Gamma^{-1}(g^{j_1}(x_a)) \in M$ . Mas,

$$\Gamma^{-1}(g^{j_1}(x_a)) = \Gamma^{-1}(g^{j_1}(\Gamma(\tilde{x}_a))) = G^{j_1}(\tilde{x}_a),$$

donde concluímos que a órbita  $\{G^j(\tilde{x}_a)\}_{j \in \mathbb{N}}$  é densa em  $\Gamma^{-1}(\Lambda^N)$ .

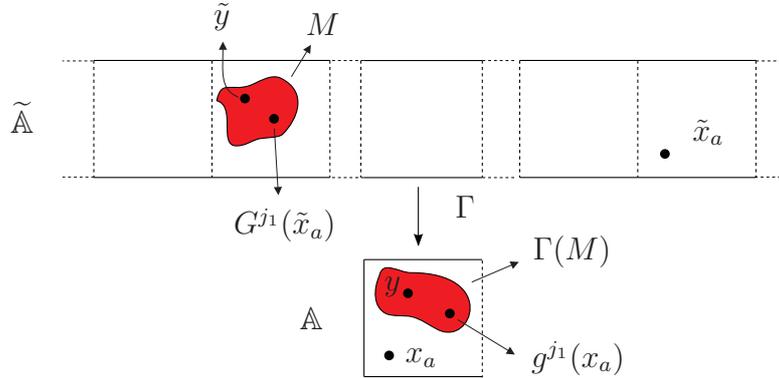


Figura 2.7:  $\{G^j(\tilde{x}_a)\}_{j \in \mathbb{N}}$  é densa em  $\Gamma^{-1}(\Lambda^N)$ .

Finalmente, note que se uma sequência  $\{\alpha_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  de números reais é densa em algum subconjunto de  $\mathbb{R}$ , então o mesmo ocorrerá com a sequência  $\{\alpha_j/j\}_{j \in \mathbb{N}}$ . Assim, temos que a sequência

$$\frac{1}{j} [\Pi_1 \circ G^j(\tilde{x}_a) - \Pi_1(\tilde{x}_a)] ; j \in \mathbb{N}$$

é densa em  $\Pi_1(\Lambda^N)$ , e portanto não existe  $\rho(\tilde{x}_a)$ , o que implica por 2.2, que  $R(a)$  também não existe, como queríamos demonstrar.

Conclui-se de modo análogo que não pode existir o número de rotação  $R^-(a)$  de um ponto  $a = (\mathcal{T}, \mathcal{W})$ , e portanto, por 2.2, o mesmo ocorre com  $\rho^-(x_a)$ . O conjunto  $\mathcal{D}$  procurado é então definido por

$$\mathcal{D} = \{x_a = h^{-1}(a) ; a = (\mathcal{T}, \mathcal{W})\}.$$

■

**Observação 2.1.1.** *Note que os mesmos argumentos utilizados para concluir 2.13 no item (iv) do Teorema 2.1.2, mostram que o conjunto dos pontos de  $\Lambda^N$  cujas órbitas são periódicas com respeito a  $g$  é denso em  $\Lambda^N$ , o que justifica a Observação 1.2.2. Bem como o fato de  $\mathcal{R}(g)$  ser um conjunto fechado, neste caso um intervalo.*

## 2.1.1 Terminologia e Modelo Geométrico

Os dois resultados anteriores fornecem a existência de uma ferradura de Smale no anel com um intervalo de rotação não trivial denominada ferradura rotacional do anel.

Na prova do Teorema (2.1.1), a figura 2.2 mostra que a aplicação  $f^N$  (ferradura) contrai verticalmente a faixa  $V_0 \subset U$  e a expande horizontalmente resultando na faixa  $H_0 \subset U$ . Por outro lado, como  $q \in W^u(p) \cap W^s(p)$ , o modo como construímos a faixa  $V_1$  mostra que um ponto em  $V_1$  dá uma volta em torno de  $\mathbb{A}$  e chega a  $H_1$  a cada iterada da ferradura. A seguir, temos um modelo da ferradura rotacional, onde  $B$  é uma faixa entre  $V_0$  e  $V_1$ ,  $U = V_0 \cup B \cup V_1$ ,  $R$  é uma região anelar em  $\mathbb{A}$  dada pelas linhas tracejadas e  $H_0 \cup f^N(B) \cup H_1 \cup f^N(R - U)$  é a imagem desta região anelar pela ferradura.

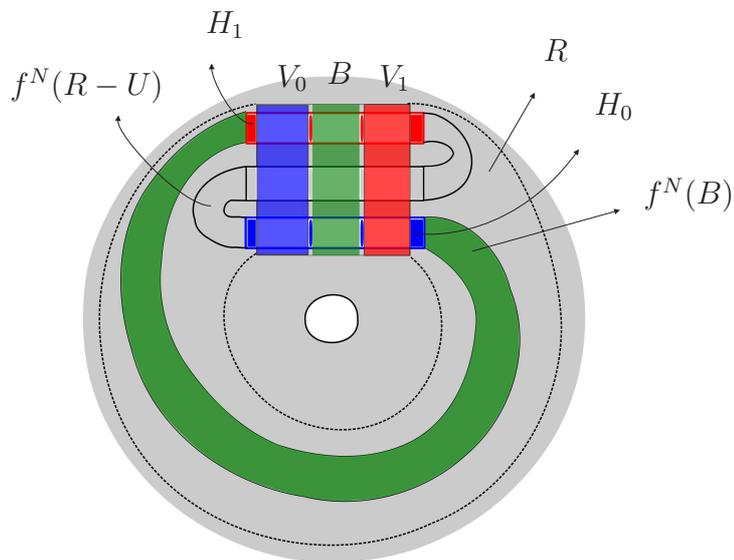


Figura 2.8: Um modelo da ferradura rotacional.

## 2.2 Rotação Rígida Irracional e Conjuntos de Cantor Minimais

Nesta seção, utilizaremos a rotação rígida irracional sobre  $\mathbb{S}^1$  para construirmos sequências simbólicas, através das quais obteremos conjuntos de Cantor em  $\Sigma_2$  com um comportamento rotacional bem determinado. Tais conjuntos de Cantor serão fundamentais para os propósitos do capítulo 3, no qual estudaremos as órbitas de  $f$  que preservam orientação.

Para cada  $\alpha \in (0, 1) - \mathbb{Q}$ , considere a rotação rígida em  $\mathbb{S}^1$  definida por

$$\begin{aligned} r_\alpha : \quad \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ x = e^{2\pi i\theta} &\longmapsto r_\alpha(x) = e^{2\pi i(\theta+\alpha)}. \end{aligned}$$

Fixando  $c \in (0, 1 - \alpha]$ , seja  $\mathcal{P}_\alpha(c)$  a partição de  $\mathbb{S}^1$  dada pelos arcos

$$A_0(c) = [0, c), B_0(c) = \left[ c, c + \frac{\alpha}{2} \right), A_1(c) = \left[ c + \frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2} \right), B_1(c) = \left[ 1 - \frac{\alpha}{2}, 1 \right). \quad (2.14)$$

Agora, para cada  $\alpha \in (0, 1) - \mathbb{Q}$ , cada  $x \in \mathbb{S}^1$ , e cada número real  $c \in (0, 1 - \alpha]$ , podemos construir uma seqüência simbólica  $a_\alpha(x, c) \in \Sigma_2$  definida por,

$$a_\alpha^j(x, c) = \begin{cases} 0 & \text{se } r_\alpha^j(x) \in A_0(c) \cup A_1(c) \\ 1 & \text{se } r_\alpha^j(x) \in B_0(c) \cup B_1(c). \end{cases}$$

Analogamente, considerando a partição  $\mathcal{P}'_\alpha(c)$ , dada por

$$A'_0(c) = (0, c], B'_0(c) = \left( c, c + \frac{\alpha}{2} \right], A'_1(c) = \left( c + \frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2} \right], B'_1(c) = \left( 1 - \frac{\alpha}{2}, 1 \right],$$

podemos construir, para cada  $x \in \mathbb{S}^1$ , a seqüência simbólica  $a'_\alpha(x, c) \in \Sigma_2$  definida por

$$a'^j_\alpha(x, c) = \begin{cases} 0, & \text{se } r_\alpha^j(x) \in A'_0(c) \cup A'_1(c) \\ 1, & \text{se } r_\alpha^j(x) \in B'_0(c) \cup B'_1(c). \end{cases}$$

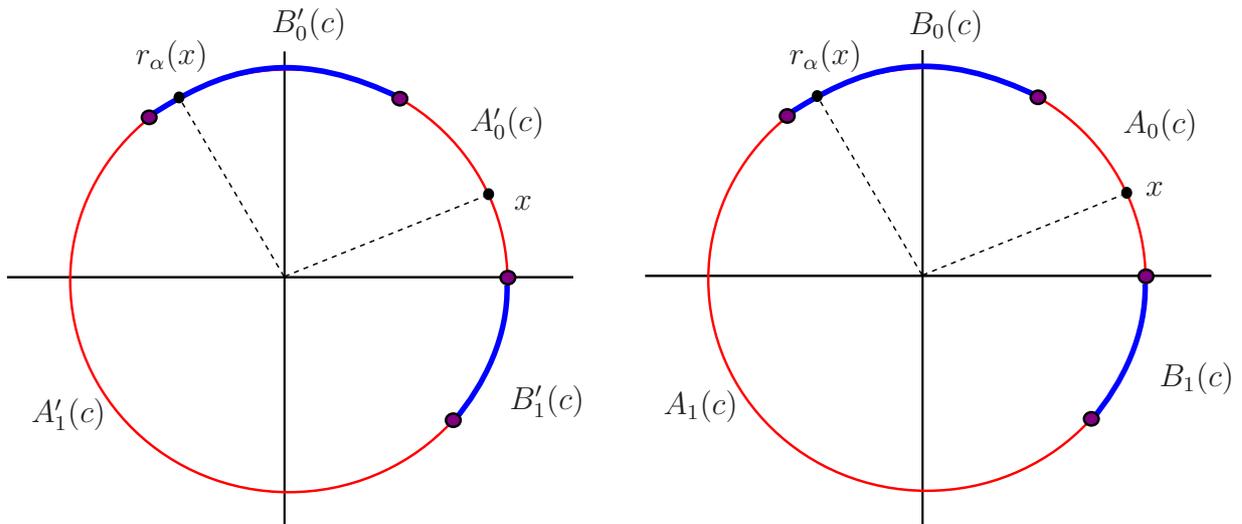


Figura 2.9: Partições  $\mathcal{P}'_\alpha(c)$  e  $\mathcal{P}_\alpha(c)$  de  $\mathbb{S}^1$ .

Note que nos casos particulares em que  $c = 0$  e  $c = 1 - \alpha$ , cada partição contém apenas dois arcos, a saber:

$$\mathcal{P}_\alpha(0) = \{B_0(0), A_1(0) \cup B_1(0)\} \quad e \quad \mathcal{P}'_\alpha(1 - \alpha) = \{B'_0(0), A'_1(0) \cup B'_1(0)\}.$$

$$\mathcal{P}_\alpha(1 - \alpha) = \{A_0(1 - \alpha), B_0(1 - \alpha) \cup B_1(1 - \alpha)\} \quad e \quad \mathcal{P}'_\alpha(1 - \alpha) = \{A'_0(1 - \alpha), B'_0(1 - \alpha) \cup B'_1(1 - \alpha)\}.$$

No capítulo 4, voltaremos a falar sobre o caso em que  $c = 1 - \alpha$ , pois ele está estritamente relacionado à existência de órbitas de  $f$  que preservam orientação.

Para cada  $\alpha \in (0, 1) - \mathbb{Q}$  e  $c \in [0, 1 - \alpha)$  fixados, considere o seguinte conjunto

$$\Omega_\alpha(c) = \{a_\alpha(x, c) : x \in \mathbb{S}^1\} \cup \{a'_\alpha(x, c) : x \in \mathbb{S}^1\}.$$

Provaremos a seguir que os conjuntos  $\Omega_\alpha(c)$  possuem várias propriedades interessantes, tanto do ponto de vista da Teoria de Conjuntos como da Teoria de Conjunto de Rotação. Para isso, precisaremos dos seguintes lemas.

**Lema 2.2.1.** *Sejam  $\alpha \in (0, 1) - \mathbb{Q}$  e  $c \in [0, 1 - \alpha)$  então, são verdadeiras as seguintes afirmações.*

$$(a) \quad x = y \text{ se, e somente se, } a_\alpha(x, c) = a_\alpha(y, c).$$

$$(b) \quad x = y \text{ se, e somente se, } a'_\alpha(x, c) = a'_\alpha(y, c).$$

**Demonstração:** Provaremos apenas o item (a), a prova do item (b) é análoga.

Se  $x = y$ , então trivialmente temos  $a_\alpha(x, c) = a_\alpha(y, c)$ .

Reciprocamente, suponha que dados  $x, y \in \mathbb{S}^1$  tenhamos

$$a_\alpha(x, c) = a_\alpha(y, c).$$

Vamos mostrar que  $x = y$ .

De fato, suponha por absurdo que  $x \neq y$ , segue que existe  $\epsilon > 0$  tal que  $|x - y| = \epsilon$ .

Agora, tome

$$x' \in A_0(c) \cup A_1(c) \quad \text{tal que} \quad y' = x' + |x - y| \in B_0(c) \cup B_1(c)$$

e ainda  $x'$  e  $y'$  distem  $\epsilon/2$  do ponto de fronteira mais próximo de  $A_i(c)$  ou  $B_i(c)$ , conforme o caso. Como a sequência  $\{r_\alpha^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  é densa em  $\mathbb{S}^1$  para qualquer  $x \in \mathbb{S}^1$ , existe  $N < \infty$  tal que

$$|r_\alpha^N(x) - x'| < \frac{\epsilon}{4},$$

e como a distância  $|r_\alpha^k(x) - r_\alpha^k(y)|$  entre as imagens de  $x$  e  $y$  é preservada pela rotação rígida, temos que

$$|r_\alpha^N(y) - y'| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Portanto,

$$r_\alpha^N(x) \in A_0(c) \cup A_1(c) \quad e \quad r_\alpha^N(y) \in B_0(c) \cup B_1(c)$$

o que implica  $a_\alpha^N(x, c) = 0$  e  $a_\alpha^N(y, c) = 1$ , contrariando nossa hipótese. Logo  $x = y$ . ■

**Lema 2.2.2.** *Para cada  $\alpha \in (0, 1) - \mathbb{Q}$  e  $c \in [0, 1 - \alpha)$  fixados, temos*

$$\lim_{x \rightarrow y^+} a_\alpha(x, c) = a_\alpha(y, c) \quad e \quad \lim_{x \rightarrow y^-} a'_\alpha(x, c) = a'_\alpha(y, c).$$

**Demonstração:**

Devemos mostrar que o limite da função

$$\begin{aligned} g : (0, 1) &\longrightarrow \Sigma_2 \\ x &\longmapsto g(x) = a_\alpha(x, c) \end{aligned}$$

é igual a  $g(y)$  quando  $x \rightarrow y^+$ , ou seja, que  $g$  é contínua à direita.

Dividiremos esta prova em dois casos:

- $y \in \text{int}(A_i(c))$  ou  $y \in \text{int}(B_i(c))$ , para  $i = 1, 2$ .

Dado qualquer  $k \in \mathbb{N}$ , existe  $\delta > 0$  tal que se

$$|x - y| < \delta \quad e \quad |n| < k$$

então,  $r_\alpha^n(x), r_\alpha^n(y)$  pertencem ao mesmo arco da partição  $\mathcal{P}_\alpha(c)$  para cada  $n$ , logo,

$$a_\alpha^n(x, c) = a_\alpha^n(y, c) \quad \text{se} \quad |n| < k.$$

Dessa forma, temos que,

$$\begin{aligned}
d(a_\alpha(x, c), a_\alpha(y, c)) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{|a_\alpha^j(x, c) - a_\alpha^j(y, c)|}{2^{|j|}} \\
&= \sum_{j=-\infty}^{-k-1} \frac{|a_\alpha^j(x, c) - a_\alpha^j(y, c)|}{2^{|j|}} + \sum_{j=-k}^k \frac{|a_\alpha^j(x, c) - a_\alpha^j(y, c)|}{2^{|j|}} \\
&\quad + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{|a_\alpha^j(x, c) - a_\alpha^j(y, c)|}{2^{|j|}} \\
&\leq \sum_{j=-\infty}^{-k-1} \frac{|a_\alpha^j(x, c)| + |a_\alpha^j(y, c)|}{2^{|j|}} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{|a_\alpha^j(x, c)| + |a_\alpha^j(y, c)|}{2^{|j|}} \\
&\leq \sum_{j=-\infty}^{-k-1} \frac{2}{2^{|j|}} \\
&= 2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j+k}} \\
&= \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \\
&= \frac{1}{2^{k-2}},
\end{aligned}$$

portanto,

$$d(a_\alpha(x, c), a_\alpha(y, c)) \leq \frac{1}{2^{k-2}}.$$

Assim, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que,  $1/2^{k-1} < \epsilon$ , e pelo que fizemos anteriormente, existe  $\delta_k > 0$  tal que,

$$|x - y| < \delta_k \implies d(a_\alpha(x, c), a_\alpha(y, c)) < \frac{1}{2^{k-2}} < \epsilon$$

ou seja,

$$|x - y| < \delta_k \implies d(g(x), g(y)) < \epsilon.$$

Logo,  $g$  é contínua em  $\text{int}(A_i(c) \cup B_i(c))$ , onde  $i \in \{1, 2\}$ .

- $y \in \Delta = \{0, c, c + \frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2}\}$

Note que qualquer que seja  $y \in \Delta$ , existe  $\epsilon > 0$  tal que, o arco  $(y, y + \epsilon)$  está inteiramente contido em algum dos arcos  $A_i(c)$  ou  $B_i(c)$ , conforme a escolha de  $y$ , onde  $i \in \{1, 2\}$ .

Assim, dado um inteiro  $k > 0$  podemos encontrar  $\delta > 0$  tal que,

$$x \in (y, y + \delta) \quad e \quad |n| < k \implies a_\alpha^n(x, c) = a_\alpha^n(y, c)$$

e a prova segue exatamente como no caso anterior. ■

**Lema 2.2.3.** *Dado  $\alpha \in (0, 1) - \mathbb{Q}$  e  $c \in [0, 1 - \alpha)$ ,  $\Omega_\alpha(c)$  é um conjunto de Cantor minimal sobre  $\sigma$ .*

**Demonstração:** Mostraremos primeiramente que  $\Omega_\alpha(c)$  é minimal com respeito a  $\sigma$ , ou seja,  $\Omega_\alpha(c)$  é invariante sobre  $\sigma$ , fechado em  $\Sigma_2$ , e toda órbita  $\{\sigma^k(b)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  de um ponto  $b \in \Omega_\alpha(c)$  é densa em  $\Omega_\alpha(c)$ .

- $\Omega_\alpha(c)$  é invariante com respeito a  $\sigma$ .

Por definição,

$$\begin{aligned} \sigma : \quad \Sigma_2 &\longrightarrow \Sigma_2 \\ a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} &\longmapsto \sigma(a) = (a_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Devemos mostrar que  $\sigma(a) \in \Omega_\alpha(c)$  para todo  $a \in \Omega_\alpha(c)$ . Assim, é suficiente mostrarmos que os conjuntos

$$G = \{a_\alpha(x, c) : x \in \mathbb{S}^1\} \quad e \quad H = \{a'_\alpha(x, c) : x \in \mathbb{S}^1\}$$

são invariantes por  $\sigma$ .

Tomando  $a \in G$  segue que  $a = a_\alpha(x, c)$  para algum  $x \in \mathbb{S}^1$  onde,

$$a_\alpha^j(x, c) = \begin{cases} 0 & \text{se } r_\alpha^j(x) \in A_0(c) \cup A_1(c) \\ 1 & \text{se } r_\alpha^j(x) \in B_0(c) \cup B_1(c). \end{cases}$$

Logo,

$$\sigma(a) = (a_\alpha^{j+1}(x, c))_{j \in \mathbb{Z}} = (a_\alpha^j(r_\alpha(x), c))_{j \in \mathbb{Z}} = (a_\alpha(r_\alpha(x), c)),$$

e como  $r_\alpha(x) \in \mathbb{S}^1$ , segue que  $\sigma(a) \in G$  e portanto  $G$  é invariante com respeito a  $\sigma$ .

Analogamente prova-se a invariância de  $H$  sobre  $\sigma$ , portanto  $\Omega_\alpha(c)$  é invariante com respeito a  $\sigma$ .

- $\Omega_\alpha(c)$  é fechado em  $\Sigma_2$ .

Mostraremos que  $\Omega_\alpha(c)$  é compacto, e como todo compacto em um espaço métrico é fechado seguirá o resultado.

Seja  $\{b_\alpha(x_i, c)\}_{i \in \mathbb{N}}$  uma sequência em  $\Omega_\alpha(c)$ . Como  $\mathbb{S}^1$  é compacto, a sequência  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  possui uma subsequência  $\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  que converge para um ponto  $y \in \mathbb{S}^1$ . Note que podemos tomar a subsequência  $\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  convergindo lateralmente para  $y \in \mathbb{S}^1$ .

Afirmamos que a subsequência  $\{b_\alpha(y_i, c)\}_{i \in \mathbb{N}}$  de  $\{b_\alpha(x_i, c)\}_{i \in \mathbb{N}}$  converge em  $\Omega_\alpha(c)$ .

De fato, supondo que  $\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  converge a  $y$  pela direita, temos pelo Lema (2.2.2) que

$$\lim_{y_i \rightarrow y^+} b_\alpha(y_i, c) = b_\alpha \left( \lim_{y_i \rightarrow y^+} y_i, c \right) = b_\alpha(y, c)$$

donde segue a compacidade de  $\Omega_\alpha(c)$ .

Note que nossa suposição de que  $\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  converge a  $y$  pela direita é inofensiva, pois se  $\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  converge a  $y$  pela esquerda a conclusão ainda segue do Lema (2.2.2).

- Órbitas de pontos de  $\Omega_\alpha(c)$  sobre  $\sigma$  são densas em  $\Omega_\alpha(c)$ .

Sejam  $a = (a_j)_{j \in \mathbb{Z}} \in \Omega_\alpha(c)$  e  $\epsilon > 0$  arbitrariamente fixados. Queremos mostrar que dado  $b = (b_j)_{j \in \mathbb{Z}} \in \Omega_\alpha(c)$  existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que,

$$d(\sigma^{k_0}(b), a) < \epsilon. \tag{2.16}$$

Assuma que  $a = a_\alpha(y, c)$  e  $b = b_\alpha(x, c)$ , onde  $x, y \in \mathbb{S}^1$ . Por definição,

$$\sigma^k(b) = (b_\alpha^{j+k}(x, c))_{j \in \mathbb{Z}} \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Assim, por 2.16 queremos encontrar  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{|b^{j+k_0}(x, c) - a_{\alpha}^j(y, c)|}{2^{|j|}} < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{|b^{j+k_0}(x, c) - a_{\alpha}^j(y, c)|}{2^{-j}} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|b^{j+k_0}(x, c) - a_{\alpha}^j(y, c)|}{2^j} < \epsilon \quad (2.17)$$

Vamos mostrar que existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  com a propriedade 2.17.

Suponha que  $y \in \text{int}(A_i(c) \cup B_i(c))$ ,  $i = 1, 2$ . Logo existe  $\delta > 0$  tal que  $\Gamma = (y - \delta, y + \delta)$  está contido em  $A_i(c)$  ou  $B_i(c)$ ,  $i = 1, 2$ , conforme o caso. Agora, dado  $k \in \mathbb{N}$  e ajuntando  $\Gamma$  se necessário, temos que  $r_{\alpha}^j(u)$  e  $r_{\alpha}^j(y)$  pertencem ao mesmo arco  $A_i(c)$  ou  $B_i(c)$ ,  $i = 1, 2$ , para todo  $u \in \Gamma$  e para todo  $j \in \mathbb{Z}$  tal que  $|j| < k$ .

Por outro lado,  $\{r_{\alpha}^j(x)\}_{j \in \mathbb{Z}}$  é denso em  $\mathbb{S}^1$ , logo existe  $k_0 \in \mathbb{Z}$  tal que

$$|r_{\alpha}^{k_0}(x) - y| < \delta$$

e portanto,  $r_{\alpha}^{j+k_0}(x)$  e  $r_{\alpha}^j(y)$  pertencem ao mesmo arco  $A_i(c)$  ou  $B_i(c)$ ,  $i = 1, 2$ , para todo  $j \in \mathbb{Z}$  tal que  $|j| < k$ .

Tomando  $k$  de modo que

$$\frac{1}{2^{k-2}} < \epsilon \quad (2.18)$$

segue que,

$$\begin{aligned}
d(\sigma^{k_0}(b), a) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{|b^{j+k_0}(x, c) - a_{\alpha}^j(y, c)|}{2^{|j|}} \\
&= \sum_{j=-\infty}^{-k-1} \frac{|b^{j+k_0}(x, c) - a_{\alpha}^j(y, c)|}{2^{-j}} + \sum_{j=-k}^k \frac{|b^{j+k_0}(x, c) - a_{\alpha}^j(y, c)|}{2^{|j|}} \\
&\quad + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{|b^{j+k_0}(x, c) - a_{\alpha}^j(y, c)|}{2^j} \\
&= \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{|b^{j+k_0}(x, c) - a_{\alpha}^j(y, c)|}{2^{-j}} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{|b^{j+k_0}(x, c) - a_{\alpha}^j(y, c)|}{2^{|j|}} \\
&\leq \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{2}{2^j} \\
&= \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \\
&= \frac{1}{2^{k-2}} < \epsilon.
\end{aligned}$$

Donde conclui-se que  $\{(\sigma^j(x))_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  é denso em  $\Omega_{\alpha}(c)$ .

Se  $y \in \{0, c, c + \frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2}\}$ , tomamos  $\delta > 0$  de modo que  $\Gamma = [y, y + \delta)$  esteja contido em  $A_i(c)$  ou  $B_i(c)$  conforme o caso, e a prova segue da mesma forma.

As provas nos casos em que  $a = (a'_{\alpha}(x, c))$  e  $b = b'_{\alpha}(y, c)$ ,  $a = (a_{\alpha}(x, c))$  e  $b = b_{\alpha}(y, c)$ , e finalmente,  $a = (a'_{\alpha}(x, c))$  e  $b = b_{\alpha}(y, c)$  também seguem de forma análoga, pois por definição, estas sequências só diferem nos pontos extremos dos arcos que definem as partições  $\mathcal{P}(c)$  e  $\mathcal{P}'(c)$ , sendo portanto, sempre possível obter  $k_0$  com a propriedade 2.17 em qualquer um dos casos.

■

**Lema 2.2.4.** *Existe um conjunto incontável  $\mathcal{M} \subset (0, 1 - \alpha]$  tal que, se  $c, d \in \mathcal{M}$  e  $c \neq d$ , os conjuntos de cantor  $\Omega_\alpha(c)$  e  $\Omega_\alpha(d)$  são disjuntos.*

**Demonstração:** Note que, fixando-se arbitrariamente  $x, c \in \mathbb{S}^1$  e tomando

$$d = 1 - c - \alpha \quad e \quad y = x + \frac{\alpha}{2} + d. \quad (2.19)$$

temos  $a_\alpha(x, c) = a_\alpha(y, d)$ , resultando que

$$\Omega_\alpha(c) \cap \Omega_\alpha(d) \neq \emptyset.$$

De fato, pela nossa escolha de  $y$  e  $d$  em 2.19 temos as seguintes partições de  $\mathbb{S}^1$ :

$$\mathcal{P}_\alpha(c) = \{A_0(c), B_0(c), A_1(c), B_1(c)\} \quad e \quad \mathcal{P}_\alpha(d) = \{A_0(d), B_0(d), A_1(d), B_1(d)\},$$

onde

$$A_0(c) = [0, c)$$

$$A_0(d) = [0, 1 - c - \alpha)$$

$$B_0(c) = \left[ c, c + \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$B_0(d) = \left[ 1 - c - \alpha, 1 - c - \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$A_1(c) = \left[ c + \frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$A_1(d) = \left[ 1 - c - \frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$B_1(c) = \left[ 1 - \frac{\alpha}{2}, 1 \right)$$

$$B_1(d) = \left[ 1 - \frac{\alpha}{2}, 1 \right).$$

Assim, tomando  $j \in \mathbb{Z}$  temos que,

$$a_\alpha^j(x, c) = r_\alpha^j(x) = (x + j\alpha) \bmod 1 \quad (2.20)$$

e novamente por 2.19 segue,

$$\begin{aligned}
a_\alpha^j(y, d) &= r_\alpha^j(y) \\
&= r_\alpha^j\left(x + 1 - c - \frac{\alpha}{2}\right) \\
&= \left(x + 1 - c - \frac{\alpha}{2} + j\alpha\right) \bmod 1 \\
&= \left((x + j\alpha) + 1 - c - \frac{\alpha}{2}\right) \bmod 1 \\
&= \left(r^j(x)_\alpha - c - \frac{\alpha}{2}\right) \bmod 1
\end{aligned}$$

Agora, supondo que  $r_\alpha^j(x) \in A_0(c)$ , segue que  $0 \leq r_\alpha^j(x) < c$  e portanto,

$$\begin{aligned}
-c - \frac{\alpha}{2} &\leq a_\alpha^j(y, d) < c - c - \frac{\alpha}{2} \\
\Rightarrow -c - \frac{\alpha}{2} &\leq a_\alpha^j(y, d) < -\frac{\alpha}{2} \\
\Rightarrow 1 - c - \frac{\alpha}{2} &\leq a_\alpha^j(y, d) < 1 - \frac{\alpha}{2} \\
\Rightarrow a_\alpha^j(y, d) &\in A_1(d)
\end{aligned}$$

e portanto,

$$a_\alpha^j(y, d) = 0 = a_\alpha^j(x, c) \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Os casos em que  $r_\alpha^j(x)$  pertence a  $B_0(c)$ ,  $A_1(c)$  e  $B_1(c)$  são análogos.

Assim, supondo  $d \neq 1 - c - \alpha$ , vamos mostrar que se  $d \neq c$ , existe  $\epsilon > 0$  tal que

$$d(\sigma^j(a_\alpha(x, c)), \sigma^t(a_\alpha(y, d))) > \epsilon \quad \forall x, y \in \mathbb{S}^1 \text{ e } \forall j, t \in \mathbb{Z}.$$

Sejam  $x, y \in \mathbb{S}^1$  arbitrariamente fixados e suponha sem perda de generalidade que  $d > c$ . Escolhendo  $\delta > 0$  de modo que  $d - c = 2\delta$  e pondo  $V = A_0(d) \cap B_0(c)$ , como as órbitas  $\{r_\alpha^j(x)\}_{j \in \mathbb{Z}}$  e  $\{r_\alpha^j(y)\}_{j \in \mathbb{Z}}$  são densas em  $\mathbb{S}^1$ , cada órbita entra em  $V$  infinitas vezes. Assim, sendo  $N = N(\delta)$  o número máximo de iteradas entre qualquer duas visitas dessas órbitas a  $V$ , e como em qualquer dessas visitas temos que

$$r_\alpha^j(x) \in A_0(d) \cap B_0(c),$$

as sequências simbólicas  $\{a_\alpha^n(x, c)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  e  $\{a_\alpha^n(y, d)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  deferem pelo menos uma vez a cada  $N$  símbolos, e portanto,

$$d(\sigma^j(a_\alpha(x, c)), \sigma^t(a_\alpha(y, d))) > \frac{1}{2^N} \quad \forall j, t \in \mathbb{Z}. \quad (2.21)$$

O mesmo argumento se aplica para as sequências da forma  $\{a'_\alpha^n(x, c)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ .

Pela desigualdade 2.21, temos que os conjuntos de Cantor  $\Omega_\alpha(c)$  e  $\Omega_\alpha(d)$  estão a uma distância positiva um do outro e portanto são disjuntos. O conjunto  $\mathcal{M}$  procurado é então definido por

$$\mathcal{M} = (0, 1 - c - \alpha) \cup (1 - c - \alpha, 1 - \alpha].$$

■

**Lema 2.2.5.** *Seja  $b \in \Omega_\alpha(c)$ , então  $R^+(b) = R^-(b) = \alpha$ .*

**Demonstração:** Tomando  $b \in \Omega_\alpha(c)$ , suponha que  $b = \{a_\alpha^j(x, c)\}_{j \in \mathbb{Z}}$  para algum  $x \in \mathbb{S}^1$ . Seja  $\{p_j/q_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  a aproximação racional de  $\alpha$  dada por frações contínuas. Para cada  $j \in \mathbb{N}$ , a órbita periódica  $\{r_{p_j/q_j}^j(x)\}_{j \in \mathbb{N}}$  consiste de  $q_j$  pontos, os quais particionam  $\mathbb{S}^1$  em arcos de comprimento  $1/q_j$  de modo que  $I(\alpha q_j/2) \pm 1$  está em  $B_0(c)$ , e  $I(\alpha q_j/2) \pm 1$  está em  $B_1(c)$  (vide Definição 2.3.1). Logo, a frequência de 1's nas sequências  $a_{p_j/q_j}(x, c)$  está limitada por  $\alpha - 2/q_j$  e  $\alpha + 2/q_j$ , isto é,

$$\frac{\alpha q_j - 2}{q_j} \leq \frac{1}{j} \sum_{j=1}^{q_j} a_{p_j/q_j}(x, c) \leq \frac{\alpha q_j + 2}{q_j}. \quad (2.22)$$

Fazendo  $j \rightarrow \infty$  em 2.22 temos que  $R^+(b) = \alpha$ . O mesmo argumento vale para o número de rotação  $R^-(b)$ .

■

**Teorema 2.2.1.** *Suponha que  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  tem um ponto fixo hiperbólico  $p$  e seja  $q \in W^u(p) \cap W^s(p)$  um ponto homoclínico transversal  $K$ -rotacional. Então, existe um inteiro  $N < \infty$  tal que, para qualquer  $\gamma \in [0, \frac{K}{N}] - \mathbb{Q}$  existem incontáveis conjuntos de Cantor  $\Lambda_\gamma \subset \mathbb{A}$  disjuntos e invariantes tais que,*

$$\rho(x) = \gamma = \rho^-(x) \quad \forall x \in \Lambda_\gamma.$$

*Os conjuntos de  $\Lambda_\gamma = \Lambda_\gamma(\mu)$  podem ser parametrizados (com alguma redundância) por  $\mu \in (0, 1]$ .*

**Demonstração:**

Seja  $\gamma \in [0, \frac{K}{N}] \cap \mathbb{Q}$  arbitrariamente fixado, segue que  $\alpha = \gamma \frac{N}{K} \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ . Pelos Lemas (2.2.3), (2.2.4) e (2.2.5), o conjunto  $\Omega_\alpha(c)$  é um conjunto de Cantor para cada  $c \in (0, 1 - \alpha]$  tal que,

$$R^+(b) = \alpha = R^-(b) \quad \forall b \in \Omega_\alpha(c).$$

Assim, pondo  $\mu = c/(1 - \alpha)$  para cada  $c \in (0, 1 - \alpha]$ , segue que

$$\Lambda_\gamma^N(\mu) = h^{-1}(\Omega_\alpha(c)) \subset \Lambda^N \tag{2.23}$$

é um conjunto de Cantor no anel  $\mathbb{A}$ , pois  $h$  é homeomorfismo entre  $\Lambda^N$  e  $\Sigma_2^+$ . Além disso, segue de 2.23 e do Teorema (2.1.1) que

$$\rho^+(x) = \gamma = \rho^-(x) \quad \forall x \in \Lambda_\gamma^N(\mu).$$

Finalmente, como  $f$  é um homeomorfismo, temos que

$$\Lambda_\gamma(\mu) = \bigcup_{j=0}^{N-1} f^j(\Lambda_\gamma^N(\mu))$$

são conjuntos conjunto de Cantor com as propriedades requeridas quando  $\mu$  varia no intervalo  $(0, 1]$ . ■

## 2.3 Um Método Geométrico para Construir Órbitas Simbólicas Rotacionais

No Teorema (2.1.1), mostramos que o comportamento rotacional de órbitas da ferradura se reduz ao estudo de órbitas simbólicas sobre o *shift* em  $\Sigma_2$  mediante a conjugação 2.1 e a relação rotacional 2.2. Nesta seção, apresentaremos um método simples e eficiente para construir seqüências em  $\Sigma_2$  com número de rotação previamente escolhido em  $[0, 1]$ . Além de recuperar os conjuntos de Cantor  $\Omega_\alpha(c)$  construídos na seção anterior, este método nos permite dar uma demonstração bem mais enxuta do Teorema 2.1.2.

**Definição 2.3.1.** *Dado  $x \in \mathbb{R}$ , chamamos de parte inteira do número  $x$ , denotado por  $I(x)$ , ao maior inteiro menor ou igual a  $x$ .*

Fixado-se arbitrariamente  $\alpha \in (0, 1)$  e tomando  $d \in [0, 1)$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , defina

$$P_\alpha^j(d) = I(j\alpha + d). \quad (2.24)$$

Agora, considere a seqüência  $(\mu_\alpha^j(d))_{j \in \mathbb{Z}}$  definida por

$$\mu_\alpha^j(d) = P_\alpha^j(d) - P_\alpha^{j-1}(d) \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \quad (2.25)$$

A igualdade (2.24) nos dá uma interpretação geométrica da seqüência  $(\mu_\alpha^j(d))_{n \in \mathbb{Z}}$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\mu_\alpha^j(d)$  representa a diferença entre as partes inteiras das imagens sucessivas de  $j$  e  $j - 1$  dadas pela reta no plano com inclinação  $\alpha$  e coeficiente linear  $d$ .

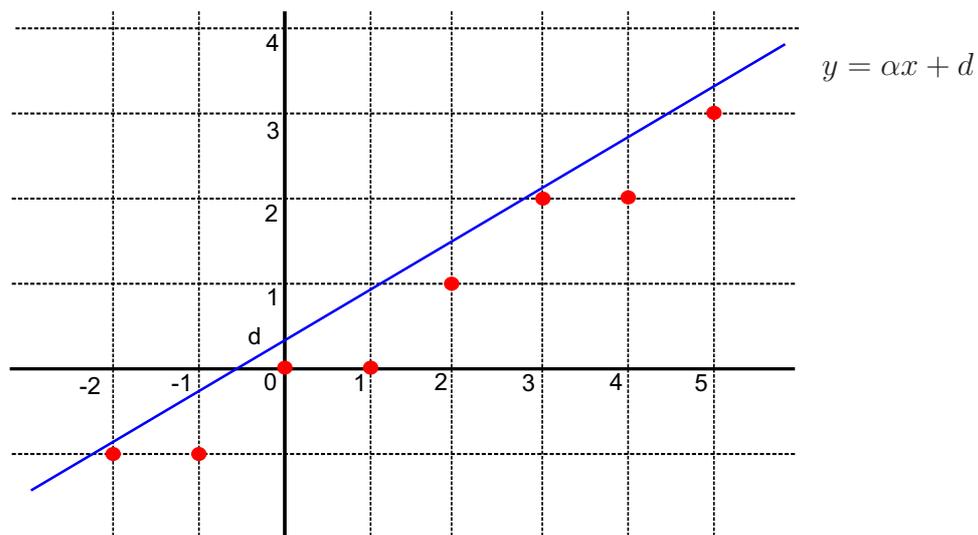


Figura 2.10: Os pontos representam os termos da sequência  $P_\alpha^j(d)$  para cada  $j \in \mathbb{Z}$ .

Mostraremos a seguir que fixado  $\alpha \in (0, 1)$  e  $d \in [0, 1)$ , a sequência  $(\mu_\alpha^j(d))_{j \in \mathbb{Z}}$  está em  $\Sigma_2$  e possui número de rotação  $\alpha$ . Antes de provarmos este fato vejamos alguns exemplos.

As colunas da tabela a seguir fornecem os vinte primeiros termos da sequência 2.25 para cada escolha  $\alpha$  e  $d$ . Note que para  $\alpha$  racional, digamos  $p/q$ , os termos parecem sugerir uma órbita  $q$ -periódica e com  $p$  uns em cada palavra de comprimento  $q$ , o que resultaria em uma órbita com número de rotação  $p/q$ . Veremos mais adiante que isto de fato ocorre.

Vinte primeiros termos da sequência $\mu_\alpha^j(d)$					
$j$	$\mu_{2/5}^j(0)$	$\mu_{3/8}^j(\pi/4)$	$\mu_{3/5}^j(1/4)$	$\mu_{e/3}^j(0)$	$\mu_{\sqrt{2}/3}^j(1/2)$
1	0	1	0	0	0
2	0	0	1	1	1
3	1	0	1	1	0
4	0	1	0	1	1
5	1	0	1	1	0
6	0	1	0	1	1
7	0	0	1	1	0
8	1	0	1	1	1
9	0	1	0	1	0
10	1	0	1	1	1
11	0	1	0	0	0
12	0	0	1	1	1
13	1	0	1	1	0
14	0	1	0	1	1
15	1	0	1	1	0
16	0	1	0	1	1
17	0	0	1	1	0
18	1	0	1	1	1
19	0	1	0	1	0
20	1	0	1	1	1

**Afirmção 2.1.** *Sejam  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $d \in [0, 1)$  e  $(\mu_\alpha^j(d))_{j \in \mathbb{Z}}$  como em (2.25). Então, valem as seguintes afirmações.*

(a)  $\mu_\alpha^j(d) \in \{0, 1\}$  para todo  $j \in \mathbb{Z}$ , e portanto,  $(\mu_\alpha^j(d))_{j \in \mathbb{Z}} \in \Sigma_2$ .

(b) Se  $n > 0$ , então  $P_\alpha^n(d) - P_\alpha^0(d)$  é exatamente a quantidade de algarismos “1” nas entradas de 1 até  $n$  de  $(\mu_\alpha^j(d))_{j \in \mathbb{Z}}$ . De modo semelhante, se  $n < 0$ , então  $-P_\alpha^n(d) - P_\alpha^0(d)$  é a quantidade de algarismos “1” nas entradas de  $n + 1$  até 0.

**Demonstração:**

(a) Note primeiramente que qualquer que seja  $x \in \mathbb{R}$  temos que

$$I(x) - I(x - \alpha) \in \{0, 1\}. \quad (2.26)$$

De fato, fixado  $x \in \mathbb{R}$ , existe  $\gamma \in [0, 1)$  tal que,  $x = I(x) + \gamma$ . No caso em que  $\gamma \geq \alpha$  temos que:

$$I(x - \alpha) = I(I(x) + \gamma - \alpha) = I(x)$$

pois,  $0 < \gamma - \alpha < 1$ . Por outro lado, se tivermos  $\gamma < \alpha$  segue que:

$$I(x - \alpha) = I(I(x) + \gamma - \alpha) = I(x) - 1$$

uma vez que  $-1 < \gamma - \alpha < 0$ . Em ambos os casos, segue 2.26.

Agora, tome  $j \in \mathbb{Z}$  arbitrariamente fixado, segue que

$$\mu_\alpha^j(d) = I(\alpha j + d) - I(\alpha j + d - \alpha),$$

tomando  $x = \alpha j + d$  em 2.26 segue o resultado.

(b) Provaremos este item por indução sobre  $n$ . Consideremos inicialmente  $n > 0$ .

Para  $n = 1$  temos,

$$\mu_\alpha^1(d) = P_\alpha^1(d) - P_\alpha^0(d) = I(\alpha + d) - I(d) = I(\alpha + d)$$

assim, se  $\alpha + d < 1$  segue que  $\mu_\alpha^1(d) = 0$ . Por outro lado, se  $\alpha + d \geq 1$  temos que  $\mu_\alpha^1(d) = 1$ .

Logo, (a) vale para  $n = 1$ .

Agora, supondo que  $P_\alpha^k(d) - P_\alpha^0(d)$  seja o número de 1's nas entradas de 1 até  $k$  de  $(\mu_\alpha^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , vamos mostrar que o mesmo ocorre para  $n = k + 1$ . De fato,

$$P_\alpha^{k+1}(d) = I((k+1)\alpha + d) \quad (2.27)$$

assim, pondo  $x = k\alpha + d$ , existe  $\gamma \in [0, 1)$  tal que,  $x = I(x) + \gamma$ , logo por 2.27

$$P_\alpha^{k+1}(d) = I(I(x) + \gamma + \alpha). \quad (2.28)$$

Se  $\gamma + \alpha < 1$ , segue de 2.28 que

$$P_\alpha^{k+1}(d) = I(x) = P_\alpha^k(d),$$

donde segue  $\mu_\alpha^{k+1}(d) = 0$ , e portanto,  $P_\alpha^{k+1}(d) - P_\alpha^0(d)$  é o número de algarismos “1” nas entradas de 1 até  $k + 1$  da sequência  $(\mu_\alpha^n(d))_{n \in \mathbb{Z}}$ . Por outro lado, se  $\gamma + \alpha \geq 1$ , por 2.27 temos que

$$P_\alpha^{k+1}(d) = I(x) + 1 = P_\alpha^k(d) + 1,$$

logo,  $\mu_\alpha^{k+1}(d) = 1$ , resultando que  $P_\alpha^{k+1}(d) - P_\alpha^0(d)$  é o número 1's desde o termo  $\mu_\alpha^1(d)$  até o termo  $\mu_\alpha^{k+1}(d)$  da sequência  $(\mu_\alpha^n(d))_{n \in \mathbb{Z}}$ .

Considerando agora  $n < 0$  e tomando  $x = -(k + 1)\alpha$  na demonstração do caso anterior, prova-se que  $-P_\alpha^j(d) - P_\alpha^0(d)$  é exatamente a quantidade de 1's desde o termo  $\mu_\alpha^{j+1}(d)$  até o termo  $\mu_\alpha^0(d)$  da sequência  $(\mu_\alpha^n(d))_{n \in \mathbb{Z}}$ . ■

**Corolário 2.1.** *Dados  $\alpha \in (0, 1)$  e  $d \in [0, 1)$ , seja  $a = (\mu_\alpha^j(d))_{j \in \mathbb{Z}}$ . Então,  $R(a) = \alpha$ .*

**Demonstração:** Pelo item (b) da Afirmação (2.1) temos que,

$$R(a) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j \mu_\alpha^k(d) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{P_\alpha^j(d)}{j}. \quad (2.29)$$

Mas, por (2.24),

$$0 \leq j\alpha + d - P_\alpha^j(d) < 1$$

e portanto,

$$\frac{-d}{j} \leq \alpha - \frac{P_\alpha^j(d)}{j} < \frac{1-d}{j},$$

logo,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{P_\alpha^j(d)}{j} = \alpha.$$

A conclusão agora, segue de (2.29). ■

Agora, fixando-se  $\alpha \in (0, 1)$  considere o seguinte conjunto

$$E_\alpha = \{(\mu_\alpha^n(d))_{n \in \mathbb{Z}} : d \in [0, 1)\}. \quad (2.30)$$

De modo análogo definimos o conjunto  $E_\alpha^*$ , de todas as sequências simbólicas  $a = (\mu_\alpha^j(d))_{j \in \mathbb{Z}}$  dadas por (2.25) tais que  $d \in (0, 1]$ . Note que o números de rotação de tais sequências

também existem, pois, neste caso,

$$0 \leq j\alpha + d - P_\alpha^j(d) \leq 1$$

e com argumentos análogos aos do Corolário (2.1) prova-se que  $R(a) = \alpha$ . Dessa forma, dado  $\alpha \in (0, 1)$  definimos

$$\widehat{E}_\alpha = E_\alpha \cup E_\alpha^*.$$

O próximo resultado mostrará que para todo  $\alpha \in (0, 1) - \mathbb{Q}$  o conjunto  $\widehat{E}_\alpha$  coincide exatamente com o conjunto de Cantor  $\Omega_\alpha(1 - \alpha)$  construído na seção anterior.

**Proposição 2.3.1.** *Seja  $\alpha \in (0, 1) - \mathbb{Q}$ , então  $\widehat{E}_\alpha = \Omega_\alpha(1 - \alpha)$ .*

**Demonstração:** Considere  $\alpha \in (0, 1) - \mathbb{Q}$  arbitrário fixado. Por definição,

$$\Omega_\alpha(1 - \alpha) = \{a_\alpha(x); x \in \mathbb{S}^1\} \cup \{a'_\alpha(x); x \in \mathbb{S}^1\} \subset \Sigma_2$$

onde, para cada  $x \in \mathbb{S}^1$ ,  $a_\alpha(x) = (a_\alpha^j(x))_{j \in \mathbb{Z}}$  tal que,

$$a_\alpha^j(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } r_\alpha^j(x) \in A = [0, 1 - \alpha) \\ 1, & \text{se } r_\alpha^j(x) \in B = [1 - \alpha, 1). \end{cases} \quad (2.31)$$

Analogamente para  $a'_\alpha(x)$ , onde substituímos  $A$  por  $A' = (0, 1 - \alpha]$  e  $B$  por  $B' = (1 - \alpha, 1]$ .

Para provarmos a proposição mostraremos que

$$E_\alpha = \{a_\alpha(x); x \in \mathbb{S}^1\} \quad e \quad E_\alpha^* = \{a'_\alpha(x); x \in \mathbb{S}^1\}. \quad (2.32)$$

Primeiramente, pelo Lema (2.2.1), cada elemento  $a_\alpha(x) \in \Omega_\alpha(1 - \alpha)$  é unicamente determinado por  $x$ . De modo análogo, cada sequência  $(\mu_\alpha^j(d))_{j \in \mathbb{Z}} \in E_\alpha$  onde,

$$\mu_\alpha^j(d) = I(j\alpha + d) - I((j - 1)\alpha + d) \quad (2.33)$$

é unicamente determinado por  $d \in [0, 1)$ .

Assim, considerando a função bijetora  $\gamma : [0, 1) \rightarrow \mathbb{S}^1$  definida por

$$\gamma(d) = \begin{cases} 1 - \alpha + d, & \text{se } d \in [0, \alpha) \\ d - \alpha, & \text{se } d \in [\alpha, 1), \end{cases}$$

mostraremos que,

$$\mu_\alpha^j(d) = a_\alpha^j(\gamma(d)) \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Fixemos arbitrariamente  $j \in \mathbb{Z}$ .

**I Caso:**  $d \in [0, \alpha)$

Suponha inicialmente que  $r_\alpha^j(\gamma(d)) \in [0, 1 - \alpha)$ , segue que  $\alpha \leq j\alpha + d < 1$ , e portanto,

$$I(j\alpha + d) - I((j-1)\alpha + d) = 0 = \mu_\alpha^j(d).$$

Por outro lado, temos por 2.31 que  $a_\alpha^j(\gamma(d)) = 0$ , logo,  $\mu_\alpha^j(d) = a_\alpha^j(\gamma(d))$  neste caso.

Agora, suponha que  $r_\alpha^j(\gamma(d)) \in [1 - \alpha, 1)$ , segue que  $1 \leq j\alpha + d < 1 + \alpha$ , o que implica que

$$I(j\alpha + d) - I((j-1)\alpha + d) = 1 = \mu_\alpha^j(d).$$

De modo análogo, resulta de 2.31 que  $a_\alpha^j(\gamma(d)) = 1$ , e portanto, a igualdade  $\mu_\alpha^j(d) = a_\alpha^j(\gamma(d))$  permanece verdadeira.

**II Caso:**  $d \in [\alpha, 1)$

Como no caso anterior, se  $r_\alpha^j(\gamma(d)) \in [0, 1 - \alpha)$ , então por 2.31  $a_\alpha^j(\gamma(d)) = 0$ . Por outro lado,  $r_\alpha^j(\gamma(d)) \in [0, 1 - \alpha)$  implica,  $\alpha \leq j\alpha + d < 1$ , donde segue que

$$I(j\alpha + d) - I((j-1)\alpha + d) = 0 = \mu_\alpha^j(d).$$

Finalmente, se  $r_\alpha^j(\gamma(d)) \in [1 - \alpha, 1)$ , temos por 2.31 que  $a_\alpha^j(\gamma(d)) = 1$ . Mas, neste caso,  $1 \leq j\alpha + d < 1 + \alpha$ , e portanto,

$$I(j\alpha + d) - I((j-1)\alpha + d) = 1 = \mu_\alpha^j(d).$$

Assim, concluímos que  $E_\alpha = \{a_\alpha(x); x \in \mathbb{S}^1\}$ , a segunda igualdade em 2.32 é mostrada de forma análoga. ■

**Corolário 2.2.** *Para todo  $\alpha, \beta \in I$  existe um conjunto incontável  $\Lambda_{\alpha, \beta} \subset \mathbb{A}$  tal que se,  $x \in \Lambda_{\alpha, \beta}$  então,  $\rho_{fN}^-(x) = \alpha$  e  $\rho_{fN}^+(x) = \beta$ .*

**Demonstração:** Fixados  $\alpha$  e  $\beta$  em  $I$ , note que  $s = N\alpha/K$  e  $t = N\beta/K$  pertencem a  $[0, 1]$ , onde  $N$  e  $K$  são dados pelo Teorema 2.1.1. Agora, tomando  $d_1, d_2 \in [0, 1)$  arbitrariamente fixados e pondo

$$w_{d_1, d_2} = \widehat{(\mu_s^j(d_1), \mu_t^j(d_2))}_{j \in \mathbb{N}},$$

temos pelo Corolário 2.1 que  $R^-(w_{d_1, d_2}) = s$  e  $R^+(w_{d_1, d_2}) = t$ , donde segue pela relação rotacional 2.2 que

$$\rho^-(x_{d_1, d_2}) = \alpha \quad \text{e} \quad \rho^+(x_{d_1, d_2}) = \beta,$$

sendo  $x_{d_1, d_2} = h^{-1}(w_{d_1, d_2})$ . Finalmente, deixando  $d_1$  e  $d_2$  variar em  $[0, 1)$ , basta definir

$$\Lambda_{\alpha, \beta} = \{x_{d_1, d_2} : d_1, d_2 \in [0, 1)\}.$$

■

# Capítulo 3

## Órbitas Birkhoff

Neste capítulo estudaremos órbitas da ferradura que preservam orientação, dando especial atenção às órbitas Birkhoff. Mostraremos também que sobre certas hipóteses órbitas homoclínicas implicam a existência de órbitas rotacionais que preservam orientação, Teorema (3.2.1). Finalizamos o capítulo caracterizando as órbitas Birkhoff da aplicação de duplicação em  $\mathbb{S}^1$  ([1]), as quais implicam a existência de órbitas Birkhoff de  $f$  ([5]).

### 3.1 Ordem Cíclica e Órbitas que Preservam Orientação

Dada uma terna de pontos  $a, b, c \in \mathbb{S}^1$ ,  $a \neq b \neq c$ , a notação

$$a <_s b <_s c, \tag{3.1}$$

indicará que, ao percorrermos  $\mathbb{S}^1$  no sentido anti-horário partindo do ponto  $a$ , encontraremos primeiramente o ponto  $b$  e logo depois  $c$ , antes de completarmos uma volta retornando ao ponto  $a$  (vide figura 3.1). Note que  $b <_s c <_s a$  e  $c <_s a <_s b$  têm exatamente o mesmo significado que 3.1, e portanto,  $<_s$  não é uma relação de ordem em  $\mathbb{S}^1$ , indica apenas a ordem cíclica dos pontos.

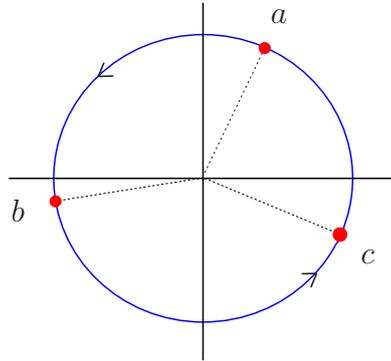


Figura 3.1: Ordem cíclica dos pontos  $a, b, c \in \mathbb{S}^1$ .

Na definição a seguir,  $\mathbb{X}$  denotará o anel  $\mathbb{A}$  ou o círculo  $\mathbb{S}^1$ , e  $\tilde{\mathbb{X}}$  os respectivos recobrimientos universais  $\mathbb{R} \times [a, b]$  ou  $\mathbb{R}$ , conforme o caso.

**Definição 3.1.1.** *Seja  $\xi : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ .*

(i) *Dizemos que uma órbita  $\{\xi^j(x)\}_{j \in \mathbb{N}}$  preserva orientação em  $\mathbb{X}$ , se para qualquer levantamento  $\tilde{\xi}$  de  $\xi$  e quaisquer dois pontos  $\tilde{y}, \tilde{z} \in \{\tilde{\xi}^j(\tilde{x})\}_{j \in \mathbb{N}}$  a implicação for verdadeira*

$$\Pi_1(\tilde{y}) < \Pi_1(\tilde{z}) \implies \Pi_1(\tilde{\xi}(\tilde{y})) < \Pi_1(\tilde{\xi}(\tilde{z})).$$

(Sendo a projeção  $\Pi_1$  ignorada quando  $\mathbb{X} = \mathbb{S}^1$ .)

(ii) *No caso em que  $\mathbb{X} = \mathbb{S}^1$ , dizemos que a órbita  $\{\xi^j(x)\}_{j \in \mathbb{N}}$  preserva a ordem cíclica se para quaisquer pontos  $a, b, c \in \{\xi^j(x)\}_{j \in \mathbb{N}}$  os pontos  $\xi(a), \xi(b), \xi(c)$  possuem a mesma ordem cíclica que  $a, b, c$ , isto é,*

$$a <_s b <_s c \implies \xi(a) <_s \xi(b) <_s \xi(c).$$

Uma órbita periódica que preserva orientação em  $\mathbb{X}$  é chamada órbita Birkhoff.

**Exemplo 3.1.1.** *Considere aplicação*

$$\begin{aligned} \psi : \quad \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ x = e^{2\pi it} &\longmapsto \psi(x) = e^{4\pi it}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde  $t \in [0, 1)$ . Tomando  $t_0 = 5/31$  e  $t_1 = 7/31$  as órbitas obtidas por  $\psi$  possuem os seguintes termos respectivamente

$$\left\{ e^{2\pi i \frac{5}{31}}, e^{2\pi i \frac{10}{31}}, e^{2\pi i \frac{20}{31}}, e^{2\pi i \frac{9}{31}}, e^{2\pi i \frac{18}{31}} \right\} \quad e \quad \left\{ e^{2\pi i \frac{7}{31}}, e^{2\pi i \frac{14}{31}}, e^{2\pi i \frac{28}{31}}, e^{2\pi i \frac{25}{31}}, e^{2\pi i \frac{19}{31}} \right\}.$$

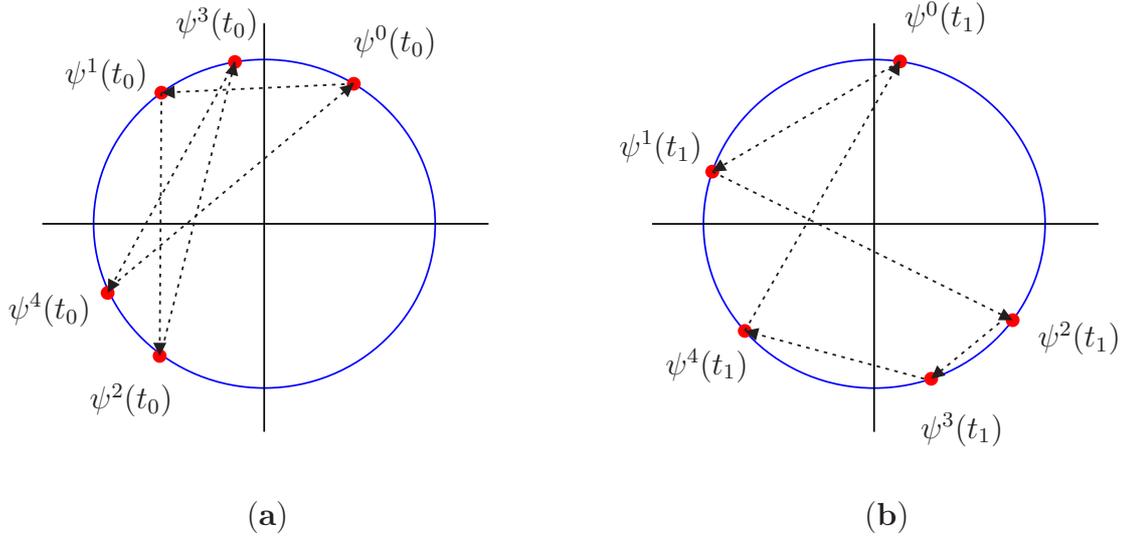


Figura 3.2: Representação geométrica das órbitas  $\{\psi^j(t_0)\}_{j \in \mathbb{Z}}$  e  $\{\psi^j(t_1)\}_{j \in \mathbb{Z}}$ .

Note que a órbita em (b) não preserva a ordem cíclica, com efeito,  $\psi^0(t_0) <_s \psi^1(t_0) <_s \psi^2(t_0)$  e  $\psi^1(t_0) <_s \psi^3(t_0) <_s \psi^2(t_0)$ . Já a órbita em (a) é bem ordenada ciclicamente, pois todas as 10 possíveis ternas de pontos na órbita mantêm a mesma ordem cíclica após uma iteração de  $\psi$ .

Como é óbvio, torna-se inviável checar todas as possibilidades de ternas de pontos em uma órbita para garantir se esta preserva ou não a ordem cíclica. A aplicação em 3.2 é denominada aplicação de duplicação e será utilizada outras vezes ao longo do capítulo. Para esta dinâmica, veremos mais adiante, que o fato de uma órbita preservar a ordem cíclica está intimamente ligado à existência de semicírculos em  $\mathbb{S}^1$  que contenham a órbita, além disso, mostraremos neste caso, que os itens da Definição 3.1.1 são equivalentes, ou seja, a órbita em (a) na figura 3.2 é uma órbita Birkhoff em  $\mathbb{S}^1$ .

**Observação 3.1.1. (i)** Em algumas ocasiões, utilizaremos os espaços  $\mathbb{T}$  e  $\mathbb{S}^1$  de maneira conveniente, mais especificamente, trabalharemos como se fossem o mesmo espaço,

isto simplificará algumas provas e tornará a notação mais enxuta. Do ponto de vista topológico não teremos prejuízo algum, pois como vimos no Exemplo 1.1.2 estes espaços são homeomorfos. Também será inofensivo no que diz respeito a obtenção de órbitas Birkhoff, uma vez que o homeomorfismo 1.3 mantém a ordenação de ternas de pontos nestes espaços, no sentido que:

Dados  $t_1 < t_2 < t_3$  em  $\mathbb{T}$ , temos que  $\lambda(t_1) <_s \lambda(t_2) <_s \lambda(t_3)$ . Reciprocamente, dados  $a <_s b <_s c$  em  $\mathbb{S}^1$ , temos que  $\lambda^{-1}(a) < \lambda^{-1}(b) < \lambda^{-1}(c)$ .

(ii) Note que as classes de equivalência de  $\mathbb{T}$  são conjuntos unitários, exceto  $[0]$ , motivo pelo qual cometeremos o abuso de notação escrevendo  $t \in \mathbb{T}$  em vez de  $[t] \in \mathbb{T}$ .

A próxima proposição mostra que o item (ii) da Definição 3.1.1 é de fato uma condição necessária para que uma órbita preserve orientação no círculo, qualquer que seja a dinâmica envolvida.

**Proposição 3.1.1.** *Se  $\{\xi^j(x)\}_{j \in \mathbb{N}}$  preserva ordem em  $\mathbb{S}^1$ , então esta órbita também preserva a ordem cíclica.*

**Demonstração:**

Suponha por absurdo que  $\{\xi^j(x)\}_{j \in \mathbb{N}}$  não preserve a ordem cíclica, isto é, existem pontos  $y, z, w \in \{\xi^j(x)\}_{j \in \mathbb{N}}$  tais que,

$$y < z < w \quad \text{e} \quad \xi(y) < \xi(w) < \xi(z). \quad (3.3)$$

Agora, considere como aplicação de recobrimento a projeção canônica

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ \tilde{x} &\longmapsto \Gamma(\tilde{x}) = [\tilde{x}], \end{aligned}$$

(vide Exemplo 1.1.2) e tome um levantamento  $\tilde{\xi}$  de  $\xi$  com respeito a  $\Gamma$ . Restringindo  $\Gamma$  de maneira apropriada é possível tomar  $\tilde{z} = \Gamma^{-1}(z)$  e  $\tilde{w} = \Gamma^{-1}(w)$  de modo que  $\tilde{z} < \tilde{w}$ , e além disso,

$$\tilde{\xi}(\tilde{z}) = (\Gamma^{-1} \circ \xi \circ \Gamma)(\tilde{z}) = \Gamma^{-1}(\xi(z)) = \xi(z) \quad (3.4)$$

e

$$\tilde{\xi}(\tilde{w}) = (\Gamma^{-1} \circ \xi \circ \Gamma)(\tilde{w}) = \Gamma^{-1}(\xi(w)) = \xi(w). \quad (3.5)$$

Segue de 3.3, 3.4 e 3.5 que  $\tilde{\xi}(\tilde{w}) < \tilde{\xi}(\tilde{z})$ , contrariando o fato de que  $\{\xi^j(x)\}_{j \in \mathbb{N}}$  preserva a ordem em  $\mathbb{S}^1$ .

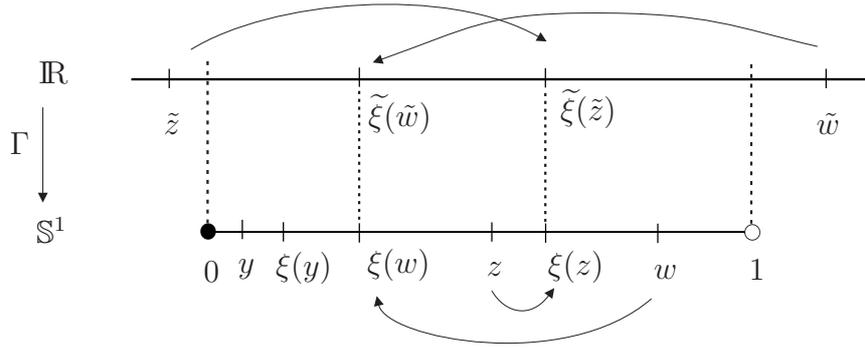


Figura 3.3: Uma órbita que não preserva a ordem cíclica não pode preservar orientação em  $\mathbb{S}^1$ .

■

O resultado seguinte diz que a recíproca da Proposição (3.1.1) é verdadeira para a aplicação de duplicação  $\psi$ .

**Proposição 3.1.2.** *Se a órbita  $\{\psi^j(x)\}_{j \in \mathbb{Z}}$  preserva a ordem cíclica, então esta também preserva orientação.*

**Demonstração:**

Considere a aplicação de recobrimento

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ \tilde{x} &\longmapsto \Gamma(\tilde{x}) = e^{i\tilde{x}}, \end{aligned}$$

e suponha por absurdo que exista um levantamento  $\tilde{\psi} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  de  $\psi$  e pontos  $\tilde{y}, \tilde{z} \in \{\tilde{\psi}^j(\tilde{x})\}_{j \in \mathbb{Z}}$  tais que,

$$\tilde{y} < \tilde{z} \quad \text{e} \quad \tilde{\psi}(\tilde{z}) < \tilde{\psi}(\tilde{y}). \quad (3.6)$$

Note que  $\tilde{z} - \tilde{y} \notin \mathbb{Z}$ , com efeito, como  $\tilde{\psi}$  é homotópica à identidade, se existisse  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\tilde{z} - \tilde{y} = n$ , então

$$\tilde{\psi}(\tilde{z}) = \tilde{\psi}(\tilde{y} + n) = \tilde{\psi}(\tilde{y}) + n,$$

resultando que  $\tilde{\psi}(\tilde{y}) < \tilde{\psi}(\tilde{z})$ , o que contraria 3.6. Além disso, restringindo convenientemente a aplicação de recobrimento  $\Gamma$  temos que

$$\tilde{\psi}(\tilde{w}) = (\Gamma^{-1} \circ \psi)(e^{i\tilde{w}}) = \Gamma^{-1}(e^{2i\tilde{w}}) = 2\tilde{w} \quad \forall \tilde{w} \in \mathbb{R}. \quad (3.7)$$

Agora, caso  $\tilde{z} - \tilde{y} > 1$ , escolha  $\tilde{w} \in \mathbb{R}$  de modo que  $\tilde{z} - \tilde{w} \in \mathbb{N}$  e  $\tilde{w} - \tilde{y} < 1$ . Tomando  $\tilde{t} \in [\tilde{y}, \tilde{w}]$ , temos por 3.7 que  $\tilde{\psi}(\tilde{y}) < \tilde{\psi}(\tilde{t}) < \tilde{\psi}(\tilde{w})$ , donde segue que

$$e^{2\tilde{\psi}(\tilde{y})} <_c e^{2\tilde{\psi}(\tilde{t})} <_c e^{2\tilde{\psi}(\tilde{z})} \quad \text{e} \quad e^{2\tilde{\psi}(\tilde{z})} <_c e^{2\tilde{\psi}(\tilde{t})} <_c e^{2\tilde{\psi}(\tilde{y})},$$

o que contraria o fato da órbita  $\{\psi^j(x)\}_{j \in \mathbb{Z}}$  preservar a ordem cíclica. Logo,  $\{\psi^j(x)\}_{j \in \mathbb{Z}}$  preserva a ordem. ■

## 3.2 Aplicação de Duplicação e Ferradura Rotacional

Como já dito anteriormente, neste capítulo utilizaremos a aplicação de duplicação em  $\mathbb{S}^1$  para estudar órbitas Birkhoff da ferradura rotacional, mas como relacionar estas duas aplicações? Este é o objetivo desta seção.

Seja  $V'_0 = U \cap f^{-1}(U)$ . Iremos supor, sem perda de generalidade, que  $V_0$  está contido propriamente em  $V'_0$ , de modo que  $V'_0$  seja uma faixa mais espessa que  $V_0$  na direção da variedade instável, mas que ainda seja disjunta de  $V_1$ . Para simplificar a notação, também iremos supor que  $V'_0$  intersecta a faixa  $V_1$  logo na primeira iterada de  $f$ .

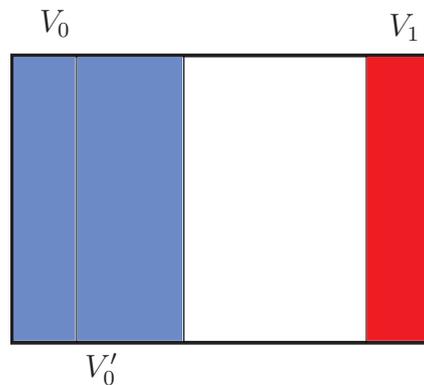


Figura 3.4: Faixas  $V'_0$ ,  $V_0$  e  $V_1$  em  $U$ .

Assim, definindo a aplicação  $g : V'_0 \cup V_1 \rightarrow U$  por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in V'_0 \\ f^N(x) & \text{se } x \in V_1 \end{cases}$$

e utilizando argumentos análogos aos da prova do Teorema (2.1.1), resulta que o conjunto

$$\Lambda' = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} g^j(V'_0 \cup V_1) \quad (3.8)$$

é um conjunto de Cantor invariante por  $g$ . Dessa forma, fica bem definida a aplicação  $l : \Lambda' \rightarrow \Sigma_2$ , que a cada  $x \in \Lambda'$  associa a sequência simbólica  $l(x) = \{a_j(x)\}_{j \in \mathbb{Z}}$ , onde

$$a_j(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } g^j(x) \in V'_0 \\ 1, & \text{se } g^j(x) \in V_1. \end{cases} \quad (3.9)$$

Logo, temos o seguinte resultado, cuja prova é análoga à do Teorema (2.1.1).

**Proposição 3.2.1.** *O conjunto  $\Lambda' \subset U$ , definido em 3.8, é um conjunto de Cantor invariante por  $g$  e  $l : \Lambda' \rightarrow \Sigma_2$ , definido em 3.9, é uma conjugação topológica entre  $g|_{\Lambda'}$  e a aplicação shift em  $\Sigma_2$ , ou seja,  $l$  é um homeomorfismo tal que,*

$$g|_{\Lambda'} = l^{-1} \circ \sigma \circ l.$$

**Proposição 3.2.2.** *Suponha que  $R(a) \in [0, 1]$  existe para algum  $a \in \Sigma_2$ . Então, o número de rotação para frente,  $\rho_g(y)$  do ponto  $y = l^{-1}(a)$ , existe e é dado por*

$$\rho_g(y) = \frac{R(a)}{(N-1)R(a) + 1}. \quad (3.10)$$

**Demonstração:** Tome  $a = \{a_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \in \Sigma_2$  e suponha que  $R(a) \in [0, 1]$  existe. Considerando a palavra  $A_k = a_1 \dots a_k$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ , temos que

$$R(a) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k a_j = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|A_k|_1}{k}. \quad (3.11)$$

Assim, fixando-se  $k \in \mathbb{N}$ , pondo  $y = l^{-1}(a)$ , e considerando a órbita  $\{g^j(y)\}_{j \in \mathbb{Z}}$ , segue da Proposição (3.2.1) e do modo como definimos a aplicação  $g$  que cada 0 na palavra  $A_k$  representa um ponto na órbita  $\{g^j(y)\}_{j \in \mathbb{Z}}$  que poderá ou não estar em  $V_1$  após uma

iteração da aplicação  $f$ . Analogamente, cada 1 na palavra  $A_k$  representa um ponto na órbita  $\{g^j(y)\}_{j \in \mathbb{Z}}$  que está em  $V_1$  e que dará uma volta em torno do anel  $\mathbb{A}$  após  $N$  iterações da aplicação  $f$ . Assim, para cada palavra  $A_k$  de comprimento  $k$  e com  $|A_k|_1$  uns, o ponto  $y$  dará  $|A_k|_1$  voltas em torno do anel  $\mathbb{A}$  após  $N|A_k|_1 + (k - |A_k|_1)$  iterações de  $f$ , onde as  $N|A_k|_1 + (k - |A_k|_1)$  iterações da aplicação  $f$  foram obtidas pondo  $N$  iteradas de  $f$  para cada 1 em  $A_k$ , mais uma iteração de  $f$  para cada 0 em  $A_k$ . Portanto, o número de rotação de  $y$  com respeito à aplicação  $g$  será dado por,

$$\begin{aligned} \rho_g(x) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|A_k|_1}{(N-1)|A_k|_1 + k} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{\frac{|A_k|_1}{k}}{\frac{(N-1)|A_k|_1}{k} + 1} \right] \\ &= \frac{R(a)}{(N-1)R(a) + 1} \end{aligned}$$

■

Observe que as Proposições (3.2.1) e (3.2.2) trazem resultados semelhantes aos do Teorema (2.1.1) para a aplicação  $g$ . Pela Proposição (3.2.2), temos que o conjunto de rotação de  $g$  é  $[0, 1/N]$ , o qual coincide com o conjunto de rotação de  $f^N$  quando tomamos  $K = 1$  no Teorema (2.1.2). Além disso, segue de 3.10 que

$$R(h(x)) = \frac{\rho_g(l^{-1}(h(x)))}{1 - \rho_g(l^{-1}(h(x)))(N-1)} \quad \forall x \in \Lambda^N. \quad (3.12)$$

Substituindo 3.12 em 2.2 e tomando  $K = 1$  temos que

$$N\rho_f(x) = \frac{\rho_g(l^{-1}(h(x)))}{1 - \rho_g(l^{-1}(h(x)))(N-1)} \quad \forall x \in \Lambda^N. \quad (3.13)$$

A equação 3.13 relaciona o número de rotação de um ponto  $x \in \Lambda^N$ , com respeito à aplicação  $f$ , com o número de rotação do correspondente ponto  $l^{-1}(h(x)) \in \Lambda'$  com respeito à aplicação  $g$ .

### 3.2.1 Aplicações Induzidas

Introduziremos agora duas aplicações associadas a  $g$  e  $l$ , as quais desempenharão um papel fundamental na prova da existência de órbitas de  $f$  que preservam orientação com número de rotação previamente fixado. Chamaremos tais aplicações de aplicações induzidas por  $g$  e  $l$  respectivamente, e as denotaremos por  $\hat{g}$  e  $\hat{l}$ . Em suas definições, faremos uso do sistema de coordenadas dado pelas variedades estável e instável do ponto fixo hiperbólico  $p$ .

Considere a projeção de  $U$  sobre a variedade instável em  $p$  definida por

$$\begin{aligned} \pi : \quad U &\longrightarrow W^u(p) \\ (x, y) &\longmapsto \pi(x, y) = x \end{aligned} \tag{3.14}$$

e ponha,

$$W = \pi(U) \quad , \quad W_0 = \pi(V_0) \quad , \quad W'_0 = \pi(V'_0) \quad , \quad W_1 = \pi(V_1).$$

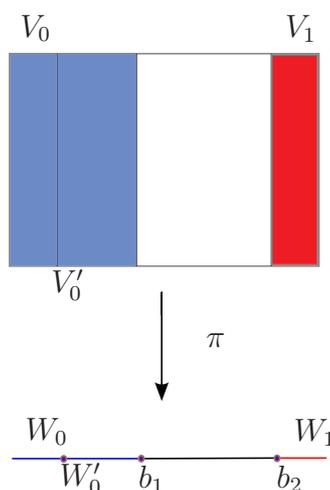


Figura 3.5: Ação da projeção  $\pi$  sobre as faixas  $V'_0$ ,  $V_0$  e  $V_1$ .

Para motivar a definição da aplicação  $\hat{g}$ , note que a dinâmica  $g$  possui uma propriedade geométrica interessante, a saber, pontos de  $\Lambda'$  que estão sobre uma mesma reta vertical são levados por  $g$  em pontos que também estão em uma mesma vertical. O que garante este comportamento geométrico regular é simplesmente a definição da aplicação  $g$  e o

fato de  $f$  ser topologicamente conjugada à sua derivada nas proximidades do ponto fixo hiperbólico  $p$ , Teorema (1.2.1).

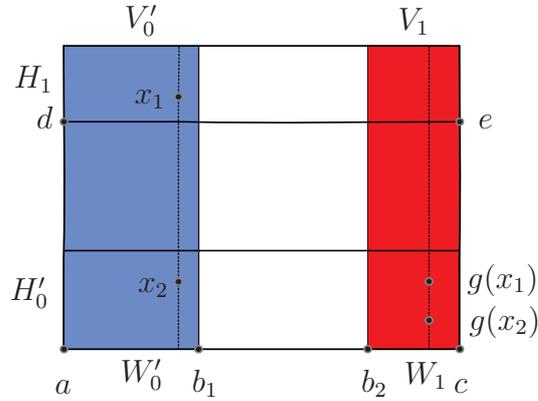


Figura 3.6: A aplicação  $g$  leva seguimentos verticais de  $V'_0 \cup V_1$  em seguimentos verticais em  $U$ .

Assim, considere a aplicação

$$\begin{aligned} \hat{g} : \quad \pi(\Lambda') &\longrightarrow \pi(\Lambda') \\ y = \pi(x) &\longmapsto \hat{g}(y) = \pi(g(x)), \end{aligned} \tag{3.15}$$

onde  $x$  é qualquer ponto em  $\pi^{-1}(y)$ .

Nosso propósito com a aplicação  $\hat{g}$  é estudar  $g$  horizontalmente já que esta aplicação é “bem comportada” verticalmente. Ao colapsar as variedades estáveis (verticais) sob a variedade instável (horizontal)  $\pi$  realiza um quociente sobre  $\Lambda'$ , identificando todos os pontos que estão alinhados verticalmente, tal quociente só faz sentido mediante o comportamento geométrico de  $g$  indicado na figura 3.6. Note que os seguimentos  $W'_0$  e  $W_1$  são transformados por  $\hat{g}$  no seguimento  $[a, c]$  (figuras 3.6 e 2.8), além disso, como  $\Lambda'$  é invariante por  $g$ , o conjunto  $\hat{\Lambda} = \pi(\Lambda')$  é claramente invariante por  $\hat{g}$  e portanto, o seguimento  $[b_1, b_2] = \pi(U) - \pi(V'_0 \cup V_1)$  é tal que,

$$[b_1, b_2] \cap \text{Im}(\hat{g}) = \phi,$$

desta forma, podemos desconsiderar o intervalo  $[b_1, b_2]$  sem prejuízo algum ao sistema dinâmico  $(\hat{g}, \hat{\Lambda})$ . Assim, colapsando o intervalo  $[b_1, b_2]$  em um único ponto  $b$ , temos que o gráfico da dinâmica unidimensional  $\hat{g}$  possui o seguinte aspecto topológico.

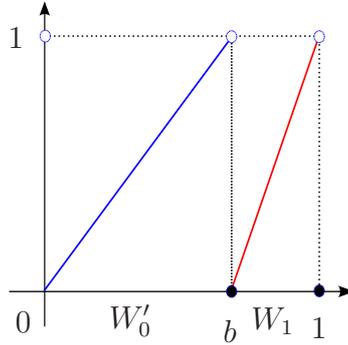


Figura 3.7: Representação topológica do gráfico de  $\hat{g}$ .

Mediante ao homeomorfismo 1.3 e a esta representação do gráfico de  $\hat{g}$ , utilizaremos o abuso de notação  $\hat{\Lambda} \subset \mathbb{S}^1$  e consideraremos  $\hat{g} : \hat{\Lambda} \rightarrow \hat{\Lambda}$  como uma aplicação definida no conjunto de Cantor  $\hat{\Lambda} \subset \mathbb{S}^1$ , **note que este gráfico é topologicamente equivalente ao gráfico a aplicação de duplicação  $2x \pmod{1}$  em  $\mathbb{T}$** . Na Seção 3.3, faremos uso desta representação topológica do gráfico de  $\hat{g}$  de forma mais direta com o intuito de caracterizar as órbitas Birkhoff desta aplicação.

Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \hat{l} : \hat{\Lambda} &\longrightarrow \Sigma_2^+ \\ x &\longmapsto \hat{l}(x) = \{a_j(x)\}_{j \geq 0} \end{aligned} \tag{3.16}$$

onde,

$$a_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \hat{g}^j(x) \in W'_0 \\ 1 & \text{se } \hat{g}^j(x) \in W_1. \end{cases}$$

**Observação 3.2.1.** Note que pela Proposição (3.2.1)  $\hat{g} : \hat{\Lambda} \rightarrow \hat{\Lambda}$  é conjugada com o shift em  $\Sigma_2$  através do homeomorfismo  $\hat{l} : \hat{\Lambda} \rightarrow \Sigma_2$ , ou seja,

$$\hat{g}(x) = (\hat{l}^{-1} \circ \sigma \circ \hat{l})(x) \quad \forall x \in \hat{\Lambda}.$$

**Afirmção 3.1.** A aplicação  $g : \Lambda' \rightarrow \Lambda'$  possui uma órbita que preserva orientação se, e somente se, a aplicação  $\hat{g} : \hat{\Lambda} \rightarrow \hat{\Lambda}$  possuir uma órbita que preserva orientação.

**Demonstração:** Assuma que  $\{g^j(x_0)\}_{j \in \mathbb{Z}}$  preserva orientação, vamos mostrar que o mesmo ocorre com a órbita  $\{\hat{g}^j(\theta_0)\}_{j \in \mathbb{Z}}$ , onde  $\theta_0 = \pi(x_0)$ . De fato, suponha por contradição que  $\{\hat{g}^j(\theta_0)\}_{j \in \mathbb{Z}}$  não preserva ordem, logo, existe um levantamento  $\hat{G} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de  $\hat{g}$  com respeito a uma aplicação de recobrimento  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  e pontos  $\alpha, \beta \in \{\hat{g}^j(\gamma_0)\}_{j \in \mathbb{Z}}$  tais que,

$$\alpha < \beta \quad \text{e} \quad \hat{G}(\beta) < \hat{G}(\alpha). \quad (3.17)$$

Agora, considere os pontos  $y = (\alpha, \gamma_\alpha)$  e  $z = (\beta, \gamma_\beta)$  em  $\mathbb{R} \times [a, b]$ , onde  $\gamma_\alpha \in \pi^{-1}(\alpha)$  e  $\gamma_\beta \in \pi^{-1}(\beta)$  são arbitrariamente fixados de modo que  $y, z \in \{g^j(x)\}_{j \in \mathbb{Z}}$ . Denotando por  $g_i, i = 1; 2$ , as funções coordenadas de  $g$ , definimos as seguintes aplicações:

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathbb{R} \times [a, b] &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times [a, b] \\ (\theta, \gamma) &\longmapsto \Gamma(\theta, \gamma) = (\Phi(\theta), \gamma) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} G : \mathbb{R} \times [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \times [a, b] \\ (\theta, \gamma) &\longmapsto \Gamma(\theta, \gamma) = (\hat{G}(\theta), g_2(\Phi(\theta), \gamma)). \end{aligned}$$

Para cada  $(\theta, \gamma) \in \mathbb{R} \times [a, b]$  arbitrariamente fixado temos que,

$$(g \circ \Gamma)(\theta, \gamma) = g(\Gamma(\theta, \gamma)) = g(\Phi(\theta), \gamma) = (g_1(\Phi(\theta), \gamma), g_2(\Phi(\theta), \gamma)), \quad (3.18)$$

por outro lado,

$$(\Gamma \circ G)(\theta, \gamma) = \Gamma(G(\theta, \gamma)) = \Gamma(\hat{G}(\theta), g_2(\Phi(\theta), \gamma)) = (\Phi(\hat{G}(\theta)), g_2(\Phi(\theta), \gamma)). \quad (3.19)$$

Agora, como  $\hat{G}$  é um levantamento de  $\hat{g}$  com respeito a  $\Phi$  temos que

$$(\Phi \circ \hat{G})(\theta) = (\hat{g} \circ \Phi)(\theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad (3.20)$$

logo, substituindo 3.20 em 3.19 segue que,

$$\begin{aligned}
(\Gamma \circ G)(\theta, \gamma) &= ((\hat{g} \circ \Phi)(\theta), g_2(\Phi(\theta), \gamma)) \\
&= ((\hat{g}(\Phi(\theta))), g_2(\Phi(\theta), \gamma)) \\
&= ((\pi \circ g)(\Phi(\theta), \gamma_{\Phi(\theta)}), g_2(\Phi(\theta), \gamma)) \\
&= (\pi(g_1(\Phi(\theta), \gamma_{\Phi(\theta)}), g_2(\Phi(\theta), \gamma_{\Phi(\theta)})), g_2(\Phi(\theta), \gamma)) \\
&= (g_1(\Phi(\theta), \gamma_{\Phi(\theta)}), g_2(\Phi(\theta), \gamma)),
\end{aligned} \tag{3.21}$$

onde  $\gamma_{\Phi(\theta)} \in \pi^{-1}(\Phi(\theta))$  (vide 3.15).

Finalmente, como  $g$  preserva verticais temos que  $g_1(\Phi(\theta), \gamma_{\Phi(\theta)}) = g_1(\Phi(\theta), \gamma)$  e portanto, por 3.18 e 3.25 segue que

$$(g \circ \Gamma)(\theta, \gamma) = (\Gamma \circ G)(\theta, \gamma) \quad \forall (\theta, \gamma) \in \mathbb{R} \times [a, b]. \tag{3.22}$$

Mediante a igualdade 3.22 temos que  $G$  é um levantamento de  $g$  com respeito a aplicação de recobrimento  $\Gamma$ , além disso, decorre de 3.17 que

$$\alpha < \beta \Rightarrow \pi(y) < \pi(z) \tag{3.23}$$

e

$$\begin{aligned}
\hat{G}(\beta) < \hat{G}(\alpha) &\Rightarrow \pi(\hat{G}(\beta), g_2(\Phi(\beta), \gamma_\beta)) < \pi(\hat{G}(\alpha), g_2(\Phi(\alpha), \gamma_\alpha)) \\
&\Rightarrow \pi(G(\beta, \gamma_\beta)) < \pi(G(\alpha, \gamma_\alpha)) \\
&\Rightarrow \pi(G(z)) < \pi(G(y)).
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Assim, obtemos por 3.23 e 3.24 que  $\{g^j(x_0)\}_{j \in \mathbb{Z}}$  não preserva ordem, contradizendo nossa hipótese, logo, a órbita  $\{\hat{g}^j(\theta_0)\}_{j \in \mathbb{Z}}$  preserva orientação.

Para provarmos a recíproca faremos a seguinte identificação  $(\theta, a) = \theta$ , isto é, trataremos pontos de  $\mathbb{R} \times [a, b]$  que têm a segunda coordenada igual a  $a$  como sendo pontos de  $\mathbb{R}$  mediante ao mergulho

$$\begin{aligned} \vartheta : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \times [a, b] \\ \theta &\longmapsto (\theta, a). \end{aligned}$$

Assim, supondo que  $\{\hat{g}^j(\theta_0)\}_{j \in \mathbb{Z}}$  preserva orientação e utilizando a invariância do conjunto de Cantor  $\hat{\Lambda}$  temos para todo  $j \in \mathbb{Z}$  que

$$\begin{aligned} g^j(\theta_0, a) &= (g_1^j(\theta_0, a), g_2^j(\theta_0, a)) \\ &= (\pi(g^j(\theta_0, a), a)) \\ &= \pi(g^j(\theta_0, a)) \\ &= \hat{g}^j(\theta_0). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Logo a órbita  $\{\hat{g}^j(\theta_0)\}_{j \in \mathbb{Z}}$  preserva orientação. ■

**Lema 3.2.1.** *Sejam  $x_1, x_2 \in \hat{\Lambda}$  e  $\hat{l}(x_1), \hat{l}(x_2) \in \Sigma_2$  as seqüências simbólicas associadas a estes pontos. Então,  $x_1 < x_2$  se, e somente se,  $\hat{l}(x_1) \prec \hat{l}(x_2)$ .*

**Demonstração:** Suponha primeiramente que  $x_1 < x_2$  e mostremos que  $\hat{l}(x_1) \prec \hat{l}(x_2)$ . Note que o caso em que  $x_1 \in W'_0$  e  $x_2 \in W_1$  é trivial, pois neste caso,  $(\hat{l}(x_1))_0 = 0$  e  $(\hat{l}(x_2))_0 = 1$ , donde segue que  $\hat{l}(x_1) \prec \hat{l}(x_2)$ . Suponha então que  $x_1$  e  $x_2$  pertençam ao mesmo intervalo,  $W'_0$  ou  $W_1$ . Como  $g'(x) > 1$  para todo  $x \in W'_0 \cup W_1$ , temos que existe  $j \geq 1$  tal que  $\hat{g}^j(x_i)$ , para  $i = 1, 2$ , pertençam a intervalos distintos. Assim, seja  $j_0$  o menor natural tal que  $\hat{g}^{j_0}(x_i)$ , para  $i = 1, 2$ , pertençam a intervalos distintos, então como  $g$  é crescente em  $W'_0 \cup W_1$ , temos que  $\hat{g}^{j_0-1}(x_1) < \hat{g}^{j_0-1}(x_2) \in W_1$ , e portanto,

$$\hat{g}^{j_0}(x_1) \in W'_0 \quad \text{e} \quad \hat{g}^{j_0}(x_2) \in W_1,$$

donde segue que  $(\hat{l}(x_0))_{j_0} = 0$  e  $(\hat{l}(x_1))_{j_0} = 1$ . Logo  $\hat{l}(x_1) \prec \hat{l}(x_2)$ .

Reciprocamente, suponha que  $\hat{l}(x_1) \prec \hat{l}(x_2)$  e que  $j_0$  é o menor número natural tal que

$$(\hat{l}(x_1))_{j_0} = 0 \quad \text{e} \quad (\hat{l}(x_2))_{j_0} = 1.$$

Logo,  $\hat{g}^{j_0}(x_1) \in W'_0$ ,  $\hat{g}^{j_0}(x_2) \in W_1$ ,  $\hat{g}^{j_0-1}(x_1)$  e  $\hat{g}^{j_0-1}(x_2)$  pertencem ao mesmo intervalo e  $\hat{g}^{j_0-1}(x_1) < \hat{g}^{j_0-1}(x_2)$ . Finalmente, como  $g$  é crescente, temos que  $\hat{g}^i(x_1) < \hat{g}^i(x_2)$  para todo  $0 \leq i \leq j_0$ , e portanto,  $x_1 < x_2$ . ■

**Lema 3.2.2.** *Sejam  $\alpha \in [0, 1] - \mathbb{Q}$ ,  $a \in \Omega_\alpha(1 - \alpha)$  e  $y = \hat{l}^{-1}(a)$ , então a órbita  $\{\hat{g}^j(y)\}_{j \in \mathbb{N}}$  preserva orientação e possui número de rotação  $\alpha$ .*

**Demonstração:** Sejam  $x_1$  e  $x_2$  pontos da órbita  $\{\hat{g}^j(y)\}_{j \in \mathbb{N}}$  arbitrariamente fixados e suponha que  $x_1 < x_2$ , pelo Lema (3.2.1),

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \hat{l}(x_1) \prec \hat{l}(x_2) \Rightarrow \sigma(\hat{l}(x_1)) \prec \sigma(\hat{l}(x_2)).$$

Afirmamos que  $\hat{g}(x_1) < \hat{g}(x_2)$ . Com efeito, pela Observação (3.2.1) temos que

$$\hat{g}(x_1) = (\hat{l}^{-1} \circ \sigma \circ \hat{l})(x_1) \quad \text{e} \quad \hat{g}(x_2) = (\hat{l}^{-1} \circ \sigma \circ \hat{l})(x_2),$$

assim, se  $\hat{g}(x_2) < \hat{g}(x_1)$  teríamos,

$$(\hat{l}^{-1} \circ \sigma \circ \hat{l})(x_2) < (\hat{l}^{-1} \circ \sigma \circ \hat{l})(x_1).$$

Agora, pondo  $y_i = \hat{l}^{-1}(\sigma(\hat{l}(x_i))) \in \hat{\Lambda}$ , para  $i = 1, 2$ , segue que  $y_2 < y_1$ , e pelo Lema (3.2.1),

$$\hat{l}(y_2) \prec \hat{l}(y_1) \Rightarrow \sigma(\hat{l}(y_2)) \prec \sigma(\hat{l}(y_1)) \Rightarrow \hat{l}(x_2) \prec \hat{l}(x_1) \Rightarrow x_2 < x_1,$$

contrariando nossa hipótese sobre  $x_1$  e  $x_2$ . Portanto,  $\hat{g}(x_1) < \hat{g}(x_2)$ , donde segue que  $\{\hat{g}^j(y)\}_{j \in \mathbb{N}}$  preserva orientação.

O fato de que  $\{\hat{g}^j(y)\}_{j \in \mathbb{N}}$  possui número de rotação  $\alpha$  segue diretamente do Lema (2.2.5) e da Proposição (3.2.2). ■

**Lema 3.2.3.** *Seja  $x \in \Lambda'$  e suponha que a órbita  $\{g^j(x)\}_{j \in \mathbb{Z}}$  preserva orientação. Se para todo  $y, z \in \{f^j(x)\}_{j \in \mathbb{Z}}$  as iteradas  $f^j(y)$  e  $f^j(z)$  mantêm a mesma ordem para todo  $0 \leq j < N$ , então a órbita  $\{f^j(x)\}_{j \in \mathbb{Z}}$  também preserva orientação.*

**Demonstração:** Tome  $x \in \Lambda'$  e suponha que  $\{g^j(x)\}_{j \in \mathbb{Z}}$  preserva orientação. Vamos mostrar que  $\{f^j(x)\}_{j \in \mathbb{Z}}$  também preserva orientação. Se  $y, z \in \{f^j(x)\}_{j \in \mathbb{Z}} \cap V'_0$  é claro que a ordem de  $f(y)$  e  $f(z)$  é preservada, pois  $f = g$  em  $V'_0$ . Agora, suponha que  $y, z \in \{f^j(x)\}_{j \in \mathbb{Z}} \cap V_1$ . Por hipótese temos que  $f^j(y)$  e  $f^j(z)$  mantêm a mesma ordem para todo  $0 \leq j < N$ , donde segue que  $f^N(y), f^N(z) \in \Lambda' \cap V'_0$  têm a mesma ordem de  $y$  e  $z$ , pois  $g(u) = f^N(u)$  para tudo  $u \in V_1$ . Finalmente, se  $y \in \{f^j(x)\}_{j \in \mathbb{Z}} \cap V'_0$  e  $z \in \{f^j(x)\}_{j \in \mathbb{Z}} \cap V_1$  então,  $f(y)$  e  $f(z)$  mantêm a mesma orientação, pois do contrário, usando a continuidade da aplicação  $f$  o mesmo ocorreria com pontos da órbita homoclínica, contrariando o fato desta órbita ser bem ordenada. ■

**Teorema 3.2.1.** *Se  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  tem uma órbita homoclínica que preserva ordem e perto da qual existe uma órbita com número de rotação  $\gamma$ , então  $f$  tem uma órbita que preserva ordem com número de rotação  $\gamma$ .*

**Demonstração:** Dado  $\alpha \in (0, 1) - \mathbb{Q}$  e fixando-se arbitrariamente  $a \in \Omega_\alpha(1 - \alpha)$ , o Lema (3.2.2) mostra que a órbita  $\{\hat{g}^j(y)\}_{j \in \mathbb{Z}}$  preserva orientação e possui número de rotação  $\alpha$ , onde  $y = \hat{l}^{-1}(a) \in \hat{\Lambda}$ . Por outro lado, a Afirmação (3.1) e o Lema (3.2.2) garantem que existe  $v \in \Lambda'$  com  $y = \pi(v)$  tal que a órbita  $\{g^j(v)\}_{j \in \mathbb{Z}}$  preserva orientação e  $\rho_g(v) = \alpha$ . Finalmente, pelo Lema (3.2.3) e pela relação rotacional 3.13, temos que a órbita  $\{f^j(v)\}_{j \in \mathbb{Z}}$  preserva orientação e  $\rho_f(v) = \alpha$ . ■

### 3.3 Caracterização das Órbitas que preservam Orientação

Pela Afirmação (3.1) e pelo Lema (3.2.3), concluímos que para uma órbita  $\{f^j(x)\}_{j \in \mathbb{Z}}$  preservar orientação no anel  $\mathbb{A}$  é suficiente que a correspondente órbita  $\{\hat{g}^j(\pi(x))\}_{j \in \mathbb{Z}}$  preserve orientação em  $\mathbb{S}^1$ . Nesta seção, vamos caracterizar as órbitas de  $\hat{g}$  que preservam

orientação utilizando a aplicação de duplicação

$$\begin{aligned}\psi : \mathbb{T} &\longrightarrow \mathbb{T} \\ x &\longmapsto \psi(x) = 2x(\text{mod } 1),\end{aligned}$$

uma vez que o gráfico da Figura 3.7 é topologicamente equivalente ao gráfico desta aplicação por um homeomorfismo que preserva a ordem das órbitas.

Seja  $E \subset \mathbb{T}$  tal que  $\psi(E) = E$ , denotaremos por  $\psi_E$  a restrição de  $\psi$  ao subconjunto  $E$ . A proposição a seguir nos permite dar um primeiro passo na direção desta caracterização, fornecendo uma condição necessária e suficiente para que  $\psi_E$  preserve a ordem em  $E$ .

**Proposição 3.3.1.** *A aplicação  $\psi_E$  preserva ordem em  $E$  se, e somente se,  $E$  é um subconjunto de um semicírculo fechado. (Entenderemos por semicírculo fechado qualquer conjunto da forma,  $[x, x + 1/2] \subset \mathbb{T}$ , os quais denotaremos por  $C_x$ .)*

**Demonstração:** Suponha que  $E \subset C_\mu$  para algum  $\mu \in \mathbb{T}$ .

**I Caso:**  $\mu \in [0, 1/2)$

Tome  $a, b, c \in E$  com  $a < b < c$ . Se  $a, b, c \in [\mu, 1/2)$  então,  $\psi(a) < \psi(b) < \psi(c)$ , pois  $\psi$  é crescente em  $[\mu, 1/2)$ , e portanto a ordem cíclica de  $a, b$  e  $c$  em  $\mathbb{T}$  é preservada. O mesmo ocorre para  $a, b, c \in [1/2, \mu + 1/2]$ . Agora, suponha que  $a, b \in [\mu, 1/2)$  e  $c \in [1/2, \mu + 1/2]$ , como  $\psi$  é crescente em  $[\mu, 1/2)$ , segue que  $\psi(a) < \psi(b)$ . Vamos mostrar que

$$\psi(a) < \psi(b) < \psi(c) \quad \text{ou} \quad \psi(c) < \psi(a) < \psi(b), \quad (3.26)$$

implicando que a ordem cíclica de  $a, b$  e  $c$  também é preservada neste caso.

De fato, suponha por absurdo que

$$\psi(a) < \psi(c) < \psi(b), \quad (3.27)$$

como  $a, b \in [\mu, 1/2)$  temos que

$$2\mu \leq \psi(a) < \psi(b) < 1,$$

agora, por 3.27 segue que

$$2\mu < \psi(c) < 1. \quad (3.28)$$

Por outro lado, como  $c \in [1/2, \mu + 1/2]$  temos

$$1 \leq \psi(c) \leq 2\mu + 1,$$

o que implica

$$0 \leq \psi(c) \leq 2\mu. \quad (3.29)$$

A contradição dada por 3.28 e 3.29 implica 3.26, donde concluímos que a ordem cíclica de  $\psi(a)$ ,  $\psi(b)$  e  $\psi(c)$ , neste caso, é a mesma de  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

Agora, suponha que  $a \in [\mu, 1/2)$  e  $b, c \in [1/2, \mu + 1/2]$ , como  $\psi$  é crescente no intervalo  $[1/2, \mu + 1/2)$  temos  $\psi(b) < \psi(c)$ . Supondo por absurdo que

$$\psi(b) < \psi(a) < \psi(c) \quad (3.30)$$

como  $b, c \in [1/2, \mu + 1/2]$ , segue que

$$1 \leq \psi(b) < \psi(c) \leq 2\mu + 1$$

e portanto, temos por 3.30 que

$$1 < \psi(a) < 2\mu + 1,$$

donde segue que

$$0 < \psi(a) < 2\mu. \quad (3.31)$$

Agora, como  $a \in [\mu, 1/2)$  temos que

$$2\mu \leq \psi(a) < 1, \quad (3.32)$$

contrariando 3.31. Portanto,

$$\psi(a) < \psi(b) < \psi(c) \quad \text{ou} \quad \psi(b) < \psi(c) < \psi(a),$$

mostrando que a ordem cíclica de  $a$ ,  $b$  e  $c$  é preservada por  $\psi$ .

**II Caso:**  $\mu \in [1/2, 1)$

Note que neste caso o semicírculo  $C_\mu$  é dado por

$$C_\mu = [0, \mu - 1/2] \cup [\mu, 1).$$

Assim, tomando  $a < b < c$  em  $E$  temos que a ordem cíclica destes pontos é preservada por  $\psi$  quando  $a, b, c \in [0, \mu - 1/2]$ , ou quando  $a, b, c \in [\mu, 1)$ , pois  $\psi$  é crescente nestes intervalos. Suponhamos agora que  $a, b \in [0, \mu - 1/2]$  e  $c \in [\mu, 1)$ , então  $\psi(a) < \psi(b)$ . Portanto, se tivéssemos

$$\psi(a) < \psi(c) < \psi(b), \quad (3.33)$$

como  $a, b \in [0, \mu - 1/2]$  teríamos

$$0 \leq \psi(a) < \psi(b) \leq 2\mu - 1$$

e por 3.33,

$$0 < \psi(c) < 2\mu - 1. \quad (3.34)$$

Agora, como  $c \in [\mu, 1)$  segue que,

$$2\mu \leq \psi(c) < 2$$

e como estamos supondo  $\mu \geq 1/2$  obtemos

$$2\mu - 1 \leq \psi(c) < 1. \quad (3.35)$$

De 3.34 e 3.35 concluimos que

$$\psi(c) < \psi(a) < \psi(b) \quad \text{ou} \quad \psi(a) < \psi(b) < \psi(c),$$

e portanto  $\psi$  preserva a orientação cíclica dos pontos  $a, b, c$ .

Finalmente, suponha que  $a \in [0, \mu - 1/2]$  e  $b, c \in [\mu, 1)$ . Supondo por absurdo que

$$\psi(b) < \psi(a) < \psi(c) \quad (3.36)$$

como  $b, c \in [\mu, 1)$ , segue que

$$2\mu \leq \psi(b) < \psi(c) < 2$$

e como estamos supondo  $\mu \geq 1/2$  temos

$$2\mu - 1 \leq \psi(b) < \psi(c) < 1$$

e portanto, por 3.37 obtemos

$$2\mu - 1 < \psi(a) < 1. \quad (3.37)$$

Por outro lado temos que  $a \in [0, \mu - 1/2]$  o que implica

$$0 \leq \psi(a) \leq 2\mu - 1, \quad (3.38)$$

logo, por 3.37 e 3.38 temos que

$$\psi(a) < \psi(b) < \psi(c) \quad \text{ou} \quad \psi(b) < \psi(c) < \psi(a),$$

donde segue que a ordem cíclica de  $a, b$  e  $c$  também é preservada neste caso. Isso conclui a prova da parte “somente se” da proposição.

Reciprocamente, suponha que  $\psi_E$  preserve orientação, mas que  $E$  não esteja contido em nenhum semicírculo de  $\mathbb{T}$ . Segue que existem pontos  $a, b, c \in E$ , dois a dois distintos, tais que  $a, b$  e  $c$  não pertencem a nenhum semicírculo de  $\mathbb{T}$ . Com efeito, dados quaisquer dois pontos em  $E$  sempre existe um semicírculo em  $\mathbb{T}$  que os contém. Além disso, os pontos  $a, b$  e  $c$ , são dois a dois não diametralmente opostos, pois caso contrário estariam em algum semicírculo. Assim, suponha sem perda de generalidade que

$$a < b < c \quad (3.39)$$

e considere os semicírculos  $C_{a-1/2} = [a - 1/2, a]$  e  $C_c = [c, c + 1/2]$ .

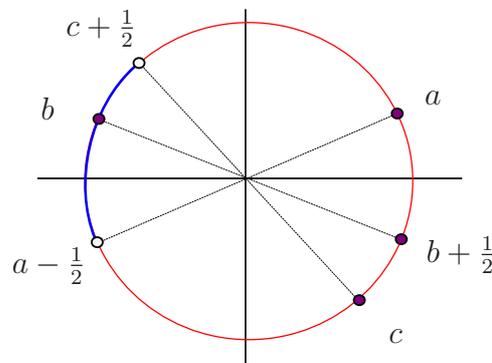


Figura 3.8: Ordem cíclica dos pontos  $a, b, c \in E$ .

Segue que  $b \in (c + 1/2, a - 1/2)$ , e portanto os pontos  $a, b + 1/2$  e  $c$  pertencem ao semicírculo  $C_{a-1/2}$ . Assim, pela primeira parte da prova, temos que os pontos  $\psi(a), \psi(b + 1/2), \psi(c)$  têm a mesma orientação que  $a, b + 1/2, c$ , e como  $\psi(b) = \psi(b + 1/2)$ , segue que  $\psi(a), \psi(b)$  e  $\psi(c)$  têm a mesma orientação que  $a, b + 1/2$  e  $c$ , ou seja,

$$\psi(a) < \psi(c) < \psi(b), \quad (3.40)$$

vide figura 3.8. Por outro lado, temos por hipótese  $\psi_E$  preserva orientação, o que implica que  $\psi(a), \psi(b)$  e  $\psi(c)$  têm a mesma ordem cíclica que  $a, b$  e  $c$ . Assim, por 3.39 e 3.40 concluímos que

$$\psi(a) < \psi(b) < \psi(c) \quad e \quad \psi(a) < \psi(c) < \psi(b),$$

que é uma contradição. Logo,  $E$  está contido em algum semicírculo de  $\mathbb{T}$ . ■

No Exemplo 3.1.1 temos exatamente a situação da Proposição anterior. A órbita em **(a)** está contida em um semicírculo de  $\mathbb{S}^1$  e portanto preserva orientação, por outro lado, a órbita em **(b)** não preserva orientação, uma vez que não existe em  $\mathbb{S}^1$  um semicírculo que a contém.

Dado  $x \in \mathbb{T}$ , seja  $\mathcal{B}(x)$  a expansão binária do número  $x$ , ou seja,

$$\mathcal{B}(x) = (\epsilon_1(x), \epsilon_2(x), \epsilon_3(x), \dots, \epsilon_j(x), \dots),$$

onde  $\epsilon_j(x) \in \{0, 1\}$  para todo  $j \in \mathbb{N}$  e

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\epsilon_j(x)}{2^j}. \quad (3.41)$$

Escolhendo para cada  $x \in \mathbb{T}$  a representação binária de  $x$  que possui infinitos zeros,  $\mathcal{B}$  define uma aplicação do círculo  $\mathbb{T}$  no espaço simbólico positivo  $\Sigma_2^+$  definida por,

$$\begin{aligned} \mathcal{B} : \mathbb{T} &\longrightarrow \Sigma_2^+ \\ x &\longmapsto \mathcal{B}(x) = \{\epsilon_j(x)\}_{j \in \mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Agora, denotando por  $\sigma$  o *shift* no espaço simbólico positivo, isto é, a aplicação

$$\begin{aligned} \sigma : \Sigma_2^+ &\longrightarrow \Sigma_2^+ \\ a = (a_j)_{j \in \mathbb{N}} &\longmapsto \sigma(a) = (a_{j+1})_{j \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{T} \\ \mathcal{B} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \mathcal{B} \\ \Sigma_2^+ & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_2^+ \end{array} . \quad (3.42)$$

Ou seja,  $\mathcal{B}$  é uma conjugação entre  $\psi$  e  $\sigma$ .

Para cada  $x \in \mathbb{T}$  a conjugação  $\mathcal{B}$  nos permitirá definir uma sequência em  $\mathbb{R}^2$  denominada escadaria de  $x$ . Primeiramente, fixado  $x \in \mathbb{T}$  temos  $\mathcal{B}(x) = \{\epsilon_i(x)\}_{i \in \mathbb{N}}$ , agora, para cada  $j \in \mathbb{N}$  seja

$$p_j(x) = \epsilon_1(x) + \dots + \epsilon_j(x),$$

segue de 3.41 que

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{p_j(x)}{2^{j+1}}.$$

**Definição 3.3.1.** Dado  $x \in \mathbb{T}$ , considere a sequência  $\{(j, p_j(x))\}_{j \in \mathbb{N}}$  em  $\mathbb{R}^2$ . A escadaria do ponto  $x$  é definida do seguinte modo:

- (i) Se  $p_{j+1}(x) = p_j(x)$ , isto é,  $\epsilon_{j+1}(x) = 0$ , então os pontos  $(j, p_j(x))$  e  $(j+1, p_{j+1}(x))$  são ligados por um segmento de reta horizontal.
- (ii) Se  $p_{j+1}(x) = p_j(x) + 1$ , isto é, se  $\epsilon_{j+1}(x) = 1$ , então os pontos  $(j, p_j(x))$  e  $(j+1, p_j(x))$  são ligados por um segmento de reta horizontal, e os pontos  $(j+1, p_j(x))$  e  $(j+1, p_{j+1}(x))$  são ligados por um segmento de reta vertical.

**Exemplo 3.3.1.** Tomando  $x = 4/5$ , temos que  $\mathcal{B}(4/5) = 0(1100)^\infty$ , e portanto,

$$p_1(4/5) = 0, \quad p_4(4/5) = 2, \quad p_7(4/5) = 4 \quad p_{10}(4/5) = 5$$

$$p_2(4/5) = 1, \quad p_5(4/5) = 2, \quad p_8(4/5) = 4 \quad p_{11}(4/5) = 6$$

$$p_3(4/5) = 2, \quad p_6(4/5) = 3, \quad p_9(4/5) = 4 \quad p_{12}(4/5) = 6.$$

Logo, a escadaria de  $x = 4/5$  até a posição  $j = 12$  tem a seguinte forma:

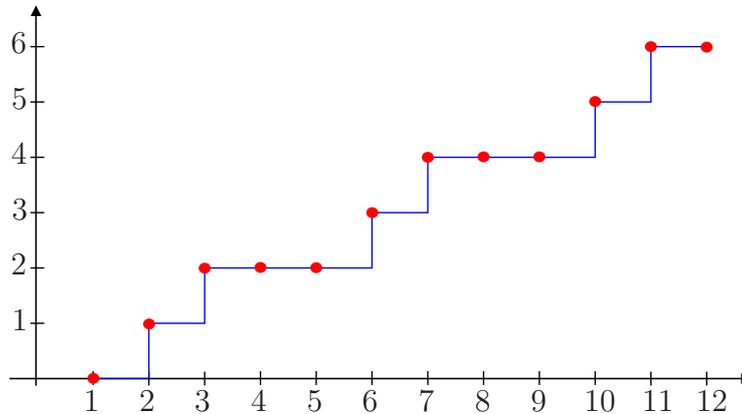


Figura 3.9: Escadaria do ponto  $x = 4/5$ .

Dado  $p/q \in \mathbb{T} \cap \mathbb{Q}$ , o seguinte algoritmo define mais duas escadarias associadas ao ponto  $p/q$

$$(*) \begin{cases} p_j^+(p/q) = p_j^-(p/q) = I(jp/q), & \text{se } j \text{ não é múltiplo de } q \\ p_j^+(p/q) = mp \text{ e } p_j^-(p/q) = mp - 1, & \text{se } \exists m \in \mathbb{Z}; j = mq. \end{cases}$$

As escadarias  $\{(j, p_j^+(p/q))\}_{j \in \mathbb{N}}$  e  $\{(j, p_j^-(p/q))\}_{j \in \mathbb{N}}$ , dadas pelos inteiros  $p_j^+(p/q)$  e  $p_j^-(p/q)$  definidos em (\*), são denominadas escadarias extremas do ponto  $p/q \in \mathbb{T}$  e são construídas substituindo na Definição 3.3.1  $p_j(p/q)$  por  $p_j^+(p/q)$ , ou  $p_j^-(p/q)$ , conforme o caso.

**Exemplo 3.3.2.** Tomando novamente  $4/5 \in \mathbb{T}$ , as escadarias extremas deste ponto estão representadas a seguir até a posição  $j = 12$ . A escadaria  $\{(j, p_j^+(p/q))\}_{j \in \mathbb{N}}$  é obtida desconsiderando na Figura 3.10 os lados dos quadrados  $Q_{j5}$  que estão abaixo de sua diagonal, já a escadaria  $\{(j, p_j^-(p/q))\}_{j \in \mathbb{N}}$  é obtida da Figura 3.10 desconsiderando os lados dos quadrados  $Q_{j5}$  que estão acima de sua diagonal, sendo  $Q_{j5}$  dado pelos pontos  $(j5, p_{j5}^-(p/q))$ ,  $(j5 + 1, p_{j5}^-(p/q))$ ,  $(j5 + 1, p_{j5}^-(p/q) + 1)$ ,  $(j5, p_{j5}^-(p/q) + 1)$ . Note que para  $1 \leq j \leq 12$  os inteiros  $p_j^+(4/5)$  e  $p_j^-(4/5)$  só diferem em  $j = 5$  e  $j = 10$ .

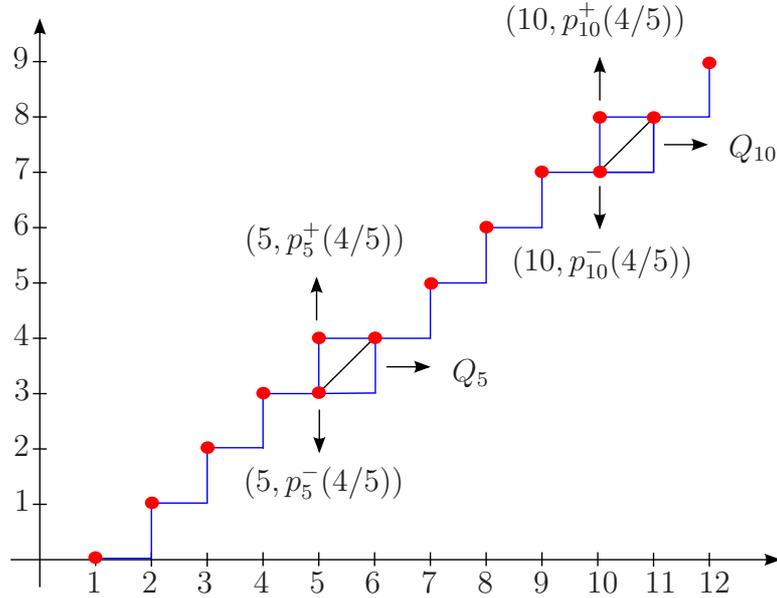


Figura 3.10: Escadarias extremas do ponto  $x = 4/5$ .

As escadarias extremas de um ponto  $p/q \in \mathbb{T} \cap \mathbb{Q}$  possuem algumas propriedades importantes, vejamo-las a seguir.

**Proposição 3.3.2.** *Dado um ponto  $p/q \in \mathbb{T} \cap \mathbb{Q}$  valem as seguintes propriedades:*

(a) *As seguintes igualdades se verificam para qualquer  $j \in \mathbb{N}$ ,*

$$p_{q+j}^+(p/q) = p_q^+(p/q) + p_j^+(p/q) \quad e \quad p_{q+j}^-(p/q) = p_q^-(p/q) + p_j^-(p/q) + 1.$$

(b) *Se para todo  $j \in \mathbb{N}$  definirmos,*

$$\epsilon_j^+(p/q) = p_{j+1}^+(p/q) - p_j^+(p/q) \quad e \quad \epsilon_j^-(p/q) = p_{j+1}^-(p/q) - p_j^-(p/q), \quad (3.43)$$

*então:*

(i)  $\epsilon_{j+q}^+(p/q) = \epsilon_j^+(p/q) \quad e \quad \epsilon_{j+q}^-(p/q) = \epsilon_j^-(p/q) \quad \forall j \in \mathbb{N}.$

(ii)  $\epsilon_j^+(p/q) = \epsilon_j^-(p/q)$  para  $j = 1, \dots, q - 2$ .

(iii)  $\epsilon_{q-1}^+(p/q) = 1, \quad \epsilon_q^+(p/q) = 0, \quad \epsilon_{q-1}^-(p/q) = 0$  e  $\epsilon_q^-(p/q) = 1$ .

**Demonstração:**

(a) Mostremos primeiramente que

$$p_{q+j}^+(p/q) = p_q^+(p/q) + p_j^+(p/q) \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (3.44)$$

**I Caso:**  $j$  não é múltiplo de  $q$ .

Neste caso, existem  $r \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq r \leq q - 1$  e  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  tais que

$$j = nq + r, \quad (3.45)$$

logo,  $q + j$  também não é múltiplo de  $q$ , e portanto, segue de 3.45 que

$$p_{q+j}^+(p/q) = I \left( p + np + \frac{rp}{q} \right) \quad (3.46)$$

- Se  $rp/q < 1$ , então

$$p_{q+j}^+(p/q) = p + np, \quad (3.47)$$

por outro lado, por 3.45 temos que

$$p_j^+(p/q) = I \left( nq + \frac{rp}{q} \right) = jp \quad (3.48)$$

e como

$$p_q^+(p/q) = p, \quad (3.49)$$

temos por 3.47, 3.48 e 3.49 que

$$p_{q+j}^+(p/q) = p_q^+(p/q) + p_j^+(p/q). \quad (3.50)$$

- Se  $rp/q > 1$ , então existe  $m \in \mathbb{N}$  e  $0 \leq s \leq q - 1$  tal que

$$rp = mq + s, \quad (3.51)$$

logo, por 3.46 temos que

$$p_{q+j}^+(p/q) = I \left( p + np + \frac{mq + s}{q} \right) = p(n + 1) + m.$$

Por outro lado, segue de 3.45 e de 3.51 que

$$p_j^+(p/q) = I \left( np + m + \frac{s}{q} \right) = np + m,$$

donde concluímos por, 3.49, que a igualdade 3.50 também é verificada neste caso.

**II Caso:  $j$  é múltiplo de  $q$ .**

Neste caso, existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $j = mq$ , portanto,

$$p_{j+q}^+(p/q) = (m+1)p \quad \text{e} \quad p_j^+(p/q) = mp,$$

donde segue que por 3.49 que

$$p_{q+j}^+(p/q) = p_q^+(p/q) + p_j^+(p/q).$$

Isso prova a primeira parte do item (a), mostremos agora que

$$p_{q+j}^-(p/q) = p_q^-(p/q) + p_j^-(p/q) + 1 \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

**I Caso:  $j$  não é múltiplo de  $q$ .**

Neste caso, como  $q+j$  também não é múltiplo de  $q$ , temos por (\*) que

$$p_{q+j}^-(p/q) = p_{q+j}^+(p/q), \quad p_j^-(p/q) = p_j^+(p/q) \quad \text{e} \quad p_q^-(p/q) = p-1.$$

Donde segue que,

$$p_q^-(p/q) + p_j^-(p/q) + 1 = p-1 + p_j^+(p/q) + 1 = p_q^+(p/q) + p_j^+(p/q) = p_{q+j}^-(p/q).$$

**II Caso:  $j$  é múltiplo de  $q$ .**

Existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $j = mq$ , e por (\*),

$$p_{j+q}^-(p/q) = (m+1)p-1, \quad p_q^-(p/q) = p-1 \quad \text{e} \quad p_j^-(p/q) = mp-1,$$

logo,

$$p_q^-(p/q) + p_j^-(p/q) + 1 = p-1 + mp-1 + 1 = (m+1)p-1 = p_{q+j}^-(p/q).$$

Isso conclui a prova do item (a), passemos agora ao item (b).

(i) Tomando  $j \in \mathbb{N}$  arbitrariamente fixado temos pelo item (a) que

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{q+j}^+(p/q) &= p_{q+j+1}^+(p/q) - p_{q+j}^+(p/q) \\
 &= p_{j+1}^+(p/q) + p_q^+(p/q) - p_j^+(p/q) - p_q^+(p/q) \\
 &= p_{j+1}^+(p/q) - p_j^+(p/q) \\
 &= \epsilon_j^+(p/q).
 \end{aligned}$$

De modo análogo,

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{q+j}^-(p/q) &= p_{q+j+1}^-(p/q) - p_{q+j}^-(p/q) \\
 &= p_{j+1}^-(p/q) + p_q^-(p/q) + 1 - p_j^-(p/q) - p_q^-(p/q) - 1 \\
 &= p_{j+1}^-(p/q) - p_j^-(p/q) \\
 &= \epsilon_j^-(p/q).
 \end{aligned}$$

Isso prova o item (i).

(ii) Se  $j \in \{1, \dots, q-2\}$  então,  $j$  e  $j+1$  não são múltiplos de  $q$ , logo, por definição

$$\begin{aligned}
 \epsilon_j^+(p/q) &= p_{j+1}^+(p/q) - p_j^+(p/q) \\
 &= p_{j+1}^-(p/q) - p_j^-(p/q) \\
 &= \epsilon_j^-(p/q).
 \end{aligned}$$

(iii) Por (\*), temos

- $\epsilon_{q-1}^+(p/q) = p_q^+ - p_{q-1}^+ = p - I\left((q-1)\frac{p}{q}\right) = p - (p-1) = 1,$
- $\epsilon_q^+(p/q) = p_{q+1}^+ - p_q^+ = I\left((q+1)\frac{p}{q}\right) - p = p - p = 0,$
- $\epsilon_{q-1}^-(p/q) = p_q^- - p_{q-1}^- = p - 1 - I\left((q-1)\frac{p}{q}\right) = p - 1 - (p-1) = 0,$
- $\epsilon_q^-(p/q) = p_{q+1}^- - p_q^- = I\left((q+1)\frac{p}{q}\right) - (p-1) = p - p + 1 = 1,$

completando a demonstração do item (b). ■

Dado  $p/q \in \mathbb{T} \cap \mathbb{Q}$ , mediante os itens (ii) e (iii) da Proposição (3.3.2), definimos as seguintes seqüências simbólicas:

$$\theta_{p/q}^+ = (\epsilon_1(p/q) \dots \epsilon_{q-2}(p/q) 10)^\infty \quad e \quad \theta_{p/q}^- = (\epsilon_1(p/q) \dots \epsilon_{q-2}(p/q) 01)^\infty, \quad (3.52)$$

onde  $\epsilon_i(p/q)$  denota  $\epsilon_i^+(p/q)$  ou  $\epsilon_i^-(p/q)$  para  $i = 1, \dots, q-2$ .

Pondo  $v_{p/q} = \epsilon_1(p/q) \dots \epsilon_{q-2}(p/q)$  as palavras

$$u_{p/q}^+ = 0 v_{p/q} 1 \quad e \quad u_{p/q}^- = 1 v_{p/q} 0 \quad (3.53)$$

são chamadas de **palavras padrão** associadas ao ponto  $p/q$ .

**Exemplo 3.3.3.** *No Exemplo 3.3.2, calculamos os doze primeiros termos das escadarias extremas de  $x = 4/5$ , isto é, os doze primeiros termos das seqüências  $\{(j, p_j^+(4/5))\}_{j \in \mathbb{N}}$  e  $\{(j, p_j^-(4/5))\}_{j \in \mathbb{N}}$ . Segue de 3.43 que*

$$\epsilon_1(4/5) = 1, \quad \epsilon_2(4/5) = 1 \quad e \quad \epsilon_3(4/5) = 1,$$

logo, de 3.52 temos que

$$\theta_{4/5}^+ = (11110)^\infty \quad e \quad \theta_{4/5}^- = (11101)^\infty,$$

e palavras padrão associadas a  $4/5$  são

$$u_{4/5}^+ = 01111 \quad e \quad u_{4/5}^- = 11110.$$

Em suma, dado  $p/q$  em  $[0,1]$ , calculamos  $p_j^+ = I(jp/q)$  por (\*),  $\epsilon_j^+ = p_{j+1} - p_j$  por 3.43 e, finalmente,  $\theta^-(p/q)$  e  $\theta^+(p/q)$  por 3.52. Por exemplo, se  $p/q = 2/5$  teremos:

Palavra padrão de $2/5$		
$j$	$p_j^+$	$\epsilon_j^+$
1	0	0
2	0	1
3	1	0
4	1	1
5	2	0
6	2	–

As três primeiras linhas da terceira coluna na tabela anterior nos fornece o código  $v_{2/5} = 010$ , e portanto, por 3.53 temos  $u_{2/5}^+ = (00101)$  e  $u_{2/5}^- = (10100)$ .

Tendo vista a conjugação 3.42 e os pontos  $\theta_{p/q}^+, \theta_{p/q}^- \in \Sigma_2^+$  em 3.52, para cada  $p/q \in \mathbb{T} \cap \mathbb{Q}$  nós definimos:

$$x_{p/q}^+ = \mathcal{B}^{-1}(\theta_{p/q}^+) \quad \text{e} \quad x_{p/q}^- = \mathcal{B}^{-1}(\theta_{p/q}^-).$$

**Teorema 3.3.1.** *Seja  $p/q \in \mathbb{T} \cap \mathbb{Q}$  irredutível.*

- a) *Os números  $x_{p/q}^+$  e  $x_{p/q}^-$  descrevem uma mesma órbita  $q$ -periódica em  $\mathbb{T}$  com respeito a  $\psi$ .*
- b) *A órbita  $\{\psi^j(x_{p/q}^+)\}_{j \in \mathbb{N}}$  está contida no intervalo  $[x_{p/q}^+/2, (x_{p/q}^+ + 1)/2]$  e possui número de rotação  $p/q$ .*
- c)  *$\{\psi^j(x_{p/q}^+)\}_{j \in \mathbb{N}}$  é a única órbita do sistema dinâmico  $(\mathbb{T}, \psi)$  que possui as propriedades descritas em b).*

Os itens (b) e (c) do Teorema anterior unidos a Proposição (3.3.1) caracterizam as órbitas Birkhoff de  $(\mathbb{T}, \psi)$ . Além disso, utilizando a Afirmação (3.1), o Lema (3.2.3) e a relação 3.13, recuperamos também o resultado provado no Teorema (3.2.1). “Existe

$y \in \pi^{-1}(x_{p/q}^+)$ , tal que a órbita  $\{f^j(y)\}_{j \in \mathbb{N}}$  preserva ordem em  $\mathbb{A}$  e possui número de rotação  $p/q$ .

Os próximos resultados serão necessários na prova do Teorema (3.3.1).

**Afirmção 3.2.** *Sejam  $x \in \mathbb{T}$  tal que  $\{\psi^j(x)\}_{j \in \mathbb{N}} \subset C_{x/2}$  e  $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ . Dada uma palavra  $(\epsilon_{i_1} \dots \epsilon_{i_k})$  de comprimento  $k$  não podem existir inteiros positivos  $m$  e  $n$  tais que,*

$$\begin{aligned} \sigma^m \left( \mathcal{B} \left( \frac{x}{2} \right) \right) &= (a \epsilon_{i_1} \dots \epsilon_{i_k} b \dots) \\ &e \\ \sigma^n \left( \mathcal{B} \left( \frac{x}{2} \right) \right) &= (c \epsilon_{i_1} \dots \epsilon_{i_k} d \dots) \end{aligned} \tag{3.54}$$

com  $a \neq c$  e  $b \neq d$ .

**Demonstração:** De fato, se existisse  $m$  e  $n$  com a Propriedade 3.54 teríamos

$$\begin{aligned} d \left( \sigma^n \left( \mathcal{B} \left( \frac{x}{2} \right) \right), \sigma^m \left( \mathcal{B} \left( \frac{x}{2} \right) \right) \right) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|\sigma_i^n(\mathcal{B}(\frac{x}{2})) - \sigma_i^m(\mathcal{B}(\frac{x}{2}))|}{2^i} \\ &\geq \sum_{i=0}^{k+1} \frac{|\sigma_i^n(\mathcal{B}(\frac{x}{2})) - \sigma_i^m(\mathcal{B}(\frac{x}{2}))|}{2^i} \\ &= 1 + 0 + \dots + 0 + \frac{1}{2^{k+1}} \\ &= 1 + \frac{1}{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

Mas por hipótese  $\{\psi^j(x)\}_{j \in \mathbb{N}} \subset C_{\frac{x}{2}}$ , donde segue que

$$d \left( \sigma^n \left( \mathcal{B} \left( \frac{x}{2} \right) \right), \sigma^m \left( \mathcal{B} \left( \frac{x}{2} \right) \right) \right) \leq \frac{1}{2} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Desta contradição temos o resultado. ■

**Proposição 3.3.3.** *Seja  $x \in \mathbb{T}$  arbitrário e fixado.*

(i) *A órbita  $\{\psi^j(x)\}_{j \in \mathbb{N}}$  está contida no semicírculo  $C_{\frac{x}{2}} = [\frac{x}{2}, \frac{x}{2} + \frac{1}{2}]$  se, e somente se, para todo  $k \geq 1$  e todo  $l \geq 1$  tivermos*

$$p_k \left( \mathcal{B} \left( \frac{x}{2} \right) \right) + p_l \left( \mathcal{B} \left( \frac{x}{2} \right) \right) \leq p_{k+l} \left( \mathcal{B} \left( \frac{x}{2} \right) \right) \leq p_k \left( \mathcal{B} \left( \frac{x}{2} \right) \right) + p_l \left( \mathcal{B} \left( \frac{x}{2} \right) \right) + 1. \tag{3.55}$$

(ii) Se a condição 3.55 é satisfeita a órbita  $\{\psi^j(x)\}_{j \in \mathbb{N}}$  tem número de rotação

$$\rho_\psi(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{p_j(\mathcal{B}(x/2))}{j}$$

e a escadaria  $\{p_j(\mathcal{B}(\frac{x}{2}))\}_{j \geq 1}$  satisfaz

$$\forall j \geq 1, \quad p_j\left(\mathcal{B}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \leq j\rho_\psi(x) \leq p_j\left(\mathcal{B}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + 1. \quad (3.56)$$

**Demonstração:**

(i)

Suponha que a órbita  $\{\psi^j(x)\}_{j \in \mathbb{N}}$  esteja contida no semicírculo  $C_{\frac{x}{2}}$  e defina a seguinte sequência

$$S_{k,l}\left(\mathcal{B}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = p_{k+l}\left(\mathcal{B}\left(\frac{x}{2}\right)\right) - p_k\left(\mathcal{B}\left(\frac{x}{2}\right)\right) - p_l\left(\mathcal{B}\left(\frac{x}{2}\right)\right), \quad (3.57)$$

onde  $k, l \in \mathbb{N}$ . Mostraremos que  $S_{k,l}(\mathcal{B}(x/2)) \in \{0, 1\}$  quaisquer que sejam  $k$  e  $l$  pertencentes a  $\mathbb{N}$ , que é equivalente à condição 3.55. Faremos a prova utilizando indução sobre  $l$ , isto é, fixado arbitrariamente  $k \in \mathbb{N}$  mostraremos que  $S_{k,l}(\mathcal{B}(x/2)) \in \{0, 1\}$  para todo  $l \in \mathbb{N}$ .

Para  $l = 1$  temos que

$$S_{k,1}\left(\mathcal{B}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \epsilon_1 + \dots + \epsilon_k - \epsilon_1 - \dots - \epsilon_{k-1} = \epsilon_k,$$

donde segue que  $S_{k,1} \in \{0, 1\}$ . Agora, supondo que  $S_{k,j} \in \{0, 1\}$  para  $1 \leq j \leq l$ , e notando que os termos sucessivos da sequência 3.57 satisfazem a relação

$$S_{k,l+1}\left(\mathcal{B}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = S_{k,l}\left(\mathcal{B}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \epsilon_{k+l} - \epsilon_k \quad \forall l \in \mathbb{N}, \quad (3.58)$$

temos os seguintes casos a considerar:

(I)  $S_{k,l}\left(\mathcal{B}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 0.$

Note que quando  $\epsilon_{k+l} = \epsilon_l$ , ou  $\epsilon_{k+l} = 1$  e  $\epsilon_l = 0$ , segue de 3.58 que  $S_{k,l+1}(\mathcal{B}(x/2)) \in \{0, 1\}$ . Estes são os únicos casos possíveis, o caso

$$\epsilon_{k+l} = 0 \quad \text{e} \quad \epsilon_l = 1, \quad (3.59)$$

ou seja,  $S_{k+l+1}(\mathcal{B}(x/2)) = -1$  não poderá ocorrer.

De fato, tomando  $\epsilon_k = 0$  e supondo que 3.59 ocorra, se  $\epsilon_{k+j} = \epsilon_j$  para  $j = 1, \dots, l-1$ , os pontos

$$\sigma^k \left( \mathcal{B} \left( \frac{x}{2} \right) \right) = (0 \epsilon_{k+1} \dots \epsilon_{k+l-1} 0 \dots) \quad \text{e} \quad \mathcal{B} \left( \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) = (1 \epsilon_1 \dots \epsilon_{l-1} 1 \dots)$$

contradizem a Afirmação 3.2. Por outro lado, se existe  $j \in \{1, \dots, l-1\}$  tal que  $\epsilon_{k+j} \neq \epsilon_j$ , seja  $j_0$  o menor índice com esta propriedade e novamente pela Afirmação 3.2 obtemos uma contradição com o fato da órbita  $\{\psi^j(x)\}_{j \in \mathbb{N}}$  estar contida em  $C_{\frac{x}{2}}$ .

Supondo agora que  $\epsilon_k = 1$ , com a mesma argumentação anterior obtemos contradições com a Afirmação 3.2 utilizando agora os pontos

$$\sigma^k \left( \mathcal{B} \left( \frac{x}{2} \right) \right) = (1 \epsilon_{k+1} \dots \epsilon_{k+l-1} 0 \dots) \quad \text{e} \quad \mathcal{B} \left( \frac{x}{2} \right) = (0 \epsilon_1 \dots \epsilon_{l-1} 1 \dots).$$

**(II)**  $S_{k,l} \left( \mathcal{B} \left( \frac{x}{2} \right) \right) = 1.$

Como no caso anterior, quando  $\epsilon_{k+l} = \epsilon_l$ , ou  $\epsilon_{k+l} = 0$  e  $\epsilon_l = 1$  temos que  $S_{k,l+1}(\mathcal{B}(x/2)) \in \{0, 1\}$  pela relação 3.58. Já o caso em que  $\epsilon_{k+l} = 1$  e  $\epsilon_l = 0$ , isto é,  $S_{k,l+1}(\mathcal{B}(x/2)) = 2$  não pode ocorrer, sendo a prova deste fato é análoga à do caso (I).

Pelos itens **(I)** e **(II)** concluímos que  $S_{k,l}(\mathcal{B}(x/2)) \in \{0, 1\}$  quaisquer que sejam  $k$  e  $l$  pertencentes a  $\mathbb{N}$ , donde segue a condição 3.55.

Reciprocamente, suponha por absurdo que a condição 3.55 seja satisfeita, mas que a órbita  $\{\psi^j(x)\}_{j \in \mathbb{N}}$  não esteja contida no semicírculo  $C_{\frac{x}{2}}$ . Sejam  $k$  e  $l$  os menores índices satisfazendo as propriedades

$$\sigma^k \left( \mathcal{B} \left( \frac{x}{2} \right) \right) \notin C_{\mathcal{B}(\frac{x}{2})} \quad \text{e} \quad \epsilon_{k+l} \neq \epsilon_l$$

onde,

$$\mathcal{B} \left( \frac{x}{2} \right) = (0 \epsilon_1 \epsilon_2 \dots \epsilon_l \dots \epsilon_{k+l} \dots), \quad \sigma^k \left( \mathcal{B} \left( \frac{x}{2} \right) \right) = (\epsilon_k \epsilon_{k+2} \dots \epsilon_{k+l} \dots), \quad \mathcal{B} \left( \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) = (1 \epsilon_1 \epsilon_2 \dots \epsilon_l \dots \epsilon_{k+l} \dots)$$

e  $C_{\mathcal{B}(\frac{x}{2})}$  é o intervalo simbólico  $[\mathcal{B}(x/2), \mathcal{B}(x/2 + 1/2)]$ .

Como  $\sigma^k \left( \mathcal{B} \left( \frac{x}{2} \right) \right) \notin C_{\mathcal{B}(\frac{x}{2})}$  temos as seguintes possibilidades:

(a) Se  $\epsilon_k = 0$ , então  $\epsilon_l = 1$  e  $\epsilon_{k+l} = 0$ .

(b) Se  $\epsilon_k = 1$ , então  $\epsilon_l = 0$  e  $\epsilon_{k+l} = 1$ .

Agora, supondo sem perda de generalidade que  $l < k$ , se (a) ocorre, então

$$\begin{aligned}
 S_{k,l} \left( \mathcal{B} \left( \frac{x}{2} \right) \right) &= \sum_{j=1}^{k+l-1} \epsilon_j - \sum_{j=1}^{k-1} \epsilon_j - \sum_{j=1}^{l-1} \epsilon_j \\
 &= 1 + \sum_{j=1}^{l-1} \epsilon_j - \sum_{j=l+1}^{k+l-1} \epsilon_j - \sum_{j=1}^{k-1} \epsilon_j - \sum_{j=1}^{l-1} \epsilon_j \\
 &= 1 + \sum_{j=l+1}^{(k-1)+l} \epsilon_j - \sum_{j=1}^l \epsilon_j - \sum_{j=l+1}^{k-1} \epsilon_j \\
 &= 1 + \sum_{j=k}^{k-1+l} \epsilon_j - \sum_{j=1}^l \epsilon_j \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

pois  $\epsilon_k = 0$ ,  $\epsilon_l = 1$  e  $\epsilon_{k+i} = \epsilon_k$  para  $i = 1, \dots, l-1$ . Donde segue que,

$$S_{k,l+1} \left( \mathcal{B} \left( \frac{x}{2} \right) \right) = S_{k,l} \left( \mathcal{B} \left( \frac{x}{2} \right) \right) + \epsilon_{k+l} - \epsilon_l = -1.$$

De forma análoga concluímos que se (b) ocorre então,  $S_{k,l+1}(\mathcal{B}(x/2)) = 2$ . Em ambos os casos temos uma contradição com a primeira parte da prova, pois  $S_{k,l}(\mathcal{B}(x/2)) \in \{0, 1\}$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  e para todo  $l \in \mathbb{N}$ . Logo, a órbita  $\{\psi^j(x)\}_{j \in \mathbb{N}}$  está contida no semicírculo  $C_{\frac{x}{2}}$ .

(ii)

Primeiramente mostremos que quando a condição 3.55 é satisfeita existe o limite da sequência  $p_j(\mathcal{B}(x/2))/j$  quando  $j \rightarrow \infty$ .

Para cada  $j \in \mathbb{N}$  seja  $a_j(\mathcal{B}(x/2)) = p_j(\mathcal{B}(x/2)) + 1$ , segue que a sequência  $\{a_j(\mathcal{B}(x/2))\}_{j \in \mathbb{N}}$  é subaditiva (vide p.76, [11]) e portanto,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{a_j(\mathcal{B}(x/2))}{j} = \inf_{j \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{a_j(\mathcal{B}(x/2))}{j} \right\}.$$

Assim, pondo  $\omega = \lim_{j \rightarrow \infty} a_j(\mathcal{B}(x/2))/j$  e dado  $\epsilon > 0$ , existe  $j_0 \in \mathbb{N}$  suficientemente grande tal que,

$$\begin{aligned} j > j_0 &\Rightarrow \left| \frac{p_j(\mathcal{B}(x/2))}{j} + \frac{1}{j} - \omega \right| < \frac{\epsilon}{2} \\ &\Rightarrow \left| \frac{p_j(\mathcal{B}(x/2))}{j} - \omega \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{j} \\ &\Rightarrow \left| \frac{p_j(\mathcal{B}(x/2))}{j} - \omega \right| < \epsilon, \end{aligned}$$

donde segue que  $\lim_{j \rightarrow \infty} p_j(\mathcal{B}(x/2))/j = \omega$ . Agora, pela Definição 1.2.2 temos que

$$R(\mathcal{B}(x)) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{p_j(\mathcal{B}(x/2))}{j}. \quad (3.60)$$

Finalmente, para mostrarmos 3.56 note que para todo  $k \geq 1$  e para todo  $j \geq 1$ , 3.55 implica que

$$kp_j\left(\mathcal{B}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \leq p_{kj}\left(\mathcal{B}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \leq k\left(p_j\left(\mathcal{B}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + 1\right),$$

donde segue que

$$p_j\left(\mathcal{B}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \leq \frac{j}{kj} p_{kj}\left(\mathcal{B}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \leq p_j\left(\mathcal{B}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + 1, \quad (3.61)$$

e portanto, fazendo  $k \rightarrow \infty$  em 3.61, temos por 3.60 que

$$p_j\left(\mathcal{B}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \leq jR(\mathcal{B}(x)) \leq p_j\left(\mathcal{B}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + 1 \quad \forall j \geq 1. \quad (3.62)$$

Pela desigualdade 3.62 e pelo Lema 3.2.2 segue o resultado desejado. ■

### Demonstração do Teorema 3.3.1.

- a) Para ver que os pontos  $x_{p/q}^+$  e  $x_{p/q}^-$  possuem a mesma órbita com respeito a  $\psi$ , basta observar que existe  $j_1 \in \{1, \dots, q-1\}$  tal que,  $j_1 p/q - p^-(p/q) = 1/q$  e portanto,  $\sigma^{j_1}(\theta_{p/q}^-) = \theta_{p/q}^+$ . A órbita  $\{\psi^j(x_{p/q}^+)\}_{j \in \mathbb{N}}$  é  $q$ -periódica em  $\mathbb{T}$  pois, por 3.52, a respectiva órbita  $\{\sigma^j(\theta_{p/q}^+)\}_{j \in \mathbb{N}}$  é  $q$ -periódica em  $\Sigma_2^+$ .

b) Fixando-se arbitrariamente  $l \in \mathbb{N}$ , segue de 3.57 que

$$S_{k+1,l} \left( \sigma^{-1}(\theta_{p/q}^+) \right) = \epsilon_{k+l} + \sum_{j=1}^{l-1} (\epsilon_{k+j} - \epsilon_j) \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

ou equivalentemente,

$$S_{k+1,l} \left( \sigma^{-1}(\theta_{p/q}^+) \right) = S_{k,l} \left( \sigma^{-1}(\theta_{p/q}^+) \right) + \epsilon_{k+l} - \epsilon_k \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.63)$$

Assim, utilizando indução sobre  $k$  em 3.63 e a definição dos  $\epsilon_j^+(p/q)$  dada na Proposição (3.3.2), mostra-se que  $S_{k,l}(\sigma^{-1}(\theta_{p/q}^+)) \in \{0, 1\}$  para todo  $k$  e  $l$  pertencentes a  $\mathbb{N}$ . Portanto, pela Proposição (3.3.3) temos que a órbita  $\{\sigma^j(\theta_{p/q}^+)\}_{j \in \mathbb{N}}$  está contida no intervalo simbólico  $[\mathcal{B}(x_{p/q}^+/2), \mathcal{B}((x_{p/q}^+ + 1)/2)]$ , donde segue que a órbita  $\{\psi^j(x_{p/q}^+)\}_{j \in \mathbb{N}}$  está contida no intervalo  $[x_{p/q}^+/2, (x_{p/q}^+ + 1)/2]$ . O fato de que  $\{\psi^j(x_{p/q}^+)\}_{j \in \mathbb{N}}$  tem número de rotação  $p/q$  agora segue pela Proposição (3.2.2).

c) Provaremos este item mostrando que  $\{\sigma^j(\theta_{p/q}^+)\}_{j \in \mathbb{N}}$  é a única órbita do sistema dinâmico  $(\sigma, \Sigma_2^+)$  que está contida no intervalo simbólico  $[\mathcal{B}(x_{p/q}^+/2), \mathcal{B}((x_{p/q}^+ + 1)/2)]$  e que possui número de rotação  $p/q$ . De fato, suponha por absurdo que  $a = (\delta_1 \dots \delta_q)^\infty$  seja outro ponto em  $\Sigma_2^+$  tal que a órbita  $\{\sigma^j(a)\}_{j \in \mathbb{N}}$  possua número de rotação  $p/q$  e esteja contida em  $[\mathcal{B}(y/2), \mathcal{B}((y + 1)/2)]$ , onde  $\mathcal{B}(y/2) = a$ . Logo,  $(\delta_1 \dots \delta_q)^\infty$  satisfaz a condição 3.56 da Proposição (3.3.3). Além disso, como as órbitas  $\{\sigma^j(\theta_{p/q}^+)\}_{j \in \mathbb{N}}$  e  $\{\sigma^j(a)\}_{j \in \mathbb{N}}$  têm número de rotação  $p/q$ , segue que  $|\delta_1 \dots \delta_q|_1 = p = |0 \epsilon_1 \dots \epsilon_{q-2} 1|_1$ , logo, a palavra  $\delta_1 \dots \delta_q$  é uma permutação (não cíclica) da palavra  $0 \epsilon_1 \dots \epsilon_{q-2} 1$ . Agora, note que se  $\delta_1 = 1$ , então  $(\delta_1 \dots \delta_q)^\infty$  não satisfaz a condição 3.56, o que é uma contradição. Por outro lado, se  $\delta_1 = 0$ , seja  $t$  o menor índice tal que  $\epsilon_t \neq \delta_{t+1}$ . Se  $\epsilon_t = 1$ , segue que  $p_t(a) = p(\sigma^{-1}(\theta_{p/q}^+)) - 1$ , por outro lado, se  $\epsilon_t = 0$ , então  $p_t(a) = p(\sigma^{-1}(\theta_{p/q}^+)) + 1$ . Em ambos os casos a condição 3.56 também não é satisfeita pelo ponto  $a = (\delta_1 \dots \delta_q)^\infty$ , resultando na mesma contradição já obtida. Logo  $\{\psi^j(\theta_{p/q}^+)\}_{j \in \mathbb{N}}$  é a única órbita Birkhoff em  $\mathbb{T}$  com número de rotação  $p/q$ .

■

Para finalizarmos este capítulo, daremos um outro método para construir as palavras padrão associadas a um número  $p/q \in \mathbb{T} \cap \mathbb{Q}$ , tal método baseia-se no processo de expansão de  $p/q$  em frações contínuas que lembraremos a seguir.

Dado  $x_0 \in \mathbb{R}$ , defina

$$a_1 = I\left(\frac{1}{x_0}\right) \quad \text{e} \quad x_1 = \frac{1}{x_0} - a_1,$$

segue que

$$x_1 = \frac{1}{a_1 + x_0},$$

onde  $a_1 \in \mathbb{N}$  e  $x_1 \in \mathbb{R}$ . Caso  $x_1 \neq 0$ , podemos repetir o processo pondo

$$a_2 = I\left(\frac{1}{x_1}\right) \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{1}{x_1} - a_2,$$

logo,

$$x_1 = \frac{1}{a_1 + x_2} \quad \text{e} \quad x_0 = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{x_2 + a_2}}.$$

Indutivamente, pondo

$$a_n = I\left(\frac{1}{x_{n-1}}\right) \quad \text{e} \quad x_n = \frac{1}{x_{n-1}} - a_n,$$

temos a seguinte sequência:

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}}. \quad (3.64)$$

A sequência 3.64 chama-se **expansão de  $x_0$  em fração contínua** e pode ser mostrado que  $p_n/q_n \rightarrow x_0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Note que a sequência  $\{p_n/q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  fica bem determinada quando se conhece a sequência de números naturais  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , por este motivo denotaremos a expansão de  $x_0$  em fração contínua por

$$x_0 = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots]. \quad (3.65)$$

É sabido também que dado  $x_0$  como em 3.65, a sequência  $p_n/q_n$  é obtida recursivamente por

$$(**) \begin{cases} q_{n+1} = q_{n-1} + a_{j+1}q_j, & q_0 = 1, & q_1 = a_1 \\ p_{n+1} = p_{n-1} + a_{j+1}p_j, & p_0 = 0, & p_1 = 1 \end{cases}$$

sempre que  $a_{j+1} \neq 0$ . Além disso, se  $x_0 \in \mathbb{Q}$ , então a sequência  $p_n/q_n$  é finita.

**Exemplo 3.3.4.** Considere o ponto  $2/5 \in \mathbb{Q}$ , segue que

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2}},$$

ou seja,  $2/5 = [2, 2]$ .

**Proposição 3.3.4.** Dado  $p/q \in (0, 1/2] \cap \mathbb{Q}$ , seja  $[d_1 + 1, d_2, \dots, d_n]$  a expansão de  $p/q$  em frações contínuas e considere a sequência  $u_k$  definida recursivamente por,

$$u_{k+1} = u_k^{d_{k+1}} u_{k-1} \quad k \geq 0, \quad (3.66)$$

onde  $u_{-1} = 1$  e  $u_0 = 0$ . Então,  $|u_n| = q$  e se  $u_n = w_1 \dots w_q$  as palavras padrão associadas ao ponto  $p/q$  são dadas por

$$u_{p/q}^+ = 0 w_1 \dots w_{q-2} 1 \quad e \quad u_{p/q}^- = 1 w_1 \dots w_{q-2} 0. \quad (3.67)$$

Se  $p/q \in (1/2, 1) \cap \mathbb{Q}$ , as palavras padrão são dadas do seguinte modo

$$u_{p/q}^+ = \overline{u_{1-p/q}^-} \quad e \quad u_{p/q}^- = \overline{u_{1-p/q}^+}. \quad (3.68)$$

**Exemplo 3.3.5. (a)**  $1/3 = [3]$  Segue que  $d_1 = 2$ , logo, por 3.66 e portanto,

$$u_1 = 001 \quad e \quad u_{1/3}^+ = 001$$

**(b)**  $2/5 = [2, 2]$

Segue que  $d_1 = 1$  e  $d_2 = 2$ , logo, por 3.66

$$u_1 = 01 \quad e \quad u_2 = 01010,$$

e portanto,

$$u_{2/5}^+ = 00101 \quad e \quad u_{2/5}^- = 10100.$$

**(c)** Como  $3/5 \in (1/2, 1)$  e  $1 - 3/5 = 2/5$ , temos pelo item (a) e por 3.68 que

$$u_{3/5}^+ = \overline{u_{2/5}^-} = 01011 \quad e \quad u_{3/5}^- = \overline{u_{2/5}^+} = 11010.$$

(d)  $3/8 = [2, 1, 2]$

Segue que  $d_1 = 1$ ,  $d_2 = 1$  e  $d_3 = 2$ , logo, por 3.66

$$u_1 = 01, u_2 = 010 \quad e \quad u_3 = 01001001,$$

e portanto,

$$u_{3/8}^+ = 00100101 \quad e \quad u_{3/8}^- = 10100100.$$

(e) Como  $4/5 \in (1/2, 1)$ ,  $1 - 4/5 = 1/5$  e  $1/5 = [5]$ , temos que

$$u_{1/5}^+ = 00001 \quad e \quad u_{1/5}^- = 10000,$$

e por 3.68 segue que

$$u_{4/5}^+ = \overline{u_{1/5}^-} = 01111 \quad e \quad u_{4/5}^- = \overline{u_{1/5}^+} = 11110.$$

Note que a órbita simbólica que resulta do item (d) coincide exatamente com a encontrada no Exemplo 3.3.3 utilizando as escadarias extremas do ponto  $4/5$ .

**Lema 3.3.1.** *Sejam  $a/b$  e  $c/d$  números racionais irredutíveis tais que  $ad - cb = 1$ , então os códigos simbólicos de  $\theta_{a/b}^+$  e  $\theta_{c/d}^-$  coincidem nos primeiros  $b + d - 2$  símbolos.*

**Demonstração:** Basta utilizar o fato que as órbitas de  $\theta_{a/b}^+$  e  $\theta_{c/d}^-$  sobre  $\sigma$  são periódicas de períodos  $b$  e  $d$  respectivamente e aplicar o algoritmo (\*) na página 75 notando que

$$\sigma^b(\theta_{c/d}^-) = \theta_{c/d}^+ \quad e \quad \sigma^d(\theta_{a/b}^+) = \theta_{a/b}^-$$

■

#### Demonstração da Proposição 3.3.4.

Vamos obter a fórmula 3.66 mostrando que as palavras padrão  $u_{p_j/q_j}^+$  ( $j$  par) e  $u_{p_j/q_j}^-$  ( $j$  ímpar) podem ser obtidas recursivamente do seguinte modo

$$u_0 = 0, \quad u_{-1} = 1 \quad e \quad u_j = u_{p_{j+1}/q_{j+1}}^\pm = u_j^{d_{j+1}} u_{j-1} \quad \forall j \geq 0, \quad (3.69)$$

onde  $\{p_j/q_j\}_{1 \leq j \leq n}$  é a expansão de  $p/q$  em frações contínuas. Faremos a prova utilizando indução sobre  $j$ .

Para  $j = 0$ , temos que  $p_1/q_1 = 1/(d_1 + 1)$ , logo, pelo algoritmo (\*) da página 75 temos que

$$u_{p_1/q_1}^- = 0^{d_1} 1,$$

o que mostra que a fórmula é válida para  $j = 0$ .

Suponha agora que 3.69 seja válido para  $j = l$ , onde  $0 \leq l \leq n - 2$  é ímpar. Vamos mostrar que 3.69 também é válido para  $j = l + 1$ . De fato, pelo Lema 3.3.1, temos que os códigos simbólicos de  $u_{p_j/q_j}^-$  e  $u_{p_{j+1}/q_{j+1}}^+$  coincidem nos  $q_{j+1} + q_j - 2$  primeiros símbolos, e por (\*\*), página 88,

$$q_{j+1} + q_j - 2 = d_{j+1}q_j + q_j + q_{j-1} - 2.$$

Por outro lado,

$$\left| u_{p_j/q_j}^- \right| = q_j \quad \text{e} \quad \left| u_{p_{j+1}/q_{j+1}}^+ \right| = q_{j+1} = d_{j+1}q_j + q_{j-1}.$$

Assim, o código simbólico de  $u_{p_{j+1}/q_{j+1}}^+$  é obtido pela concatenação de duas palavras: a primeira de comprimento  $d_{j+1}q_j$ , coincidindo exatamente com os  $d_{j+1}q_j$  primeiros símbolos de  $u_j$ , ou seja,  $u_j^{d_{j+1}}$ ; e por uma segunda palavra  $w$  de comprimento  $q_{j+1} - d_{j+1}q_j = q_{j-2}$ ,

$$u_{j+1} = u_j^{d_{j+1}} w.$$

Mas, pela nossa hipótese de indução e pelo Lema 3.3.1, temos que os códigos simbólicos de  $u_{p_j/q_j}^-$  e  $u_{p_{j-1}/q_{j-1}}^+$  coincidem nos  $q_j + q_{j-1} - 2$  primeiros símbolos, e como

$$\left| u_{p_{j-1}/q_{j-1}}^+ \right| = q_{j-1},$$

basta escolher  $w = u_{j-1}$ , donde segue que

$$u_{j+1} = u_j^{d_{j+1}} u_{j-1}.$$

A demonstração do caso em que  $j$  é par é análoga. ■

### 3.3.1 Decomposição em Soma de Farey

Dado  $p/q \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$  as palavras padrão  $u_{p/q}^+$  e  $u_{p/q}^-$  também podem ser obtidas utilizando a decomposição de  $p/q$  em soma de Farey. A soma de Farey de dois números

racionais  $p_1/q_1, p_2/q_2 \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$  tais que  $p_1q_2 - q_1p_2 = \pm 1$  é denotada pelo símbolo  $\oplus$  e é definida do seguinte modo

$$\frac{p_1}{q_1} \oplus \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 + p_2}{q_1 + q_2}. \quad (3.70)$$

As parcelas  $p_1/q_1$  e  $p_2/q_2$  em 3.70 são ditas então uma decomposição do número  $\frac{p_1+p_2}{q_1+q_2}$  em soma de Farey.

Decompondo  $p/q$  dessa forma, as palavras padrão associadas a este ponto são obtidas pela concatenação das respectivas palavras padrão de suas parcelas conforme o esquema a seguir.

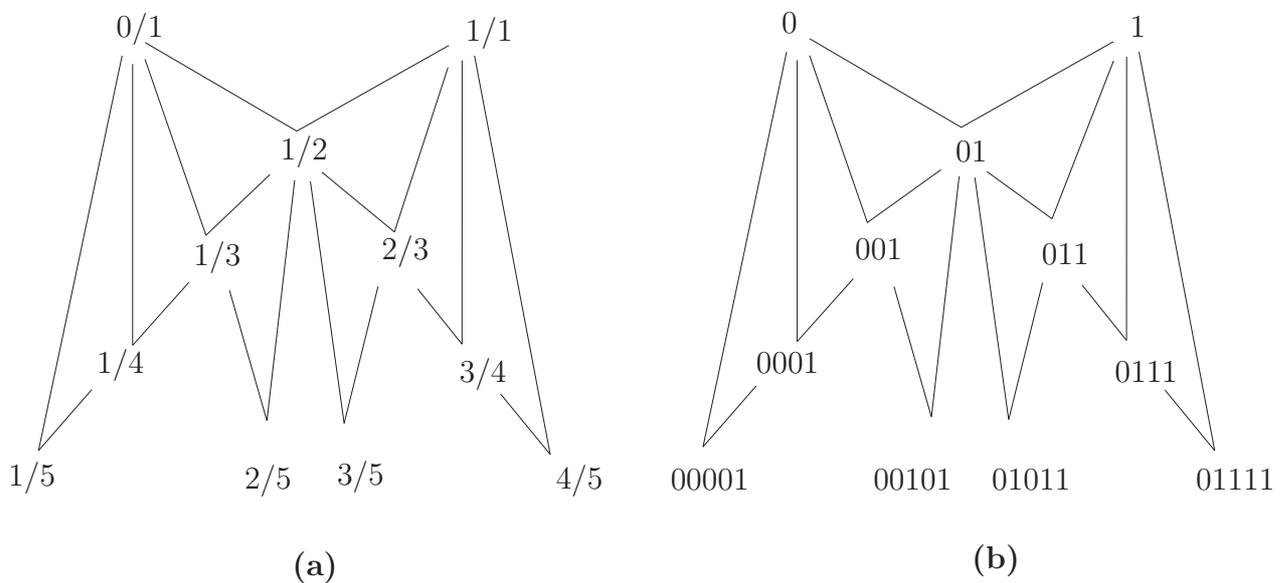


Figura 3.11: Árvore de Farey.

No item (a) da Figura 3.11, cada número que aparece no vértice de uma ramificação da árvore é a soma de Farey das parcelas que estão nas extremidades da mesma ramificação. No item (b), cada palavra no vértice de uma ramificação é a concatenação das palavras que aparecem nas extremidades da mesma ramificação. A relação entre as árvores é a seguinte, dado  $p/q$  na árvore (a), teremos na mesma posição na árvore (b) a palavra padrão  $u_{p/q}^+$ .

**Exemplo 3.3.6.** No item (c) do Exemplo 3.3.5, obtemos que  $u_{1/3}^+ = 001$  e  $u_{2/5}^+ = 00101$ . Concatenando estas palavras obtemos  $00100101$ , que coincide exatamente com a palavra padrão  $u_{3/8}^+$  também obtida no exemplo 3.3.5.

## Considerações Finais

Concluimos com este trabalho que um difeomorfismo de classe  $C^1$  do anel que tem um ponto homoclínico transversal  $K$ -rotacional a um ponto fixo hiperbólico, possui um intervalo não trivial como conjunto de rotação (Teorema (2.1.2)), o qual implica comportamentos dinâmicos e topológicos interessantes. De fato, o Teorema e (2.2.1), mostra que para cada valor escolhido neste intervalo, existem incontáveis (e disjuntos) conjuntos de Cantor “rodando” em torno do anel com número de rotação igual ao valor escolhido no intervalo. Tais comportamentos podem ser compreendidos utilizando-se dinâmicas simbólicas no espaço  $\Sigma_2$  mediante ao Teorema(2.1.1).

# Referências Bibliográficas

- [1] S. Bullett, P. Sentenac. *Ordered orbits of the shift, square roots, and the devil's staircase*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., (1994) 115(3) 451-481.
- [2] F. Botelho *Rotation Sets of Maps of the Annulus*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 133, No. 2, 1988.
- [3] R.L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Second Edition, Addison Wesley, Redwood, CA (1989).
- [4] M. Handel, *The Rotation Set of a Homeomorphism of the Annulus is Closed*, Commun. Math. Phys., (1990) 127, 339-349.
- [5] K.Hockett, P.Holmes, *Josephson's Junction, Annulus Maps, Birkhoff Attractors, Horseshoes and Rotation Sets*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, 1985.
- [6] K. Hare and N. Sidorov, *On cycles for the doubling map which are disjoint from an interval*, Monatsh Math. (2014) 175 347-365.
- [7] E. L. Lima, *Análise Real vol.1. Funções de Uma Variável*, Rio de Janeiro: IMPA, 2010.
- [8] E. L. Lima, *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*, 4ed. Rio de Janeiro:IMPA, 2012.
- [9] J. Palis, W. de Melo, *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*, Rio de Janeiro: IMPA, 1975.

- [10] J. Sotomayor *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Rio de Janeiro: IMPA, 1979. 62
- [11] M. Viana, K. Oliveira, *Fundamentos da Teoria Ergódica*, Rio de Janeiro: SBM, 90,2014.
- [12] P. Veerman. *Symbolic dynamics and rotation numbers*, Physica D, (1986) 134A 543-576.