

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**Modelos cosmológicos de energia escura: aspectos  
teóricos e vínculos observacionais**

**Altimare Maíres Ribeiro**

Itajubá, julho 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**Altimare Maíres Ribeiro**

**Modelos cosmológicos de energia escura: aspectos  
teóricos e vínculos observacionais**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física como parte dos  
requisitos para obtenção do Título de Mestre em Física

Área de Concentração: Astrofísica

Orientador: Prof. Dr. Armando Bartolome Bernui Leo

Julho de 2013

Itajubá

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Mauá  
Bibliotecária Jacqueline Rodrigues de Oliveira Balducci- CRB\_6/1698

R484

Ribeiro, Altimare Maíres

Modelos Cosmológicos de energia escura: aspectos teóricos e vínculos observacionais / Altimare Maíres Ribeiro. – Itajubá, (MG) : [s.n.], 2013.

86 p. : il.

Orientador: Prof. Dr. Armando Bartolome Bernui Leo.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Itajubá.

1. Parâmetros cosmológicos. 2. Energia escura. 3. Modelos cosmológicos. 4. Aceleração cósmica. I. Bernui Leo, Armando Bartolome, orient. II. Universidade Federal de Itajubá. III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**Altimare Maíres Ribeiro**

**Modelos cosmológicos de energia escura: aspectos  
teóricos e vínculos observacionais**

Dissertação aprovada por banca examinadora em 01 de julho de 2013, conferindo ao  
autor o título de Mestre em Física

**Banca Examinadora:**

Prof. Dr. Armando Bartolome Bernui Leo (orientador)

Prof. Dr. Ribamar Rondon de Rezende dos Reis

Prof. Dr. Agenor Pina da Silva

Prof. Dr. Vitório Alberto De Lorenci

Itajubá

2013

*Ao meu namorado Willian Pereira Nunes  
À minha amiga Nathália Aparecida Lopes*

# Agradecimentos

Ao professor Armando Bernui pela paciência e por todo apoio no desenvolvimento desta dissertação.

À minha família, em particular aos meus pais pelo apoio e dedicação.

Ao meu namorado Willian Pereira Nunes por todo amor, carinho, paciência e pelas importantes contribuições para o desenvolvimento desta dissertação.

A todos meus inestimáveis amigos do Laboratório de Microondas (UNIFEI), em especial: Adhimar de Oliveira, Ana Lúcia, Caroline Felix, João Ider, Kallem Cristine, Marcos Amarante, Marcos Faria e Patrícia Santos que comigo dividiram todos os momentos desta dissertação.

À minha colega de mestrado e grande amiga Nathália Aparecida Lopes, exemplo de superação.

Aos professores do Instituto de Ciências Exatas (ICE) pelas disciplinas ministradas e pela atenção.

À Fundação de Amparo à Pesquisa de Minas Gerais (FAPEMIG) pelo apoio financeiro.

*“A mente que se abre a uma nova ideia,  
jamais voltará ao tamanho original.”*

— ALBERT EINSTEIN

# Resumo

Desde a década de 1990 é bem conhecido que o universo entrou em uma recente fase de expansão acelerada. Para explicar a aceleração cósmica, as duas maiores linhas atuais de pesquisa sugerem a presença de uma componente dominante no universo com propriedades exóticas como pressão negativa ou a Teoria da Relatividade Geral não se aplica à escalas cosmológicas.

Nesta dissertação analisamos alguns modelos cosmológicos baseados na energia escura, entre eles, o modelo Cosmológico Padrão Lambda Cold Dark Matter ( $\Lambda$ CDM) e alguns concorrentes:  $X$ CDM e  $\omega a$ CDM. Utilizamos amostras de supernovas tipo Ia (SNIa) compiladas pelo Supernovae Cosmology Project Union 2.1 e 19 estimativas observacionais do parâmetro de Hubble  $H(z)$  compiladas por [74]. Aplicamos o teste estatístico de minimização  $\chi^2$  juntamente com a função *likelihood* para vincularmos os parâmetros cosmológicos:  $\Omega_m$ ,  $\Omega_\Lambda$ ,  $\Omega_\kappa$ ,  $\omega_0$  e  $\omega_a$ . Nossos resultados mostram que o modelo  $\Lambda$ CDM fornece um bom ajuste aos dados observacionais de SNIa e  $H(z)$ . Dentro da região de confiança de 68%, a análise combinada dos dados de supernovas com  $H(z)$  revelam que todos os modelos cosmológicos estudados se confundem com o modelo  $\Lambda$ CDM. Nesse sentido, os modelos cosmológicos que assumem a densidade de energia escura como função do redshift no intervalo  $0 < z < 2.0$  não podem ser desconsiderados.

Em um segundo momento, investigamos a aceleração cósmica utilizando a definição do parâmetro de desaceleração  $q$  e o redshift de transição  $z_t$  (desaceleração - aceleração). Todos os modelos cosmológicos analisados reproduzem bem a recente fase de expansão acelerada do universo com  $q_0 < 0$  e  $z_t \approx 0.65$ .

**Palavras-chave:** parâmetros cosmológicos, energia escura, modelos cosmológicos, aceleração cósmica, cosmologia observacional



# Abstract

Since the 1990 decade, it is well known that the universe came into a recent phase of accelerated expansion. In order to explain this behavior, the two main paths of research found in the literature suggest a new exotic component dominant in the universe with negative pressure or modifications applied to General Relativity Theory at cosmological scales.

We investigate some dark energy cosmological models among them, the standart Lambda Cold Dark Matter  $\Lambda$ CDM model,  $X$ CDM and  $\omega a$ CDM models. We use The Supernovae Cosmology Project Union2.1 supernovae (SNIa) compilation and 19 observational Hubble parameter data compiled by [74]. We apply the minimizing a  $\chi^2$  function and *likelihood* function to estimate the best fit of cosmological parameters:  $\Omega_m$ ,  $\Omega_\Lambda$ ,  $\Omega_\kappa$ ,  $\omega_0$  and  $\omega_a$ . Our results show that the  $\Lambda$ CDM model provides a good fit to the observational data. At 68% confidence level, the combined analysis of supernovae data with  $H(z)$  data shows that all cosmological models reduce themselves to the  $\Lambda$ CDM model. Thus, the cosmological models with dark energy density as a function of redshift for  $0 < z < 2.0$  are not disfavored for current observational data.

At the end, we investigate the cosmic acceleration by setting the definition of the deceleration parameter  $q$  and transition redshift  $z_t$  (decceleration - acceleration). All cosmological models reproduces the cosmic acceleration with  $q_0 < 0$  and  $z_t \approx 0.65$ .

**Key-words:** cosmological parameters, dark energy, cosmological models, cosmic acceleration, observational cosmology

# Conteúdo

<b>Resumo</b>	<b>4</b>
<b>Abstract</b>	<b>5</b>
<b>Índice</b>	<b>6</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>8</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>12</b>
<b>Lista de Abreviações</b>	<b>14</b>
<b>1 Os fundamentos da Cosmologia Moderna</b>	<b>15</b>
1.1 O Princípio Cosmológico . . . . .	15
1.2 As equações de campo da Relatividade Geral e a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker . . . . .	16
1.3 Parâmetros Cosmológicos . . . . .	20
1.3.1 Parâmetro de densidade crítica . . . . .	20
1.3.2 Parâmetro de densidade . . . . .	21
1.3.3 Parâmetro de desaceleração . . . . .	21
1.3.4 Parâmetro da equação de estado . . . . .	23
<b>2 A expansão acelerada do universo</b>	<b>25</b>
2.1 Hubble e a expansão do universo . . . . .	25
2.2 O Modelo Cosmológico Padrão (MCP) . . . . .	26
2.2.1 A Nucleossíntese Primordial . . . . .	27
2.2.2 A Radiação Cósmica de Fundo . . . . .	28
2.3 Supernovas e a expansão acelerada do universo . . . . .	30

2.3.1	Supernovas . . . . .	31
2.3.2	Supernovas tipo Ia e suas implicações cosmológicas . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Os Modelos Cosmológicos de energia escura</b>	<b>39</b>
3.1	As componentes do universo . . . . .	39
3.1.1	A matéria escura . . . . .	40
3.1.2	A energia escura . . . . .	42
3.2	O Modelo de Concordância Cósmica $\Lambda$ CDM . . . . .	43
3.3	O Modelo com $\omega$ constante $X$ CDM . . . . .	44
3.4	A parametrização Chevallier-Polarski-Linder $\omega_a$ CDM . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Análise estatística dos modelos cosmológicos</b>	<b>46</b>
4.1	Parâmetros Cosmológicos . . . . .	46
4.1.1	Parâmetro de Hubble . . . . .	46
4.1.2	As supernovas tipo Ia . . . . .	48
4.2	Descrição dos testes estatísticos . . . . .	49
4.2.1	Minimização $\chi^2$ e melhor ajuste . . . . .	49
4.2.2	A função <i>likelihood</i> . . . . .	51
4.2.3	As regiões de confiança . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Resultados e Discussões</b>	<b>53</b>
5.1	Análise comparativa dos modelos cosmológicos . . . . .	53
5.2	Regiões de confiança . . . . .	57
5.2.1	Parâmetros $\Omega_m$ e $\Omega_\Lambda$ . . . . .	58
5.2.2	Parâmetros $\omega$ e $\omega_a$ . . . . .	58
5.2.3	Parâmetro $\Omega_\kappa$ . . . . .	59
5.3	Consequências cosmológicas: parâmetro de desaceleração e <i>redshift</i> de transição	69
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>71</b>
<b>A</b>	<b>Rotina completa</b>	<b>74</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>77</b>

# Lista de Figuras

2.1	Diagrama apresentado por Hubble (1929). Na escala, o eixo horizontal indica a distância das galáxias e o eixo vertical, a velocidade [9]. Observe-se o erro acidental cometido por Hubble: na figura aparece $Km$ , sendo que o correto é $Km/s$ para a unidade de velocidade. . . . .	27
2.2	Espectro da RCF obtido pelo FIRAS [21] . . . . .	29
2.3	Esquema de classificação das supernovas [30]. As duas principais classes de supernovas são caracterizadas com base na ausência (Supernovas tipo I) ou presença (Supernovas tipo II) de linhas de hidrogênio no seu espectro. Em seguida, as supernovas de uma mesma classe são subdivididas com base na presença ou ausência de outros elementos no seu espectro. . . . .	32
2.4	Relação entre o pico de emissão de luminosidade com o decaimento da curva de luz para supernovas próximas. O painel superior apresenta a curva de luz aproximadamente 50 dias após o pico de emissão das supernovas. O painel inferior apresenta a curva de luz do mesmo conjunto de supernovas depois do ajuste [33]. . . . .	34
2.5	Diagrama de Hubble com dados de SNIa do grupo SCP. Assumindo $\Omega_\kappa = 0$ , as quatro curvas tracejadas representam ajustes para diferentes valores de $\Omega_m$ (listados a direita). As três curvas sólidas representam modelos com $\Lambda = 0$ e diferentes valores para $\Omega_m$ listados à direita. Fonte: <a href="http://www-supernova.lbl.gov">http://www-supernova.lbl.gov</a> . . . . .	35
2.6	No painel superior à esquerda é apresentado o diagrama de Hubble com supernovas em alto e baixo redshifts medidas através do método MLCS obtido pelo grupo HZT. No painel inferior é apresentado a diferença entre os dados e o modelo com $\Omega_m = 0.20$ e $\Omega_\Lambda = 0$ . A direita estão representadas as regiões de $1\sigma$ , $2\sigma$ e $3\sigma$ de confiança para $\Omega_m$ e $\Omega_\Lambda$ [24]. . . . .	36

3.1	Curva de rotação da galáxia NGC3198 [48]. Os pontos representam as medidas da velocidade orbital em função do raio galáctico. As curvas representam as contribuições da velocidade devido ao disco e ao halo. O comportamento não kleperiano para médios e grandes raios é explicado pela hipótese da existência do halo escuro. . . . .	42
4.1	Estimativas de $H(z)$ compiladas por [74]. A linha sólida representa o melhor ajuste para o modelo $\Lambda$ CDM com $\Omega_m = 0.27$ e $\Omega_\kappa = 0$ . . . . .	47
4.2	Módulo de distância ( $\mu$ ) em função do redshift ( $z$ ) para as 580 SNIa do catálogo Union 2.1. A linha sólida representa o melhor ajuste para o modelo $\Lambda$ CDM com $\Omega_\Lambda = 0.729 \pm 0.014$ com 68% de confiança [40]. . . . .	49
5.1	Evolução do universo $H(z)$ em função do <i>redshift</i> . O painel a esquerda representa o ajuste dos modelos cosmológicos aos 19 dados de $H(z)$ disponíveis na Tabela 4.6. No painel a direita foi dado um zoom na figura para melhor visualização do ajuste das curvas teóricas. As cores azul, verde, laranja, roxo e vermelha, representam os modelos $\Lambda$ CDM, $X$ CDM, $\omega$ aCDM, $O$ $\Lambda$ CDM e $O$ $X$ CDM, respectivamente. . . . .	57
5.2	Módulo de distância ( $\mu$ ) em função do <i>redshift</i> ( $z$ ) ajustados aos dados de SNIa disponíveis no catálogo Union 2.1 [40]. A curva azul representa o modelo $\Lambda$ CDM considerando as melhores estimativas para os parâmetros cosmológicos disponíveis na Tabela 5.1. Os demais modelos aparecem sobrepostos ao modelo $\Lambda$ CDM e por isso não são visualizados. . . . .	58
5.3	Regiões de 68.3% (contorno interno) e 95.4% (contorno externo) de confiança dos parâmetros $\Omega_m$ vs. $\Omega_\Lambda$ (painel inferior a esquerda) do modelo $\Lambda$ CDM utilizando dados de $H(z)$ (lilás) e SNIa (verde). Também está apresentada a distribuição de probabilidade ( $\mathcal{L}/\mathcal{L}_{máx}$ ) para $\Omega_m$ (painel superior) e $\Omega_\Lambda$ (painel inferior a direita). As linhas tracejada e sólida representam a distribuição de probabilidade usando os dados de $H(z)$ e SNIa, respectivamente. . . . .	60

- 5.4 Regiões de 68.3% (contorno interno) e 95.4% (contorno externo) de confiança dos parâmetros  $\Omega_m$  vs.  $\omega$  (painel inferior a esquerda) do modelo  $\Lambda$ CDM utilizando dados de  $H(z)$  (lilás) e SNIa (verde). Também está apresentada a distribuição de probabilidade ( $\mathcal{L}/\mathcal{L}_{máx}$ ) para  $\Omega_m$  (painel superior) e  $\omega$  (painel inferior a direita). As linhas tracejada e sólida representam a distribuição de probabilidade usando os dados de  $H(z)$  e SNIa, respectivamente. . . . . 61
- 5.5 Regiões de 68.3% (contorno interno) e 95.4% (contorno externo) de confiança dos parâmetros  $\Omega_m$  vs.  $\omega_0$  (painel inferior a esquerda) do modelo  $\omega$ aCDM utilizando dados de  $H(z)$  (lilás) e SNIa (verde). Também está apresentada a distribuição de probabilidade ( $\mathcal{L}/\mathcal{L}_{máx}$ ) para  $\Omega_m$  (painel superior) e  $\omega_0$  (painel inferior a direita). As linhas tracejada e sólida representam a distribuição de probabilidade usando os dados de  $H(z)$  e SNIa, respectivamente. . . . . 62
- 5.6 Regiões de 68% (contorno interno) e 95.4% (contorno externo) de confiança dos parâmetros  $\omega_a$  vs.  $\omega_0$  (painel inferior a esquerda) do modelo  $\omega$ aCDM utilizando dados de  $H(z)$  (lilás) e SNIa (verde). Também está apresentada a distribuição de probabilidade ( $\mathcal{L}/\mathcal{L}_{máx}$ ) para  $\omega_a$  (painel superior) e  $\omega_0$  (painel inferior a direita). As linhas tracejada e sólida representam a distribuição de probabilidade usando os dados de  $H(z)$  e SNIa, respectivamente. 63
- 5.7 Evolução do parâmetro da equação de estado  $\omega$  em função do *redshift* para o modelo  $\omega$ aCDM. As curvas tracejada e sólida foram geradas considerando os melhores parâmetros cosmológicos do modelo (Tabela 5.3) a partir dos dados de  $H(z)$  e SNIa, respectivamente. . . . . 64
- 5.8 Regiões de 68.3% (contorno interno) e 95.4% (contorno externo) de confiança dos parâmetros  $\Omega_m$  vs.  $\Omega_\kappa$  (painel inferior a esquerda) do modelo  $O\Lambda$ CDM utilizando dados de  $H(z)$  (lilás) e SNIa (verde). Também está apresentada a distribuição de probabilidade ( $\mathcal{L}/\mathcal{L}_{máx}$ ) para  $\Omega_m$  (painel superior) e  $\Omega_\kappa$  (painel inferior a direita). As linhas tracejada e sólida representam a distribuição de probabilidade usando os dados de  $H(z)$  e SNIa, respectivamente. . . . . 65

5.9	Regiões de 68.3% (contorno interno) e 95.4% (contorno externo) de confiança dos parâmetros $\Omega_m$ vs. $\Omega_\Lambda$ (painel inferior a esquerda) do modelo $O\Lambda CDM$ utilizando dados de $H(z)$ (lilás) e SNIa (verde). Também está apresentada a distribuição de probabilidade ( $\mathcal{L}/\mathcal{L}_{máx}$ ) para $\Omega_m$ (painel superior) e $\Omega_\Lambda$ (painel inferior a direita). As linhas tracejada e sólida representam a distribuição de probabilidade usando os dados de $H(z)$ e SNIa, respectivamente. . . . .	66
5.10	Regiões de 68.3% (contorno interno) e 95.4% (contorno externo) de confiança dos parâmetros $\Omega_m$ vs. $\Omega_\kappa$ (painel inferior a esquerda) do modelo $OXC DM$ utilizando dados de $H(z)$ (lilás) e SNIa (verde). Também está apresentada a distribuição de probabilidade ( $\mathcal{L}/\mathcal{L}_{máx}$ ) para $\Omega_m$ (painel superior) e $\Omega_\kappa$ (painel inferior a direita). As linhas tracejada e sólida representam a distribuição de probabilidade usando os dados de $H(z)$ e SNIa, respectivamente. . . . .	67
5.11	Regiões de 68.3% (contorno interno) e 95.4% (contorno externo) de confiança dos parâmetros $\Omega_m$ vs. $\omega$ (painel inferior a esquerda) do modelo $OXC DM$ utilizando dados de $H(z)$ (lilás) e SNIa (verde). Também está apresentada a distribuição de probabilidade ( $\mathcal{L}/\mathcal{L}_{máx}$ ) para $\Omega_m$ (painel superior) e $\omega$ (painel inferior a direita). As linhas tracejada e sólida representam a distribuição de probabilidade usando os dados de $H(z)$ e SNIa, respectivamente. . . . .	68
5.12	Evolução do parâmetro de desaceleração $q(z)$ em função do <i>redshift</i> . As curvas do painel à esquerda foram traçadas considerando as melhores estimativas para parâmetros cosmológicos de cada modelo disponíveis nas Tabelas 5.1 a 5.5. No painel a direita foi dado um zoom na figura da esquerda para melhor visualização do <i>redshift</i> de transição ( $z_t$ ) referente a cada modelo. As cores azul, verde, laranja, roxo e vermelha, representam os modelos $\Lambda CDM$ , $XCDM$ , $\omega aCDM$ , $O\Lambda CDM$ e $OXC DM$ , respectivamente. . . .	70

# Lista de Tabelas

3.1	Melhores estimativas para os parâmetros cosmológicos do modelo $\Lambda$ CDM utilizando os resultados disponíveis pelo WMAP 9 anos [17] e Planck [23].	40
4.1	Estimativas de $H(z)$ (em unidades de $Kms^{-1}Mpc^{-1}$ ) e suas respectivas incertezas. . . . .	48
4.2	Resumo dos parâmetros livres estudados nos modelos cosmológicos. . . . .	50
4.3	$\Delta\chi^2$ em função dos níveis de confiança em função do número de parâmetros livres ( $p$ ). . . . .	52
5.1	Melhores parâmetros cosmológicos para o modelo $\Lambda$ CDM com dados de $H(z)$ e SNIa. . . . .	54
5.2	Melhores parâmetros cosmológicos para o modelo $X$ CDM com dados de $H(z)$ e SNIa. . . . .	54
5.3	Melhores parâmetros cosmológicos para o modelo $\omega$ aCDM com dados de $H(z)$ e SNIa. . . . .	55
5.4	Melhores parâmetros cosmológicos para o modelo $O\Lambda$ CDM com dados de $H(z)$ e SNIa. . . . .	55
5.5	Melhores parâmetros cosmológicos para o modelo $OX$ CDM com dados de $H(z)$ e SNIa. . . . .	56
5.6	Melhores estimativas para os parâmetros cosmológicos dos modelos $\Lambda$ CDM, $X$ CDM e $\omega$ aCDM encontradas pelas referências [66, 67]. . . . .	56
5.7	Estimativas de $q_0$ e $z_t$ calculadas através dos melhores parâmetros cosmológicos disponíveis nas Tabelas 5.1 a 5.5 para cada modelo. . . . .	69
6.1	Melhores estimativas para os parâmetros cosmológicos de cada modelo considerando as estimativas observacionais de $H(z)$ . . . . .	72



6.2	Melhores estimativas para os parâmetros cosmológicos de cada modelo considerando as estimativas observacionais de SNIa. . . . .	72
6.3	Estimativas de $q_0$ e $z_t$ calculadas através dos melhores parâmetros cosmológicos disponíveis nas Tabelas 5.1 a 5.5 para cada modelo. . . . .	73

# Lista de Abreviações

RG = Relatividade Geral

FLRW = Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

RCF = Radiação Cósmica de Fundo

SNIa = Supernova tipo Ia

MCP = Modelo Cosmológico Padrão

WMAP = Wilkinson Microwave Anisotropy Probe

$\Lambda$ CDM = Lambda Cold Dark Matter

COBE = Cosmic Background Explorer

FIRAS = Far Infrared Absolute Spectrophotometer

CAT = Cosmic Anisotropy Telescope

BOOMERanG = Ballon Observations of Millimetric Extragalactic Radiation and Geophysics

LTB = Lemaitre-Tolman-Bondi

SNII = Supernovas tipo II

SALT = Spectral Adaptive Lightcurve Template

SCP = Supernovae Cosmology Project

HZT = High-z Supernovae Search Team

MLSC = Multicolor Light Curve Shape

BAO = Oscilações Acústicas de Bárions

CDM = Cold dark matter

HDM = Hot dark matter

CPL = Chevallier-Polarski Linder

# Capítulo 1

## Os fundamentos da Cosmologia Moderna

Neste capítulo enfatizaremos os fundamentos da Cosmologia Moderna. O estudo da dinâmica do universo é embasado no Princípio Cosmológico e na Relatividade Geral (RG), que relaciona a matéria à geometria. Mostraremos como os resultados da RG aliados à métrica Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) conduzem às equações de Friedmann que governam a expansão do universo. Finalmente, apresentaremos os parâmetros que podem ser determinados com os observáveis cosmológicos atuais.

### 1.1 O Princípio Cosmológico

O Princípio Cosmológico postula que em escalas suficientemente grandes o universo é homogêneo e isotrópico, ou seja, não existe nenhum referencial privilegiado no universo. A homogeneidade implica que o universo é o mesmo em todos os pontos. Já a isotropia indica que o universo é o mesmo em todas as direções. Obviamente, o Princípio Cosmológico não é exato. Em pequenas escalas, tais como galáxias e aglomerados, a matéria é distribuída de forma altamente irregular. Entretanto, quando olhamos em escalas cada vez maiores, a distribuição de matéria se torna mais uniforme. Os levantamentos de grande parte do céu revelam que pelo menos em escalas superiores a  $100Mpc$ , o Princípio Cosmológico é válido [1]. A evidência mais contundente é o espectro da Radiação Cósmica de Fundo (RCF) que apresenta flutuações relativas de temperatura da ordem de  $\Delta T/T \approx 10^{-5}$  [2, 3].

## 1.2 As equações de campo da Relatividade Geral e a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

As equações de campo de Einstein relacionam a distribuição de matéria-energia do universo com a geometria do espaço-tempo <sup>1</sup>,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

onde o tensor  $G_{\mu\nu}$  se relacionam com a geometria do espaço-tempo,  $T_{\mu\nu}$  é o tensor energia-momento e  $G$  a constante da gravitação universal. Assumiremos  $c = 1$ . No caso de um fluido perfeito,

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

sendo  $p$  é a pressão,  $\rho$  é a densidade,  $u_\mu$  é o quadri-vetor velocidade e  $g_{\mu\nu}$  a métrica.

Para calcular as componentes do tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$ , precisamos inicialmente determinar as componentes do tensor de Ricci, encontrar o valor para o escalar de curvatura e finalmente determinar as componentes do tensor energia-momento.

Tendo em vista o Princípio Cosmológico, consideraremos um espaço tridimensional homogêneo e isotrópico. Este espaço pode estar se expandindo ou se contraindo. A métrica mais geral que pode ser construída é a FLRW que tem a seguinte forma em coordenadas esféricas

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left( \frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right). \quad (1.3)$$

Os parâmetros  $a(t)$  e  $\kappa$  da equação 1.3 representam, respectivamente, o fator de escala do universo e a constante de curvatura, que pode descrever três situações:

- $\kappa = 0$  para um espaço com geometria euclidiana;
- $\kappa = 1$  para um espaço com geometria esférica;
- $\kappa = -1$  para um espaço com geometria hiperbólica.

Escrevendo

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.4)$$

onde  $g_{\mu\nu}$  é o tensor métrico que descreve a geometria do espaço-tempo,  $\mu$  e  $\nu = 0, 1, 2, 3$ , sendo:  $g_{\mu\nu} = 0 \forall \mu \neq \nu$  e  $g_{\mu\nu} \neq 0 \forall \mu = \nu$ . Comparando a equação 1.3 com 1.4,

---

<sup>1</sup>Para um estudo detalhado dos fundamentos da Teoria da Relatividade, consulte [4].

encontramos os coeficientes não nulos  $g_{\mu\nu}$

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = \frac{-a^2}{1 - \kappa r^2},$$

$$g_{22} = -a^2 r^2, \quad g_{33} = -a^2 r^2 \sin^2 \theta.$$

A trajetória das partículas neste espaço tempo são denominadas geodésicas e descritas pela equação

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0. \quad (1.5)$$

Os coeficientes de conexão  $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$  são denominados símbolos de Christoffel e  $s$  é um parâmetro afim ao longo das trajetórias. Para calcular estes símbolos, consideraremos a Lagrangeana

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.6)$$

As equações de Euler-Lagrange para a Lagrangeana são

$$\frac{d}{ds} \frac{dL}{dx^\mu} - \frac{dL}{dx^\mu} = 0, \quad (1.7)$$

com  $x^\mu = \{ct, r, \theta, \varphi\}$ . Substituindo a equação 1.3 em 1.6 temos,

$$L = \frac{1}{2} \left[ \dot{t}^2 - a(t)^2 \left( (1 - \kappa r^2)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right) \right]. \quad (1.8)$$

O ponto na equação 1.8 denota a derivada com respeito ao parâmetro  $u$ . Considerando:  $x^0 = ct, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \varphi$ , podemos determinar as derivadas parciais da equação 1.8, dadas por:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^0} = \dot{t},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^1} = \frac{-a^2}{(1 - \kappa r^2)^{1/2}} \dot{r},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^2} = -a^2 r^2 \dot{\theta},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^3} = -a^2 r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi},$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^0} = -a \dot{a} \left[ (1 - \kappa r^2)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right],$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^1} = -a^2 (1 - \kappa r^2)^{-2} \kappa r \dot{r}^2 - a^2 r \dot{\theta}^2 - a^2 r \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^2} = -a^2 r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi},$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^3} = 0.$$

Susbtituindo as derivadas na equação 1.7 obtemos

$$\begin{aligned}\ddot{t} + a\dot{a}[(1 - \kappa r^2)^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2] &= 0, \\ \ddot{r} + \frac{2\dot{a}}{a}\dot{r} + \kappa r(1 - \kappa r^2)^{-1}\dot{r}^2 - r(1 - \kappa r^2)\dot{\theta}^2 - r(1 - \kappa r^2) \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 &= 0, \\ \ddot{\theta} + 2a^{-1}\dot{a}\dot{\theta} + 2r^{-1}\dot{r}\dot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 &= 0, \\ \ddot{\varphi} + 2\dot{a}a^{-1}\dot{\varphi} + 2r^{-1}\dot{r}\dot{\varphi} + 2\cot g\theta\dot{\theta}\dot{\varphi} &= 0.\end{aligned}$$

Comparando os resultados acima com a equação 1.5, determinamos os coeficientes não nulos  $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^0 &= \frac{a\dot{a}}{(1 - \kappa r^2)}, & \Gamma_{22}^0 &= a\dot{a}r^2, & \Gamma_{33}^0 &= a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{01}^1 &= \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma_{11}^1 &= \frac{\kappa r}{(1 - \kappa r^2)}, & \Gamma_{22}^1 &= -r(1 - \kappa r^2), & \Gamma_{33}^1 &= -r(1 - \kappa r^2) \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{02}^2 &= \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{03}^3 &= \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{23}^3 &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta}.\end{aligned}$$

Utilizando os símbolos de Christoffel não nulos podemos calcular as componentes do tensor de Ricci, definido como

$$R_{\mu\nu} \equiv \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^\lambda - \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\delta}^\delta - \Gamma_{\mu\lambda}^\delta \Gamma_{\nu\lambda}^\lambda. \quad (1.9)$$

Assim, encontramos

$$R_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{a}, \quad (1.10)$$

$$R_{11} = \left[ \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa}{(1 - \kappa r^2)} \right], \quad (1.11)$$

$$R_{22} = r^2(2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2\kappa), \quad (1.12)$$

$$R_{33} = r^2 \sin^2 \theta (2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2\kappa), \quad (1.13)$$

$$R_{\mu\nu} = 0, \mu \neq \nu. \quad (1.14)$$

Uma vez determinadas as componentes do tensor de Ricci, obtemos o valor do escalar de curvatura  $R$ , dado por

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (1.15)$$

onde  $g^{\mu\nu}$  corresponde à matriz inversa de  $g_{\mu\nu}$ . Assim,

$$R = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33},$$

$$R = -6 \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\kappa}{a^2} \right]. \quad (1.16)$$

O tensor  $G_{\mu\nu}$  é definido como

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}. \quad (1.17)$$

Utilizando os resultados obtidos, equações 1.10 a 1.16, é possível calcular  $G_{\mu\nu}$ , equação 1.17, cujas componentes não nulas são

$$G_{00} = 3 \left[ \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\kappa}{a^2} \right], \quad (1.18)$$

$$G_{11} = - \left[ \frac{1}{1 - \kappa r^2} \right] [2\ddot{a} + \dot{a}^2 + \kappa], \quad (1.19)$$

$$G_{22} = -r^2 [2\ddot{a}a + \dot{a}^2 + \kappa], \quad (1.20)$$

$$G_{33} = -r^2 \sin^2 \theta [2\ddot{a}a + \dot{a}^2 + \kappa]. \quad (1.21)$$

A equação 1.2 define o tensor energia-momento para o fluido perfeito. No sistema de coordenadas comóveis,  $u^\mu = \delta_0^\mu$ , e conseqüentemente,

$$u_\mu = g_{\mu\nu} \delta_0^\nu = \delta_\mu^0. \quad (1.22)$$

Lembrando que:  $\delta_\mu^0 = \delta_\nu^0 = 1$  se  $\mu = \nu = 0$  e  $\delta_\mu^0 = \delta_\nu^0 = 0$  se  $\mu = \nu \neq 0$ . Assim, a equação 1.2 pode ser reescrita como

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 - p g_{\mu\nu}. \quad (1.23)$$

Utilizando os resultados de  $g_{\mu\nu}$ , determinamos as componentes não nulas de  $T_{\mu\nu}$

$$T_{00} = \rho, \quad (1.24)$$

$$T_{11} = p \left( \frac{a^2}{1 - \kappa r^2} \right), \quad (1.25)$$

$$T_{22} = p a^2 r^2, \quad (1.26)$$

$$T_{33} = p a^2 r^2 \sin^2 \theta. \quad (1.27)$$

Substituindo os resultados encontrados, equações 1.18 a 1.21 e 1.24 a 1.27, na equação 1.1 determinamos as componentes não nulas apenas para  $\mu = \nu$ . Uma vez que as componentes  $T_{22}$  e  $T_{33}$  são idênticas à componente  $T_{11}$ , temos

$$H^2 \equiv \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G \rho}{3} - \frac{\kappa}{a^2}, \quad (1.28)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-4\pi G}{3} (\rho + 3p). \quad (1.29)$$

Finalmente, as equações 1.28 e 1.29 são conhecidas como Equações de Friedmann.

Uma vez que o tensor energia-momento  $T^{\mu\nu}$  é uma matriz diagonal, a inversa é a matriz  $T_{\mu\nu}$ . As equações de Einstein levam automaticamente às leis de conservação. Neste caso,

$$T^{\mu\nu}{}_{||\mu} = 0, \quad (1.30)$$

onde o símbolo  $||$  representa a derivada covariante. Em termos dos símbolos de Christoffel, temos

$$T^{\mu\nu}{}_{|\mu} + \Gamma_{\alpha\mu}^{\mu} T^{\alpha\nu} + \Gamma_{\alpha\mu}^{\nu} T^{\mu\alpha} = 0, \quad (1.31)$$

onde a notação  $|$  corresponde à derivada ordinária. Para a componente  $\nu = 0$  e utilizando os símbolos de Christoffel determinados acima, encontramos a equação de conservação do fluido

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (1.32)$$

## 1.3 Parâmetros Cosmológicos

Os modelos cosmológicos são bem representados em termos de seus parâmetros. Nas subseções seguintes, abordaremos os parâmetros cosmológicos mais importantes para o nosso estudo <sup>2</sup>.

### 1.3.1 Parâmetro de densidade crítica

Antes de definirmos densidade crítica, vamos reescrever a equação 1.28 em termos da densidade de energia,  $\epsilon(t)$ .

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\epsilon(t) - \frac{\kappa}{a^2}. \quad (1.33)$$

Seja  $\epsilon_c$ , a densidade crítica necessária para o universo assumir geometria euclidiana ( $\kappa = 0$ )

$$\epsilon_c(t) \equiv \frac{3H(t)^2}{8\pi G}. \quad (1.34)$$

A equação 1.34 expressa o valor da densidade crítica para um dado valor de  $H(t)$ . Se o valor de  $\epsilon$  é maior que o expresso na equação 1.34, o universo é curvado positivamente, caso contrário, será curvado negativamente. Atualmente, o valor da densidade crítica é

$$\epsilon_{c,0}(t) \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \quad (1.35)$$

O sub-índice 0 se refere às atuais estimativas dos parâmetros cosmológicos.

---

<sup>2</sup>Revisões sobre o tema podem ser encontradas em alguns livros textos, como por exemplo [2, 5, 6, 7].



### 1.3.2 Parâmetro de densidade

A partir da densidade crítica, podemos determinar um parâmetro adimensional para cada componente do universo. O parâmetro de densidade para cada componente  $i$  é definido como

$$\Omega_i(t) \equiv \frac{\epsilon_i(t)}{\epsilon_c(t)}. \quad (1.36)$$

Em geral,  $\Omega_i$  é uma função do tempo, desde que  $\epsilon_i$  e  $\epsilon_c$  sejam funções do tempo. O atual valor para este parâmetro é denominado de  $\Omega_0$ . Nosso universo contém diferentes componentes e esta notação pode ser usada para identificar cada uma delas. Assim, definimos os parâmetros:  $\Omega_m$  para matéria,  $\Omega_r$  para radiação e  $\Omega_\Lambda$  para a energia escura. O parâmetro de densidade total será definido pelo somatório

$$\Omega(t) \equiv \sum \Omega_i. \quad (1.37)$$

Com esta notação, podemos reescrever a equação de Friedmann. Lembrando que  $\rho(t) = \epsilon(t)$  e substituindo o resultado encontrado em 1.36 na equação 1.33, temos

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \epsilon_c(t) \Omega(t) - \frac{\kappa}{a^2}. \quad (1.38)$$

Dividindo a equação anterior por  $H(t)^2$ , encontramos

$$\Omega(t) - 1 = \frac{\kappa}{a^2 H(t)^2}. \quad (1.39)$$

O caso em que  $\Omega = 1$  é especial, uma vez que nele,  $\kappa = 0$  e desde que  $\kappa$  é uma constante em todo tempo, a equação anterior converte-se em  $\Omega = 1$  para todo tempo.

Em particular, definimos o parâmetro  $\Omega_\kappa$  relacionado com a curvatura

$$\Omega_\kappa \equiv -\frac{\kappa}{a^2 H(t)^2}. \quad (1.40)$$

Este parâmetro pode ser positivo ou negativo e usando a equação 1.38 temos

$$\Omega(t) + \Omega_\kappa = 1. \quad (1.41)$$

### 1.3.3 Parâmetro de desaceleração

Até o final do século passado era conveniente assumir que o universo estava expandindo desaceleradamente, pois, era esperado que a atração gravitacional estivesse freando a expansão. Neste sentido é necessário definir o parâmetro de desaceleração com a finalidade de quantificar a taxa de expansão do universo.

Seja a expansão em série de Taylor de uma função  $F(x)$  dada por

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!} (x - a)^n, \quad (1.42)$$

com  $n!$ , o fatorial de  $n$  e  $f^n(a)$  denota a  $n$ -ésima derivada de  $f$  em torno de  $a$ . Expandindo o fator de escala  $a(t)$ , através da série de Taylor e mantendo os três primeiros termos, temos

$$a(t) = \frac{a^{(0)}t_0(t - t_0)}{0!} + \frac{a^{(1)}(t - t_0)}{1!} + \frac{a^{(2)}(t - t_0)^2}{2!}. \quad (1.43)$$

Dividindo a equação 1.43 por  $a(t)$ ,

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = 1 + \frac{\dot{a}}{a}(t - t_0) + \frac{1}{2} \frac{\ddot{a}}{a}(t - t_0)^2. \quad (1.44)$$

Usando a normalização  $a(t_0) = 1$ , esta expansão pode ser reescrita como

$$a(t) = 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t - t_0)^2. \quad (1.45)$$

O parâmetro  $q_0$  é denominado parâmetro de desaceleração e é definido como

$$q_0 \equiv - \left( \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \right)_{t=t_0}. \quad (1.46)$$

O sinal negativo na definição acima garantiria um valor positivo para  $q_0$  em um universo com expansão desacelerada. Em contrapartida, um valor negativo para  $q_0$  sugere expansão acelerada.

O parâmetro de desaceleração também pode ser expresso em termos do desvio espectral para o vermelho (*redshift*).

Antes de continuarmos, precisamos conceituar o *redshift*. Uma consequência do efeito Doppler aplicado às ondas eletromagnéticas é o *redshift* definido como

$$z \equiv \frac{\lambda_{ob} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}}, \quad (1.47)$$

sendo  $\lambda_{ob}$  é o comprimento de onda da luz observada na Terra e  $\lambda_{em}$  o comprimento de onda da luz emitida se o objeto estivesse em repouso. Se  $z > 0$ , esta quantidade é chamada de *redshift*, caso contrário, recebe o nome de *blueshift*. A maioria das galáxias possuem  $z > 0$ .

Seja  $H(t) = \dot{a}/a$ . Derivando, temos

$$\dot{H} = \frac{a\ddot{a} - \dot{a}^2}{a^2}. \quad (1.48)$$

Sejam as quantidades

$$a = \frac{1}{1+z}, \quad (1.49)$$

$$\dot{H} = \frac{dH}{dt} = \frac{dH}{dz} \frac{dz}{dt}, \quad (1.50)$$

$$\dot{a} = -\frac{1}{(1+z)^2} \frac{dz}{dt}. \quad (1.51)$$

Substituindo a equação 1.51 em 1.50, temos

$$\dot{H} = \dot{H}(z) [-\dot{a}(1+z)^2]. \quad (1.52)$$

Igualando as equações 1.52 e 1.48, encontramos

$$\dot{H}(z) [-\dot{a}(1+z)^2] = \frac{a\ddot{a} - \dot{a}^2}{a^2}. \quad (1.53)$$

Resolvendo a equação acima, resulta que

$$\frac{(1+z)\dot{H}(z)}{H(z)} - 1 = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}. \quad (1.54)$$

Note que o lado direito da expressão 1.54 é equivalente à expressão 1.46. Finalmente, temos

$$q_0 = \frac{(1+z)\dot{H}(z)}{H(z)} - 1, \quad (1.55)$$

sendo  $H(z)$  denominado função de Hubble.

### 1.3.4 Parâmetro da equação de estado

O parâmetro da equação de estado relaciona a pressão  $p$  com a densidade de energia  $\epsilon$  de uma componente do universo

$$\omega_i = \frac{p}{\epsilon_i}. \quad (1.56)$$

Podemos encontrar uma relação geral que relaciona o parâmetro da equação de estado, a densidade de energia e o fator de escala. Seja a equação 1.32 do fluido cósmico expressa em termos da densidade de energia

$$\dot{\epsilon}_\omega + 3\frac{\dot{a}}{a}(\epsilon_\omega + p_\omega) = 0. \quad (1.57)$$

Resolvendo esta equação temos

$$\dot{\epsilon}_\omega + 3\frac{\dot{a}}{a}\epsilon_\omega(1 + \omega) = 0. \quad (1.58)$$

A equação 1.57 pode ser reescrita como

$$\frac{d\epsilon_\omega}{dt} \frac{1}{\epsilon_\omega} = -3(1 + \omega) \frac{da}{dt} \frac{1}{a}. \quad (1.59)$$

Integrando os dois lados da equação 1.58 e supondo  $\omega$  constante, temos

$$\int \frac{d\epsilon_\omega}{\epsilon_\omega} = -3(1 + \omega) \int \frac{da}{a}, \quad (1.60)$$

$$\ln \epsilon_\omega = -3(1 + \omega) \ln a + \epsilon_{\omega,0}, \quad (1.61)$$

$$\epsilon_\omega = e^{\ln a^{-3(1+\omega)+\epsilon_{\omega,0}}}, \quad (1.62)$$

$$\epsilon_\omega = \epsilon_{\omega,0} a^{-3(1+\omega)}, \quad (1.63)$$

sendo  $\epsilon_{\omega,0}$  uma constante.

Na Cosmologia baseada da RG, podemos destacar três cenários, que correspondem ao da radiação, da matéria não-relativística e da energia escura, abaixo detalhados:

- $\omega_r = 1/3$  para a radiação o que implica em  $\epsilon_r = \epsilon_{r,0}/a^4$ ;
- $\omega_m = 0$  para a matéria não-relativística, o que implica em  $\epsilon_m = \epsilon_{m,0}/a^3$ ;
- $\omega_\Lambda = -1$  para a componente responsável pela expansão acelerada do universo no modelo  $\Lambda$ CDM <sup>3</sup>, o que implica em  $\epsilon_\Lambda = \epsilon_{\Lambda,0}$ .

---

<sup>3</sup>Ver capítulo 3.

# Capítulo 2

## A expansão acelerada do universo

Neste capítulo abordaremos inicialmente os estudos desenvolvidos por Hubble e a constatação de que o universo estava em expansão e conseqüentemente, o modelo cosmológico de Einstein foi substituído. Em seguida, abordaremos os pilares do Modelo Cosmológico Padrão destacando seus êxitos e limitações. Finalmente abordaremos as análises desenvolvidas com as Supernovas tipo Ia (SNIa), na década de 1990, e suas implicações no contexto da expansão acelerada do universo.

### 2.1 Hubble e a expansão do universo

Em 1917 Einstein propôs um modelo de universo com base na Teoria da Relatividade Geral (1915-1916) e no Princípio Cosmológico [8]. Este modelo era fundamentado na ideia, aceita na época, de que o universo era imutável. Contudo, os fundamentos da RG não permitiam tal solução, uma vez que toda matéria se atrai gravitacionalmente. Para conseguir um universo estático, Einstein inseriu uma constante corretiva em suas equações de campo para contrabalancear o efeito atrativo da gravitação. Reescrevendo a equação 1.1 em termos desta constante, temos

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

onde  $\Lambda$  é chamada de constante cosmológica e tem unidade de  $[\text{tempo}]^{-2}$ . Alguns autores incluem o termo  $c^2$  obtendo  $[\text{comprimento}]^{-2}$ .

Utilizando os resultados encontrados no Capítulo 1, as equações de Friedmann, 1.28 e

1.29, podem ser reescritas como

$$H^2 \equiv \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8G\pi\rho}{3} - \frac{\kappa}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.3)$$

Em 1929, Edwin Hubble (1889-1953) descobriu uma relação entre o *redshift* e a distância das galáxias até nós. Hubble estimou a distância de 20 galáxias. Seus resultados revelaram uma relação linear entre o redshift  $z$  e a distância  $d$ , sendo que, quanto mais distantes estavam as galáxias mais veloz era o afastamento (Figura 2.1), conhecida hoje como lei de Hubble [9]

$$z = \frac{H_0}{c}d, \quad (2.4)$$

válida para  $z \leq 1.0$ .

A descoberta de Hubble que as galáxias estavam se afastando da Via Láctea e, por consequência da homogeneidade do espaço, assumida no Princípio Cosmológico, elas se afastavam uma das outras, implicava que o universo estava em expansão. Tal constatação fez Einstein abandonar sua constante cosmológica.

A primeira estimativa de  $H_0$  foi feita pelo Hubble que encontrou  $H_0 = 500$  Km/s Mpc [9]. Desde então, as medidas de  $H_0$  foram sensivelmente melhoradas. Os autores da Ref. [10] determinaram  $h = 0.738 \pm 0.024$ , já os autores da Ref. [11] encontraram  $h = 0.62 \pm 0.013$ , onde  $h$  é uma parametrização da constante de Hubble e  $H_0 = 100h$  Km/s/Mpc. Ambos os autores utilizaram cefeidas e supernovas tipo Ia para estimar o valor de  $H_0$ .

A constante de Hubble é um parâmetro importante para várias aplicações em Cosmologia, tais como:

- calcular a idade do universo;
- determinar o tamanho do universo observável;
- estimar a densidade crítica do universo.

## 2.2 O Modelo Cosmológico Padrão (MCP)

O modelo que está na base do atual MCP foi proposto em meados de 1927, sendo finalmente aceito por volta de 1965. Segundo ele, o universo se originou de um estado de

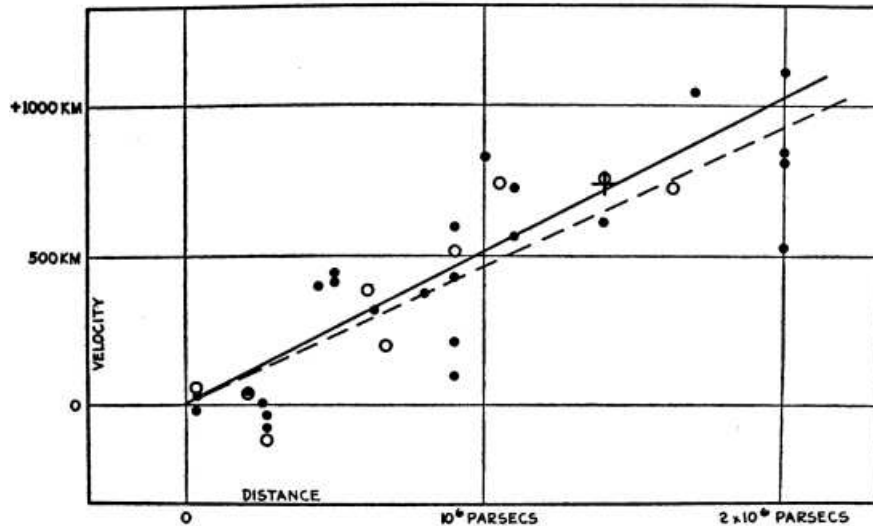


Figura 2.1: Diagrama apresentado por Hubble (1929). Na escala, o eixo horizontal indica a distância das galáxias e o eixo vertical, a velocidade [9]. Observa-se o erro acidental cometido por Hubble: na figura aparece  $Km$ , sendo que o correto é  $Km/s$  para a unidade de velocidade.

densidade e temperaturas elevadas,  $T \approx 10^{15} K$  e  $\rho \approx 10^{25} g/cm^3$  (Ver [12] e referências nele contidas), em um volume relativamente pequeno. O modelo está assentado em três pilares: o Princípio Cosmológico (ver sessão 1.1), a Teoria da Relatividade Geral e a hipótese de que o conteúdo do universo pode ser bem descrito por um fluido perfeito. Atualmente, este modelo é bem corroborado por dados observacionais dos quais enfatizaremos nas subseções seguintes: a Nucleossíntese Primordial e a Radiação Cós mica de Fundo.

### 2.2.1 A Nucleossíntese Primordial

O conjunto de reações termonucleares que ocorreram no universo primordial e que foram responsáveis pela formação dos elementos leves é denominado de Nucleossíntese Primordial. Gamov foi o primeiro a descrever o universo primordial. Ele supôs que a temperatura do universo primordial era elevada o suficiente para conter toda matéria decomposta em sua forma elementar [13]. Assim, ele considerou que o universo era inicialmente preenchido por prótons, nêutrons, elétrons, pósitrons, fótons e neutrinos. A síntese dos elementos leves depende da relação entre a temperatura, a taxa de expansão e a taxa das reações fraca e nuclear. As reações regidas pela interação fraca determinam a interconversão entre nêutrons e prótons que por sua vez, determina a quantidade de  $^4He$  sintetizada. As reações nucleares, por sua vez, determinam a relação entre a quantidade

de bárions e a quantidade de fótons (a razão bárion-fóton  $\eta$ ) e o número de neutrinos  $N_\nu$ .

A nucleossíntese primordial <sup>1</sup> ocorreu, aproximadamente, entre os instantes  $t \approx 0.01s$  e  $t \approx 100s$ , quando a temperatura do universo variou de  $T \approx 10MeV$  para  $T \approx 0.1MeV$ . Neste período foram sintetizados elementos leves, tais como: deutério ( $^2H$ ), hélio-3 ( $^3He$ ), hélio ( $^4He$ ) e lítio ( $^7Li$ ). Com a diminuição da temperatura devida à expansão do universo, a pressão dos elementos bariônicos foi insuficiente para continuar a fusão nuclear no plasma primordial cessando a síntese dos elementos leves. Assim, as frações dos elementos leves observadas hoje devem ser condizentes com a nucleossíntese primordial. Os elementos mais pesados foram sintetizados posteriormente através das reações nucleares no interior das estrelas [16]. Segundo as previsões da nucleossíntese, a parte bariônica do universo é constituída por cerca de 75% de hidrogênio ( $^1H$ ), 25% de hélio ( $He$ ) e menos de 1% de outros elementos.

A estimativa da abundância dos elementos leves constitui um importante teste para os modelos cosmológicos. As análises dos dados obtidos pelo Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) permitiram realizar previsões acerca da nucleossíntese. De acordo com o WMAP 9 anos, a abundância primordial do hélio era  $Y_{He} = 0.308_{0.031}^{0.032}$  com 68% de confiança e a massa total dos neutrinos  $m_\nu < 0.44eV$  com 95% de confiança [17].

A análise da abundância dos elementos depende da razão bárion-fóton  $\eta = [2 - 6]10^{-10}$  e do número efetivo de espécies de neutrinos  $N_\nu = 3.26 \pm 0.35$  com 95% de confiança [17]. Com o auxílio da temperatura da Radiação Cósmica de Fundo <sup>2</sup> é possível estimar a densidade da matéria bariônica ( $\Omega_b$ ) no universo. De acordo com o WMAP 9 anos:  $\Omega_b = 0.0463 \pm 0.0024$  para o modelo Lambda Cold Dark Matter ( $\Lambda$ CDM) [17].

A teoria da nucleossíntese está de acordo com os valores encontrados para  $N_\nu$  em aceleradores  $N_\nu = 3.00 \pm 0.02$  [18]. Além disso, seus resultados podem ser empregados para vincular outros parâmetros cosmológicos.

## 2.2.2 A Radiação Cósmica de Fundo

A Radiação Cósmica de Fundo (RCF) pode ser explicada considerando que o universo apresentava um estado primordial denso e quente. Neste sentido, a radiação interagiu constantemente com os elétrons e o universo era opaco, uma vez que o caminho livre médio era pequeno. Contudo, a medida que o universo se expandia, ele esfriava. Assim,

---

<sup>1</sup>Outras informações sobre a nucleossíntese primordial podem ser encontradas em [14, 15].

<sup>2</sup>Ver subseção 2.2.2.



quando a temperatura atingiu  $T \approx 3000K$  [6], os íons e os elétrons se combinaram formando átomos neutros. Quando o universo atingiu um número significativo de elétrons livres, a radiação de fundo começou a percorrer livremente o universo sem interagir mais com os elétrons. Esta época é conhecida como *Recombinação*, quando o universo ficou transparente à radiação. Gamov estimou a temperatura da RCF como sendo de  $T \approx 5K$  [13]. A diminuição da temperatura desta radiação é uma consequência direta da expansão do universo <sup>3</sup>.

A RCF foi observada pela primeira vez em 1965 por Penzias e Wilson como sendo um sinal de fundo que não possuía uma direção privilegiada [19]. A interpretação cosmológica foi dada por Dick e colaboradores que reconheceram este sinal como sendo a RCF prevista por Gamov [20]. As condições de equilíbrio termodinâmico do universo primordial imprimiram o espectro de corpo negro à RCF.

Desde sua detecção, vários satélites foram lançados com o objetivo de conhecer as propriedades da RCF. O primeiro deles foi o Cosmic Background Explorer (COBE), lançado em 1989. A bordo do COBE estava o detector Far Infrared Absolute Spectrophotometer (FIRAS) que confirmou que a RCF tinha um acurado espectro de corpo negro (ver Figura 2.2) estimando a temperatura em  $(2.735 \pm 0.06K)$  [21].

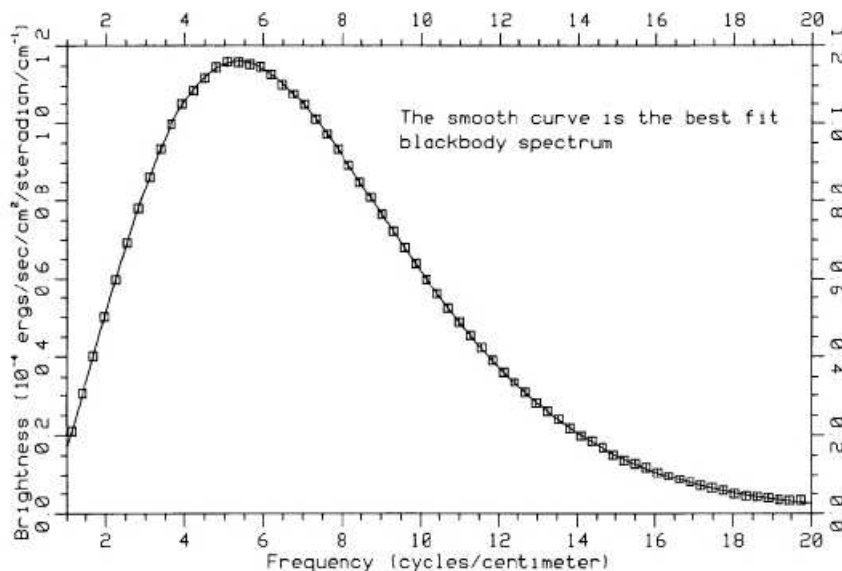


Figura 2.2: Espectro da RCF obtido pelo FIRAS [21]

Depois do COBE outros instrumentos foram construídos para estudar as propriedades

---

<sup>3</sup>Para cálculos detalhados, consulte por exemplo [6].

da RCF, dentre os quais destacamos <sup>4</sup>:

- Cosmic Anisotropy Telescope (CAT), 1994 - 1997: foi o primeiro interferômetro construído para medir as anisotropias da RCF.
- Balloon Observations of Millimetric Extragalactic Radiation and Geophysics (BOOMERanG), 1997-2003: um instrumento lançado a bordo de um balão com o objetivo de mapear a RCF. O primeiro voo mediu as anisotropias da RCF e o segundo mediu a temperatura e polarização.
- WMAP, 2001 - 2012: é uma missão de exploração da NASA com o objetivo de fazer o mapeamento do céu. Os primeiros resultados foram publicados em 2003 com atualizações em 2007, 2009 e 2011 <sup>5</sup>. Os resultados finais do WMAP 9 anos foram publicados em 2012 [17].
- Planck, 2009 - 2013: foi projetado pela Agência Espacial Européia com o objetivo de estudar o universo primordial. Em março de 2013 foram publicados os resultados atualizados desta missão [23].

## 2.3 Supernovas e a expansão acelerada do universo

O MCP passa por alguns testes observacionais, mas apresenta alguns problemas <sup>6</sup>. Uma das principais questões é a atual fase de aceleração cósmica. Em 1998, as observações com SNIa indicaram que o universo se encontra em uma fase de expansão acelerada [24, 25]. As evidências revelaram também que a expansão começou desacelerada e passou recentemente por uma transição para a fase acelerada. Este resultado é passível de interpretações, tais como:

- a Relatividade Geral não se aplica às escalas cosmológicas. Atualmente existem diversas teorias alternativas de gravidade  $f(R)$ . Estas teorias surgem quando substituímos o escalar de curvatura de Ricci  $R$  por qualquer função  $f(R)$  não-linear (ver, por exemplo, [26]).

---

<sup>4</sup>Para revisões completas, consulte [12].

<sup>5</sup>Revisões sobre as missões do WMAP podem ser encontradas em [22] e referências nele contidas.

<sup>6</sup>Estudos detalhados do MCP são encontrados em [2, 3, 5, 6, 7]

- validade restrita do Princípio Cosmológico. Neste caso, o universo é regido pela métrica Lemaître-Tolman-Bondi (LTB) que descreve uma região centrada no observador em expansão radial não homogênea (ver, por exemplo, [27]).
- a existência de outra componente, a energia escura, responsável pela expansão acelerada (ver por exemplo, [28]).

Nesta dissertação abordaremos alguns modelos cosmológicos baseados na energia escura como explicação para a aceleração cósmica. Nas subseções seguintes faremos um estudo das supernovas. Abordaremos os aspectos astrofísicos que as tornam excelentes candidatas a velas padrão e suas implicações cosmológicas.

### 2.3.1 Supernovas

As supernovas são eventos explosivos. Elas liberam no momento da explosão uma energia da ordem de  $10^{50}$  ergs, podendo atingir no pico de luminosidade valores equivalentes a  $10^{10} L_{Sol}$  [15], que corresponde a uma fração significativa da luminosidade total de uma galáxia.

A classificação das supernovas foi inicialmente feita com base na presença (supernovas tipo II) ou ausência (supernovas tipo I) de linhas de emissão de hidrogênio no seu espectro. As supernovas tipo II (SNII), SNIb e SNIc são encontradas em galáxias espirais e irregulares. Estas supernovas são estágios finais de evolução de estrelas supermassivas ( $\geq 8M_{Sol}$ ) que sofreram colapso gravitacional. As SNIa serão discutidas na próxima seção. A classificação das supernovas em subtipos é baseada na análise das propriedades físicas e químicas disponíveis no seu espectro <sup>7</sup>, conforme ilustra a Figura 2.3.

Antes de continuarmos precisamos conceituar distância de luminosidade. A distância de luminosidade,  $d_l$ , relaciona a luminosidade  $L$  definida como a energia emitida pela fonte por unidade de tempo e o fluxo  $F$  medido em nosso detector (energia emitida pela fonte por unidade de tempo por unidade de área).

O estudo da luminosidade das estrelas leva ao sistema de medir suas magnitudes. O sistema de magnitudes se originou na Grécia Antiga, onde as estrelas eram classificadas de acordo com seu brilho aparente. Este sistema de magnitudes é utilizado até hoje. Nele, a magnitude aparente bolométrica  $m$  <sup>8</sup> é definida com base em uma estrela referência.

---

<sup>7</sup>Estudo detalhado sobre as supernovas pode ser encontrado em [29] e referências nela contidas.

<sup>8</sup>Se integrarmos o fluxo de uma estrela em cada comprimento de onda ou frequência, teremos o fluxo

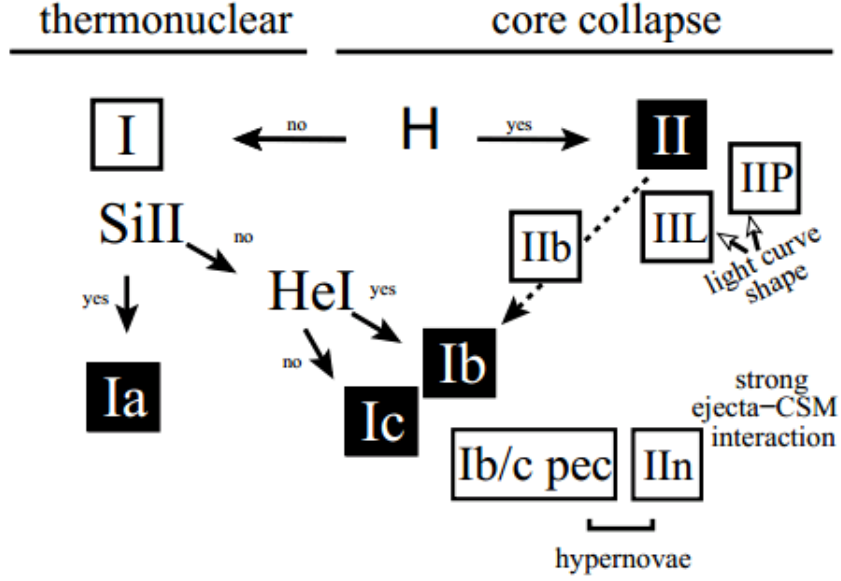


Figura 2.3: Esquema de classificação das supernovas [30]. As duas principais classes de supernovas são caracterizadas com base na ausência (Supernovas tipo I) ou presença (Supernovas tipo II) de linhas de hidrogênio no seu espectro. Em seguida, as supernovas de uma mesma classe são subdivididas com base na presença ou ausência de outros elementos no seu espectro.

Atualmente adotamos a estrela Vega como referência tendo magnitude aparente nula. As estrelas mais brilhantes que Vega tem magnitude aparente negativa e uma estrela menos brilhante tem magnitude aparente positiva. Esta definição é expressa como

$$m \equiv -2.5 \log_{10} \frac{F}{F_{\alpha}}, \quad (2.5)$$

onde  $F$  e  $F_{\alpha}$  representam o fluxo da fonte e da estrela referência, respectivamente.

Utilizaremos também a magnitude absoluta  $M$  de uma estrela que é definida como a magnitude que a fonte apresenta quando se encontra a uma distância padrão de  $10pc$  e a *redshift* igual a 0. Neste caso,

$$F_{10} = \frac{L}{4\pi(10pc)^2}. \quad (2.6)$$

O fluxo  $F(d_l)$  observado à distância  $d_l$  está relacionado com o fluxo  $F(10pc)$  à distância de  $10pc$  por

$$F_{10} = F \left( \frac{d_l}{10pc} \right)^2. \quad (2.7)$$

---

total que também é chamado fluxo bolométrico. A magnitude correspondente a esse fluxo integrado é conhecida como magnitude bolométrica.

Substituindo a equação 2.8 em 2.6, temos

$$M = m - 5\log_{10} \left( \frac{d_l}{10pc} \right). \quad (2.8)$$

Usualmente, podemos reescrever o resultado da equação 2.9 na forma

$$m = 5\log_{10} \left( \frac{d_l}{cH_0^{-1}} \right) + 5\log_{10} \left( \frac{cH_0^{-1}}{1pc} \right) - 5 + M, \quad (2.9)$$

$$m = 5\log_{10}d_l + A, \quad (2.10)$$

sendo  $d_l$  definido como

$$d_l \equiv (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (2.11)$$

A quantidade  $A$  é definida como

$$A \equiv 42.38 - 5\log_{10}h. \quad (2.12)$$

Finalmente, definimos a quantidade  $\mu \equiv M - m$ , denominada módulo de distância, expressa por

$$\mu = 5\log_{10}d_l + 42.38 - 5\log_{10}h. \quad (2.13)$$

### 2.3.2 Supernovas tipo Ia e suas implicações cosmológicas

As Supernovas tipo Ia (SNIa) são encontradas em praticamente todos os tipos de galáxias. Seu espectro é caracterizado pelas linhas de emissão dos elementos: cálcio, silício e enxofre durante a fase de pico de luminosidade e ausência das linhas de hidrogênio, uma vez que, esgotaram toda a reserva desse elemento ao longo de sua evolução. O modelo mais aceito para explicar a explosão das SNIa sugere um sistema binário composto por uma anã branca que recebe matéria da estrela parceira. Esta transferência ocorre até o instante em que a anã branca alcança o limite de massa de Chandrasekhar <sup>9</sup>.

Uma vez que as condições iniciais são bem homogêneas para esta classe de supernovas, elas podem ser boas candidatas a velas padrão. As SNIa apresentam alta luminosidade, podendo ser detectadas a grandes distâncias (Mpc) e com dispersões de luminosidade da ordem de  $\sigma = 0.4 - 0.5$  mag na banda B [2]. Esta classe de supernovas se tornou bastante popular nas últimas décadas devido ao seu amplo uso como velas padrão para a

---

<sup>9</sup>O limite de Chandrasekhar representa a máxima massa possível para uma estrela do tipo anã branca suportada pela pressão interna. Se uma anã branca exceder esta massa por agregação, entrará em colapso, devido ao efeito da gravidade.

Cosmologia, uma vez que com elas pode-se inferir distâncias em escalas cosmológicas. Em meados de 1977, Pskovskii [31] estudou a relação entre o brilho máximo e o decaimento da curva de luz das supernovas. Estudos posteriores confirmaram que a variação estava correlacionada com o tempo de crescimento e declínio da curva de luz das supernovas (ver Figura 2.4): quanto mais lento o declínio, maior a luminosidade absoluta [32]. Esta relação pode ser entendida no contexto do modelo da explosão de uma anã branca, pois a quantidade total de  $^{56}\text{Ni}$  produzido é proporcional à luminosidade máxima da supernova. Assim, quanto mais  $\text{Ni}$  for produzido, maior será a luminosidade da SNIa que também brilhará por mais tempo.

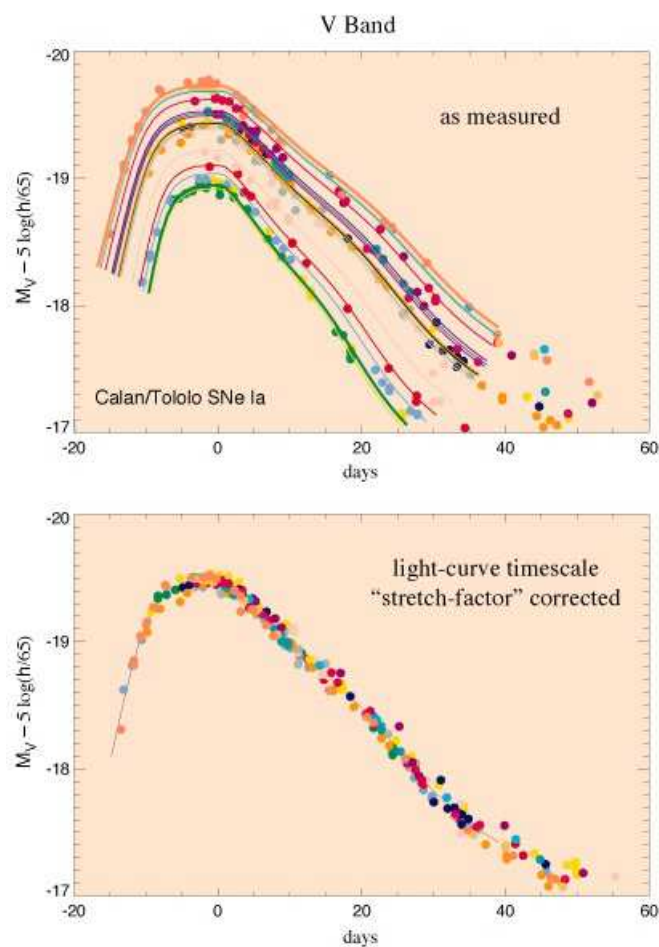


Figura 2.4: Relação entre o pico de emissão de luminosidade com o decaimento da curva de luz para supernovas próximas. O painel superior apresenta a curva de luz aproximadamente 50 dias após o pico de emissão das supernovas. O painel inferior apresenta a curva de luz do mesmo conjunto de supernovas depois do ajuste [33].

O estudo com supernovas foi desenvolvido por dois grandes grupos: o *The Supernovae Cosmology Project* (SCP) entre os anos de 1980 e 1990 e o *High-z Supernova Search Team* (HZT), fundado em 1994. O SCP analisou a luminosidade em função do redshift para 42 SNIa no intervalo  $0.10 < z < 0.83$  [25, 34]. Este resultado foi somado a um conjunto de 18 supernovas em baixos redshifts  $z < 0.1$  [35] para a construção do diagrama de Hubble conforme ilustra Figura 2.5. O melhor ajuste encontrado pelo SCP para a densidade de matéria foi  $\Omega_m = 0.25 \pm 0.36$  para um universo plano favorecendo o modelo  $\Lambda$ CDM e  $\Omega_m = -0.4 \pm 0.15$  para  $\Omega_\Lambda = 0$  [25].

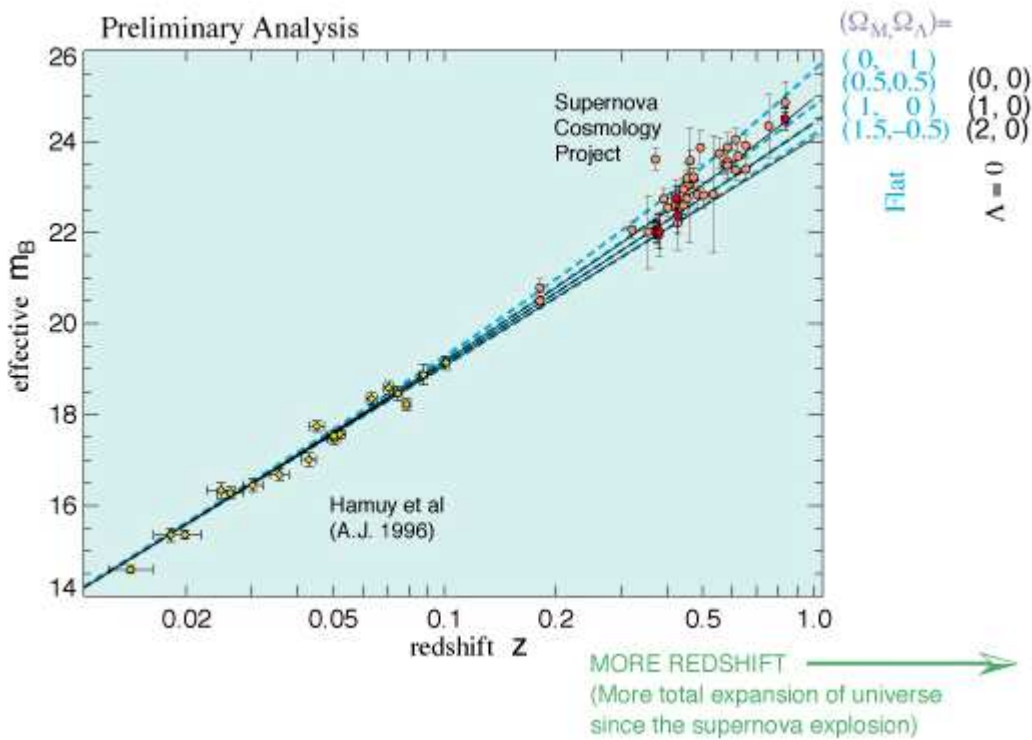


Figura 2.5: Diagrama de Hubble com dados de SNIa do grupo SCP. Assumindo  $\Omega_\kappa = 0$ , as quatro curvas tracejadas representam ajustes para diferentes valores de  $\Omega_m$  (listados a direita). As três curvas sólidas representam modelos com  $\Lambda = 0$  e diferentes valores para  $\Omega_m$  listados à direita. Fonte: <http://www-supernova.lbl.gov>.

O grupo HZT estudou 42 SNIa em altos redshift  $0.16 < z < 0.97$  determinando as distâncias de luminosidade por dois métodos de ajustes da curva de luz: o Template-fitting method  $\Delta m_{15}B$ <sup>10</sup> [36] e o The Multicolor Light Curve Shape Method (MLSC)<sup>11</sup> [37]. Os resultados revelaram que as supernovas em redshifts  $z < 1.0$  se ajustam melhor ao modelo cosmológico com  $\Omega_m = 0.24$  e  $\Omega_\Lambda = 0.76$  [24] conforme ilustra a Figura 2.6.

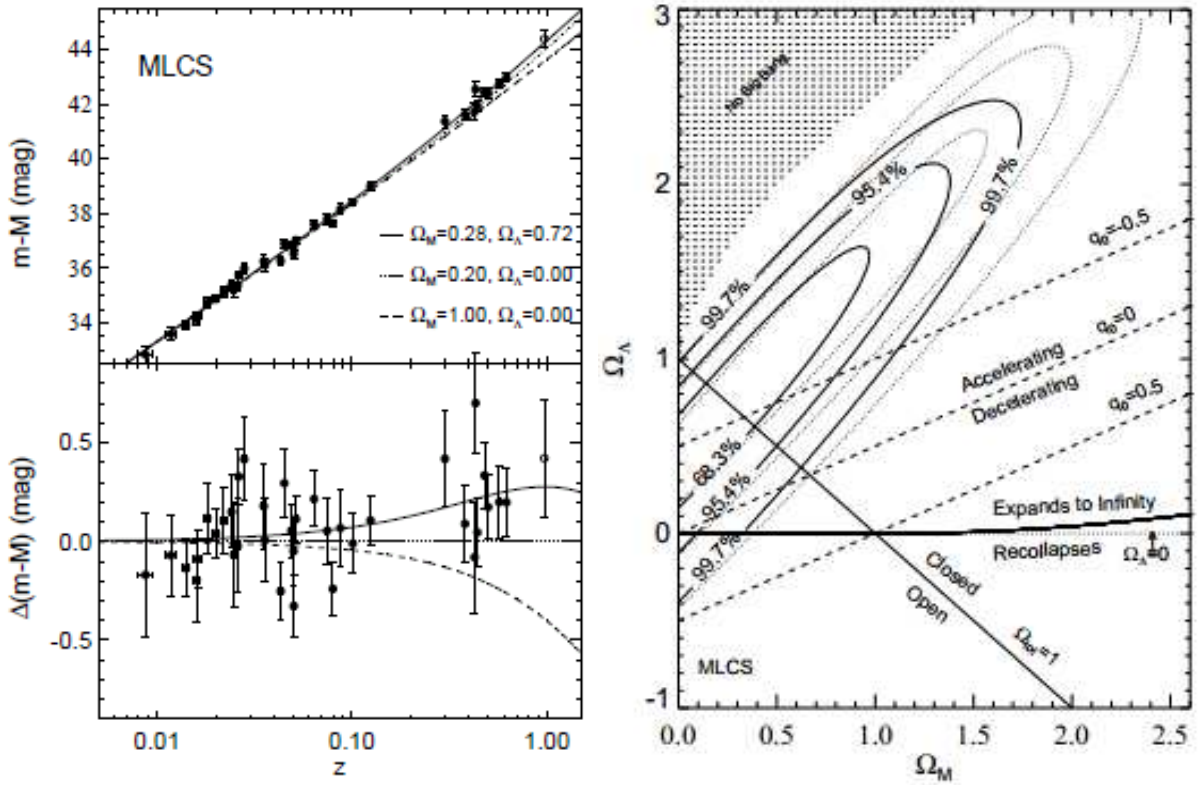


Figura 2.6: No painel superior à esquerda é apresentado o diagrama de Hubble com supernovas em alto e baixo redshifts medidas através do método MLCS obtido pelo grupo HZT. No painel inferior é apresentado a diferença entre os dados e o modelo com  $\Omega_m = 0.20$  e  $\Omega_\Lambda = 0$ . A direita estão representadas as regiões de  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  e  $3\sigma$  de confiança para  $\Omega_m$  e  $\Omega_\Lambda$  [24].

<sup>10</sup>O método utiliza uma relação linear entre a luminosidade e taxa de declínio  $\Delta m_{15}(B)$  das supernovas. A quantidade  $\Delta m_{15}(B)$  corresponde à variação em magnitudes na banda B após um período de 15 dias.

<sup>11</sup>Este método utiliza a forma da curva de luz das supernovas para reduzir os efeitos da extinção interestelar.



Os autores também estimaram o parâmetro de desaceleração ( $q_0$ ) admitindo que o universo é composto pelas componentes  $\Omega_m$  e  $\Omega_\Lambda$ . Seja o parâmetro de desaceleração definido na equação 1.42 e o parâmetro de Hubble medido hoje igual a

$$H_0 = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.14)$$

Manipulando a equação 1.42 e utilizando a equação 2.15, o parâmetro de desaceleração pode ser reescrito como

$$q_0 = -\frac{\ddot{a}}{aH_0^2}, \quad (2.15)$$

sendo  $\ddot{a}$ , a aceleração cósmica definida na equação 1.29. Lembrando que  $p = \omega\epsilon$ , a equação 1.29 pode ser reescrita como

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\epsilon + 3\omega\epsilon) \Rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} \sum_{\omega} \epsilon_{\omega}(1 + 3\omega), \quad (2.16)$$

onde  $\epsilon_{\omega}$  representa a densidade de energia da componente com equação de estado  $\omega$ . Multiplicando ambos os lados da equação 2.17 por  $-1/H_0^2$ , temos

$$\frac{-\ddot{a}}{aH_0^2} = +\frac{4\pi G}{3c^2H_0^2} \sum_{\omega} \epsilon_{\omega}(1 + 3\omega). \quad (2.17)$$

Lembrando que o parâmetro de densidade de uma componente do universo é dado por

$$\Omega_{\omega} \equiv \frac{\epsilon_{\omega}}{\epsilon_c}, \quad (2.18)$$

com  $\Omega_{\omega}$  correspondente ao parâmetro de densidade da componente com equação de estado  $\omega$  e  $\epsilon_c \equiv 3c^2H_0^2/8\pi G$  corresponde à densidade crítica. Substituindo 2.19 em 2.18, temos

$$\frac{-\ddot{a}}{aH_0^2} = -\frac{1}{2} \sum \Omega_{\omega}(1 + 3\omega). \quad (2.19)$$

O lado esquerdo da equação 2.20 é equivalente a  $q_0$ . Admitindo que o universo é composto por matéria ( $\Omega_m$ ) com  $\omega = 0$  e constante cosmológica ( $\Omega_\Lambda$ ) com  $\omega = -1$ , a equação 2.20 pode ser reescrita em termos das duas componentes

$$q_0 = \frac{1}{2}\Omega_m - \Omega_\Lambda. \quad (2.20)$$

Descartando a possibilidade de uma densidade de matéria negativa, a aceleração cósmica ocorre se

$$\Omega_\Lambda > \frac{\Omega_m}{2}. \quad (2.21)$$

Os autores da Ref. [24] encontraram  $q_0 = -1.0 \pm 0.4$ , confirmando a aceleração cósmica.

Este resultado vem sendo corroborado através de outros observáveis cosmológicos, tais como: RCF [38], Oscilações Acústicas de Bárions (BAO) [39] e recentes catálogos de SNIa [40]<sup>12</sup>. Admitindo um universo homogêneo e isotrópico e assumindo a validade da RG em escalas cosmológicas, precisamos da existência de uma energia escura para balancear a atração gravitacional, permitindo a expansão acelerada do universo. Os modelos cosmológicos de energia escura serão analisados no próximo capítulo.

---

<sup>12</sup>Para uma revisão geral das evidências da aceleração cósmica, consulte, por exemplo, [41].

# Capítulo 3

## Os Modelos Cosmológicos de energia escura

Neste capítulo faremos uma análise de alguns modelos cosmológicos fundamentados na energia escura. Apresentaremos o principal modelo para descrever a aceleração cósmica baseado na Relatividade Geral, o *modelo Lambda Cold Dark Matter*  $\Lambda$ CDM juntamente com alguns modelos concorrentes:  $X$ CDM e  $\omega$ aCDM.

### 3.1 As componentes do universo

Nesta sessão discutiremos os parâmetros cosmológicos do modelo  $\Lambda$ CDM, utilizando os resultados disponíveis no WMAP 9 anos juntamente com os resultados obtidos através da missão Planck<sup>1</sup>.

Os seis parâmetros básicos do modelo  $\Lambda$ CDM são:

- a densidade da matéria bariônica ( $\Omega_b h^2$ );
- a densidade da matéria escura fria ( $\Omega_c h^2$ );
- a densidade de energia escura ( $\Omega_\Lambda$ );
- a amplitude das perturbações primordiais do escalar de curvatura ( $\Delta_R^2$ );
- o índice espectral da lei de potência da densidade das perturbações primordiais ( $\eta_s$ );

---

<sup>1</sup>Detalhes das missões juntamente com os trabalhos produzidos podem ser encontrados em: <http://lambda.gsfc.nasa.gov/>.

- e a reionização da profundidade óptica ( $\tau$ ).

Destes parâmetros, podemos determinar:

- a idade do universo ( $t_0$ );
- o parâmetro de Hubble ( $H_0$ );
- a densidade de bárions ( $\Omega_b$ );
- a densidade de matéria escura fria ( $\Omega_c$ );
- o redshift da equipartição matéria-radiação ( $z_{eq}$ );
- o redshift da reionização ( $z_{reion}$ ).

Os parâmetros cosmológicos de interesse nesta dissertação para o modelo  $\Lambda$ CDM utilizando os resultados do WMAP 9 anos e do Planck estão dispostos na Tabela 3.1.

Parâmetro cosmológico	WMAP 9 anos	Planck	Diferença
$\Omega_b h^2$	$0.02264 \pm 0.00050$	$0.02217 \pm 0.00033$	$-0.00047$
$\Omega_c h^2$	$0.1138 \pm 0.0045$	$0.1186 \pm 0.0031$	$0.0048$
$\Omega_\Lambda$	$0.721 \pm 0.025$	$0.693 \pm 0.19$	$-0.028$
$H_0 Kms^{-1} Mpc^{-1}$	$70 \pm 2.2$	$67.9 \pm 1.5$	$-2.1$
$t_0$ Ganos	$13.74 \pm 0.11$	$13.796 \pm 0.058$	56Mano

Tabela 3.1: Melhores estimativas para os parâmetros cosmológicos do modelo  $\Lambda$ CDM utilizando os resultados disponíveis pelo WMAP 9 anos [17] e Planck [23].

### 3.1.1 A matéria escura

O parâmetro de densidade de matéria hoje,  $\Omega_{m,0}$ , compreende a contribuição da matéria bariônica e da matéria escura e influencia na determinação de parâmetros cosmológicos, tais como o parâmetro de Hubble e a aceleração do universo. A maior parte da densidade de matéria no universo é constituída pela matéria escura que não interage eletromagneticamente. A detecção desta componente é feita de forma indireta analisando sua influência gravitacional sobre a matéria bariônica [42, 43, 44].

A primeira indicação da matéria escura foi proposta por Zwicky na década de 30 ao analisar a dinâmica do aglomerado de Coma através da medida da velocidade de dispersão

das galáxias [45]. Supondo o aglomerado em equilíbrio dinâmico, Zwicky aplicou o teorema do virial para determinar a sua massa e concluiu que ele só poderia estar gravitacionalmente interagindo se sua massa total excedesse a soma das massas das galáxias que o compunha. Estudos posteriores desenvolvidos por Smith para o aglomerado de Virgo [46] confirmaram a proposta de Zwicky.

O estudo do comportamento das curvas de rotação das galáxias espirais também fornece evidências da matéria escura. As curvas de rotação são obtidas através das medidas da velocidade circular orbital  $v(r)$  em função do raio galáctico. Na década de 70, Rubin e Ford Jr. mediram a curva de rotação da galáxia Andrômeda (M31) [47]. Uma vez que acreditava-se que a maior parte da massa da galáxia estivesse concentrada na região da matéria luminosa, o comportamento da curva deveria ser kepleriano para médios e grandes raios. Enquanto que para pequenas distâncias do centro galáctico, o comportamento da curva de rotação foi confirmado, a medida que o raio aumentava a curva de rotação não seguia a lei kepleriana permanecendo praticamente constante, indicando a existência de uma outra componente dominante formando um halo de matéria escura. Este comportamento foi evidenciado em outras galáxias. Como exemplo, mostramos a curva de rotação esperada para a galáxia espiral NGC 3198 (Figura 3.1). A curva representada pelo termo *disk* descreve a velocidade de rotação da galáxia admitindo a existência apenas da matéria bariônica. Note que, para a curva teórica ser compatível com a curva esperada para a referida galáxia é preciso assumir a existência de uma componente não bariônica no halo (representada pelo termo *halo*).

Para galáxias elípticas a detecção da matéria escura como constituinte para a massa total é mais complicada, porque as órbitas das estrelas são mais complexas que em galáxias espirais. Contudo, evidências com medidas feitas a partir da emissão de raios-X revelam que a massa dos aglomerados destas galáxias também é dominada pela matéria escura [2].

Outro ponto relevante é saber se a matéria escura é fria ou quente, de onde surgem as denominações *cold dark matter* - CDM (matéria escura fria) constituída por partículas não relativísticas e *hot dark matter* - HDM (matéria escura quente) constituída por partículas relativísticas. A principal diferença entre os modelos com HDM e CDM está relacionada com a formação e evolução das estruturas. Os modelos com HDM apagam as flutuações de pequenas escalas na época da formação das estruturas. Neste contexto, as estruturas em grande escala foram formadas primeiro, enquanto que as galáxias foram formadas posteriormente através da fragmentação destas estruturas. Contudo, este cenário é con-

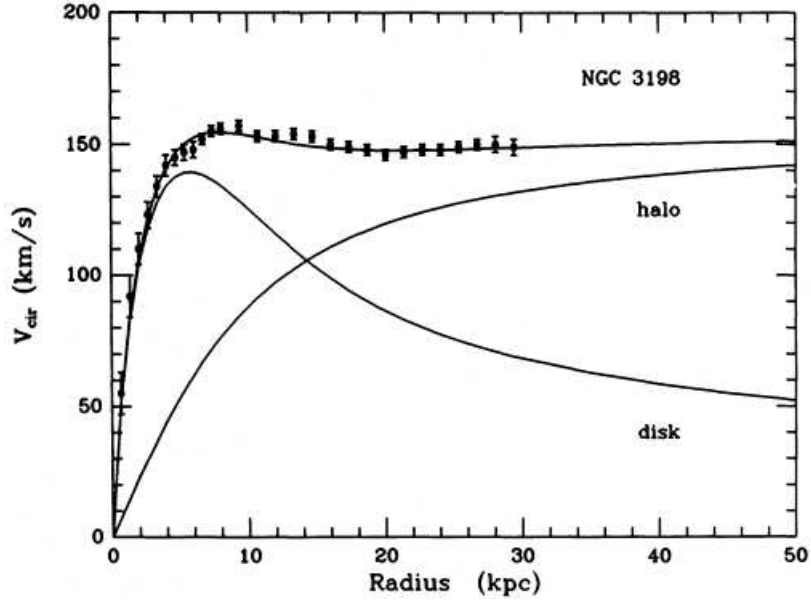


Figura 3.1: Curva de rotação da galáxia NGC3198 [48]. Os pontos representam as medidas da velocidade orbital em função do raio galáctico. As curvas representam as contribuições da velocidade devido ao disco e ao halo. O comportamento não kleperiano para médios e grandes raios é explicado pela hipótese da existência do halo escuro.

traditório com as observações. Por exemplo, se observarmos uma galáxia e o quasar QSOs em redshift  $z \approx 6$ , concluímos que a estrutura em pequena escala surgiu quando o universo tinha menos de 10% de sua idade atual. Portanto, a HDM é excluída como a componente dominante da matéria escura. Em contrapartida, a matéria escura fria consegue se acumular em pequenas escalas formando as estruturas de forma hierárquica estando de acordo com as observações [49, 50].

### 3.1.2 A energia escura

Atualmente, a energia escura é considerada a componente responsável pela aceleração cósmica. Além das evidências com supernovas (ver Capítulo 2), outras observações levam a inferir sua existência, entre as quais destacamos: o espectro de potência das anisotropias da RCF, BAO, observações em raios X de aglomerados de galáxias e rádio galáxias <sup>2</sup>.

Esta componente apresenta algumas propriedades [28]:

- Não emite radiação eletromagnética;
- Apresenta ao que parece, pressão negativa ( $\omega \equiv p/\rho \leq -1/3$ );

<sup>2</sup>Para revisão das evidências da energia escura consulte [51] e referências nele contidas.

- Representa cerca de 2/3 da densidade total do universo;
- É homogênea e não se manifesta nas escalas dos aglomerados de galáxias.

Nas seções seguintes apresentaremos alguns modelos baseados na energia escura.

## 3.2 O Modelo de Concordância Cósmica $\Lambda$ CDM

O modelo Lambda Cold Dark Matter ( $\Lambda$ CDM) é considerado o atual paradigma da Cosmologia. Ele fornece um bom ajuste para as principais observações astronômicas como a estimativa da distância de luminosidade de SNIa, RCF e BAO <sup>3</sup>.

O modelo  $\Lambda$ CDM considera o universo homogêneo e isotrópico, constituído basicamente por matéria escura fria, matéria bariônica, fótons, neutrinos e energia escura sob a forma da constante cosmológica, com parâmetro de equação de estado  $\omega = -1$ .

Utilizando os resultados do Capítulo 1: o valor da densidade crítica hoje ( $\epsilon_{c,0}$ ), equação 1.35, o parâmetro de densidade ( $\Omega_i$ ) de cada componente do universo, equação 1.36, juntamente com o parâmetro de densidade total e a densidade de cada componente do universo em termos do parâmetro  $\omega$ , equações 1.39 e 1.61, respectivamente, podemos reescrever a equação de Friedmann, equação 1.37, como

$$H^2 = H_0^2 \left( \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \Omega_\Lambda \right) - \frac{\kappa}{a^2}. \quad (3.1)$$

Utilizando as equações 1.40 que define o parâmetro  $\Omega_\kappa$  e 1.48 que relaciona o fator de escala ( $a$ ) com o redshift ( $z$ ), temos

$$H^2 = H_0^2 \left[ \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{\kappa,0}(1+z)^2 \right], \quad (3.2)$$

com parâmetros livres:  $\Omega_{r,0}$ ,  $\Omega_{\kappa,0}$  e  $\Omega_{m,0}$ .

A hipótese de que a constante cosmológica seja uma candidata convincente para descrever a expansão acelerada tem reproduzido uma série de trabalhos na literatura (ver por exemplo: [53, 54, 55, 56, 57]).

A constante cosmológica, representada por  $\Lambda$ , é a candidata mais simples à energia escura. Ela foi introduzida por Einstein em 1917 para descrever um modelo cosmológico estático. No atual contexto cosmológico, a energia escura é representada por um fluido com densidade de energia

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad (3.3)$$

---

<sup>3</sup>Para revisões completas do modelo  $\Lambda$ CDM consulte [52] e referências nele contidas.

e pressão

$$p_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad (3.4)$$

sendo, neste caso,  $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ .

Em complemento a esta visão, na Teoria Quântica de Campos o termo  $\Lambda$  poderia estar associado às flutuações quânticas do estado do vácuo. Tais flutuações podem ser demonstradas experimentalmente, por exemplo, através do Efeito Casimir <sup>4</sup> [58, 59]. Diferentemente da visão clássica, onde o vácuo é entendido como uma região desprovida de matéria, radiação ou qualquer outra forma de energia (tensor energia-momento é nulo  $T_{\alpha\beta} \equiv 0$ ), na visão quântica o vácuo é entendido como o estado de mínima energia. Devido às relações de incerteza, os campos flutuam em torno do zero, e apenas seus valores médios podem ser considerados nulos. Finalmente, a equação de estado de vácuo  $p_{vac} = -\rho_{vac}$ , ou seja, uma equação de estado idêntica a de uma constante cosmológica.

De fato, os resultados do WMAP 9 anos revelam que o universo é praticamente plano ( $\Omega_\kappa = -0.0027^{+0.0019}_{-0.0038}$ ) [17], isso implica que a densidade total de energia deve estar próxima da densidade crítica. Assumindo que a densidade de energia do vácuo seja dada pela diferença entre a densidade crítica e a densidade de matéria e lembrando que a densidade de energia é dominante no universo hoje, temos [60, 61]

$$\rho_{\Lambda,0} \leq \rho_{c,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \approx 10^{-29} g/cm^3. \quad (3.5)$$

Em contrapartida, o valor da constante  $\Lambda$  previsto pela teoria quântica de campos é  $\rho_{\Lambda,teor} \approx [10^{13} - 10^{92}]g/cm^3$  [60, 62]. Esta discrepância da ordem de 45 a 120 magnitudes entre o valor teórico e o observacional é denominada *Problema da Constante Cosmológica* (ver por exemplo, [63]) e tem motivado diversos modelos alternativos para a energia escura capazes de acelerar o universo e resolver este problema. Nas sessões seguintes abordaremos alguns desses candidatos.

### 3.3 O Modelo com $\omega$ constante $\Lambda$ CDM

Este modelo é uma extensão do  $\Lambda$ CDM. Nele, a energia escura é descrita por um fluido homogêneo com o parâmetro da equação de estado  $\omega = p_x/\rho_x$ , com  $\omega < -1/3$  para evidenciarmos a expansão acelerada,  $p_x$  e  $\rho_x$  representam a pressão e a densidade do

---

<sup>4</sup>O Efeito Casimir é conhecido pela força de atração que surge entre duas placas planas condutoras e descarregadas quando colocadas paralelamente uma sobre a outra no vácuo.



fluido  $X$ , respectivamente. Este modelo foi introduzido por Turner e White [64] e é objeto de estudo frequente na literatura (ver por exemplo [65, 66, 67, 68, 69]). O parâmetro da equação de estado  $\omega$  também é considerado um parâmetro livre diferente de -1. No caso em que  $\omega$  é constante, existem dois intervalos de interesse. O primeiro é o intervalo  $-1 < \omega < -1/3$ , conhecido como  $XCDM$  padrão. O segundo é o intervalo  $\omega < -1$ , conhecido como modelo  $XCDM$  estendido ou *energia fantasma* [70]. Nele, a densidade de energia  $\rho_{EF} \propto a^{-3(1+\omega)}$  cresce com o tempo, já que  $\omega < -1$ .

Finalmente, a equação de Friedmann para este modelo é escrita como

$$H^2(z) = H_0^2 \left[ \Omega_{\kappa,0}(1+z)^2 + \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda,0}(1+z)^{3(1+\omega)} \right], \quad (3.6)$$

onde os parâmetros livres são:  $\Omega_{r,0}$ ,  $\Omega_{\kappa,0}$  e  $\Omega_{m,0}$  e  $\omega$ .

### 3.4 A parametrização Chevallier-Polarski-Linder $\omega aCDM$

Nesta seção descreveremos o caso em que  $\omega$  é uma função do redshift. A dependência do parâmetro  $\omega$  com o redshift é estudada através de parametrizações. Várias parametrizações para  $\omega$  são discutidas na Ref. [71]. Aqui, estudaremos a parametrização Chevallier-Polarski-Linder (CPL) [72, 73]

$$\omega = \omega_0 + \omega_a(1 - a), \quad (3.7)$$

sendo  $\omega_0$  e  $\omega_a$  parâmetros livres que podem ser ajustados aos dados observacionais. Uma vez que  $a = 1/(1+z)$ , a equação 3.7 pode ser reescrita como

$$\omega = \omega_0 + \omega_a \left( \frac{z}{1+z} \right). \quad (3.8)$$

Assim, a equação de Friedmann é reescrita como

$$H^2(z) = H_0^2 \left[ \Omega_{\kappa,0}(1+z)^2 + \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda,0} \exp \left( \int_0^z \frac{1+\omega(z)}{1+z} dz \right) \right]. \quad (3.9)$$

Substituindo a equação 3.8 em 3.9, a equação de Friedmann para o modelo  $\omega aCDM$  é escrita como [66]

$$H^2(z) = H_0^2 \left[ \Omega_{\kappa,0}(1+z)^2 + \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda,0}(1+z)^{3(1+\omega_0+\omega_a)} \exp \left( \frac{-3\omega_a z}{1+z} \right) \right]. \quad (3.10)$$

onde os parâmetros livres são:  $\Omega_{r,0}$ ,  $\Omega_{m,0}$ ,  $\Omega_{\kappa,0}$ ,  $\omega_a$  e  $\omega_0$ .

# Capítulo 4

## Análise estatística dos modelos cosmológicos

Neste capítulo detalharemos a análise estatística empregada para ajustar os parâmetros livres dos modelos cosmológicos de energia escura aos dados observacionais. Faremos uma descrição dos testes estatísticos realizados com o parâmetro de Hubble e supernovas. Em seguida apresentaremos o método de minimização  $\chi^2$  juntamente com a função *likelihood* empregados nesta dissertação para ajustar os parâmetros cosmológicos às estimativas observacionais. Finalmente utilizaremos o  $\chi^2$  para definir as regiões de confiança em espaços de dois parâmetros.

### 4.1 Parâmetros Cosmológicos

#### 4.1.1 Parâmetro de Hubble

Nós utilizamos 19 dados do parâmetro de Hubble no intervalo  $0 < z < 1.75$  compiladas por [74]. Estas medidas foram feitas através da técnica de diferencial de idade [75]. A ideia básica consiste em medir a diferença de idade ( $dt$ ) entre duas galáxias que se formaram praticamente ao mesmo tempo e que apresentam pequenas variações no redshift ( $z \leq 0.2$ ), para determinar a quantidade  $dz/dt$ , que corresponde à variação do redshift em função do tempo. Seja o parâmetro de Hubble definido como

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (4.1)$$

e

$$a = \frac{1}{(1+z)} \Rightarrow \dot{a} = \frac{-1}{(1+z)^2} \frac{dz}{dt}. \quad (4.2)$$

Substituindo a equação 4.2 em 4.1, temos

$$H(z) = \frac{-1}{(1+z)} \frac{dz}{dt}. \quad (4.3)$$

Uma vez encontrada a quantidade  $dz/dt$ , obtemos diretamente  $H(z)$ . Por esta razão, as estimativas do parâmetro de Hubble através desta técnica podem ser referenciadas como estimativas observacionais do parâmetro de Hubble.

Os autores da Ref. [76] determinaram 8 estimativas de  $H(z)$  analisando o espectro de uma amostra de 11324 galáxias elípticas vermelhas no intervalo  $0.15 < z < 1.1$ . Já os autores da Ref. [77] encontraram 11 estimativas para o parâmetro de Hubble no intervalo  $0.1 < z < 1.75$  através da determinação do espectro de galáxias vermelhas em 24 aglomerados. A Tabela 4.1 e a Figura 4.1 apresentam as estimativas de  $H(z)$  em função de  $z$  com suas respectivas incertezas.

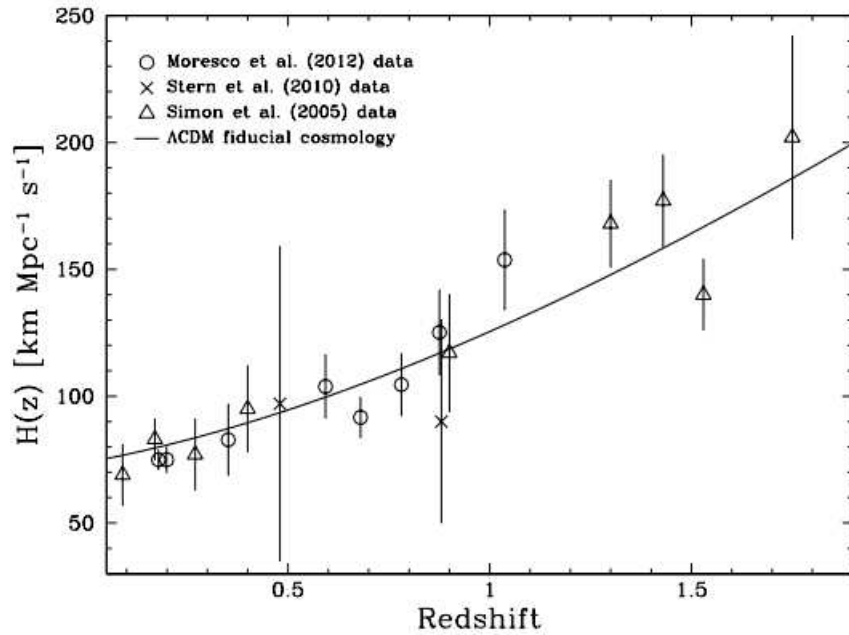


Figura 4.1: Estimativas de  $H(z)$  compiladas por [74]. A linha sólida representa o melhor ajuste para o modelo  $\Lambda$ CDM com  $\Omega_m = 0.27$  e  $\Omega_\kappa = 0$ .

$z$	$H(z)$	$\sigma_{H(z)}$	Ref.
0.090	69	12	[77]
0.170	83	8	[77]
0.179	75	4	[76]
0.199	75	5	[76]
0.270	77	14	[77]
0.352	83	14	[76]
0.400	95	17	[77]
0.480	97	62	[77]
0.593	104	13	[76]
0.680	92	8	[76]
0.781	105	12	[76]
0.875	125	17	[76]
0.880	90	40	[77]
0.900	117	23	[77]
1.037	154	20	[76]
1.300	168	17	[77]
1.430	177	18	[77]
1.530	140	14	[77]
1.750	202	40	[77]

Tabela 4.1: Estimativas de  $H(z)$  (em unidades de  $Kms^{-1}Mpc^{-1}$ ) e suas respectivas incertezas.

### 4.1.2 As supernovas tipo Ia

Utilizamos o catálogo Union 2.1 desenvolvido pelo grupo SCP que contém 580 SNIa no intervalo  $0.623 < z < 1.415$  compiladas por [40]. O Union 2.1 apresenta dados de supernovas de diversos autores entre os anos de 1996 e 2010 (ver Ref. [40] e referências nele contidas) e está disponível no endereço: <http://supernova.lbl.gov/Union>. A Figura 4.1 apresenta o gráfico do módulo de distância ( $\mu$ ) em função do *redshift* ( $z$ ) para as supernovas do catálogo pelo Union 2.1.

Os módulos de distâncias das supernovas do catálogo Union 2.1 foram obtidos pelo método (Spectral Adaptive Lightcurve Template (SALT)) para ajustar as curvas de luz das supernovas [78]. O método SALT2 utiliza todo o conjunto de supernovas para estimar

o módulo de distância. Uma vez que, as supernovas em altos *redshifts* não obedecem a relação linear de Hubble, um modelo cosmológico é assumido para estimar o módulo de distância dessas supernovas. Frequentemente, os modelos  $\Lambda$ CDM e  $X$ CDM<sup>1</sup> são os mais utilizados e conseqüentemente, os módulos de distâncias das SNIa obtidos através do método SALT2 são dependentes do modelo [79].

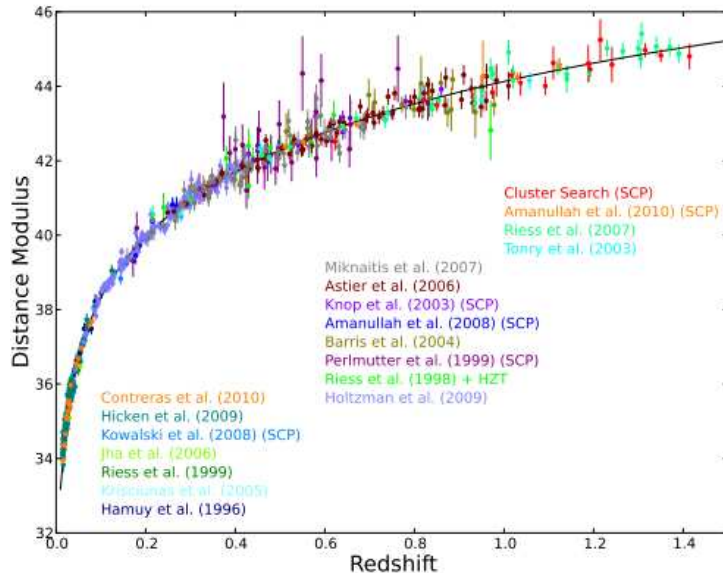


Figura 4.2: Módulo de distância ( $\mu$ ) em função do redshift ( $z$ ) para as 580 SNIa do catálogo Union 2.1. A linha sólida representa o melhor ajuste para o modelo  $\Lambda$ CDM com  $\Omega_{\Lambda} = 0.729 \pm 0.014$  com 68% de confiança [40].

## 4.2 Descrição dos testes estatísticos

### 4.2.1 Minimização $\chi^2$ e melhor ajuste

O ajuste de um conjunto de dados observacionais a um determinado modelo cosmológico pode ser feito através do método de minimização  $\chi^2$ . Em princípio, o modelo que melhor se ajusta aos dados é aquele cujo conjunto de parâmetros fornece o menor valor do  $\chi^2$ . Contudo, esta ideia não serve para comparar modelos com diferentes números de parâmetros livres. Nesse sentido, utilizamos em nossa análise o  $\chi^2$  reduzido, definido como  $\chi^2_{\nu} = \chi^2/\nu$ , onde  $\nu = N - n$  graus de liberdade, sendo  $N$  o número de medidas e  $n$  o número de parâmetros livres de cada modelo. Na Tabela 4.2 apresentamos os parâmetros livres de cada modelo cosmológico estudado nesta dissertação.

<sup>1</sup>Ver Capítulo 3.

Modelo	Abreviação	Parâmetros Livres
constante cosmológica $\Lambda$	$\Lambda$ CDM	$\Omega_m$
$\omega$ constante	$X$ CDM	$\Omega_m, \omega$
$\omega$ variável (CPL)	$\omega a$ CDM	$\Omega_m, \omega_0, \omega_a$
$\Omega_\kappa \neq 0$ , constante cosmológica	$O\Lambda$ CDM	$\Omega_m, \Omega_\kappa$
$\Omega_\kappa \neq 0$ , $\omega$ constante	$OXC$ DM	$\Omega_m, \Omega_\kappa, \omega$

Tabela 4.2: Resumo dos parâmetros livres estudados nos modelos cosmológicos.

Uma vez que  $\Omega_{r,0} \approx 8.4 \cdot 10^{-5}$  [6] e portanto,  $\Omega_{r,0} \ll \Omega_{m,0}$ , a densidade de radiação será negligenciada no contexto deste trabalho em estudos de baixos *redshifts*. O valor de  $H_0$  também foi fixado para todos os modelos em  $H_0 = 70 \pm 2.2 \text{ Km/s/Mpc}$ , que corresponde ao valor da constante de Hubble estimada pelo WMAP 9 anos para o modelo  $\Lambda$ CDM [17].

Utilizando as 19 estimativas observacionais para o parâmetro de Hubble  $H(z)$ , o valor do  $\chi^2$  para este conjunto de dados é

$$\chi_{H(z)}^2 = \sum_{i=1}^{19} \frac{[H_{obs}(z_i) - H_{teo}(z_i)]^2}{\sigma_i^2}. \quad (4.4)$$

As quantidades  $H_{obs}$ ,  $H_{teo}$  e  $\sigma_i$  correspondem ao valor de  $H(z)$  obtido observacionalmente, à estimativa teórica prevista em cada modelo e a incerteza atribuída a cada valor de  $H(z)$ , respectivamente. Os valores teóricos de  $H(z)$  foram determinados através das equações 3.2, 3.6 e 3.10 para os modelos  $\Lambda$ CDM,  $X$ CDM e  $\omega a$ CDM, respectivamente.

De forma análoga, determinamos o  $\chi^2$  para o conjunto de 580 SNIa. Nós utilizamos a análise estatística descrita em [80] para minimizar a influência de  $H_0$ . Assim,

$$\chi_{SNIa}^2 = A - 2\mu_0 B + \mu_0^2 C^2, \quad (4.5)$$

com

$$A = \sum_{i=1}^{580} \frac{[\mu_{obs}(z_i) - \mu_{teo}(z_i)]^2}{\sigma_i^2}, \quad (4.6)$$

$$B = \sum_{i=1}^{580} \frac{[\mu_{obs}(z_i) - \mu_{teo}(z_i)]}{\sigma_i^2}, \quad (4.7)$$

$$C = \sum_{i=1}^{580} \frac{1}{\sigma_i^2}. \quad (4.8)$$

Neste caso,  $\mu_{obs}$ ,  $\mu_{teo}$  e  $\sigma_i$  correspondem ao valor observacional do módulo de distância, a estimativa teórica dada pela equação 2.14 e a incerteza de cada supernova, respectiva-

mente. A equação 4.5 tem um mínimo quando  $\mu_0 = B/C$ , assim

$$\chi_{SNIa}^2 = A - \frac{B^2}{C}. \quad (4.9)$$

### 4.2.2 A função *likelihood*

Nós complementamos o tradicional ajuste  $\chi^2$  com a função *likelihood*, ( $\mathcal{L}$ ) que permite estudar os parâmetros cosmológicos individualmente. Considerando que cada estimativa observacional para  $H(z)$  e supernovas é um evento independente e adotando a técnica *likelihood* descrita na Ref. [81] determinamos uma distribuição gaussiana expressa por:

$$\mathcal{L} = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{1}{2}\chi^2\right), \quad (4.10)$$

onde  $N$  corresponde ao número total estimativa para cada conjunto de dados observacionais e  $\sigma_i$  se refere à incerteza atribuída a cada estimativa. A equação 4.10 estabelece assim uma relação entre o  $\chi^2$  e a *likelihood* da distribuição gaussiana dada por

$$\mathcal{L} \propto \exp[-1/2\chi^2]. \quad (4.11)$$

Neste sentido, o mínimo valor de  $\chi^2$  ( $\chi_{min}^2$ ) corresponde ao máximo  $\mathcal{L}$  ( $\mathcal{L}_{max}$ ). Aqui, calcularemos a razão  $\mathcal{L}/\mathcal{L}_{max}$  para os parâmetros cosmológicos estudados.

### 4.2.3 As regiões de confiança

Uma vez que os melhores parâmetros para cada modelo cosmológico são obtidos, precisamos representar uma região de confiança ao redor destes valores em espaços de  $m$  parâmetros, sendo  $m$  o número de parâmetros. Assumindo que a *likelihood* deve ser gaussiana para os parâmetros, cada nível de confiança  $\Delta\chi^2 = \chi^2 - \chi_{min}^2$  (onde  $\chi_{min}^2$  corresponde ao mínimo valor possível do  $\chi^2$ ) indica a probabilidade dos parâmetros estarem dentro de um determinado nível. Esta probabilidade depende do número de parâmetros livres ( $p$ ), conforme ilustra a Tabela 4.3 [82].

Nós calculamos as regiões de 68% e 95.4% de confiança ao redor dos melhores parâmetros cosmológicos estimados para cada modelo.

p	1	2	3	4	5	6
68.3%	1	2.30	3.53	4.72	5.89	7.04
90%	2.71	4.61	6.25	7.78	9.24	10.6
95.4%	4.00	6.17	8.02	9.70	11.3	12.8
99%	6.63	9.21	11.3	13.3	15.1	18.6
99.73%	9.00	11.8	14.2	16.3	18.2	20.1
99.99%	15.1	18.4	21.1	23.5	25.7	27.8

Tabela 4.3:  $\Delta\chi^2$  em função dos níveis de confiança em função do número de parâmetros livres ( $p$ ).



# Capítulo 5

## Resultados e Discussões

Neste capítulo apresentaremos os resultados desta dissertação. Mostraremos os ajustes dos melhores parâmetros cosmológicos de cada modelo às estimativas observacionais dos dados de  $H(z)$  e SNIa juntamente com as consequências cosmológicas: o parâmetro de desaceleração e o *redshift* de transição (desaceleração-aceleração). Apresentaremos também as regiões de confiança em espaços de dois parâmetros para os melhores ajustes de cada modelo. A rotina com os cálculos desenvolvidos neste capítulo está disponível no Apêndice A.

### 5.1 Análise comparativa dos modelos cosmológicos

Os resultados numéricos de nossa análise estatística para cada modelo cosmológico utilizando os dados de  $H(z)$  e SNIa estão disponíveis nas Tabelas 5.1 a 5.5. Note que, os cinco modelos apresentaram valores para o  $\chi^2$  próximos dando coerência a sobreposição das curvas teóricas, conforme ilustram as Figuras 5.1 e 5.2. Em particular, a sobreposição dos modelos quando ajustados aos dados de SNIa é mais acentuada, uma vez que, a diferença no valor do  $\chi^2_\nu$  de cada modelo aparece a partir da terceira casa decimal. Podemos concluir também que o efeito da curvatura dos modelos  $OXCDM$  e  $OACDM$  não foi significativo no intervalo  $0 < z < 2.0$  com pelo menos 68% de confiança. Embora o modelo  $\Lambda CDM$  forneça um bom ajuste aos dados observacionais, nossas análises revelam que os modelos  $XCDM$  e  $\omega aCDM$  com densidade de energia escura variável com o *redshift* não podem ser descartados no intervalo  $0 < z < 2.0$  com 68% de confiança.

Agora podemos comparar nossos resultados com outros trabalhos na literatura. Os autores das Refs. [66, 67] analisaram os modelos cosmológicos mais populares incluindo o

$\Lambda$ CDM,  $X$ CDM e  $\omega$ aCDM através das estimativas observacionais de BAO, SNIa e RCF. Para analisar os dados, os autores utilizaram o método de minimização  $\chi^2$  juntamente com a distribuição *likelihood*. Os resultados encontrados pelos autores para os parâmetros cosmológicos de cada modelo estão disponíveis na Tabela 5.6. Podemos observar que os resultados de nossa análise estatística são compatíveis com os resultados apresentados na Tabela 5.6 com 68% de confiança.

O efeito da curvatura foi estudado pelos autores da Ref. [66] que encontraram  $\Omega_\kappa = -0.0024 \pm 0.0056$  para o modelo  $O\Lambda$ CDM e  $\Omega_\kappa = -0.0012 \pm 0.0064$  para o modelo  $OX$ CDM. Nossos resultados para o parâmetro  $\Omega_\kappa$  dos modelos  $O\Lambda$ CDM e  $OX$ CDM revelam uma discrepância da ordem de  $10^2$  quando comparado com o valor obtido pela Ref. [66]. A estimativa para o parâmetro  $\Omega_\kappa$  é bem determinada no primeiro pico do espectro da RCF que foi analisada pela Ref. [66]. Uma vez que a soma de todas as componentes do universo é igual a 1 (equação 1.41), o valor do parâmetro de curvatura alterou os valores da densidade de matéria  $\Omega_m$  e  $\Omega_\Lambda$  dos modelos cosmológicos  $\Lambda$ CDM e  $X$ CDM que assumem  $\Omega_\kappa \neq 0$  conforme apresentam as Tabelas 5.4 e 5.5.

Parâmetro	$H(z)$	SNIa
$\Omega_m$	$0.300 \pm 0.005$	$0.278 \pm 0.003$
$\Omega_\Lambda$	$0.700 \pm 0.005$	$0.722 \pm 0.003$
$\chi_\nu^2$	0.6982	0.97103

Tabela 5.1: Melhores parâmetros cosmológicos para o modelo  $\Lambda$ CDM com dados de  $H(z)$  e SNIa.

Parâmetro	$H(z)$	SNIa
$\Omega_m$	$0.319 \pm 0.004$	$0.298 \pm 0.003$
$\Omega_\Lambda$	$0.681 \pm 0.004$	$0.702 \pm 0.003$
$\omega$	$-1.103 \pm 0.004$	$-1.067 \pm 0.005$
$\chi_\nu^2$	0.73158	0.97282

Tabela 5.2: Melhores parâmetros cosmológicos para o modelo  $X$ CDM com dados de  $H(z)$  e SNIa.

Parâmetro	$H(z)$	SNIa
$\Omega_m$	$0.290 \pm 0.005$	$0.280 \pm 0.05$
$\Omega_\Lambda$	$0.710 \pm 0.005$	$0.720 \pm 0.005$
$\omega_0$	$-1.091 \pm 0.010$	$-1.086 \pm 0.015$
$\omega_a$	$0.541 \pm 0.004$	$0.500 \pm 0.004$
$\chi^2_\nu$	0.77438	0.97492

Tabela 5.3: Melhores parâmetros cosmológicos para o modelo  $\omega aCDM$  com dados de  $H(z)$  e SNIa.

Parâmetro	$H(z)$	SNIa
$\Omega_m$	$0.343 \pm 0.004$	$0.325 \pm 0.003$
$\Omega_\Lambda$	$0.760 \pm 0.004$	$0.765 \pm 0.004$
$\Omega_\kappa$	$-0.103 \pm 0.002$	$-0.091 \pm 0.002$
$\chi^2_\nu$	0.73442	0.97277

Tabela 5.4: Melhores parâmetros cosmológicos para o modelo  $O\Lambda CDM$  com dados de  $H(z)$  e SNIa.

Parâmetro	$H(z)$	SNIa
$\Omega_m$	$0.336 \pm 0.005$	$0.325 \pm 0.004$
$\Omega_\Lambda$	$0.724 \pm 0.005$	$0.744 \pm 0.004$
$\Omega_\kappa$	$-0.060 \pm 0.005$	$-0.069 \pm 0.004$
$\omega$	$-1.053 \pm 0.010$	$-1.030 \pm 0.015$
$\chi^2_\nu$	0.77881	0.97453

Tabela 5.5: Melhores parâmetros cosmológicos para o modelo  $OXCDM$  com dados de  $H(z)$  e SNIa.

Modelo	Ref. [66]	Ref. [67]
$\Lambda CDM$	$\Omega_m = 0.292 \pm 0.007$	$\Omega_m = 0.291 \pm 0.014$
$XCDM$	$\Omega_m = 0.292 \pm 0.006$ $\omega = -0.982 \pm 0.037$	$\Omega_m = 0.292 \pm 0.015$ $\omega = -0.990 \pm 0.041$
$\omega aCDM$	$\Omega_m = 0.292 \pm 0.015$ $\omega_0 = -0.999 \pm 0.172$ $\omega_a = 0.385^{+0.271}_{-0.293}$	$\Omega_m = 0.293 \pm 0.016$ $\omega_0 = -0.966^{+0.088}_{-0.105}$ $\omega_a = 0.202^{+1.030}_{-1.053}$

Tabela 5.6: Melhores estimativas para os parâmetros cosmológicos dos modelos  $\Lambda CDM$ ,  $XCDM$  e  $\omega aCDM$  encontradas pelas referências [66, 67].

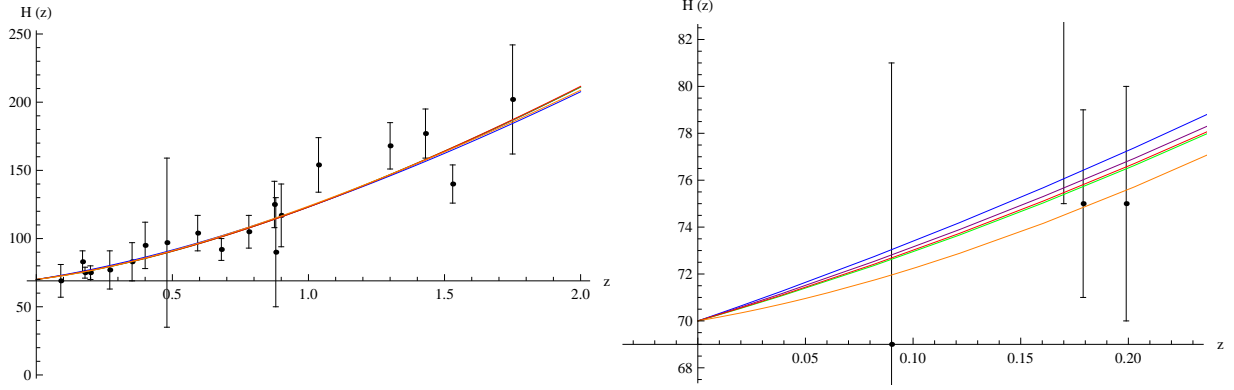


Figura 5.1: Evolução do universo  $H(z)$  em função do *redshift*. O painel a esquerda representa o ajuste dos modelos cosmológicos aos 19 dados de  $H(z)$  disponíveis na Tabela 4.6. No painel a direita foi dado um zoom na figura para melhor visualização do ajuste das curvas teóricas. As cores azul, verde, laranja, roxo e vermelha, representam os modelos  $\Lambda$ CDM,  $X$ CDM,  $\omega a$ CDM,  $O\Lambda$ CDM e  $OX$ CDM, respectivamente.

## 5.2 Regiões de confiança

As Figuras 5.3 a 5.6 e 5.8 a 5.10 ilustram as regiões de confiança de 68% e 95.4% (ver Tabela 4.3) em torno dos melhores parâmetros estimados nas Tabelas 5.1 a 5.5 para cada modelo cosmológico considerando os dados de SNIa e  $H(z)$ . Conforme era esperado, os contornos das regiões de confiança obtidos a partir dos dados de  $H(z)$  ocupam uma área maior nas Figuras 5.3 a 5.6 e 5.8 a 5.10, uma vez que, foram utilizadas 19 estimativas observacionais para o parâmetro de Hubble e com grandes incertezas (ver Tabela 4.1 e Figura 4.1). Em contrapartida, foram utilizadas 580 SNIa (ver Figura 4.2) para gerar as regiões de confiança desse conjunto.

Para construir as distribuições de probabilidades apresentadas nas Figuras 5.3 a 5.6 e 5.8 a 5.10 para cada parâmetro cosmológico, nós fixamos os demais parâmetros dos referidos modelos disponíveis nas Tabelas 5.1 a 5.5 para obtermos as distribuições em 1 dimensão.

As regiões de confiança foram geradas a partir do cálculo do  $\Delta\chi^2$  sendo respeitados os valores fornecidos na Tabela 4.3 para os níveis de confiança de 68.3% e 95.4% em função do número de parâmetros livres de cada modelo cosmológico. Entretanto, este cálculo é válido para o caso em que a *likelihood* é gaussiana. O comportamento não gaussiano apresentado nas Figuras 5.3 a 5.6 e 5.8 a 5.10 indica que esses níveis de confiança podem estar sendo subestimados ou superestimados.

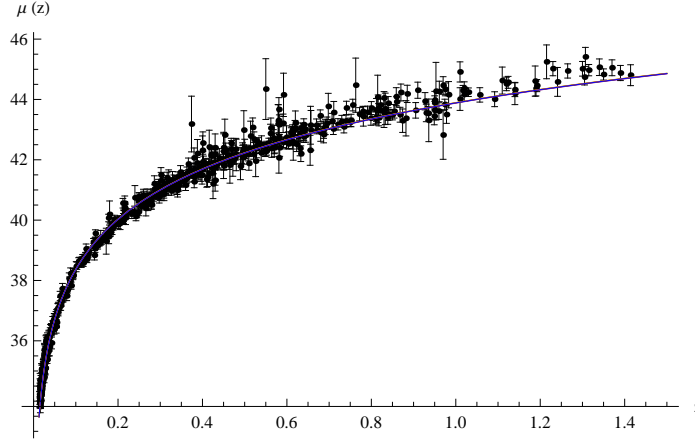


Figura 5.2: Módulo de distância ( $\mu$ ) em função do *redshift* ( $z$ ) ajustados aos dados de SNIa disponíveis no catálogo Union 2.1 [40]. A curva azul representa o modelo  $\Lambda$ CDM considerando as melhores estimativas para os parâmetros cosmológicos disponíveis na Tabela 5.1. Os demais modelos aparecem sobrepostos ao modelo  $\Lambda$ CDM e por isso não são visualizados.

### 5.2.1 Parâmetros $\Omega_m$ e $\Omega_\Lambda$

Nesta seção analisamos os parâmetros  $\Omega_m$  e  $\Omega_\Lambda$ . Dentro do nível de 68% de confiança, os resultados encontrados para a densidade de matéria ( $\Omega_m$ ) e a densidade de energia escura ( $\Omega_\Lambda$ ) do modelo  $\Lambda$ CDM, conforme ilustra a Figura 5.3, são consistentes com as estimativas do WMAP 9 anos [17] e Planck [23] (Tabela 3.1). Para os modelos com  $\Omega_\kappa = 0$ , a densidade de matéria e energia escura estão compreendidas no intervalo  $0.26 < \Omega_m < 0.35$  e  $0.69 < \Omega_\Lambda < 0.74$  com 68% de confiança, conforme ilustram as Figuras 5.3, 5.4 e 5.5. Em contrapartida, para os modelos com  $\Omega_\kappa \neq 0$  estas quantidades estão compreendidas nos intervalos  $0.20 < \Omega_m < 0.38$  e  $0.62 < \Omega_\Lambda < 0.80$  com 68% de confiança, conforme ilustram as Figuras 5.9 e 5.10.

### 5.2.2 Parâmetros $\omega$ e $\omega_a$

Analisamos nesta seção os parâmetros:  $\omega$  e  $\omega_a$  dos modelos  $X$ CDM e  $\omega$ aCDM. Os resultados combinados de  $H(z)$  e SNIa revelam que o parâmetro da equação de estado  $\omega$  do modelo  $X$ CDM tende para  $\omega = -1$  no intervalo de 68.3% de confiança (Figura 5.4), favorecendo o modelo  $\Lambda$ CDM (Figura 5.3).

O parâmetro  $\omega_0$  do modelo  $\omega$ aCDM (Ver Figura 5.4) é compatível com o parâmetro  $\omega$  da equação de estado do modelo  $X$ CDM (Figura 5.5) dentro da região de 68% de

confiança. Já o parâmetro  $\omega_a$  é aceito com 68% de confiança no intervalo  $-1.5 < \omega_a < 1.5$  (Ver Figura 5.6) abrangendo  $\omega_a = 0$  assumido no modelo  $\Lambda$ CDM.

### 5.2.3 Parâmetro $\Omega_\kappa$

Analisamos nesta seção a influência do parâmetro  $\Omega_\kappa$  sobre os demais parâmetros cosmológicos. As Figuras 5.8 e 5.10 mostram que a curvatura é excluída com grande confiança estatística. No intervalo de *redshift* considerado para análise,  $0 < z < 2.0$ , o efeito da curvatura do modelo  $O\Lambda$ CDM alterou os resultados encontrados para  $\Omega_m$  e  $\Omega_\Lambda$ , conforme ilustra a Figura 5.9 em comparação com as mesmas quantidades encontradas para o modelo  $\Lambda$ CDM (ver Figura 5.3). Dentro da região de 68% de confiança, a densidade de matéria está compreendida no intervalo  $0.23 < \Omega_m < 0.34$  e  $0.26 < \Omega_m < 0.39$  para os modelos  $\Lambda$ CDM e  $O\Lambda$ CDM, respectivamente. De forma análoga, a densidade de energia escura está compreendida no intervalo  $0.66 < \Omega_\Lambda < 0.78$  e  $0.70 < \Omega_\Lambda < 0.82$  para os modelos  $\Lambda$ CDM e  $O\Lambda$ CDM, respectivamente.

Com relação ao parâmetro da equação de estado  $\omega$ , a análise combinada dos dados de  $H(z)$  e SNIa revelam que a presença da curvatura do modelo  $OX$ CDM não alterou significativamente este parâmetro (Figura 5.11) quando comparado com o modelo  $X$ CDM (Figura 5.4). Dentro da região de 68% de confiança, nossos resultados mostram que o parâmetro  $\omega$  está compreendido no intervalo  $-1.5 < \omega < -0.5$  e  $-1.4 < \omega < -0.7$  para os modelos  $X$ CDM e  $OX$ CDM, respectivamente.

### O modelo $\Lambda$ CDM

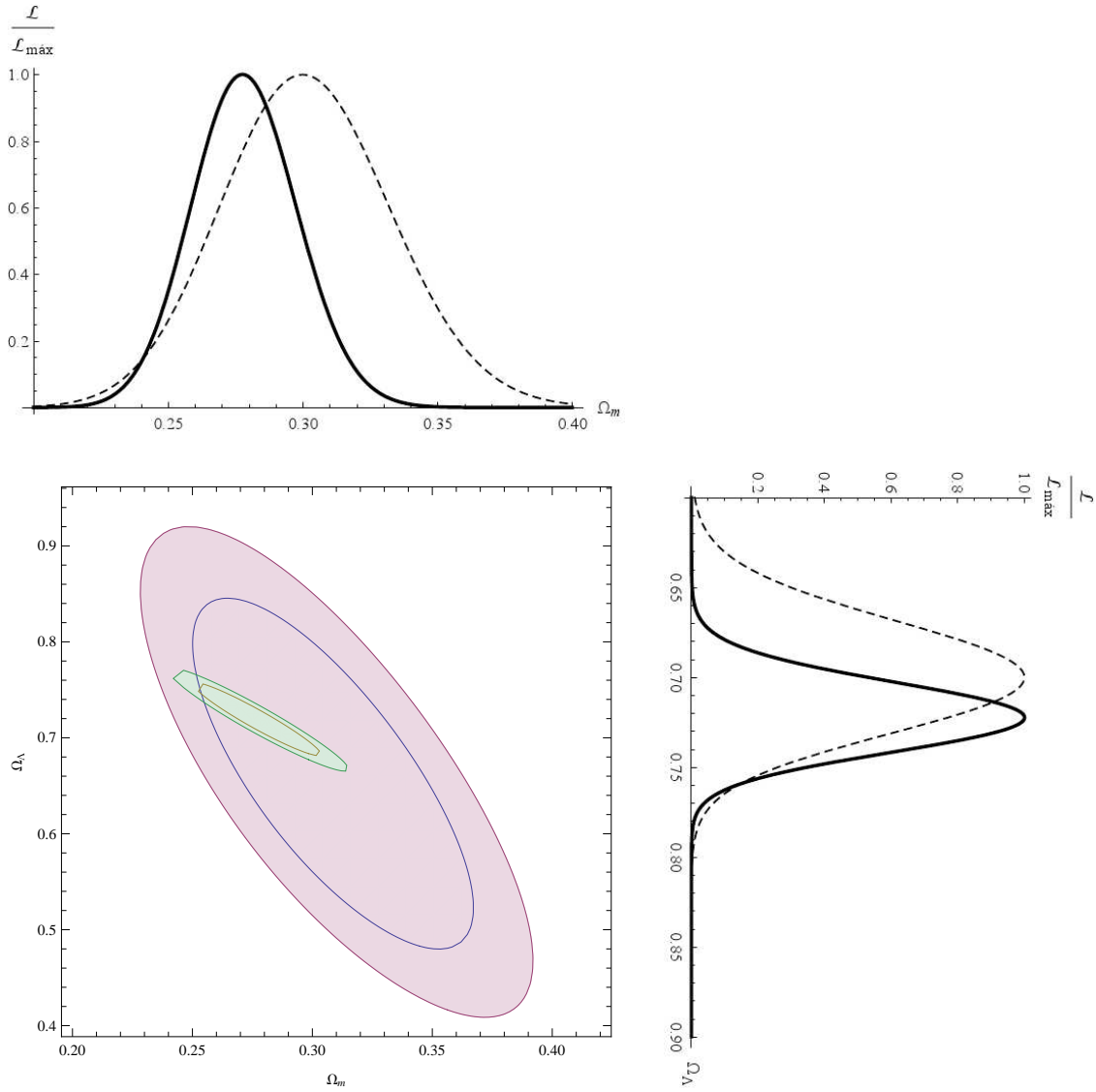


Figura 5.3: Regiões de 68.3% (contorno interno) e 95.4% (contorno externo) de confiança dos parâmetros  $\Omega_m$  vs.  $\Omega_\Lambda$  (painel inferior a esquerda) do modelo  $\Lambda$ CDM utilizando dados de  $H(z)$  (lilás) e SNIa (verde). Também está apresentada a distribuição de probabilidade ( $\mathcal{L}/\mathcal{L}_{\max}$ ) para  $\Omega_m$  (painel superior) e  $\Omega_\Lambda$  (painel inferior a direita). As linhas tracejada e sólida representam a distribuição de probabilidade usando os dados de  $H(z)$  e SNIa, respectivamente.



## O modelo $\Lambda$ CDM

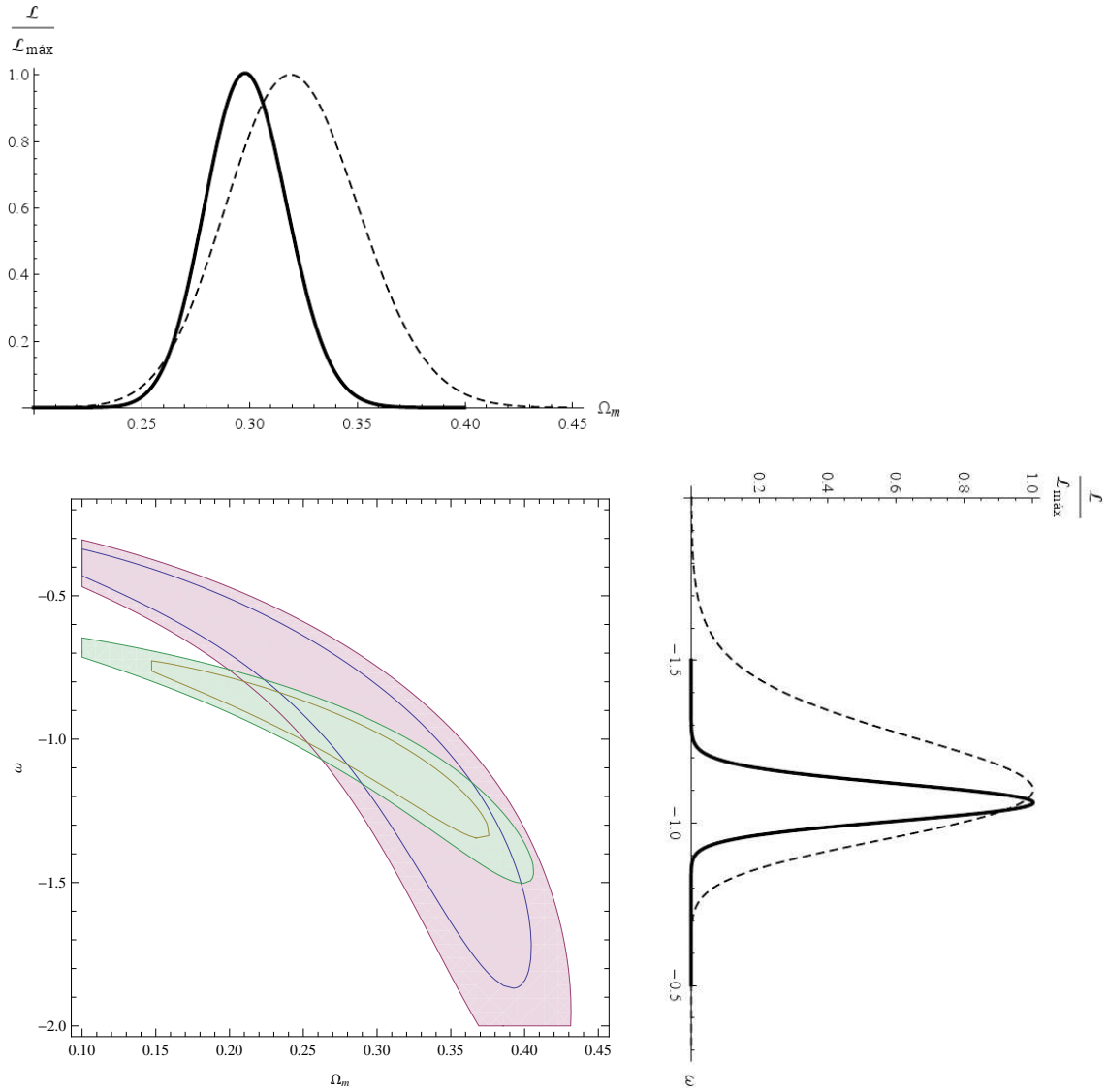


Figura 5.4: Regiões de 68.3% (contorno interno) e 95.4% (contorno externo) de confiança dos parâmetros  $\Omega_m$  vs.  $\omega$  (painel inferior a esquerda) do modelo  $\Lambda$ CDM utilizando dados de  $H(z)$  (lilás) e SNIa (verde). Também está apresentada a distribuição de probabilidade ( $\mathcal{L}/\mathcal{L}_{\text{máx}}$ ) para  $\Omega_m$  (painel superior) e  $\omega$  (painel inferior a direita). As linhas tracejada e sólida representam a distribuição de probabilidade usando os dados de  $H(z)$  e SNIa, respectivamente.

## O modelo $\omega aCDM$

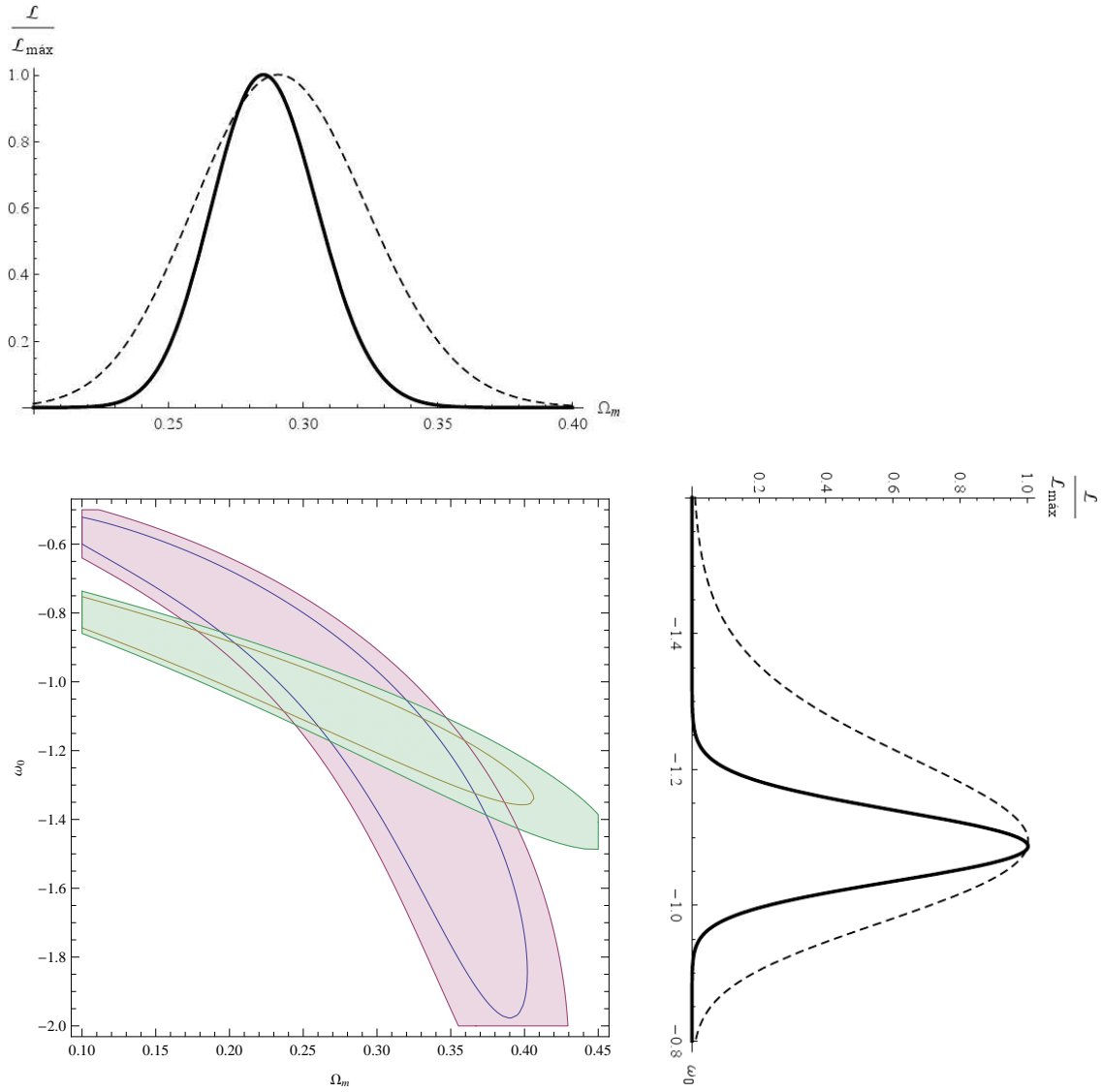


Figura 5.5: Regiões de 68.3% (contorno interno) e 95.4% (contorno externo) de confiança dos parâmetros  $\Omega_m$  vs.  $\omega_0$  (painel inferior a esquerda) do modelo  $\omega aCDM$  utilizando dados de  $H(z)$  (lilás) e SNIa (verde). Também está apresentada a distribuição de probabilidade ( $\mathcal{L}/\mathcal{L}_{\max}$ ) para  $\Omega_m$  (painel superior) e  $\omega_0$  (painel inferior a direita). As linhas tracejada e sólida representam a distribuição de probabilidade usando os dados de  $H(z)$  e SNIa, respectivamente.

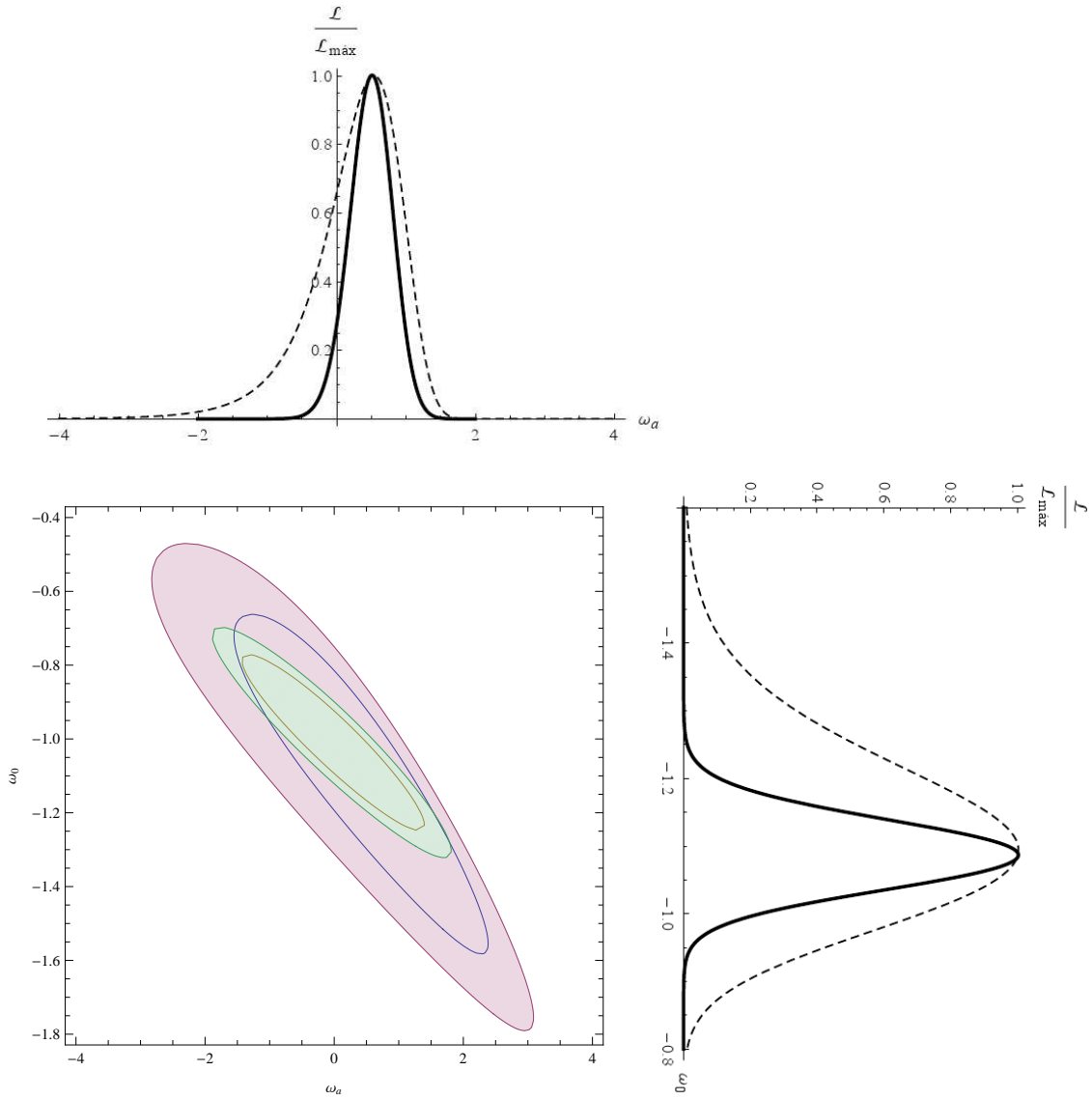


Figura 5.6: Regiões de 68% (contorno interno) e 95.4% (contorno externo) de confiança dos parâmetros  $\omega_a$  vs.  $\omega_0$  (painel inferior a esquerda) do modelo  $\omega aCDM$  utilizando dados de  $H(z)$  (lilás) e SNIa (verde). Também está apresentada a distribuição de probabilidade ( $\mathcal{L}/\mathcal{L}_{\max}$ ) para  $\omega_a$  (painel superior) e  $\omega_0$  (painel inferior a direita). As linhas tracejada e sólida representam a distribuição de probabilidade usando os dados de  $H(z)$  e SNIa, respectivamente.

Na Figura 5.7 apresentamos a evolução do parâmetro da equação de estado  $\omega$  em função do *redshift* (equação 3.8) considerando os valores de  $\omega_0$  e  $\omega_a$  disponíveis na Tabela 5.3. Para  $z < 1.0$ , as estimativas para o parâmetro da equação de estado do modelo  $\omega aCDM$  são consistentes com o modelo  $XCDM$  dentro da região de 68.3%. Para  $z > 1$ , o modelo  $\omega aCDM$  se aproxima do modelo  $XCDM$  com 95.4% de confiança.

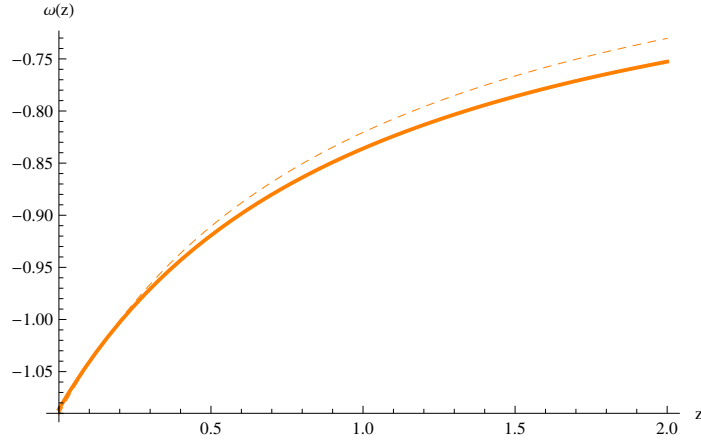


Figura 5.7: Evolução do parâmetro da equação de estado  $\omega$  em função do *redshift* para o modelo  $\omega aCDM$ . As curvas tracejada e sólida foram geradas considerando os melhores parâmetros cosmológicos do modelo (Tabela 5.3) a partir dos dados de  $H(z)$  e SNIa, respectivamente.

## O modelo $\Lambda$ CDM

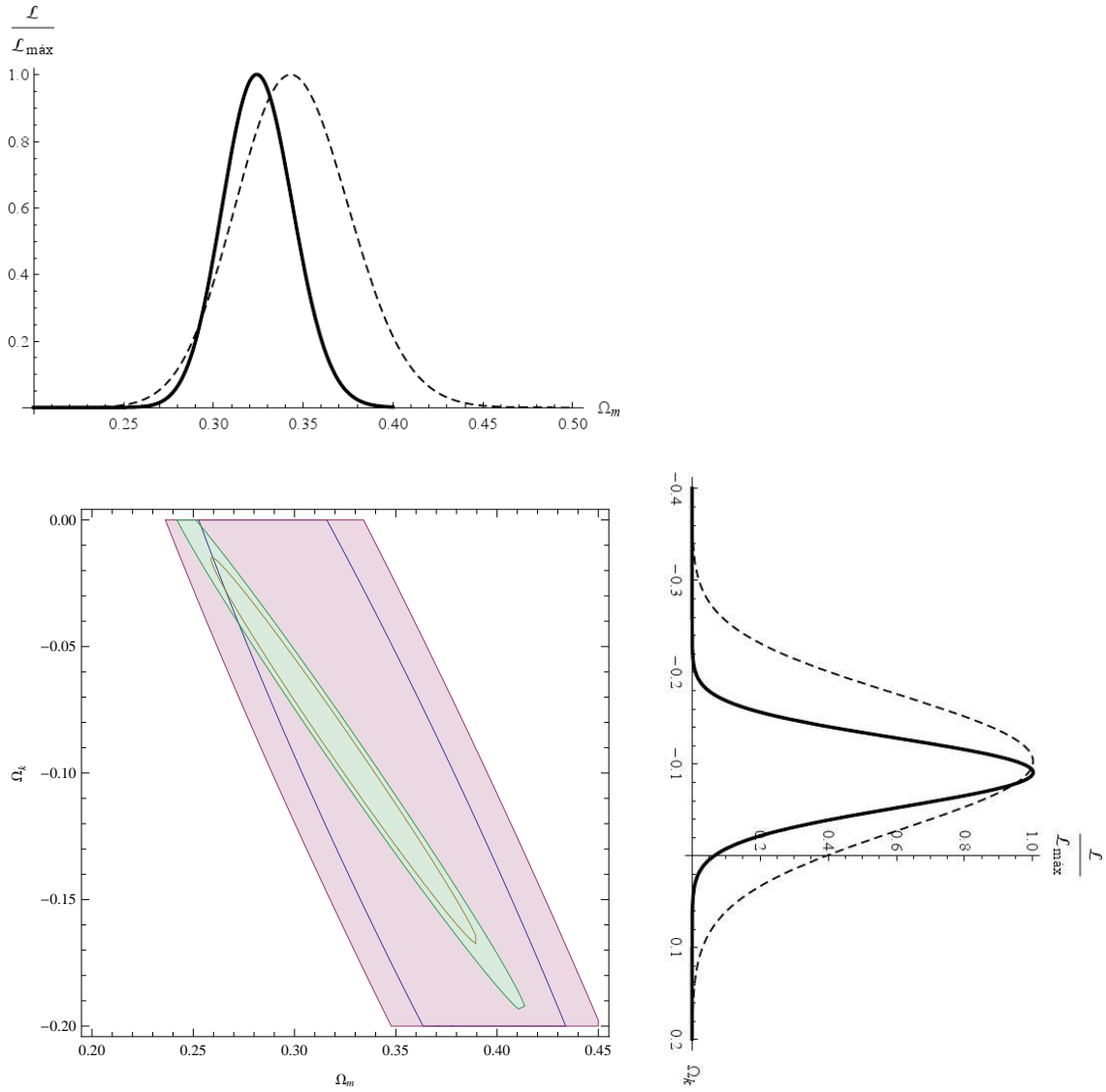


Figura 5.8: Regiões de 68.3% (contorno interno) e 95.4% (contorno externo) de confiança dos parâmetros  $\Omega_m$  vs.  $\Omega_k$  (painel inferior a esquerda) do modelo  $\Lambda$ CDM utilizando dados de  $H(z)$  (lilás) e SNIa (verde). Também está apresentada a distribuição de probabilidade ( $\mathcal{L}/\mathcal{L}_{\text{máx}}$ ) para  $\Omega_m$  (painel superior) e  $\Omega_k$  (painel inferior a direita). As linhas tracejada e sólida representam a distribuição de probabilidade usando os dados de  $H(z)$  e SNIa, respectivamente.

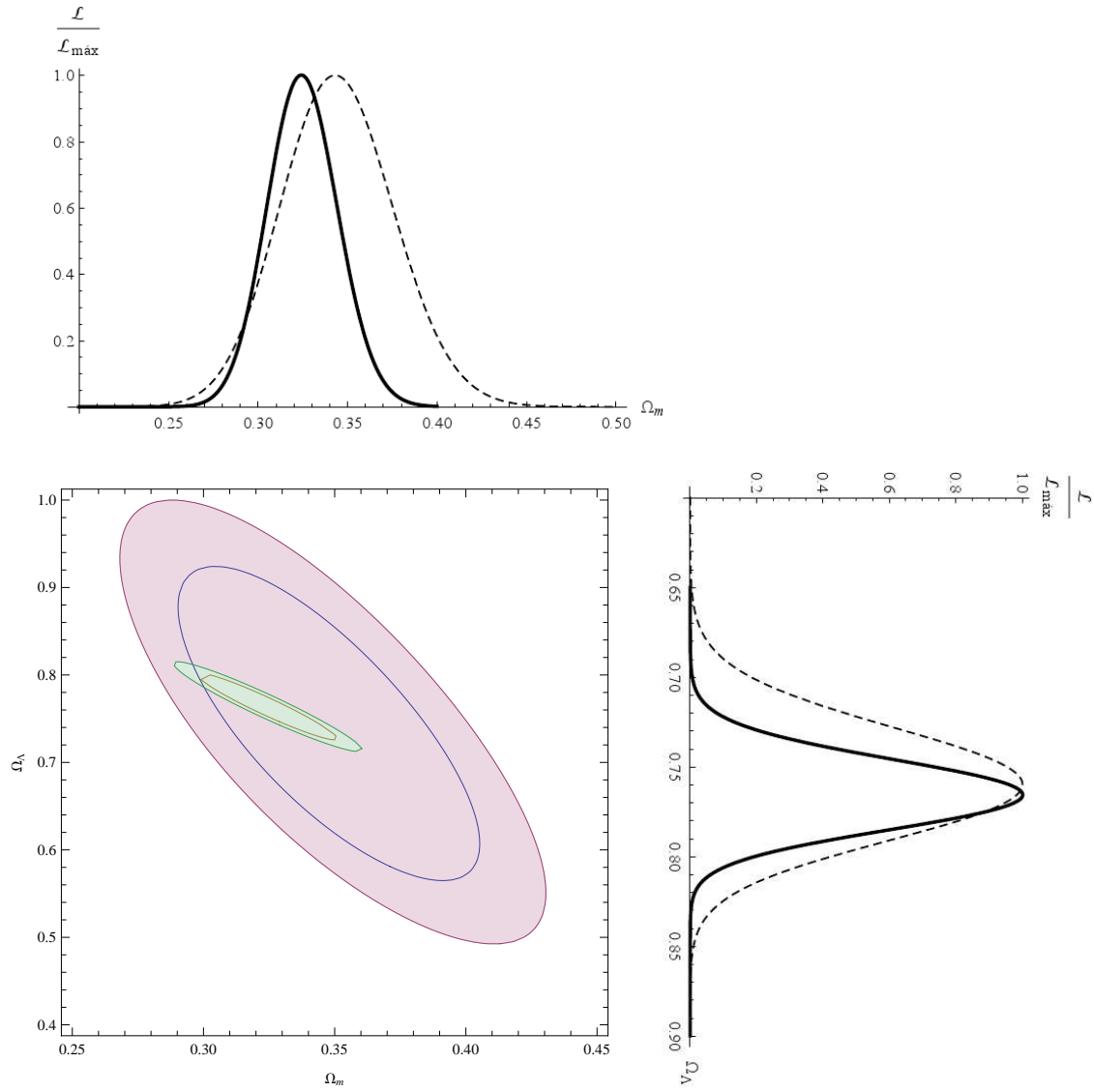


Figura 5.9: Regiões de 68.3% (contorno interno) e 95.4% (contorno externo) de confiança dos parâmetros  $\Omega_m$  vs.  $\Omega_\Lambda$  (painel inferior a esquerda) do modelo  $\Lambda$ CDM utilizando dados de  $H(z)$  (lilás) e SNIa (verde). Também está apresentada a distribuição de probabilidade ( $\mathcal{L}/\mathcal{L}_{\text{máx}}$ ) para  $\Omega_m$  (painel superior) e  $\Omega_\Lambda$  (painel inferior a direita). As linhas tracejada e sólida representam a distribuição de probabilidade usando os dados de  $H(z)$  e SNIa, respectivamente.

## O modelo $OXCDM$

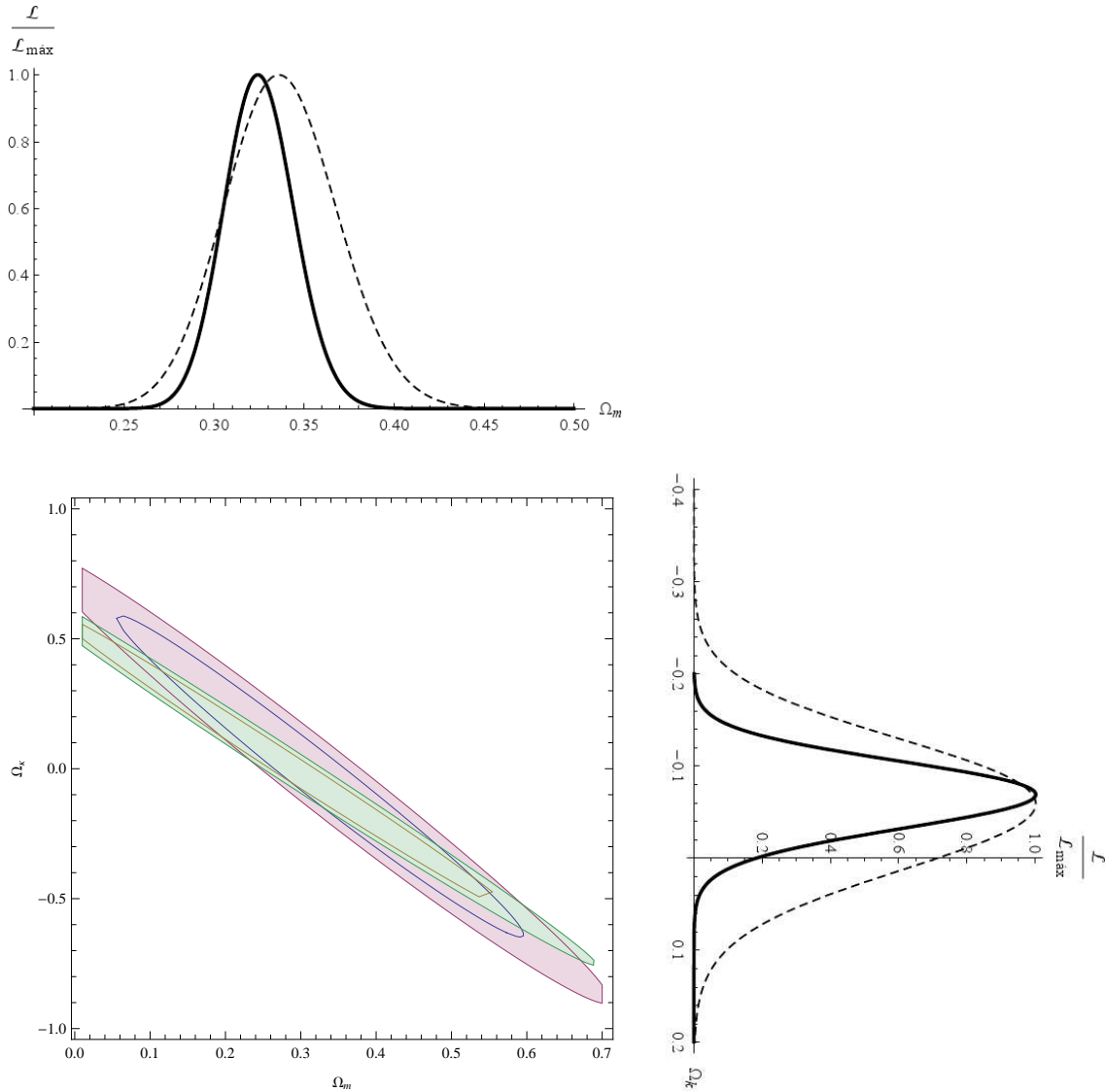


Figura 5.10: Regiões de 68.3% (contorno interno) e 95.4% (contorno externo) de confiança dos parâmetros  $\Omega_m$  vs.  $\Omega_k$  (painel inferior a esquerda) do modelo  $OXCDM$  utilizando dados de  $H(z)$  (lilás) e SNIa (verde). Também está apresentada a distribuição de probabilidade ( $\mathcal{L}/\mathcal{L}_{\text{máx}}$ ) para  $\Omega_m$  (painel superior) e  $\Omega_k$  (painel inferior a direita). As linhas tracejada e sólida representam a distribuição de probabilidade usando os dados de  $H(z)$  e SNIa, respectivamente.

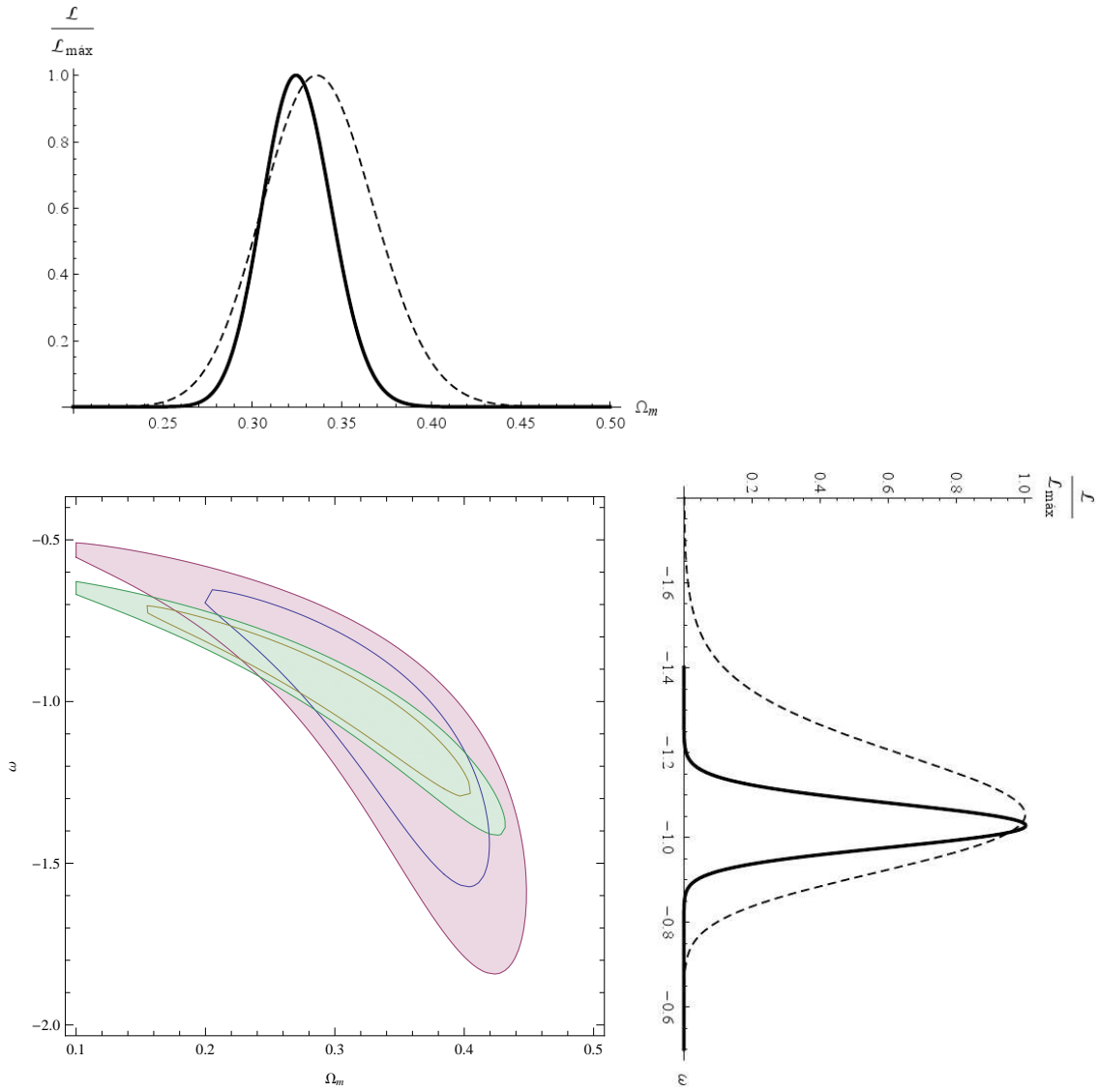


Figura 5.11: Regiões de 68.3% (contorno interno) e 95.4% (contorno externo) de confiança dos parâmetros  $\Omega_m$  vs.  $\omega$  (painel inferior a esquerda) do modelo  $OXCDM$  utilizando dados de  $H(z)$  (lilás) e SNIa (verde). Também está apresentada a distribuição de probabilidade ( $\mathcal{L}/\mathcal{L}_{\max}$ ) para  $\Omega_m$  (painel superior) e  $\omega$  (painel inferior a direita). As linhas tracejada e sólida representam a distribuição de probabilidade usando os dados de  $H(z)$  e SNIa, respectivamente.



### 5.3 Consequências cosmológicas: parâmetro de desaceleração e *redshift* de transição

Seja o parâmetro de desaceleração ( $q$ ) em função do *redshift* ( $z$ ) definido na equação 1.50. Resolvendo a equação 1.50 para  $z = 0$  estimamos o valor do parâmetro de desaceleração hoje ( $q_0$ ). Em contrapartida, quando  $q_z = 0$  encontramos o *redshift* de transição ( $z_t$ ), ou seja, o momento em que a expansão do universo passou de desacelerada dominada pela matéria não relativística para acelerada dominada pela energia escura. Na Tabela 5.6 apresentamos as estimativas de  $q_0$  e  $z_t$  calculadas para cada modelo a partir dos parâmetros cosmológicos disponíveis nas Tabelas 5.1 a 5.5. Na Figura 5.13 apresentamos a evolução do parâmetro de desaceleração em função do *redshift*. Nossas análises mostram que todos os modelos confirmam a aceleração cósmica recente  $q_0 < 0$  e  $z_t \approx 0.65$ , estando em perfeito acordo com os resultados encontrados na Refs. [66, 83].

Modelo	$q_0$	$z_t$
$\Lambda$ CDM	$-0.550 \pm 0.06$	$0.671 \pm 0.003$
XCDM	$-0.627 \pm 0.005$	$0.620 \pm 0.002$
$\omega_a$ CDM	$-0.661 \pm 0.004$	$0.609 \pm 0.004$
O $\Lambda$ CDM	$-0.588 \pm 0.003$	$0.643 \pm 0.006$
OXCMB	$-0.613 \pm 0.004$	$0.627 \pm 0.006$

Tabela 5.7: Estimativas de  $q_0$  e  $z_t$  calculadas através dos melhores parâmetros cosmológicos disponíveis nas Tabelas 5.1 a 5.5 para cada modelo.

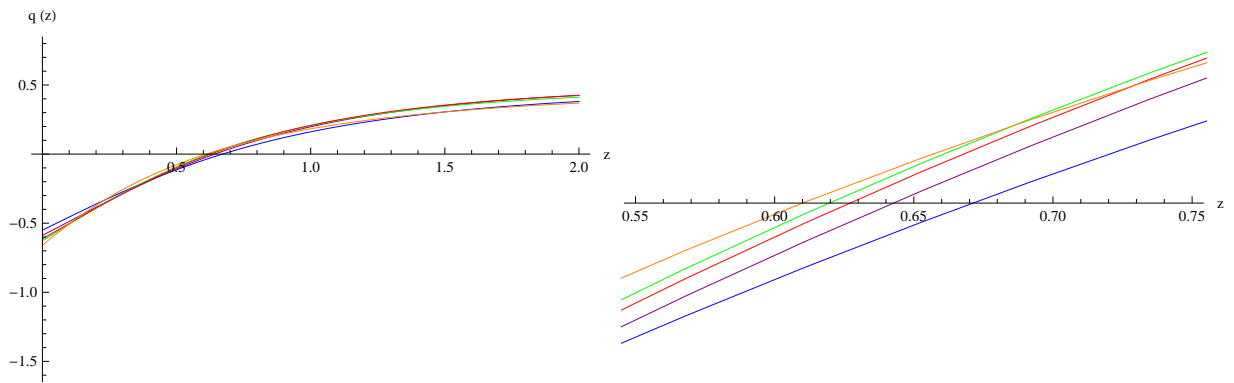


Figura 5.12: Evolução do parâmetro de desaceleração  $q(z)$  em função do *redshift*. As curvas do painel à esquerda foram traçadas considerando as melhores estimativas para parâmetros cosmológicos de cada modelo disponíveis nas Tabelas 5.1 a 5.5. No painel a direita foi dado um zoom na figura da esquerda para melhor visualização do *redshift* de transição ( $z_t$ ) referente a cada modelo. As cores azul, verde, laranja, roxo e vermelha, representam os modelos  $\Lambda$ CDM, XCDM,  $\omega$ aCDM, O $\Lambda$ CDM e OXCDM, respectivamente.

# Capítulo 6

## Conclusões

Um dos atuais problemas para a Cosmologia é fornecer uma explicação consistente a respeito da atual fase de expansão acelerada do universo. Assumindo a validade da Teoria da Relatividade Geral em escalas cosmológicas, a forma mais simples de explicar a aceleração cósmica é admitir a existência de uma nova componente dominante no universo, chamada de energia escura. Entre as principais características desta componente está a pressão negativa, capaz de balancear o efeito atrativo da gravitação e acelerar a expansão do universo.

Nesta dissertação estudamos as bases teóricas de alguns modelos cosmológicos baseados na existência da energia escura. O cosmológico Lambda Cold Dark Matter ( $\Lambda$ CDM) é considerado o atual paradigma da Cosmologia. Este modelo, assume a energia escura sob a forma de uma constante cosmológica e parâmetro da equação de estado  $\omega = -1$ . Embora este modelo forneça um bom ajuste aos dados observacionais, tais como SNIa, RCF e BAO, a discrepância entre o valor teórico e observacional para a constante cosmológica constitui sua maior limitação. Esta discrepância tem motivado o estudo frequente de outros modelos cosmológicos. Aqui, estudamos o modelo  $X$ CDM onde o parâmetro da equação de estado  $\omega$  também é considerado um parâmetro livre podendo assumir valores diferentes de -1 e o modelo  $\omega$ aCDM com o parâmetro  $\omega$  escrito como uma função do *redshift* descrita através da parametrização Chevallier-Polarski-Linder.

Em nossa análise estatística utilizamos os dados de SNIa do catálogo Union 2.1 e as estimativas observacionais do parâmetro de Hubble  $H(z)$ . Aplicamos o método estatístico  $\chi^2$  juntamente com a função *likelihood* para estimar os melhores parâmetros cosmológicos para cada modelo.

Nossos resultados (ver Tabelas 6.1 e 6.2) revelam que a energia escura aparece em todos

os modelos analisados como a componente dominante no universo com pelo menos 68% de confiança. Conforme o esperado, o modelo  $\Lambda$ CDM fornece um bom ajuste às estimativas observacionais de  $H(z)$  e SNIa, sendo o mais favorecido pelos dados uma vez que apresenta o menor número de parâmetros livres. Contudo, os modelos cosmológicos com a densidade de energia escura variável com o *redshift* não podem ser descartados no intervalo de *redshift* analisado ( $0 < z < 2.0$ ), sendo que, as grandes barras de incertezas nas estimativas de  $H(z)$  e SNIa apresentadas nas Figuras 5.1 e 5.2, respectivamente, dificultam a análise dos modelos cosmológicos principalmente para  $z > 1.0$

Parâmetro	$\Lambda$ CDM	XCDM	$\omega$ aCDM	$O\Lambda$ CDM	$OX$ CDM
$\Omega_m$	$0.300 \pm 0.005$	$0.319 \pm 0.004$	$0.290 \pm 0.005$	$0.343 \pm 0.004$	$0.336 \pm 0.005$
$\Omega_\Lambda$	$0.700 \pm 0.005$	$0.681 \pm 0.004$	$0.710 \pm 0.005$	$0.760 \pm 0.004$	$0.724 \pm 0.005$
$\Omega_\kappa$	0	0	0	$-0.103 \pm 0.002$	$-0.060 \pm 0.005$
$\omega_0$	-1	$-1.103 \pm 0.004$	$-1.091 \pm 0.010$	-1	$-1.053 \pm 0.010$
$\omega_a$	0	0	$0.541 \pm 0.004$	0	0

Tabela 6.1: Melhores estimativas para os parâmetros cosmológicos de cada modelo considerando as estimativas observacionais de  $H(z)$ .

Parâmetro	$\Lambda$ CDM	XCDM	$\omega$ aCDM	$O\Lambda$ CDM	$OX$ CDM
$\Omega_m$	$0.278 \pm 0.003$	$0.298 \pm 0.003$	$0.280 \pm 0.005$	$0.325 \pm 0.003$	$0.325 \pm 0.005$
$\Omega_\Lambda$	$0.722 \pm 0.003$	$0.702 \pm 0.003$	$0.720 \pm 0.005$	$0.765 \pm 0.004$	$0.744 \pm 0.004$
$\Omega_\kappa$	0	0	0	$-0.091 \pm 0.002$	$-0.069 \pm 0.004$
$\omega_0$	-1	$-1.067 \pm 0.005$	$-1.086 \pm 0.015$	-1	$-1.030 \pm 0.015$
$\omega_a$	0	0	$0.541 \pm 0.004$	0	0

Tabela 6.2: Melhores estimativas para os parâmetros cosmológicos de cada modelo considerando as estimativas observacionais de SNIa.

O parâmetro de curvatura ( $\Omega_\kappa$ ) foi estudado nos modelos  $O\Lambda$ CDM e  $OX$ CDM. Os valores encontrados em nossa análise descritos nas Tabelas 5.3 e 5.4 estão em desacordo com as estimativas presentes na literatura  $\Omega_\kappa = -0.0024 \pm 0.0056$  para o modelo  $O\Lambda$ CDM e  $\Omega_\kappa = -0.0012 \pm 0.0064$  para o modelo  $OX$ CDM [66, 83].

Considerando que houve uma fase de desaceleração dominada pela matéria e que atualmente a expansão do universo é acelerada determinamos o parâmetro de desaceleração juntamente com o *redshift* de transição. Nossos resultados mostram que os dados observa-

cionais de  $H(z)$  e SNIa ajustados a todos modelos cosmológicos indicam que o universo se encontra em uma recente fase de expansão acelerada com  $q_0 < 0$  e  $z_t \approx 0.65$  (ver Tabela 6.3).

Modelo	$q_0$	$z_t$
$\Lambda CDM$	$-0.550 \pm 0.06$	$0.671 \pm 0.003$
$XCDM$	$-0.627 \pm 0.005$	$0.620 \pm 0.002$
$\omega aCDM$	$-0.661 \pm 0.004$	$0.609 \pm 0.004$
$O\Lambda CDM$	$-0.588 \pm 0.003$	$0.643 \pm 0.006$
$OXCDM$	$-0.613 \pm 0.004$	$0.627 \pm 0.006$

Tabela 6.3: Estimativas de  $q_0$  e  $z_t$  calculadas através dos melhores parâmetros cosmológicos disponíveis nas Tabelas 5.1 a 5.5 para cada modelo.

# Apêndice A

## Rotina completa

Apresentamos neste Apêndice a rotina construída dentro do software Mathematica 8 para os cálculos estatísticos. Utilizamos como referência o modelo  $\Lambda$ CDM, sendo que a mesma rotina foi empregada em todos os modelos de acordo com suas especificações.

$z = \{0.09, 0.17, 0.179, 0.199, 0.27, 0.352, 0.4, 0.48, 0.593, 0.68, 0.781, 0.875, 0.88, 0.9, 1.037, 1.3, 1.43, 1.53, 1.75\}$

$h = \{69, 83, 75, 75, 77, 83, 95, 97, 104, 92, 105, 125, 90, 117, 154, 168, 177, 140, 202\}$

$i = \{12, 8, 4, 5, 14, 14, 17, 62, 13, 8, 12, 17, 40, 23, 20, 17, 18, 14, 40\}$  FileExtension["file.txt"]

erro = Import["C:\\\\ALTIMARE/erro580.txt", "List"]

distancia = Import["C:\\\\ALTIMARE/modulo580.txt", "List"]

desvio = Import["C:\\\\ALTIMARE/redshift580.txt", "List"]

Table[Total[(70. \* Sqrt[b \* (z + 1)^3 + (1 - b)] - h)^2/i^2], {b, 0.22, 0.3, 0.001}]

A =

Table[Total[(1/erro^2) \* (5. \* Log[10, (desvio + 1) \* Table[NIntegrate[1/Sqrt[b \* (p + 1)^3 + (1 - b)], {p, 0, u}],

{u, desvio}]] - distancia + 42.38 - 5. \* Log[10, 0.7])^2], {b, 0.3, 0.31, 0.001}]

B =

Table[Total[(1/erro^2) \* (5. \* Log[10, (desvio + 1) \* Table[NIntegrate[1/Sqrt[b \* (p + 1)^3 + (1 - b)], {p, 0, u}],

{u, desvio}]] - distancia + 42.38 - 5. \* Log[10, 0.7])], {b, 0.27, 0.28, 0.001}]

c = Total[1/erro^2]

chi = A - B^2/c

Show[Plot[1/(E^((1/2) \* Total[(70. \* Sqrt[b \* (z + 1)^3 + (1 - b)] - h)^2/i^2))/E^(12.544/2)), {b, 0.2, 0.4}, PlotStyle->{Black, Dashed}],

```

Plot[1/(E^((1/2) * (Total[(5. * Log[10, (desvio + 1) * Table[NIntegrate[1/Sqrt[b * (p + 1)^3
+(1-b)], {p,0,u}], {u,desvio}]]-distancia+42.38-5.*Log[10,0.7])^2/erro^2] -
Total[(5. * Log[10, (desvio + 1) * Table[NIntegrate[1/Sqrt[b * (p + 1)^3 + (1 - b)], {p, 0, u}],
{u,desvio}]]-distancia+42.38-5.*Log[10,0.7])/erro^2]^2/19434.077091868632)/
E^(562.227/2), {b, 0.2, 0.4}, PlotStyle -> {Black, Thick}],
AxesLabel -> {Subscript[Ω, m], ℒ/Subscript[ℒ, máx]}]
RegionPlot[{Total[(70 * Sqrt[b * (z + 1)^3 + c] - h)^2/i^2] - 12.544 < 2.3,
Total[(70 * Sqrt[b * (z + 1)^3 + c] - h)^2/i^2] - 12.544 < 6.17,
Total[
(1/erro^2)*
(5. * Log[10, (desvio + 1) * Table[NIntegrate[1/Sqrt[b * (p + 1)^3 + c], {p, 0, u}], {u, desvio}]]
-distancia + 42.38 - 5. * Log[10, 0.7])^2] - 562.227 < 2.3,
Total[
(1/erro^2)*
(5. * Log[10, (desvio + 1) * Table[NIntegrate[1/Sqrt[b * (p + 1)^3 + c], {p, 0, u}], {u, desvio}]]
-distancia + 42.38 - 5. * Log[10, 0.7])^2] - 562.227 < 6.17,
{b, 0.2, 0.42}, {c, 0.4, 0.95}, FrameLabel->{Subscript[Ω, m], Subscript[Ω, Λ]}]
Needs["ErrorBarPlots"]
h1 = Table[{z[[e]], h[[e]], ErrorBar[i[[e]]]}, {e, 1, 19}]
huble1 = 70*Sqrt[0.3*(x + 1)^3 + 0.7]
Show[ErrorListPlot[h1, PlotStyle -> Black], Plot[{huble1}, {x, 0, 2}, PlotStyle->Blue],
AxesLabel -> {z, "H (z)"}, PlotRange->{{0, 2}, {0, 250}}]
p1 = Table[{{desvio[[e]], distancia[[e]], ErrorBar[erro[[e]]]}, {e, 1, 580}]
s1 = Table[{desvio[[e]], sn1[[e]], {e, 1, 580}]
NonlinearModelFit[s1, a * Log[x] + b, {a, b}, x]
Show[ErrorListPlot[p1, PlotStyle->Black],
Plot[2.3907594554983937 * Log[x] + 43.863786112571546, {x, 0.013, 1.5}, PlotStyle -> Blue],
PlotRange ->{{0, 1.5}, {33, 46}}]
D1 = D[huble1, {x}]
q1 = (D1*(x + 1))/huble1 - 1
Show[Plot[{q1}, {x, 0, 2}, PlotStyle -> Blue], AxesLabel -> {z, "q (z)"}, PlotRange ->
{{0, 2}, {-1.6, 0.8}}]
Solve[q1 == 0, x]

```

```
Show[Plot[(0.541*x)/(x + 1) - 1.091, {x, 0, 2}, PlotStyle -> {Orange, Dashed}],  
Plot[(0.5*x)/(x + 1) - 1.086, {x, 0, 2}, PlotStyle -> {Orange, Thick}], AxesLabel ->  
z, "ω(z)"]]
```



# Bibliografia

- [1] K. K. S. Wu, et al., “The Large-Scale Smoothness of the Universe”, *Nature*, v.397, n.6716, p.225-230, January, 1999.
- [2] P. Schneider, *Extragalactic Astronomy and Cosmology: An Introduction*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- [3] R. E. Souza, *Introdução à Cosmologia*. Editora da Universidade de São Paulo, Edusp, São Paulo - SP, 2004.
- [4] J. Foster, J. D. Nightingale, *A short course in General Relativity*. Produzido por Longman Group UK Limited, 1979.
- [5] A. Liddle, *An Introduction to Modern Cosmology, Second Edition*, Sussex, England: Jonh Wiley Sons Ltd., 2003.
- [6] B. Ryden, *Introduction to Cosmology*, San Francisco, United States of America: Addison Wesley, 2003.
- [7] E. W. Kolb, M. S. Turner, *The Early Universe*. Westview Press, 1990.
- [8] A. Einstein, “Cosmological considerations in the General Theory of Relativity”. *Setzungsber, Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math Phys)*, p.142-152, February 1917.
- [9] E. Hubble, “A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae”. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v.15, n.3, p.168-173, March 1929.
- [10] A. G. Riess, et al., “A 3% solution: determination of the Hubble Constant with the Hubble Space Telescope and Wide Field Camera 3”. *Astrophysical Journal*, v.730, n.2, p.119-175, March 2011.

- [11] A. Sandage, et al., “A Summary of the Hubble Space Telescope Program for the Luminosity Calibration of Type Ia Supernovae by Means of Cepheids”. *Astrophysical Journal*, v.653, n.2, p.843-900, August 2006.
- [12] C. M. Coelho, *Descontaminação dos mapas da Radiação Cósmica de Fundo feitos pelo satélite WMAP utilizando dados do radiotelescópio GEM*. dissertação de mestrado, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos - SP, 2008.
- [13] R. A. Alpher, C. R. Herman, “Remarks on the Evolution of the Expanding Universe”. *Physical Review*, v.75, p.1089-1095, April 1949.
- [14] F. A. Oliveira, Reduzindo o setor escuro do universo: uma nova cosmologia acelerada com a criação da matéria escura fria, dissertação de mestrado, Programa de Astronomia da Universidade de São Paulo, São Paulo - SP, 2010.
- [15] F. E. Silva, *Aceleração do universo e a criação gravitacional da matéria escura fria: novos modelos e testes observacionais*, tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal - RN, 2008.
- [16] E. M. Burbidge, et al., “Synthesis of the elements in stars”, *Reviews of Modern Physics*, v.29, n.4, p.547-650, October 1957.
- [17] G. Hinshaw et al., “Nine-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: cosmological parameter results”, *arXiv:1212.5226*, p.1-31, January 2013.
- [18] M. S. Turner, “Cosmology: Standard and Inflationary”, *Particle physics, Astrophysics and Cosmology XXIIth SLAC Summer Institute*, astro-ph/9703196, p.1-57, March 1997.
- [19] A. A. Penzias, R. W. Wilson, “A measurement of excess antenna temperature at 4080 Mc/s”, *Astrophysical Journal*, v.142, n.1, p.419-421, May 1965.
- [20] R. H. Dicke, et al., “Cosmic Black-Body Radiation”, *Astrophysical Journal*, v.142, n.1, p.414-418, May 1965.
- [21] J. C. Mather, et al., “A Preliminary Measurement of the Cosmic Microwave Background Spectrum by the Cosmic Background Explorer (COBE) Satellite”, *Astrophysical Journal*, v.354, p.L37-L40, May 1990.

- [22] C. L. Bennett, et al., “Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: final maps and results”, *arXiv: 1212.5225*, p.1-177, January 2012, Submetido ao Astrophysical Journal.
- [23] Planck Collaboration: P. A. R. Ade, et al., “Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results”, *arXiv: 1303.5062*, p.1-44, March 2013.
- [24] A. G. Riess, et al., “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant”, *Astrophysical Journal*, v.116, n.3, p.1009-1038, May 1998.
- [25] S. Perlmutter, et al., “Of the cosmological parameters  $\Omega$  and  $\Lambda$  from the measurements first seven supernovae at  $z \geq 0.35$ ”, *Astrophysical Journal*, v.438, n.2, p.565-581, July 1997.
- [26] B. Santos, et al., “Cosmology with Hu-Sawicki gravity in Palatini Formalism”, *Astronomy and Astrophysics*, v.548, n.A31, p.1-6, November 2012.
- [27] T. Biswas, A. Notari, “Testing the void against cosmological data: fitting CMB, BAO, SN and  $H_0$ ”, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v.2010, n.030, p.1-65, November 2010.
- [28] M. S. Turner, “Dark Energy and the New Cosmology”, *arXiv:astro-ph/0108103*, p.1-12, August 2001.
- [29] P. L. C. Oliveira, *Supernovae tipo Ia e Cosmologia*, dissertação de mestrado, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória - ES, 2010.
- [30] M. Turatto, “Classification of Supernovae”, *arXiv: astro-ph/0301107*, p.1-16, January 2003.
- [31] P. Ruiz-Lapuente, “Cosmological insights from supernovae”, *arXiv: astro-ph/9810423*, p.1-16, October 1998.
- [32] M. M. Phillips, “The absolute magnitudes of type Ia supernovae”, *Astrophysical Journal*, v.413, n.2, p.L105-L108, August 1993.
- [33] S. Perlmutter, et al., “Cosmology from type Ia supernovae”, *Bulletin of the American Astronomical Society* v.29, p.1351-1360, August 1997.

- [34] S. Perlmutter, et al., “Measurements of  $\Omega$  and  $\Lambda$  from 42 high-redshift supernovae” *Astrophysical Journal*, v.517, n.2, p.565-586, June 1999.
- [35] M. Hamuy, et al., “The absolute luminosities of the Calan/Tololo type Ia supernovae”, *Astronomical Journal*, v.112, p.2391-2412, December 1996.
- [36] M. Hamuy, et al., “A Hubble diagram of distance type Ia supernovae”, *Astronomical Journal*, v.109, p.1-13, January 1995.
- [37] A. G. Riess, et al., “A precise distance indicator: Type Ia Supernovae Multicolor Light-Curve shapes”, *Astrophysical Journal*, v.573, n.1 p.88-109, June 1996.
- [38] E. Komatsu, et al., “Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: cosmological interpretation”, *Astrophysical Journal Supplement Series*, v.1992, n.2, p.18-65, February 2011.
- [39] W. J. Percival, et al., “Baryon acoustic oscillations in the Sloan Digital Sky Survey Data Release 7 galaxy sample”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v.401, n.4, p.2148-2168, February 2010.
- [40] N. Suzuki, et al., “The Hubble Space Telescope cluster supernovae survey: V. improving the dark energy constraints above  $z > 1$  and building an early-type-hosted supernovae sample”, *Astrophysical Journal*, v.746, n.1, p.85-109, February 2012.
- [41] D. H. Weinberg, et al., “Observational Probes of Cosmic Acceleration”, *arXiv: 1201.2434*, p.1-289, March 2003.
- [42] S. van den Berg, “The Early History of Dark Matter”, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, v.111, n.760, p.657-670, June 1999.
- [43] R. Bernabei, et al., “Dark Matter search”, *Rivista del Nuovo Cimento*, v.26, n.1, p.1-77, July 2003.
- [44] L.V.E. Koopmans, T. Treu, “The structure and dynamics of luminous and dark matter in the early type lens galaxy of 0047-281 AT  $z = 0.485$ ”, *Astrophysical Journal*, v.583, n.2, p.606-615, February 2003.
- [45] F. Zwicky, “On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae”, *Astrophysical Journal*, v.26, n.3, p.217-246, October 1937.

- [46] S. Smith, “The mass of the Virgo Cluster”, *Astrophysical Journal*, v.83, p.23-30, September 1936.
- [47] V. C. Rubin, W. K. Ford Jr., “Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions”, *Astrophysical Journal*, v.159, p.379-404, February 1970.
- [48] T. S. van Albada, et al., “Distribution of dark matter in the spiral galaxy NGC 3198”, *Astrophysical Journal*, v.295, p.305-313, August 1985.
- [49] P. J. E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology*. Princeton Series in Physics, 1993.
- [50] S. Dodelson, *Modern cosmology*. Academic Press, 2003.
- [51] V. C. Bust, *Cosmologia na era da precisão: o Método de Dyer-Roeder e a influência das inomogeneidades nos testes cosmológicos*, tese de doutorado, Universidade de São Paulo - SP, 2013.
- [52] J. F. Jesus, *Energia escura e aceleração do universo: aspectos conceituais e testes observacionais*, tese de doutorado, Universidade de São Paulo, São Paulo - SP, 2010.
- [53] J. A. S. Lima, “Alternative Dark Energy Models: An Overview”, *Brazilian Journal of Physics*, v.34, n.1a, p.194-205, March 2004.
- [54] J. M. Silva, *Dinâmica estocástica e Cosmologia: alguns resultados analíticos*, tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal - RN, 2008.
- [55] R. S. Ribeiro, *Modelos Alternativos para a energia escura*, dissertação de mestrado, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória - ES, 2007.
- [56] M. Bilicki, M. Seikel, “We do not in the  $R_h = ct$  universe”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v.425, n.3, p.1664-1668, September 2012.
- [57] L. Sodré Jr., “Cosmology with large galaxy redshift surveys”, *AIP Conference Proceedings*, v.1471, p.22-26, August 2012.
- [58] M. Bordag, U. Mohideen, V. M. Mostepanenko, “New developments in the Casimir Effect”, *Physics Reports*, v.355, p.1-205, October 2001.
- [59] Ya B Zel’dovich, “Vaccum Theory: a possible solution to the singularity problem of cosmology”, *Soviet Physics Uspekhi*, v.24, n.3, p.216-230, March 1981.

- [60] Y. J. Ng, “The Cosmological Constant Problem”, *International Journal of Modern Physics D*, v.1, n.1, p.145-160, January 1992.
- [61] A.D. Dolgov, “The Problem of Vacuum Energy and Cosmology”, *A lecture presented at the 4th Colloque Cosmologie, Paris to be published in the Proceedings*. arXiv: astro-ph/9708045, p.1-15, August, 1997.
- [62] S. Weinberg, “The constant cosmological problem”, *Reviews Modern Physics*, v.61, n.1, p.1-23, January 1989.
- [63] S. M. Carroll, W. H. Press, E. L. Turner, “The cosmological constant”, *Living Reviews in Relativity*, v.3, p.1-39, February 2001.
- [64] M. Turner, M. White, “CDM models with a smooth component”, *Physical Review D*, v.56, n.8, p.R4439-R4443, October 1997.
- [65] Y. Chen, B. Ratra, “Hubble parameter data constraints on dark energy”, *Physics Letters B*, v.703, n.4, p.406-411, September 2011.
- [66] K. Shi, Y. Huang, T. Lu, “A comprehensive comparison of cosmological models from latest observational data”, *arXiv: 1207.5875*, p.1-17, July 2012.
- [67] K. Shi, Y. F. Huang, T. Lu, “Constraining dark energy using observational growth rate data”, *Physics Letters B*, v.717, n.4-5, p.299-306, October 2012.
- [68] R. Cai, Z. Tuo, “Direction dependence of the deceleration parameter”, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v.2012, n.4, p.1-11, February 2012.
- [69] S. Cao, et al., ”Constraints on cosmological models from strong gravitational lensing systems” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v.2012, n.16, p.1-18, March 2012.
- [70] R. R. Caldwell, E. V. Linder, “Limits of Quintessence”, *Physical Review Letters*, v.95, n. 14, p.1301-1305, September 2005.
- [71] Vinod B. Johri, P. K. Rath, “Parametrization of dark energy equation of state Revisited”, *International Journal of Modern Physics*, v.A16, p.1581-1591, August 2007.

- [72] M. Chevallier, D. Polarski, “Accelerating universes with scaling dark matter”, *International Journal of Modern Physics*, v.D10, n.2, p.213-223, April 2001.
- [73] E. V. Linder, “Exploring the expansion history of the universe”, *Physical Review Letters*, v.90, n.9, p.1301-1035, March 2003.
- [74] M. Moresco, et al., “New constraints on cosmological parameters and neutrino properties using the expansion rate of the universe to  $z \approx 1.75$ ”, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v.2012, n.53, p.1-21, July 2012.
- [75] R. Jimenez, A. Loeb, “Constraining cosmological parameters based on relative galaxy ages”, *Astrophysical Journal*, v.573, n.1, p.37-42, July 2002.
- [76] M. Moresco, et al., “Improved constraints on the expansion rate of the universe up to  $z \approx 1.1$  from the spectroscopic evolution of cosmic chronometers”, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v.2012, n.6, p.1-37, August 2012.
- [77] D. Stern , et al., “Cosmic chronometers: constraining the equation of state of dark energy. I:  $H(z)$  measurements” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v.2010, n.8, p.1-27, February, 2010.
- [78] J. Guy, et al., “SALT2: using distant supernovae to improve the use of type Ia supernovae as distance indicators”, *Astronomy and Astrophysics*, v.466, p.11-21, February 2007.
- [79] G. R. Bengochea, “Supernova light-curve fitters and dark energy”, *Physics Letters B*, v.696, p.5-13, February, 2011.
- [80] S. Nesseris, L. Perivolaropoulos, “Comparison of the Legacy and Gold SNIa dataset constraints on dark energy models”, *Physical Review* v.D72, n.12, p.3519-3527, December 2005.
- [81] B. L. Lago, et al, “Type Ia supernova parameter estimation: a comparison of two approaches using current datasets”, *arXiv: 1104.2874*, p.1-16, October 2011.
- [82] W. H. Press, et al.; *Numerical recipes in FORTRAN*. The art of scientific computing, 1992.

- [83] Omer F., et al.; “Binned Hubble parameter measurements and the cosmological deceleration - acceleration transition”, *arXiv: 1305.1957*, p.1-22, May 2013.