

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

**Aspectos de teoria quântica de campos
com efeitos randômicos**

Giancarlo Thales Camilo da Silva

ITAJUBÁ, MARÇO DE 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

Giancarlo Thales Camilo da Silva

**Aspectos de teoria quântica de campos
com efeitos randômicos**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física e Matemática Aplicada como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Física e Matemática Aplicada

Área de Concentração: Teoria Quântica de Campos

Orientador: Prof. Dr. Fabrício Augusto Barone Rangel

MARÇO DE 2013

ITAJUBÁ-MG

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Mauá –
Bibliotecária Margareth Ribeiro- CRB_6/1700

S586a

Silva, Giancarlo Thales Camilo da
Aspectos de teoria quântica de campos com efeitos randômicos
/ Giancarlo Thales Camilo da Silva. -- Itajubá, (MG) : [s.n.],
2013.
98 p. : il.

Orientador: Prof. Dr. Fabrício Augusto Barone Rangel.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Itajubá.

1. Flutuações randômicas. 2. Campo escalar. 3. Violação da
simetria de Lorentz. 4. Vetor de fundo. I. Rangel, Fabrício Au-
gusto Barone, orient. II. Universidade Federal de Itajubá. III.
Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

Giancarlo Thales Camilo da Silva

**Aspectos de teoria quântica de campos
com efeitos randômicos**

Dissertação aprovada por banca examinadora em 28 de fevereiro de 2013, conferido ao autor o título de **Mestre em Ciências em Física e Matemática Aplicada**

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Fabrício Augusto Barone Rangel (Orientador)

Prof. Dr. José Abdalla Helayel-Neto

Prof. Dr. Vitorio Alberto de Lorenci

ITAJUBÁ-MG

2013

*A meus pais, Carlos e Maristela, com enorme gratidão,
por tudo o que fizeram e ainda fazem por mim.*

Agradecimentos

Ao professor Fabrício Augusto Barone Rangel, pelos vários anos de convivência e orientação fechados com chave de ouro por este trabalho de mestrado. Sempre paciente e solícito, é talvez o grande responsável (ou culpado, depende do ponto de vista) por eu ter seguido os caminhos da física teórica.

A todos os docentes do programa de mestrado em Física pelo ótimo ambiente acadêmico criado e pela excelente formação profissional por eles proporcionada a mim e aos demais discentes. Em particular, agradeço ao professor Vitorio de Lorenci, modelo de professor e pesquisador, pelos diversos conselhos e pelas discussões sempre estimulantes.

A cada um dos colegas de mestrado e da eterna república Smurf, companheiros nos bons e maus momentos sempre com muito bom humor, dentre os quais há grandes amigos que eu gostaria de reencontrar sempre que possível. Certamente, destes anos em Itajubá levo comigo apenas lembranças boas.

Ao meu irmão Giulio, sempre companheiro, mesmo distante.

Por último, mas não menos importante, à minha grande amiga e namorada Marina. Pela companhia sempre agradável, pelo apoio incondicional, pelas conversas, pelos sorrisos, ou simplesmente por existir e fazer parte da minha vida. Muito obrigado!

*“To see a world in a grain of sand
And a heaven in a wild flower,
Hold infinity in the palm of your hand
And eternity in an hour.”*

William Blake

Resumo

Neste trabalho, investigamos dois modelos distintos de teorias quânticas de campos com efeitos randômicos. No primeiro, que consiste em um modelo bem conhecido na literatura de um campo de Klein-Gordon com flutuações randômicas na velocidade e na massa, estudamos as correções de ordem mais baixa nos parâmetros de randomicidade para as energias de interação entre distribuições estáticas de cargas concentradas em regiões D -dimensionais do espaço-tempo. Como casos particulares, obtemos as correções randômicas em $3 + 1$ dimensões à interação Coulombiana entre duas cargas pontuais, à interação entre linhas de cargas, entre planos carregados, e entre dipolos. Na segunda parte do trabalho, estudamos uma modificação da eletrodinâmica de Maxwell que mantém a invariância de calibre mas quebra a invariância de Lorentz devido à presença de um vetor de fundo que flutua randomicamente. Após obter a correção perturbativa de ordem mais baixa ao propagador de Maxwell, estudamos suas consequências sob o espectro do átomo de Hidrogênio e sob o potencial de um solenóide infinito. Em particular, as correções randômicas ao espectro do Hidrogênio são comparadas com os presentes dados experimentais com o intuito de estabelecer um limite superior para a magnitude dos efeitos de quebra de simetria de Lorentz.

Palavras-chave: Flutuações randômicas, Campo escalar, Violação da simetria de Lorentz, Vetor de fundo.

Abstract

In this work, we explore two models of quantum field theory with random effects. Firstly, we present a model of the well known Klein-Gordon field with random fluctuations in both the speed of propagation and the mass; then, we study the lowest order random corrections to the interaction energies between static charge distributions concentrated along D -dimensional regions of spacetime. As particular cases, we obtain the random corrections in $3 + 1$ dimensions to the Coulomb interaction between point charges and to the interaction between charged lines and planes, and dipoles. The second part of the work is devoted to the study of a gauge invariant modification of Maxwell electrodynamics which breaks Lorentz invariance due to a randomly fluctuating background vector. After obtaining the lowest order perturbative correction to the Maxwell propagator, we study its consequences to the spectrum of the Hydrogen atom and to the potential of an infinite solenoid. In particular, the random corrections to the Hydrogen spectrum are compared with current experimental data in order to establish an upper limit for the magnitude of the Lorentz breaking effects.

Keywords: Random fluctuations, Scalar field, Lorentz symmetry breaking, Background vector.

Conteúdo

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Introdução	1
1 Campo escalar em um fluido randômico	4
1.1 O modelo	4
1.2 Lagrangeana efetiva para efeitos randômicos de 2ª ordem em $D = 3$	10
1.3 Interação entre fontes tipo delta no modelo escalar randômico	15
1.3.1 A contribuição livre $\mathcal{E}_{int}^{(0)}$	18
1.3.2 A correção randômica $\mathcal{E}_{int}^{(1)}$	20
1.3.3 Algumas situações particulares	22
1.4 Interação entre fontes do tipo derivadas da delta: distribuição de dipolos generalizada	28
1.4.1 A contribuição livre $\mathcal{E}_{int}^{(0)}$	29
1.4.2 A correção randômica $\mathcal{E}_{int}^{(1)}$	31
1.4.3 Caso particular: dipolos pontuais em $d + D = 3$ dimensões espaciais	33
2 Eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw e violação da simetria de Lorentz	36
2.1 O modelo de CFJ	38
2.2 Equações dinâmicas e soluções	40
2.3 Resultados experimentais e a intensidade do vetor fundo	46

3	Modelo de CFJ randômico com invariância de calibre	49
3.1	Preliminares	49
3.2	O modelo proposto	50
3.3	Interação entre cargas no modelo de CFJ randômico	53
3.3.1	O termo livre: interação Coulombiana	54
3.3.2	A correção randômica	55
3.4	Átomo de Hidrogênio no modelo de CFJ randômico	58
3.4.1	Correções randômicas aos níveis de energia $E_n^{(0)}$	60
3.4.2	Correções nas frequências de transição e comparação com os dados experimentais	64
3.5	A presença de um solenóide infinito no modelo de CFJ randômico	70
	Conclusões e Perspectivas	76
	Apêndice A Variáveis e campos randômicos: uma revisão	78
A.1	Variáveis randômicas Gaussianas	78
A.2	Campos randômicos Gaussianos	82
	Apêndice B	84
B.1	A série de Dyson	84
B.2	A Função de Green livre $G^{(0)}(x, x')$	85
B.3	O funcional gerador $Z[J]$	86
B.4	Algumas integrais úteis	87
	Apêndice C	91
C.1	Cálculo de $G^{(1)\mu\nu}(x, x')$	91
C.2	O propagador livre $G^{(0)\mu\nu}(x, x')$	93
C.3	Forma explícita de $G^{(1)\mu\nu}(x, x')$ no calibre de Feynman	93
C.4	Correção randômica $\mathbf{A}_{sol}^{(1)\mu}$ no potencial do solenóide	94
	Bibliografia	97

Introdução

O uso de ideias advindas da teoria de probabilidade em física tem se mostrado, ao longo dos anos, de fundamental importância para o entendimento de vários conceitos físicos, dentre os quais podemos citar entropia, movimento Browniano e basicamente toda a teoria quântica. De fato, existem duas classes distintas de efeitos probabilísticos que aparecem com frequência em física.

A primeira classe corresponde à chamada probabilidade clássica e seu cenário principal consiste no estudo de mecânica estatística. Visto que todo objeto macroscópico é constituído, microscopicamente, por um número de átomos pelo menos da ordem de 10^{23} , descrevê-lo completamente baseado no efeito individual de cada átomo se torna impossível; ao invés disso, é mais conveniente ignorar cada um dos átomos individuais e apelar para uma descrição estatística do efeito coletivo produzido por todos os átomos constituintes do material. Com esta descrição estatística é possível entender de maneira consistente a grande maioria dos objetos macroscópicos baseado em seus constituintes microscópicos e, por esta razão, a mecânica estatística consiste em uma das teorias mais fundamentais da física.

A segunda classe de efeitos probabilísticos comuns em física é conhecida como probabilidade quântica, e corresponde a um tipo de probabilidade intrínseca ao sistema físico, independente da nossa ignorância na descrição do sistema. É algo que está contido, inevitavelmente, em todas as teorias que lidam com aspectos quânticos, desde a mecânica quântica em si até as mais complicadas teorias quânticas de campos conhecidas atualmente. Até mesmo para uma única partícula quântica, devemos recorrer a probabilidades para descrever suas propriedades físicas. A função de onda de uma partícula em mecânica quântica, por exemplo, que contém toda informação disponível acerca da mesma, é interpretada como a amplitude de probabilidade de encontrar a partícula em uma determinada região do espaço. Em um certo sentido, podemos afirmar que a natureza é inerentemente probabilística no regime da teoria quântica.

Além destas aplicações “canônicas” de conceitos de estatística e teoria de probabilidades em física, recentemente tem havido um crescente interesse, principalmente na física teórica, pelo estudo de certos fluidos com propriedades estatísticas randômicas. A motivação por trás deste fato está em um dos principais problemas em aberto atualmente, que é a procura por uma teoria capaz de unificar a teoria da relatividade geral de Einstein com a teoria quântica na escala de altíssimas energias onde ambas as teorias se tornam relevantes (a chamada teoria de *gravitação quântica*). Acredita-se que um possível efeito característico de tal teoria quântica da gravidade seria a presença de flutuações quânticas na métrica do espaço-tempo, e trabalhos recentes [4, 5] sugerem que tais efeitos, se existirem de fato, poderiam ser simulados no laboratório em um modelo análogo baseado no estudo de ondas sonoras se propagando em fluidos randômicos (fluidos cujo índice de refração flutua randomicamente de ponto a ponto no espaço).

De maneira mais geral, após o aparecimento destes trabalhos, acredita-se que este tipo de meio com propriedades randômicas pode servir como modelo análogo também para outras classes de efeitos característicos de teoria quântica de campos, sugerindo uma investigação mais profunda e ampla sobre campos quânticos com efeitos randômicos. Por exemplo, foi demonstrado recentemente que meios randômicos podem ser explorados para estudar efeitos de fronteiras em teoria quântica de campos [6], bem como para simular efeitos taquiônicos através da propagação de sinais supersônicos [7].

O objetivo deste trabalho é contribuir para esta análise geral de campos quânticos com aspectos randômicos, não necessariamente relacionados com gravitação. O trabalho é dividido em 2 partes independentes e é estruturado da seguinte maneira: a primeira parte, que corresponde ao Capítulo 1, consiste em um estudo de algumas consequências físicas do modelo de campo de Klein-Gordon com flutuações randômicas na velocidade de propagação e na massa apresentado na referência [5]. Em especial, calculamos as correções decorrentes destas flutuações para a energia de interação entre distribuições estacionárias de cargas e de dipolos, ambas concentradas em regiões D -dimensionais do espaço-tempo, seguindo a linha da discussão utilizada em [8].

A segunda parte do trabalho é apresentada nos Capítulos 2 e 3, e corresponde a uma tentativa de utilizar flutuações randômicas para estudar o problema da violação da simetria de Lorentz devido à presença de um vetor de fundo. Em específico, no Capítulo 2, realizamos uma breve revisão da chamada eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw (CFJ), bem conhecida na

literatura por ser a primeira proposta de modelo com quebra da simetria de Lorentz (e simetria de paridade) devido à presença de um quadrivetor de fundo permeando o espaço e definindo uma quadridireção privilegiada no espaço-tempo. Na sequência, no Capítulo 3, apresentamos uma proposta alternativa de eletrodinâmica com violação de Lorentz e investigamos algumas de suas consequências físicas sobre dois sistemas em especial, a saber, o átomo de Hidrogênio e um solenóide infinito. Esta proposta é bastante similar e inspirada pelo modelo de CFJ, mas leva em conta um vetor de fundo que flutua randomicamente ao longo do espaço-tempo em torno de um valor médio nulo (coincidindo em média, portanto, com a eletrodinâmica de Maxwell). A esperança é de que este modelo possa, de alguma forma, ser explorado em sistemas de matéria condensada com propriedades randômicas (como, por exemplo, a classe de fluidos randômicos mencionados anteriormente) e, talvez, tornar o problema da quebra da simetria de Lorentz acessível no laboratório.

Por fim, o trabalho é encerrado com as conclusões e perspectivas futuras.

Antes de dar início, porém, recomendamos ao leitor uma leitura do Apêndice A, onde realizamos uma pequena revisão de algumas propriedades gerais a respeito de variáveis e funções (ou campos) randômicas. A razão pela qual optamos por apresentar esta revisão é que estes objetos serão utilizados extensivamente ao longo deste trabalho e seu uso (principalmente o de campos randômicos) pode não ser muito familiar para o leitor. Todavia, embora possa ser útil para elucidar alguns pontos, a leitura do referido apêndice não se faz essencial para a sequência do trabalho e pode ser omitida sem grandes problemas.

Capítulo 1

Campo escalar em um fluido randômico

Neste capítulo apresentamos um modelo de campo escalar em um meio randômico inhomogêneo caracterizado por flutuações randômicas estacionárias na velocidade de propagação e na massa do campo. Campos quânticos em fluidos deste tipo têm sido muito estudados recentemente no contexto de modelos análogos para possíveis efeitos de gravitação quântica, tais como flutuações quânticas na métrica do espaço-tempo [4, 5], bem como para efeitos de fronteiras [6] e efeitos taquiônicos [7] em teoria quântica de campos. O objetivo deste capítulo é estudar as consequências das flutuações randômicas do modelo escalar em questão para a interação entre distribuições estáticas de fontes externas concentradas ao longo de branas paralelas com um número arbitrário de codimensões. Este estudo será feito empregando os mesmos procedimentos utilizados nas referências [8, 9].

1.1 O modelo

Consideremos um campo escalar $\varphi(x)$ definido em um espaço-tempo de Minkowski $(D+1)$ -dimensional com coordenadas $x = (t, \mathbf{x})$ e $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^D)$, que satisfaz à equação de Klein-Gordon com flutuações randômicas na velocidade e na massa (em unidades $\hbar = c = 1$):

$$\left[(1 + \mu(\mathbf{x})) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + (1 + \xi(\mathbf{x})) m_0^2 \right] \varphi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (1.1)$$

Aqui, $\mu(\mathbf{x})$ e $\xi(\mathbf{x})$ são funções tomadas como sendo campos randômicos estacionários (i.e., independentes do tempo t), adimensionais e mutuamente independentes, cujas propriedades

estatísticas serão apresentadas a seguir. Note que $\mu(\mathbf{x})$ é responsável por flutuações na velocidade de propagação do campo e fornece um tipo de estrutura causal randômica (cone de luz flutuante) ao modelo [4]. A função $\xi(\mathbf{x})$, por sua vez, leva em conta flutuações randômicas na massa do campo em torno do valor médio m_0 .

Uma escolha comum na literatura para os campos randômicos μ, ξ se caracteriza pelas seguintes propriedades estatísticas:

- Média nula:

$$\langle \mu(\mathbf{x}) \rangle_{\mu} = 0 \quad (1.2a)$$

$$\langle \xi(\mathbf{x}) \rangle_{\xi} = 0 \quad (1.2b)$$

- Média quadrática não nula:

$$\langle \mu(\mathbf{x})\mu(\mathbf{x}') \rangle_{\mu} = \sigma_{\mu}^2 f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (1.3a)$$

$$\langle \xi(\mathbf{x})\xi(\mathbf{x}') \rangle_{\xi} = \sigma_{\xi}^2 f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (1.3b)$$

- Distribuição Gaussiana:

$$\langle \mu(\mathbf{x}_1)\mu(\mathbf{x}_2) \cdots \mu(\mathbf{x}_{2n+1}) \rangle_{\mu} = 0 \quad (1.4a)$$

$$\langle \mu(\mathbf{x}_1)\mu(\mathbf{x}_2) \cdots \mu(\mathbf{x}_{2n}) \rangle_{\mu} = \langle \mu(\mathbf{x}_1)\mu(\mathbf{x}_2) \rangle_{\mu} \cdots \langle \mu(\mathbf{x}_{2n-1})\mu(\mathbf{x}_{2n}) \rangle_{\mu} + \text{permutações} \quad (1.4b)$$

e analogamente para ξ .

Os símbolos $\langle \cdots \rangle_{\mu}$ e $\langle \cdots \rangle_{\xi}$ denotam médias sobre todas as possíveis formas para as funções randômicas μ, ξ , i.e., médias no *ensemble* de flutuações, e as constantes $\sigma_{\mu}, \sigma_{\xi}$ caracterizam a intensidade destas flutuações. A chamada função de correlação $f(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ deve depender apenas da diferença $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ entre os pontos com o intuito de preservar a homogeneidade espacial.

Como a equação de Klein-Gordon randômica é linear, é válido recorrer a transformadas de Fourier na busca por suas soluções. Escrevendo

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d\omega d^D \mathbf{k}}{2\pi(2\pi)^D} e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \tilde{\varphi}(\omega, \mathbf{k}) \quad (1.5a)$$

$$\mu(\mathbf{x}) = \int \frac{d^D \mathbf{k}}{(2\pi)^D} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \tilde{\mu}(\mathbf{k}) \quad (1.5b)$$

$$\xi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^D \mathbf{k}}{(2\pi)^D} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \tilde{\xi}(\mathbf{k}), \quad (1.5c)$$

é fácil obter, após algumas manipulações simples, a seguinte versão para a equação (1.1) no espaço dos momenta:

$$\int d^D \mathbf{k}' [L^{(0)}(\omega; \mathbf{k}, \mathbf{k}') + L^{(1)}(\omega; \mathbf{k}, \mathbf{k}')] \tilde{\varphi}(\omega; \mathbf{k}') = 0 \quad , \quad (1.6)$$

onde $L^{(0)}$ e $L^{(1)}$ são os operadores definidos por

$$L^{(0)}(\omega; \mathbf{k}, \mathbf{k}') = (\omega^2 - \mathbf{k}^2 - m_0^2) \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (1.7a)$$

$$L^{(1)}(\omega; \mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{1}{(2\pi)^D} \left(\tilde{\mu}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \omega^2 - \tilde{\xi}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') m_0^2 \right) . \quad (1.7b)$$

Note que $L^{(0)}$ contém apenas termos independentes das variáveis randômicas μ, ξ e, portanto, é uma “matriz” de natureza não estocástica. A matriz $L^{(1)}$, por outro lado, é de natureza estocástica e será afetada pelas médias no ensemble de ruídos nos cálculos a seguir ¹.

Por meio de uma transformada de Fourier inversa nas coordenadas espaciais $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{x}$ é também direto obter os análogos das equações (1.6,1.7) no espaço \mathbf{x} :

$$[L^{(0)}(\omega; \mathbf{x}) + L^{(1)}(\omega; \mathbf{x})] \varphi(\omega; \mathbf{x}) = 0 \quad (1.8)$$

e

$$L^{(0)}(\omega; \mathbf{x}) = \omega^2 + \nabla^2 - m_0^2 \quad (1.9a)$$

$$L^{(1)}(\omega; \mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) \omega^2 - \xi(\mathbf{x}) m_0^2 . \quad (1.9b)$$

É interessante notar que a matriz $L^{(0)}$ é diagonal no espaço \mathbf{k} , diferentemente de $L^{(1)}$. No espaço \mathbf{x} , porém, os papéis se invertem: $L^{(1)}$ passa a ser uma matriz diagonal enquanto $L^{(0)}$ não mais o é.

Em termos dos operadores $L^{(0)}$ e $L^{(1)}$ introduzidos acima a equação de Klein-Gordon randômica pode ser escrita como

$$(L^{(0)} + L^{(1)}) \varphi(\omega; \bullet) = 0 \quad , \quad (1.10)$$

onde “ \bullet ” representa \mathbf{x} ou \mathbf{k} (no caso de \mathbf{k} , a igualdade (1.10) deve ser entendida como o núcleo de uma integral de convolução, como em (1.6)).

¹A notação estabelecida acima será mantida durante todo o texto: sobreíndices “⁽⁰⁾” denotam grandezas livres de randomicidade, enquanto sobreíndices “⁽¹⁾” denotam grandezas que estão associadas a flutuações randômicas.

Da equação (1.10) podemos definir a função de Green G da teoria como

$$G = (L^{(0)} + L^{(1)})^{-1} , \quad (1.11)$$

a qual, como é bem conhecido no estudo de teorias quânticas de campos [10], contém toda informação sobre as quantidades físicas associadas ao campo.

Supondo que a intensidade dos ruídos $\sigma_\mu^2, \sigma_\xi^2$ seja suficientemente pequena de forma que (simbolicamente) $L^{(1)} \ll L^{(0)}$, podemos encontrar a função de Green G perturbativamente por meio de uma série de Dyson (veja Apêndice B):

$$\begin{aligned} G &= G^{(0)} - G^{(0)}L^{(1)}G^{(0)} + G^{(0)}L^{(1)}G^{(0)}L^{(1)}G^{(0)} + \dots \\ &= G^{(0)} - G^{(0)}\Sigma^{(1)}G^{(0)} , \end{aligned} \quad (1.12)$$

onde definimos os operadores $G^{(0)} = (L^{(0)})^{-1}$ (que nada mais é que a função de Green livre) e $\Sigma^{(1)} = L^{(1)} - L^{(1)}G^{(0)}L^{(1)} + \dots$ (que, como veremos adiante, está relacionado à autoenergia do campo provinda das flutuações randômicas). Explicitamente, na representação de coordenadas \mathbf{x} a equação (1.12) para a função de Green corresponde a

$$\begin{aligned} G(\omega; \mathbf{x}, \mathbf{x}') &= G^{(0)}(\omega; \mathbf{x}, \mathbf{x}') - \int d^D \mathbf{x}_1 G^{(0)}(\omega; \mathbf{x}, \mathbf{x}_1) L^{(1)}(\omega; \mathbf{x}_1) G^{(0)}(\omega; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}') \\ &+ \int d^D \mathbf{x}_1 d^D \mathbf{x}_2 G^{(0)}(\omega; \mathbf{x}, \mathbf{x}_1) L^{(1)}(\omega; \mathbf{x}_1) G^{(0)}(\omega; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) L^{(1)}(\omega; \mathbf{x}_2) G^{(0)}(\omega; \mathbf{x}_2, \mathbf{x}') + \dots \end{aligned} \quad (1.13)$$

O próximo passo corresponde a tomar a média da equação (1.13) no ensemble de flutuações para as variáveis randômicas $\mu(\mathbf{x}), \xi(\mathbf{x})$ para obter a função de Green média ², isto é,

$$\langle G \rangle = G^{(0)} - G^{(0)} \langle L^{(1)} \rangle G^{(0)} + G^{(0)} \langle L^{(1)} G^{(0)} L^{(1)} \rangle G^{(0)} + \dots .$$

Utilizando as relações (1.2,1.3,1.4) e a definição de $L^{(1)}(\omega; \mathbf{x})$ é fácil ver que $\langle L^{(1)}(\omega; \mathbf{x}) \rangle = 0$ ou, de forma mais geral, $\langle (L^{(1)})^{2n+1} \rangle = 0$ para $n \in \mathbb{N}$. Neste caso, segue que

$$\langle G(\omega; \mathbf{x}, \mathbf{x}') \rangle = G^{(0)}(\omega; \mathbf{x}, \mathbf{x}') + G^{(1)}(\omega; \mathbf{x}, \mathbf{x}') , \quad (1.14)$$

²É importante mencionar aqui que tomar a média sobre as flutuações neste ponto (i.e., na construção da função de Green) é apenas uma escolha conveniente para simplificar os cálculos. Poderíamos igualmente bem prosseguir com a análise utilizando a função de Green G da equação (1.13), construir em seguida as quantidades físicas a partir desta função de Green e, apenas no final do processo, tomar a média randômica diretamente sobre as quantidades físicas resultantes. Todos os resultados físicos obtidos no presente capítulo seriam exatamente os mesmos.

onde $G^{(1)}(\omega; \mathbf{x}, \mathbf{x}')$ é a correção randômica de ordem mais baixa à função de Green livre, dada por (omitindo a dependência em ω)

$$\begin{aligned} G^{(1)}(; \mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \int d^D \mathbf{x}_1 d^D \mathbf{x}_2 G^{(0)}(; \mathbf{x}, \mathbf{x}_1) \langle L^{(1)}(; \mathbf{x}_1) G^{(0)}(; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) L^{(1)}(; \mathbf{x}_2) \rangle G^{(0)}(; \mathbf{x}_2, \mathbf{x}') + \mathcal{O}(4) \\ &\approx (\sigma_\mu^2 \omega^4 + \sigma_\xi^2 m_0^4) \int d^D \mathbf{x}_1 d^D \mathbf{x}_2 G^{(0)}(; \mathbf{x}, \mathbf{x}_1) G^{(0)}(; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) G^{(0)}(; \mathbf{x}_2, \mathbf{x}') . \end{aligned}$$

Como ambas as funções $G^{(0)}(\omega; \mathbf{x}, \mathbf{x}')$ e $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ dependem apenas da diferença entre os pontos $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$, elas admitem uma expansão de Fourier em $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ similar às (1.5b) e (1.5c). Depois de introduzir as expansões de Fourier de $G^{(0)}$ e f na expressão acima, integrar sobre $d^D \mathbf{x}_1 d^D \mathbf{x}_2$ para obter duas funções delta de Dirac no espaço dos momenta (a saber, $\delta(\mathbf{k}) = \int d^D \mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$), chegamos em:

$$\begin{aligned} G^{(1)}(; \mathbf{x}, \mathbf{x}') &= (\sigma_\mu^2 \omega^4 + \sigma_\xi^2 m_0^4) \int \frac{d^D \mathbf{k}_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D \mathbf{k}_2}{(2\pi)^D} \frac{d^D \mathbf{k}_3}{(2\pi)^D} \frac{d^D \mathbf{k}_4}{(2\pi)^D} e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}} e^{-i\mathbf{k}_4 \cdot \mathbf{x}'} \tilde{G}^{(0)}(; \mathbf{k}_1) \tilde{G}^{(0)}(; \mathbf{k}_2) \\ &\quad \cdot \tilde{f}(\mathbf{k}_3) \tilde{G}^{(0)}(; \mathbf{k}_4) (2\pi)^D \delta^3(-\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) (2\pi)^D \delta^3(-\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) . \end{aligned}$$

Integrando agora sobre $d^D \mathbf{k}_3 d^D \mathbf{k}_4$, o que corresponde a fazer $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ e $\mathbf{k}_4 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1$, resulta em

$$G^{(1)}(; \mathbf{x}, \mathbf{x}') = (\sigma_\mu^2 \omega^4 + \sigma_\xi^2 m_0^4) \int \frac{d^D \mathbf{k}_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D \mathbf{k}_2}{(2\pi)^D} e^{i\mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \tilde{G}^{(0)}(; \mathbf{k}_1) \tilde{G}^{(0)}(; \mathbf{k}_2) \tilde{f}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \tilde{G}^{(0)}(; \mathbf{k}_1) .$$

Renomeando os índices $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}$ e $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}'$, segue finalmente que

$$G^{(1)}(\omega; \mathbf{x}, \mathbf{x}') = \int \frac{d^D \mathbf{k}}{(2\pi)^D} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \tilde{G}^{(1)}(\omega; \mathbf{k}) , \quad (1.15)$$

onde

$$\tilde{G}^{(1)}(\omega; \mathbf{k}) = \tilde{G}^{(0)}(\omega; \mathbf{k}) \left[(\sigma_\mu^2 \omega^4 + \sigma_\xi^2 m_0^4) \int \frac{d^D \mathbf{k}'}{(2\pi)^D} \tilde{G}^{(0)}(\omega; \mathbf{k}') \tilde{f}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \right] \tilde{G}^{(0)}(\omega; \mathbf{k}) \quad (1.16)$$

é a transformada de Fourier de $G^{(1)}(\omega; \mathbf{x}, \mathbf{x}')$. Note que a expressão acima pode ser apresentada de maneira consistente com a segunda linha da equação (1.12), a saber,

$$\tilde{G}^{(1)}(\omega; \mathbf{k}) = -\tilde{G}^{(0)}(\omega; \mathbf{k}) \Sigma^{(1)}(\omega; \mathbf{k}) \tilde{G}^{(0)}(\omega; \mathbf{k}) ,$$

se definirmos

$$\Sigma^{(1)}(\omega; \mathbf{k}) = -(\sigma_\mu^2 \omega^4 + \sigma_\xi^2 m_0^4) \int \frac{d^D \mathbf{k}'}{(2\pi)^D} \tilde{G}^{(0)}(\omega; \mathbf{k}') \tilde{f}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') . \quad (1.17)$$

A interpretação de $\Sigma^{(1)}(\omega; \mathbf{k})$ acima fica clara ao analisarmos a função de Green média $\langle G \rangle$ no espaço dos momenta:

$$\langle \tilde{G}(\omega; \mathbf{k}) \rangle = \tilde{G}^{(0)}(\omega; \mathbf{k}) + \tilde{G}^{(1)}(\omega; \mathbf{k})$$

O operador inverso é dado por

$$\begin{aligned} \langle \tilde{G}(\omega; \mathbf{k}) \rangle^{-1} &= \left(\tilde{G}^{(0)}(\omega; \mathbf{k}) + \tilde{G}^{(1)}(\omega; \mathbf{k}) \right)^{-1} \\ &= \left(\tilde{G}^{(0)}(\omega; \mathbf{k}) \right)^{-1} - \left(\tilde{G}^{(0)}(\omega; \mathbf{k}) \right)^{-1} \tilde{G}^{(1)}(\omega; \mathbf{k}) \left(\tilde{G}^{(0)}(\omega; \mathbf{k}) \right)^{-1} + \mathcal{O}(\sigma^4) \\ &\approx \left(\tilde{G}^{(0)}(\omega; \mathbf{k}) \right)^{-1} - \left(\tilde{G}^{(0)}(\omega; \mathbf{k}) \right)^{-1} \left[-\tilde{G}^{(0)}(\omega; \mathbf{k}) \Sigma^{(1)}(\omega; \mathbf{k}) \tilde{G}^{(0)}(\omega; \mathbf{k}) \right] \left(\tilde{G}^{(0)}(\omega; \mathbf{k}) \right)^{-1} \\ &= \left(\tilde{G}^{(0)}(\omega; \mathbf{k}) \right)^{-1} + \Sigma^{(1)}(\omega; \mathbf{k}) . \end{aligned}$$

Sabendo que a função de Green livre $G^{(0)}$ é dada, no espaço dos momenta, por (veja Apêndice B)

$$\tilde{G}^{(0)}(\omega; \mathbf{k}) = \frac{1}{\omega^2 - \mathbf{k}^2 - m_0^2} ,$$

segue que

$$\langle \tilde{G}(\omega; \mathbf{k}) \rangle^{-1} = \omega^2 - \mathbf{k}^2 - m^2 , \quad (1.18)$$

onde definimos

$$m^2 = m_0^2 - \Sigma^{(1)}(\omega, \mathbf{k}) . \quad (1.19)$$

Vemos, portanto, que o efeito de ordem mais baixa das flutuações randômicas na velocidade e na massa do campo é uma renormalização na massa do campo.

É importante salientar que a convergência ou não da integral que aparece na correção (1.16) depende da escolha da função de correlação $f(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ dos campos randômicos utilizados. Por exemplo, como vimos no Apêndice A, a escolha mais simples possível é denominada de correlação tipo ruído branco (*white-noise correlation*) e corresponde a

$$f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \delta^D(\mathbf{x} - \mathbf{x}') . \quad (1.20)$$

Neste caso, ocorre que $\tilde{f}(\mathbf{k}) = 1$ e, com isso, a correção randômica (1.16) vem dada por

$$\tilde{G}^{(1)}(\omega; \mathbf{k}) = \tilde{G}^{(0)}(\omega; \mathbf{k}) \left[(\sigma_\mu^2 \omega^4 + \sigma_\xi^2 m_0^4) \int \frac{d^D \mathbf{k}'}{(2\pi)^D} \tilde{G}^{(0)}(\omega; \mathbf{k}') \right] \tilde{G}^{(0)}(\omega; \mathbf{k}) . \quad (1.21)$$

É interessante perceber da expressão acima que, neste caso, o campo escalar inicialmente livre

torna-se autointeragente na presença das flutuações, com uma autointeração similar ³ à do modelo $\lambda\varphi^4$ com acoplamento dependente da frequência $\lambda(\omega) \sim \sigma_\mu^2\omega^4 + \sigma_\xi^2 m_0^4$. É válido aqui comentar que a natureza similar à interação $\lambda\varphi^4$ é uma consequência da Gaussianidade das flutuações consideradas, e no caso de flutuações não Gaussianas o resultado obtido seria similar a uma interação polinomial mais geral [5].

Apesar de a integral que aparece entre colchetes apresentar problemas de convergência, a expressão (1.21) é bastante instrutiva (ao menos qualitativamente) e será de interesse no restante deste capítulo uma investigação mais profunda acerca de algumas de suas propriedades.

1.2 Lagrangeana efetiva para efeitos randômicos de 2^a ordem em $D = 3$

O objetivo desta seção é obter uma teoria efetiva linear para os efeitos randômicos de ordem mais baixa mencionados na seção anterior, ou seja, uma Lagrangeana efetiva que não envolva nenhum campo randômico e que corresponda exatamente à função de Green modificada $\langle G \rangle = G^{(0)} + G^{(1)}$ obtida perturbativamente acima. Isto será feito para o caso específico de $D = 3$ dimensões espaciais, que é o caso de maior relevância física. Consideraremos também, por simplicidade, o caso de flutuações randômicas com correlação tipo ruído branco, no qual a correção randômica $G^{(1)}$ assume a forma (1.21).

Procuramos por uma lagrangeana efetiva da forma

$$L_{eff} = \varphi(x)\hat{O}(\partial_\mu)\varphi(x) , \quad (1.22)$$

onde $\hat{O}(\partial_\mu)$ é o operador diferencial (a ser determinado) cuja inversa corresponde à função de Green $\langle G(x, x') \rangle$ calculada na seção anterior até segunda ordem nas flutuações randômicas, isto é,

$$\hat{O}(\partial_\mu) \langle G(x, x') \rangle = \delta^4(x - x') . \quad (1.23)$$

³Lembramos aqui que o propagador da teoria com interação $\lambda\varphi^4$, obtido perturbativamente em potências da constante de acoplamento λ , é dado por $\tilde{G}(k) = \tilde{G}^{(0)}(k) - \tilde{G}^{(0)}(k)\Sigma\tilde{G}^{(0)}(k)$, onde

$$\Sigma = \frac{i\lambda}{2} \int \frac{d^{D+1}\mathbf{k}'}{(2\pi)^{D+1}} \tilde{G}^{(0)}(k') + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

contém as correções perturbativas.

A função de Green $\langle G(x, x') \rangle$ para o caso de flutuações do tipo ruído branco é dada por

$$\langle G(x, x') \rangle = \int \frac{d\omega d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^4} e^{-i\omega(t-t') + i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \left[\tilde{G}^{(0)}(\omega; \mathbf{k}) + \tilde{G}^{(1)}(\omega; \mathbf{k}) \right], \quad (1.24)$$

onde $\tilde{G}^{(0)}(\omega; \mathbf{k}) = 1/(\omega^2 - \mathbf{k}^2 - m_0^2)$ e $\tilde{G}^{(1)}(\omega; \mathbf{k})$ é dado pela equação (1.21) com $D = 3$, ou seja,

$$\tilde{G}^{(1)}(\omega; \mathbf{k}) = \tilde{G}^{(0)}(\omega; \mathbf{k}) \left[(\sigma_\mu^2 \omega^4 + \sigma_\xi^2 m_0^4) \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \tilde{G}^{(0)}(\omega; \mathbf{k}') \right] \tilde{G}^{(0)}(\omega; \mathbf{k}).$$

Substituindo estes resultados na equação (1.23) juntamente com a representação de Fourier da função delta de Dirac, e notando que cada uma das derivadas ∂_μ contidas em \hat{O} atua em $\langle G(x, x') \rangle$ como uma multiplicação por $-ik_\mu$, obtemos:

$$\int \frac{d\omega d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^4} e^{-i\omega(t-t') + i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \hat{O}(-ik_\mu) \left[\tilde{G}^{(0)}(\omega; \mathbf{k}) + \tilde{G}^{(1)}(\omega; \mathbf{k}) \right] = \int \frac{d\omega d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^4} e^{-i\omega(t-t') + i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} ,$$

de onde segue que

$$\hat{O}(-ik_\mu) \left[\tilde{G}^{(0)}(\omega; \mathbf{k}) + \tilde{G}^{(1)}(\omega; \mathbf{k}) \right] = 1 \quad \Longrightarrow \quad \hat{O}(-ik_\mu) = \left[\tilde{G}^{(0)}(\omega; \mathbf{k}) + \tilde{G}^{(1)}(\omega; \mathbf{k}) \right]^{-1}.$$

Como $\tilde{G}^{(1)}$ é proporcional aos parâmetros das flutuações ($\sigma_\mu^2, \sigma_\xi^2$), os quais são supostamente pequenos em intensidade, ocorre que $\tilde{G}^{(1)} \ll \tilde{G}^{(0)}$ de forma que, em primeira ordem nestes parâmetros, temos:

$$\begin{aligned} \hat{O}(-ik_\mu) &= \left(\tilde{G}^{(0)}(\omega; \mathbf{k}) \right)^{-1} \left[1 + \tilde{G}^{(1)}(\omega; \mathbf{k}) \left(\tilde{G}^{(0)}(\omega; \mathbf{k}) \right)^{-1} \right]^{-1} \\ &\approx \left(\tilde{G}^{(0)}(\omega; \mathbf{k}) \right)^{-1} \left[1 - \tilde{G}^{(1)}(\omega; \mathbf{k}) \left(\tilde{G}^{(0)}(\omega; \mathbf{k}) \right)^{-1} \right] \\ &= \left(\tilde{G}^{(0)}(\omega; \mathbf{k}) \right)^{-1} - \left(\tilde{G}^{(0)}(\omega; \mathbf{k}) \right)^{-1} \tilde{G}^{(1)}(\omega; \mathbf{k}) \left(\tilde{G}^{(0)}(\omega; \mathbf{k}) \right)^{-1} \\ &= (\omega^2 - \mathbf{k}^2 - m_0^2) - (\sigma_\mu^2 \omega^4 + \sigma_\xi^2 m_0^4) \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega^2 - \mathbf{k}'^2 - m_0^2}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

No Apêndice B é discutida a integral acima, e mostramos que

$$\int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega^2 - \mathbf{k}'^2 - m_0^2} = \frac{(m_0^2 - \omega^2)^{1/2}}{4\pi}.$$

Portanto, o operador $\hat{O}(-ik_\mu)$ fica dado por

$$\hat{O}(-ik_\mu) = (\omega^2 - \mathbf{k}^2 - m_0^2) - \frac{1}{4\pi} (\sigma_\mu^2 \omega^4 + \sigma_\xi^2 m_0^4) (m_0^2 - \omega^2)^{1/2}. \quad (1.26)$$

Agora, para obter a forma do operador \hat{O} no espaço de coordenadas basta fazer a correspondência inversa $k_\mu \equiv i\partial_\mu$ em (1.26), resultando em

$$\hat{O}(\partial_\mu) = (-\square - m_0^2) - \frac{1}{4\pi} \left(\sigma_\mu^2 \frac{\partial^4}{\partial t^4} + \sigma_\xi^2 m_0^4 \right) \left(m_0^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)^{1/2}. \quad (1.27)$$

O operador $(m_0^2 + \partial_t^2)^{1/2}$ que aparece na expressão acima deve ser entendido no sentido da série de Taylor correspondente, isto é,

$$\left(m_0^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)^{1/2} = m_0 - \frac{1}{2m_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{8m_0^3} \frac{\partial^4}{\partial t^4} + \dots$$

e portanto contém derivadas temporais de ordem arbitrariamente grande.

Em particular, para o caso de um campo escalar sem massa ($m_0 = 0$) o operador \hat{O} assume a forma simples

$$\hat{O}(\partial_\mu) = -\square - \frac{\sigma_\mu^2}{4\pi} \frac{\partial^5}{\partial t^5}, \quad (1.28)$$

deixando claro a consequência efetiva da flutuação randômica na velocidade do campo: corresponde a uma teoria com um termo extra de derivada de ordem superior (ordem 5) no tempo.

Portanto, a Lagrangeana efetiva para os efeitos randômicos na equação de Klein-Gordon discutidos na última seção é dada por

$$\mathcal{L}_{eff} = -\varphi(x) \left[\square + m_0^2 + \frac{1}{4\pi} \left(\sigma_\mu^2 \frac{\partial^4}{\partial t^4} + \sigma_\xi^2 m_0^4 \right) \left(m_0^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)^{1/2} \right] \varphi(x) \quad (1.29)$$

no caso de um campo massivo, e

$$\mathcal{L}_{eff} = -\varphi(x) \left[\square + \frac{\sigma_\mu^2}{4\pi} \frac{\partial^5}{\partial t^5} \right] \varphi(x) \quad (1.30)$$

para o caso de um campo sem massa. É bom reforçar aqui que as Lagrangeanas efetivas acima correspondem a teorias efetivas (massiva e não massiva, respectivamente) para o modelo de Klein-Gordon randômico visto anteriormente no sentido de que possuem o mesmo propagador que aquele modelo. Em particular, dado que a equação de Klein-Gordon randômica (1.1) pode ser equivalentemente vista (pelo menos no caso $m_0 = 0$) como uma equação de Klein-Gordon usual definida em um espaço-tempo curvo cuja métrica de fundo flutua randomicamente em torno da métrica plana de Minkowski, as Lagrangeanas efetivas acima podem ser vistas também como modelos efetivos em Minkowski para os efeitos de flutuações métricas sobre um campo escalar.

A Lagrangeana efetiva (1.29) origina a seguinte equação de movimento para o caso massivo:

$$(\square + m_0^2) \varphi(x) = -\frac{1}{4\pi} \left(\sigma_\mu^2 \frac{\partial^4}{\partial t^4} + \sigma_\xi^2 m_0^4 \right) \left(m_0^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)^{1/2} \varphi(x), \quad (1.31)$$

enquanto a Lagrangeana (1.30) correspondente ao caso $m_0 = 0$ produz a equação

$$\square \varphi(x) = -\frac{\sigma_\mu^2}{4\pi} \frac{\partial^5 \varphi(x)}{\partial t^5}. \quad (1.32)$$

Em ambos os casos a equação diferencial parcial é linear (assim como na teoria livre) e, portanto, admite solução do tipo onda plana $\varphi(x) = e^{ikx} = e^{i\omega t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$. A relação de dispersão $\omega = \omega(\mathbf{k})$, porém, certamente é diferente do caso livre ($\omega_0(\mathbf{k}) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_0^2}$ para o caso massivo, $\omega_0(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}|$ para o caso sem massa) e nosso próximo objetivo aqui é obtê-la.

Introduzindo o ansatz de solução tipo onda plana em (1.31) obtemos

$$(-\omega^2 + \mathbf{k}^2 + m_0^2) e^{i\omega t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = -\frac{1}{4\pi} (\sigma_\mu^2 \omega^4 + \sigma_\xi^2 m_0^4) (m_0^2 - \omega^2)^{1/2} e^{i\omega t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} ,$$

de onde segue a relação

$$\omega^2 - \frac{1}{4\pi} (\sigma_\mu^2 \omega^4 + \sigma_\xi^2 m_0^4) (m_0^2 - \omega^2)^{1/2} = \mathbf{k}^2 + m_0^2 . \quad (1.33)$$

Não é possível resolver (1.33) de modo a obter de forma exata a relação de dispersão $\omega(\mathbf{k})$. Vamos então procurar por uma solução aproximada para $\omega(\mathbf{k})$ em primeira ordem nos parâmetros $\sigma_\mu^2, \sigma_\xi^2$. Para isto, consideramos uma pequena perturbação $\delta\omega(\mathbf{k})$ na solução livre $\omega_0(\mathbf{k}) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_0^2}$, isto é,

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega_0(\mathbf{k}) + \delta\omega(\mathbf{k}) , \quad (1.34)$$

onde $\delta\omega(\mathbf{k}) \propto \sigma_\mu^2, \sigma_\xi^2$ e portanto $\delta\omega(\mathbf{k}) \ll \omega_0(\mathbf{k})$. Desta forma, substituindo o ansatz (1.34) em (1.33) e desprezando os termos de ordem $(\delta\omega)^2, \sigma_\mu^2 \delta\omega, \sigma_\xi^2 \delta\omega$ e superiores, ficamos com:

$$\omega_0^2 + 2\omega_0 \delta\omega - \frac{1}{4\pi} [\sigma_\mu^2 \omega_0^4 + \sigma_\xi^2 m_0^4] [m_0^2 - \omega_0^2 - 2\omega_0 \delta\omega]^{1/2} = \omega_0^2 .$$

Notando que $m_0^2 - \omega_0^2 = -\mathbf{k}^2$ e, ainda, que

$$[m_0^2 - \omega_0^2 - 2\omega_0 \delta\omega]^{1/2} = [-\mathbf{k}^2 - 2\omega_0 \delta\omega]^{1/2} = [-\mathbf{k}^2]^{1/2} \left[1 - \frac{2\omega_0 \delta\omega}{-\mathbf{k}^2} \right]^{1/2} = i|\mathbf{k}| + \mathcal{O}(\delta\omega) ,$$

obtemos a seguinte forma para a perturbação $\delta\omega$:

$$\delta\omega(\mathbf{k}) = \frac{i|\mathbf{k}|}{8\pi\omega_0} (\sigma_\mu^2 \omega_0^4 + \sigma_\xi^2 m_0^4) , \quad (1.35)$$

que é uma quantidade puramente imaginária com $\Im(\delta\omega) = |\mathbf{k}|(\sigma_\mu^2 \omega_0^4 + \sigma_\xi^2 m_0^4)/8\pi\omega_0 > 0$. Para o caso não massivo o resultado obtido por uma análise semelhante é

$$\delta\omega(\mathbf{k}) = \frac{i\sigma_\mu^2 |\mathbf{k}|^4}{8\pi} , \quad (1.36)$$

que também é puramente imaginária com $\Im(\delta\omega) > 0$.

A interpretação do termo imaginário $\delta\omega$ que aparece acima fica clara ao substituirmos a nova relação de dispersão

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega_0(\mathbf{k}) + \frac{i|\mathbf{k}|}{8\pi\omega_0}(\sigma_\mu^2\omega_0^4 + \sigma_\xi^2m_0^4) \quad (1.37)$$

na solução tipo onda plana considerada:

$$\varphi(x) = e^{i\omega t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \exp\left[-(\sigma_\mu^2\omega_0^4 + \sigma_\xi^2m_0^4)\frac{|\mathbf{k}|t}{8\pi\omega_0}\right] e^{i\omega_0 t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (1.38)$$

O efeito dos parâmetros $\sigma_\mu^2, \sigma_\xi^2$ nesta teoria efetiva é tornar evanescentes as soluções de onda plana da teoria livre, correspondendo portanto a uma teoria dissipativa. Em outras palavras, após um intervalo de tempo suficientemente grande uma onda plana livre $e^{i\omega_0 t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ tende a ser aniquilada devido ao fator de modulação da amplitude que se aproxima ilimitadamente de zero com o passar do tempo.

É válido comentar aqui que poderíamos igualmente bem ter procurado por uma solução do tipo onda plana na forma $\varphi(x) = e^{-ikx} = e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$. Repetindo os mesmos passos acima obteríamos $\omega(\mathbf{k}) = \omega_0(\mathbf{k}) + \delta\omega(\mathbf{k})$ com

$$\delta\omega(\mathbf{k}) = -\frac{i|\mathbf{k}|}{8\pi\omega_0}(\sigma_\mu^2\omega_0^4 + \sigma_\xi^2m_0^4)$$

que agora tem parte imaginária negativa ($\Im(\delta\omega) = -|\mathbf{k}|(\sigma_\mu^2\omega_0^4 + \sigma_\xi^2m_0^4)/8\pi\omega_0 < 0$) e novamente ocorreria o fenômeno de evanescência da onda, pois

$$\varphi(x) = e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \exp\left[-(\sigma_\mu^2\omega_0^4 + \sigma_\xi^2m_0^4)\frac{|\mathbf{k}|t}{8\pi\omega_0}\right] e^{-i\omega_0 t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}.$$

A presença do termo extra $\delta\omega(\mathbf{k})$ na relação de dispersão também causa uma pequena diferença nas velocidades de fase e de grupo de ondas que se propagam neste fluido, como podemos ver claramente para o caso não massivo (por simplicidade):

$$V_\phi = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} = 1 + i\frac{\sigma_\mu^2|\mathbf{k}|^3}{8\pi} \quad V_g = \frac{d\omega}{d|\mathbf{k}|} = 1 + i\frac{\sigma_\mu^2|\mathbf{k}|^3}{2\pi}.$$

A diferença aparece entre os termos dissipativos (partes imaginárias) de V_ϕ e V_g , sugerindo que a evanescência do pacote de ondas ocorre mais rapidamente que a das componentes de Fourier individuais. Porém, esta é uma questão que requer uma investigação mais profunda.

1.3 Interação entre fontes tipo delta no modelo escalar randômico

Esta seção consiste em um estudo sobre as energias de interação entre fontes externas estacionárias do tipo delta de Dirac para o campo escalar em um meio com flutuações randômicas. As fontes externas em questão simulam a presença de cargas estacionárias para o campo escalar. As energias de interação serão obtidas como contribuições à energia de vácuo do sistema, que será composto por um campo escalar em um meio randômico definido em $d + D + 1$ dimensões e uma distribuição estática de cargas concentrada ao longo de regiões hiperplanas D -dimensionais do espaço, às quais iremos nos referir como *branas*. O método empregado é o mesmo exposto na referência [8] para o caso de campos bosônicos em um meio livre de randomicidade. Concentramos nossa atenção no caso especial de maior relevância física que é o de 3 dimensões espaciais ($d + D = 3$), que corresponde à interação entre branas pontuais ($d = 3, D = 0$), lineares ($d = 2, D = 1$) ou entre branas planares ($d = 1, D = 2$)⁴.

As $d + D + 1$ coordenadas espaço-temporais serão aqui denotadas por $x = (x^0, \mathbf{x}_\perp, \mathbf{x}_\parallel)$, onde $\mathbf{x}_\perp = (x^1, \dots, x^d)$ denotam as coordenadas perpendiculares às branas e $\mathbf{x}_\parallel = (x^{d+1}, \dots, x^{d+D})$ representam as coordenadas paralelas às branas⁵. Consideraremos o caso geral de um número arbitrário N de branas paralelas D -dimensionais, que podem ser descritas pela corrente

$$J(x) = \sum_{r=1}^N q_r \delta^d(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a}_r), \quad (1.39)$$

com os q_r 's denotando as densidades de “carga” (carga aqui no sentido de campo escalar) por unidade de área de cada uma das branas e $\mathbf{a}_r = (a_r^1, \dots, a_r^d)$ é um vetor que localiza a r -ésima brana.

Para obter a energia de vácuo do sistema, partimos da lagrangeana

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_F(x) + J(x)\varphi(x)$$

onde

$$\mathcal{L}_F = \frac{\varphi(x)}{2} \left[(1 + \mu(\mathbf{x})) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + (1 + \xi(\mathbf{x})) m_0^2 \right] \varphi(x)$$

⁴Estes três casos particulares simulam, respectivamente, a interação entre uma distribuição de cargas pontuais, linhas de carga, ou planos carregados.

⁵Por exemplo, para o caso em que as branas correspondem a planos $z = const.$ em $d + D = 3$ dimensões espaciais temos $\mathbf{x}_\perp = (z)$ e $\mathbf{x}_\parallel = (x, y)$.

é a lagrangeana do campo escalar no fluido randômico considerado (que origina a equação de Klein-Gordon randômica (1.1)) e o termo $J\varphi$ é o acoplamento usual entre uma corrente externa (fonte) e o campo, que se dá sempre linearmente. Em seguida, usamos o funcional gerador das funções de Green [11]:

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\varphi \exp \left(i \int d^{d+D+1}x [\mathcal{L}_F(x) + J(x)\varphi(x)] \right),$$

que pode ser reescrito após uma mudança de variáveis e uma normalização $Z[J = 0] = 1$ como (veja Apêndice B):

$$Z[J] = \exp \left(-\frac{i}{2} \int d^{d+D+1}x d^{d+D+1}x' J(x) \langle G(x, x') \rangle J(x') \right). \quad (1.40)$$

Além disso [13], dado que $Z[J]$ corresponde à amplitude de transição vácuo-vácuo na presença de uma fonte externa J , isto é, $Z[J] = \langle 0 | e^{-i\hat{H}t} | 0 \rangle_J$, ocorre que o funcional gerador de qualquer sistema quântico no limite $T \rightarrow \infty$ (T é o tempo de interação) pode ser expresso na forma

$$Z[J] = e^{-iET}, \quad (1.41)$$

sendo E a energia de vácuo deste sistema. Uma comparação das equações (1.40) e (1.41) resulta em:

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int d^{d+D+1}x d^{d+D+1}x' J(x) \langle G(x, x') \rangle J(x'). \quad (1.42)$$

A intenção na sequência desta seção é calcular a energia de interação entre uma distribuição estática de N branas paralelas D -dimensionais, cuja presença é representada pela corrente (1.39). Um fato importante a ser mencionado aqui é que ao substituir a corrente (1.39) em (1.42) teremos N termos envolvendo fatores do tipo q_r^2 ($r = 1, \dots, N$), os quais correspondem às auto-energias de cada uma das branas e obviamente não contribuem para a energia de **interação** entre elas. Após fazer esta substituição e descartar os termos de auto-interação mencionados acima, obtemos

$$E_{int} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N q_r q_s (1 - \delta_{rs}) I_{rs}, \quad (1.43)$$

onde definimos a integral

$$I_{rs} = \int d^{d+D+1}x d^{d+D+1}x' \delta^d(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a}_r) \langle G(x, x') \rangle \delta^d(\mathbf{x}'_\perp - \mathbf{a}_s).$$

A função de Green média $\langle G(x, x') \rangle$ foi obtida na seção 1.1 até ordem quadrática nas flutuações randômicas, para o caso de flutuações arbitrariamente correlacionadas, como sendo

$$\langle G(x, x') \rangle = \int \frac{d^{d+D+1}k}{(2\pi)^{d+D+1}} e^{-ik(x-x')} \langle \tilde{G}(\omega, \mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_\parallel) \rangle, \quad (1.44)$$

onde $k = (\omega, \mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_\parallel)$ e

$$\langle \tilde{G}(\omega, \mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_\parallel) \rangle = \tilde{G}^{(0)}(\omega; \mathbf{k}) + \tilde{G}^{(1)}(\omega; \mathbf{k}), \quad (1.45)$$

com $\tilde{G}^{(1)}(\omega; \mathbf{k})$ dado pela equação (1.16). Substituindo a expressão (1.44) na integral em I_{rs} e integrando as funções delta obtemos

$$\begin{aligned} I_{rs} &= \int dx^0 d^D \mathbf{x}_\parallel dx'^0 d^D \mathbf{x}'_\parallel \frac{d^{d+D+1}k}{(2\pi)^{d+D+1}} e^{-i\omega(x^0-x'^0)+i\mathbf{k}_\perp \cdot (\mathbf{a}_r - \mathbf{a}_s) + i\mathbf{k}_\parallel \cdot (\mathbf{x}_\parallel - \mathbf{x}'_\parallel)} \langle \tilde{G}(\omega, \mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_\parallel) \rangle \\ &= \int dx'^0 d^D \mathbf{x}'_\parallel \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d^d \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^d} \frac{d^D \mathbf{k}_\parallel}{(2\pi)^D} (2\pi) \delta(\omega) e^{i\omega x'^0} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot (\mathbf{a}_r - \mathbf{a}_s)} (2\pi)^D \delta^D(\mathbf{k}_\parallel) e^{-i\mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{x}'_\parallel} \langle \tilde{G}(\omega, \mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_\parallel) \rangle \\ &= \int dx'^0 d^D \mathbf{x}'_\parallel \frac{d^d \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot (\mathbf{a}_r - \mathbf{a}_s)} \langle \tilde{G}(0, \mathbf{k}_\perp, \mathbf{0}_\parallel) \rangle \\ &= TL^D \int \frac{d^d \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{a}_{rs}} \langle \tilde{G}(0, \mathbf{k}_\perp, \mathbf{0}_\parallel) \rangle. \end{aligned}$$

Os seguintes passos foram realizados acima: no primeiro, integramos sobre $dx^0 d^D \mathbf{x}_\parallel$ para obter duas funções delta; no segundo, integramos sobre $d\omega d^D \mathbf{k}_\parallel$ para fazer $\omega = 0, \mathbf{k}_\parallel = \mathbf{0}_\parallel$; no último passo, identificamos $\int dx'^0 = T \rightarrow \infty$ (tempo total de interação) e $\int d^D \mathbf{x}'_\parallel = L^D \rightarrow \infty$ (“volume” da brana) e ainda definimos $\mathbf{a}_{rs} \equiv \mathbf{a}_r - \mathbf{a}_s$.

Finalmente, após substituir o resultado para I_{rs} acima de volta em (1.43) obtemos a seguinte expressão para a densidade (energia por unidade de “volume” das branas) de energia de interação entre as branas:

$$\mathcal{E}_{int} = \frac{E_{int}}{L^D} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N q_r q_s (1 - \delta_{rs}) \int \frac{d^d \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{a}_{rs}} \langle \tilde{G}(0, \mathbf{k}_\perp, \mathbf{0}_\parallel) \rangle. \quad (1.46)$$

É bom lembrar (veja equação (1.45)) que a função de Green média que aparece na expressão acima possui duas contribuições (uma livre e uma correção randômica), a saber $\langle \tilde{G} \rangle = \tilde{G}^{(0)} + \tilde{G}^{(1)}$, de forma que a densidade de energia acima também terá duas contribuições distintas: uma livre $\mathcal{E}_{int}^{(0)}$, que corresponde à energia de interação devido à presença de um campo escalar livre usual e que é conhecida na literatura [8]; e uma correção randômica $\mathcal{E}_{int}^{(1)}$ que leva em conta efeitos de até ordem 2 nos ruídos randômicos. Vamos analisar a seguir cada uma destas contribuições separadamente.

1.3.1 A contribuição livre $\mathcal{E}_{int}^{(0)}$

A primeira contribuição para a densidade de energia (1.46), correspondendo à interação livre, é dada por

$$\mathcal{E}_{int}^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N q_r q_s (1 - \delta_{rs}) \int \frac{d^d \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{a}_{rs}} \tilde{G}^{(0)}(0, \mathbf{k}_\perp, \mathbf{0}_\parallel), \quad (1.47)$$

onde $\tilde{G}^{(0)}(\omega, \mathbf{k}) = 1/(\omega^2 - \mathbf{k}^2 - m_0^2)$ é a função de Green do campo escalar livre. Em particular, temos $\tilde{G}^{(0)}(\omega = 0, \mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_\parallel = \mathbf{0}_\parallel) = -1/(\mathbf{k}_\perp^2 + m_0^2)$ e portanto

$$\mathcal{E}_{int}^{(0)} = -\frac{1}{2} \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N q_r q_s (1 - \delta_{rs}) \int \frac{d^d \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{a}_{rs}}}{\mathbf{k}_\perp^2 + m_0^2}. \quad (1.48)$$

No apêndice B mostramos que a integral que aparece acima pode ser expressa como

$$\int \frac{d^d \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{a}_{rs}}}{\mathbf{k}_\perp^2 + m_0^2} = (2\pi)^{-d/2} m_0^{d-2} (m_0 a_{rs})^{1-d/2} K_{d/2-1}(m_0 a_{rs}),$$

para $m_0 > 0$ e $0 < d < 5$, onde definimos $a_{rs} = |\mathbf{a}_{rs}| = |\mathbf{a}_r - \mathbf{a}_s|$ e $K_\nu(x)$ é a função de Bessel modificada de segunda espécie [14]. Apesar de esta expressão ter sido obtida sob a restrição de $0 < d < 5$, o lado direito é bem definido para qualquer inteiro d e, portanto, pode ser considerado como a extensão analítica, válida para qualquer inteiro d , da integral que aparece do lado esquerdo ⁶. Neste sentido, podemos afirmar que

$$\int \frac{d^d \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{a}_{rs}}}{\mathbf{k}_\perp^2 + m_0^2} \rightarrow (2\pi)^{-d/2} m_0^{d-2} (m_0 a_{rs})^{1-d/2} K_{d/2-1}(m_0 a_{rs}) \quad (1.49)$$

para todo inteiro d e $m_0 > 0$, de forma que a energia de interação (1.48) fica

$$\mathcal{E}_{int}^{(0)}(q_1, \dots, q_N, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N; m_0, d) = -\frac{m_0^{d-2}}{2(2\pi)^{d/2}} \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N q_r q_s (1 - \delta_{rs}) (m_0 a_{rs})^{1-d/2} K_{d/2-1}(m_0 a_{rs}). \quad (1.50)$$

Para o caso de um campo não massivo, a energia de interação pode ser obtida tomando-se o limite $m_0 \rightarrow 0$ na expressão acima. Porém, este limite deve ser tomado com certo cuidado, distinguindo os casos $d \neq 2$ e $d = 2$ cujas correspondentes funções de Bessel K possuem comportamentos assintóticos distintos. Para o caso de $d \neq 2$, basta usar o fato que [14]

$$K_\nu(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{\Gamma(\nu) 2^{\nu-1}}{x^\nu} \quad (\nu \neq 0),$$

⁶No fim das contas, como veremos adiante, estamos interessados apenas nos casos fisicamente relevantes que correspondem a $d = 1, 2, 3$, de forma que a preocupação com a extensão dos resultados para d arbitrário se justifica apenas por questão de completeza.

e o resultado é

$$\mathcal{E}_{int}^{(0)}(q_1, \dots, q_N, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N; m_0 = 0, d \neq 2) = -\frac{\Gamma(d/2 - 1)}{8\pi^{d/2}} \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N q_r q_s (1 - \delta_{rs}) a_{rs}^{2-d} . \quad (1.51)$$

Já no caso $m_0 = 0, d = 2$, para o qual a expressão do caso massivo (1.50) se reduz a

$$\mathcal{E}_{int}^{(0)}(q_1, \dots, q_N, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N; m_0, d = 2) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N q_r q_s (1 - \delta_{rs}) K_0(m_0 a_{rs}) ,$$

devemos tomar o limite $m_0 \rightarrow 0$ usando o fato que [14]

$$K_0(x) \xrightarrow{x=0} -\ln \frac{x}{2} - \gamma$$

(γ é a constante de Euler-Mascheroni). Porém, no nosso caso será conveniente reescrever esta relação na forma

$$K_0(m_0 a_{rs}) \xrightarrow{m_0=0} -\ln \frac{a_{rs}}{a_0} - \gamma - \ln \frac{m_0 a_0}{2} ,$$

onde a_0 é uma constante não-nula arbitrária com dimensão de comprimento introduzida de modo a separar a divergência logarítmica que aparecerá no limite $m_0 \rightarrow 0$. Tomando o limite $m_0 \rightarrow 0$ obtemos

$$\mathcal{E}_{int}^{(0)}(q_1, \dots, q_N, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N; m_0 = 0, d = 2) = \frac{1}{4\pi} \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N q_r q_s (1 - \delta_{rs}) \ln \frac{a_{rs}}{a_0} + \Delta , \quad (1.52)$$

sendo Δ uma contribuição (infinita!) independente das distâncias a_{rs} e que, portanto, não influencia na dinâmica do sistema (é apenas uma constante aditiva na energia e pode ser removida por uma simples reescala de energia).

De posse das expressões (1.50), (1.51) e (1.52) para a energia de interação, podemos calcular para cada um dos três casos distintos a densidade de força (força por unidade de “volume” da brana) atuando sobre a r -ésima brana devido à presença das demais $N - 1$ branas, isto é,

$$\vec{\mathcal{F}}_{int,r}^{(0)} = - \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^N \frac{\partial \mathcal{E}_{int}^{(0)}}{\partial a_{rs}} \hat{a}_{rs} ,$$

onde $\hat{a}_{rs} = \mathbf{a}_{rs}/a_{rs}$ é o vetor unitário na direção de \mathbf{a}_{rs} . Substituindo a equação (1.50) e usando as relações de recorrência da função de Bessel modificada, a saber,

$$K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x) = -\frac{2\nu}{x} K_{\nu}(x) \quad (1.53a)$$

$$K_{\nu-1}(x) + K_{\nu+1}(x) = -2 \frac{dK_{\nu}(x)}{dx} , \quad (1.53b)$$

para manipular os termos com derivadas de $K_{d/2-1}(m_0 a_{rs})$, obtemos para o caso de $m_0 > 0$ e d arbitrário o resultado

$$\vec{\mathcal{F}}_{int,r}^{(0)}(q_1, \dots, q_N, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N; m_0, d) = -\frac{m_0^{d-1}}{2(2\pi)^d} q_r \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^N q_s (m_0 a_{rs})^{1-d/2} K_{d/2}(m_0 a_{rs}) \hat{a}_{rs} . \quad (1.54)$$

Para o segundo caso, que corresponde à energia (1.51) e representa a situação com $m_0 = 0$, $d \neq 2$, um cálculo direto leva a

$$\vec{\mathcal{F}}_{int,r}^{(0)}(q_1, \dots, q_N, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N; m_0 = 0, d \neq 2) = -\frac{d-2}{8(\pi)^{d/2}} \Gamma(d/2 - 1) q_r \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^N q_s a_{rs}^{1-d} \hat{a}_{rs} . \quad (1.55)$$

Por fim, para o último caso ($m_0 = 0, d = 2$), obtemos da equação (1.52) que

$$\vec{\mathcal{F}}_{int,r}^{(0)}(q_1, \dots, q_N, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N; m_0 = 0, d = 2) = -\frac{q_r}{4\pi} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^N \frac{q_s}{a_{rs}} \hat{a}_{rs} . \quad (1.56)$$

É importante notar que em todos os três casos acima é satisfeito o princípio da superposição, isto é, a força resultante sobre a r -ésima brana é igual à soma das forças individuais exercidas por cada uma das outras $N - 1$ branas sobre esta r -ésima.

1.3.2 A correção randômica $\mathcal{E}_{int}^{(1)}$

A correção randômica à energia de interação do campo livre ($\mathcal{E}_{int}^{(0)}$, obtida na subseção 1.3.1) corresponde ao termo randômico da função de Green média ⁷, a saber $\tilde{G}^{(1)}$, inserido na energia (1.46), isto é,

$$\mathcal{E}_{int}^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N q_r q_s (1 - \delta_{rs}) \int \frac{d^d \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{a}_{rs}} \tilde{G}^{(1)}(0, \mathbf{k}_\perp, \mathbf{0}_\parallel) , \quad (1.57)$$

onde $\tilde{G}^{(1)}(\omega, \mathbf{k})$ é dado, para o caso de flutuações randômicas com correlação arbitrária, pela equação (1.16), isto é,

$$\begin{aligned} \tilde{G}^{(1)}(\omega; \mathbf{k}) &= \tilde{G}^{(0)}(\omega; \mathbf{k}) \left[(\sigma_\mu^2 \omega^4 + \sigma_\xi^2 m_0^4) \int \frac{d^{d+D} \mathbf{k}'}{(2\pi)^{d+D}} \tilde{G}^{(0)}(\omega; \mathbf{k}') \tilde{f}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \right] \tilde{G}^{(0)}(\omega; \mathbf{k}) \\ &= \frac{(\sigma_\mu^2 \omega^4 + \sigma_\xi^2 m_0^4)}{(\omega^2 - \mathbf{k}^2 - m_0^2)^2} \int \frac{d^{d+D} \mathbf{k}'}{(2\pi)^{d+D}} \frac{\tilde{f}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')}{\omega^2 - \mathbf{k}'^2 - m_0^2} . \end{aligned}$$

Em particular, para $\omega = 0$ e $\mathbf{k}_\parallel = \mathbf{0}_\parallel$ temos

$$\tilde{G}^{(1)}(0, \mathbf{k}_\perp, \mathbf{0}_\parallel) = -\frac{\sigma_\xi^2 m_0^4}{(\mathbf{k}_\perp^2 + m_0^2)^2} \int \frac{d^d \mathbf{k}'_\perp d^D \mathbf{k}'_\parallel}{(2\pi)^{d+D}} \frac{\tilde{f}(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp, -\mathbf{k}'_\parallel)}{\mathbf{k}'_\perp{}^2 + \mathbf{k}'_\parallel{}^2 + m_0^2} ,$$

⁷Lembre-se que $\langle G(\omega, \mathbf{k}) \rangle = G^{(0)}(\omega, \mathbf{k}) + G^{(1)}(\omega, \mathbf{k})$.

Substituindo esta expressão de volta em (1.57) chegamos em

$$\mathcal{E}_{int}^{(1)} = -\frac{\sigma_\xi^2 m_0^4}{2} \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N q_r q_s (1 - \delta_{rs}) \int \frac{d^d \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{a}_{rs}}}{(\mathbf{k}_\perp^2 + m_0^2)^2} \alpha_{d+D}(\mathbf{k}_\perp), \quad (1.58)$$

onde definimos a quantidade

$$\alpha_{d+D}(\mathbf{k}_\perp) = \int \frac{d^d \mathbf{k}'_\perp d^D \mathbf{k}'_\parallel}{(2\pi)^{d+D}} \frac{\tilde{f}(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp, -\mathbf{k}'_\parallel)}{\mathbf{k}'_\perp{}^2 + \mathbf{k}'_\parallel{}^2 + m_0^2}, \quad (1.59)$$

que depende funcionalmente de uma maneira bastante complicada do tipo de correlação escolhido (*i.e.*, de \tilde{f}). Note ainda que a correção randômica à energia depende somente de σ_ξ^2 (e não de σ_μ^2), o que não é motivo para surpresas visto que estamos considerando uma distribuição estática de cargas, que supostamente não deveria ser afetada por flutuações σ_μ^2 na velocidade de propagação do campo.

Por simplicidade, faremos o cálculo explicitamente para o caso de ruídos tipo *white noise*, isto é, o caso em que $f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \delta^{d+D}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rightarrow \tilde{f}(\mathbf{k}) = 1$. Neste caso, ocorre que $\alpha_{d+D}(\mathbf{k}_\perp)$ não depende de \mathbf{k}_\perp , isto é,

$$\alpha_{d+D}(\mathbf{k}_\perp) \doteq \alpha_{d+D} = \int \frac{d^d \mathbf{k}'_\perp d^D \mathbf{k}'_\parallel}{(2\pi)^{d+D}} \frac{1}{\mathbf{k}'_\perp{}^2 + \mathbf{k}'_\parallel{}^2 + m_0^2}, \quad (1.60)$$

e com isso pode ser retirado da integral em (1.58), resultando em

$$\mathcal{E}_{int}^{(1)} = -\frac{\sigma_\xi^2 m_0^4 \alpha_{d+D}}{2} \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N q_r q_s (1 - \delta_{rs}) \int \frac{d^d \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{a}_{rs}}}{(\mathbf{k}_\perp^2 + m_0^2)^2}. \quad (1.61)$$

O próximo passo é resolver a integral que aparece acima. Notando que (para $m_0 > 0$) vale a relação

$$\int \frac{d^d \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{a}_{rs}}}{(\mathbf{k}_\perp^2 + m_0^2)^2} = -\frac{1}{2m_0} \frac{\partial}{\partial m_0} \int \frac{d^d \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{a}_{rs}}}{\mathbf{k}_\perp^2 + m_0^2},$$

e que a integral que aparece do lado direito (já calculada anteriormente) é dada pela equação (1.49), segue que

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{a}_{rs}}}{(\mathbf{k}_\perp^2 + m_0^2)^2} &= -\frac{1}{2m_0} \frac{\partial}{\partial m_0} \left\{ (2\pi)^{-d/2} m_0^{d-2} (m_0 a_{rs})^{1-d/2} K_{d/2-1}(m_0 a_{rs}) \right\} \\ &= \frac{1}{2} (2\pi)^{-d/2} a_{rs}^{4-d} (m_0 a_{rs})^{d/2-2} \left[K_{d/2}(m_0 a_{rs}) - \frac{d-2}{m_0 a_{rs}} K_{d/2-1}(m_0 a_{rs}) \right], \end{aligned}$$

onde usamos as relações de recorrência (1.53) para manipular os termos envolvendo a função de Bessel K . Substituindo este resultado de volta na energia $\mathcal{E}_{int}^{(1)}$ obtemos:

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}_{int}^{(1)}(q_1, \dots, q_N, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N; m_0, d) = \\ &= -\frac{\sigma_\xi^2 \alpha_{d+D}}{4(2\pi)^{d/2}} \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N q_r q_s (1 - \delta_{rs}) a_{rs}^{-d} (m_0 a_{rs})^{d/2+2} \left[K_{d/2}(m_0 a_{rs}) - \frac{d-2}{m_0 a_{rs}} K_{d/2-1}(m_0 a_{rs}) \right], \end{aligned} \quad (1.62)$$

que é válida para $m_0 > 0$ e d arbitrário. Esta é a correção randômica à energia livre $\mathcal{E}_{int}^{(0)}$ dada pela expressão (1.50). Lembramos que α_{d+D} é a constante definida em (1.60), que depende do número $d + D$ de dimensões espaciais consideradas mas independe das distâncias a_{rs} entre as branas. Um importante comentário aqui é que α_{d+D} é divergente para $d + D = 2, 4, 6, \dots$, mas é finito para $d + D$ ímpar ⁸. Portanto, estritamente falando, o resultado acima só faz sentido para $d + D = 1, 3, 5, \dots$. Sem entrar em maiores detalhes nesta discussão, analisaremos na sequência apenas as situações particulares de maior relevância física que correspondem a $d + D = 3$, para as quais os resultados acima são consistentes.

Para o caso de um campo sem massa ($m_0 = 0$), podemos tomar o limite $m_0 \rightarrow 0$ diretamente na expressão do caso massivo, equação (1.62), ou diretamente na expressão (1.61), resultando em

$$\mathcal{E}_{int}^{(1)}(q_1, \dots, q_N, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N; m_0 = 0, d) = 0. \quad (1.63)$$

As correspondentes correções na densidade de força de interação sobre a r -ésima partícula, $\vec{\mathcal{F}}_{int,r}^{(1)} = -\sum_{s \neq r} \frac{\partial \mathcal{E}_{int}^{(1)}}{\partial a_{rs}} \hat{a}_{rs}$, podem ser obtidas por simples diferenciação da equação (1.62) utilizando as relações de recorrência da função de Bessel K mencionadas anteriormente. Os resultados são

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{F}}_{int,r}^{(1)}(q_1, \dots, q_N, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N; m_0, d) &= \\ &= \frac{\sigma_\xi^2 \alpha_{d+D} m_0^{d+1}}{4(2\pi)^{d/2}} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^N q_r q_s (m_0 a_{rs})^{-d/2+1} [dK_{d/2}(m_0 a_{rs}) - m_0 a_{rs} K_{d/2+1}(m_0 a_{rs})] \hat{a}_{rs} \end{aligned} \quad (1.64)$$

para o campo escalar massivo e, obviamente,

$$\vec{\mathcal{F}}_{int}^{(1)}(q_1, \dots, q_N, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N; m_0 = 0, d) = \vec{0} \quad (1.65)$$

para o caso sem massa.

1.3.3 Algumas situações particulares

Vamos agora, finalmente, analisar alguns casos específicos de maior apelo físico (*i.e.*, aqueles nos quais $d + D = 3$ dimensões espaciais) com o intuito de ganhar uma certa intuição acerca do

⁸De fato, pode-se mostrar com o auxílio de um procedimento de regularização dimensional que

$$\alpha_{d+D} \propto \Gamma\left(1 - \frac{d+D}{2}\right)$$

significado dos resultados obtidos. Note que, devido à validade do princípio da superposição, é suficiente aqui estudar apenas os casos particulares com $N = 2$ branas presentes. A interação entre $N > 2$ branas corresponde simplesmente a uma soma de $N!/2!(N-2)! = N(N-1)/2$ interações 2 a 2 e, portanto, não merece atenção especial.

- **$N = 2, D = 0, d = 3$: Duas cargas pontuais em $(3 + 1)$ -dimensões**

Neste caso, como as branas possuem dimensão zero ($D = 0$) a expressão (1.50) corresponde exatamente à energia de interação entre as cargas, e não a uma densidade de energia. Utilizando a equação (1.50) e o fato de que $K_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}$ obtemos para o caso massivo

$$E_{int}^{(0)}(q_1, q_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2; m_0, d = 3) = -\frac{q_1 q_2}{4\pi} \frac{e^{-m_0 a}}{a}, \quad (1.66)$$

onde $a \equiv |\mathbf{a}_{12}| = |\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2|$ é a distância entre as cargas. Esta é precisamente a energia devido a duas partículas pontuais que interagem via um potencial de Yukawa, como era de se esperar para um campo escalar massivo livre. A correspondente força de interação sobre a carga q_1 , $\vec{F} = -\frac{\partial E}{\partial \mathbf{a}_{12}} \hat{a}_{12}$, pode ser obtida diretamente da expressão geral (1.54) ou, de maneira mais simples, derivando a energia acima, resultando em

$$\vec{F}_{int}^{(0)}(q_1, q_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2; m_0, d = 3) = -\frac{q_1 q_2}{4\pi} \frac{(m_0 a + 1)e^{-m_0 a}}{a^2} \hat{a}. \quad (1.67)$$

Obviamente, a força sobre a carga q_2 é igual à oposta, $-\vec{F}_{int}^{(0)}$.

A correção randômica à energia livre acima é facilmente obtida utilizando a equação (1.62). Será conveniente usar o fato de que, para $d + D = 3$ dimensões espaciais, temos

$$\alpha_3 = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m_0^2} = \frac{m_0}{4\pi},$$

resultado este que foi obtido simplesmente tomando $\omega = 0$ em (B.12). Assim, segue que

$$E_{int}^{(1)}(q_1, q_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2; m_0, d = 3) = \sigma_\xi^2 \frac{q_1 q_2 m_0^4}{32\pi^2} e^{-m_0 a}, \quad (1.68)$$

expressão que é a correção à interação de Yukawa para o modelo randômico em questão. A correspondente correção na força de interação sobre a partícula 1 pode ser obtida da equação (1.64) ou diretamente derivando a expressão acima para a energia, resultando em

$$\vec{F}_{int}^{(1)}(q_1, q_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2; m_0, d = 3) = +\sigma_\xi^2 \frac{q_1 q_2 m_0^5}{32\pi^2} e^{-m_0 a} \hat{a}. \quad (1.69)$$

A correção na força sobre q_2 , naturalmente, vem dada por $-\vec{F}_{int}^{(1)}$.

A energia e a força para o caso de um campo sem massa ($m_0 = 0$) são obtidas de maneira análoga usando agora as expressões gerais (1.51) e (1.55) ou, simplesmente, tomando o limite $m_0 \rightarrow 0$ nas expressões obtidas para o caso massivo. Os resultados correspondem à bem conhecida interação Coulombiana entre duas cargas pontuais:

$$E_{int}^{(0)}(q_1, q_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2; m_0 = 0, d = 3) = -\frac{q_1 q_2}{4\pi a} \quad (1.70)$$

e

$$\mathbf{F}_{int}^{(0)}(q_1, q_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2; m_0 = 0, d = 3) = -\frac{q_1 q_2}{4\pi a^2} \hat{a} . \quad (1.71)$$

As correções randômicas para o caso sem massa são todas nulas, como pode ser visto das expressões (1.63) e (1.65), isto é,

$$E_{int}^{(1)}(q_1, q_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2; m_0 = 0, d = 3) = 0 \quad (1.72)$$

e

$$\mathbf{F}_{int}^{(1)}(q_1, q_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2; m_0 = 0, d = 3) = \vec{0} . \quad (1.73)$$

Podemos sumarizar os resultados obtidos nesta subseção para a interação entre duas cargas pontuais nas seguintes expressões:

$$E_{int} = \begin{cases} -\frac{q_1 q_2}{4\pi} \frac{e^{-m_0 a}}{a} + \sigma_\xi^2 \frac{q_1 q_2 m_0^4}{32\pi^2} e^{-m_0 a} + \mathcal{O}(\sigma^4) & (m_0 > 0) \\ -\frac{q_1 q_2}{4\pi a} + \mathcal{O}(\sigma^4) & (m_0 = 0) \end{cases} \quad (1.74)$$

e

$$\vec{F}_{int} = \begin{cases} -\frac{q_1 q_2}{4\pi a^2} (m_0 a + 1) e^{-m_0 a} \hat{a} + \sigma_\xi^2 \frac{q_1 q_2 m_0^5}{32\pi^2} e^{-m_0 a} \hat{a} + \mathcal{O}(\sigma^4) & (m_0 > 0) \\ -\frac{q_1 q_2}{4\pi a^2} \hat{a} + \mathcal{O}(\sigma^4) & (m_0 = 0) , \end{cases} \quad (1.75)$$

onde incluímos novamente o termo $\mathcal{O}(\sigma^4)$ para lembrar que consideramos apenas efeitos quadráticos nas flutuações randômicas.

É interessante notar que a força de interação, que possui caráter atrativo para cargas de mesmo sinal e repulsivo para cargas de sinais opostos na teoria livre, recebe uma contribuição randômica de comportamento oposto no caso $m_0 > 0$, i.e., uma correção à força (de menor intensidade, é óbvio) que tende a atrair cargas de sinais opostos e a repelir cargas de sinais iguais. Vale notar também que a correção randômica para o caso massivo (tanto na energia quanto na força) tende a dominar a interação para longas distâncias, dado que cai mais lentamente com a distância do que a contribuição livre. Este fato é um indício de que a abordagem perturbativa realizada neste modelo não seja válida acima de uma certa escala de distâncias.

- **N = 2, D = 1, d = 2: Duas linhas carregadas paralelas em (3 + 1)-dimensões**

No caso de linhas infinitas carregadas, o “volume” L^D da brana corresponde ao comprimento da linha e, portanto, $\mathcal{E}_{int}^{(0)}$ dado pela equação 1.50 representa a energia por unidade de comprimento. Similarmente, as grandezas q_1, q_2 neste caso representam densidades lineares de cargas das branas. A expressão (1.50) para o caso massivo então se reduz a

$$\mathcal{E}_{int}^{(0)}(q_1, q_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2; m_0, d = 2) = -\frac{q_1 q_2}{2\pi} K_0(m_0 a) , \quad (1.76)$$

onde novamente $a \equiv |\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2|$. A função $K_0(x)$ não pode ser expressa em termos das funções elementares, mas exibe um comportamento monotonicamente decrescente e se comporta como $\sim e^{-x}/\sqrt{x}$ para x grande. A correspondente densidade de força sobre a linha de carga q_1 pode ser obtida de (1.54) como sendo

$$\vec{\mathcal{F}}_{int}^{(0)}(q_1, q_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2; m_0, d = 2) = -\frac{q_1 q_2 m_0^2}{8\pi^2} (m_0 a)^{-1} K_1(m_0 a) \hat{a} , \quad (1.77)$$

e a força sobre a linha q_2 tem mesmo módulo e sinal oposto.

As correções randômicas a estes resultados podem ser obtidas novamente de (1.62) e (1.64), juntamente com o resultado $\alpha_3 = m_0/4\pi$. Os resultados são:

$$\mathcal{E}_{int}^{(1)}(q_1, q_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2; m_0, d = 2) = +\sigma_\xi^2 \frac{q_1 q_2 m_0^4 a}{16\pi^2} K_1(m_0 a) \quad (1.78)$$

e

$$\vec{\mathcal{F}}_{int}^{(1)}(q_1, q_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2; m_0, d = 2) = +\sigma_\xi^2 \frac{q_1 q_2 m_0^5 a}{16\pi^2} K_0(m_0 a) \hat{a} . \quad (1.79)$$

A energia e a força para o caso $m_0 = 0$ devem ser calculadas utilizando as fórmulas (1.52) e (1.56), que são as apropriadas para o caso não massivo em $d = 2$. Os resultados são:

$$\mathcal{E}_{int}^{(0)}(q_1, q_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2; m_0 = 0, d = 2) = \frac{q_1 q_2}{2\pi} \ln \frac{a}{a_0} + \Delta \quad (1.80)$$

e

$$\vec{\mathcal{F}}_{int}^{(0)}(q_1, q_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2; m_0 = 0, d = 2) = -\frac{q_1 q_2}{2\pi a} \hat{a} . \quad (1.81)$$

As correspondentes correções randômicas, como de praxe para o caso do campo sem massa (equações (1.63) e (1.65)) são nulas, ou seja,

$$\mathcal{E}_{int}^{(1)}(q_1, q_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2; m_0 = 0, d = 2) = 0 \quad (1.82)$$

e

$$\vec{\mathcal{F}}_{int}^{(1)}(q_1, q_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2; m_0 = 0, d = 2) = \vec{0} . \quad (1.83)$$

Em resumo, a interação entre duas linhas de carga mediada por um campo escalar em um meio randômico é dada por

$$\mathcal{E}_{int} = \begin{cases} -\frac{q_1 q_2}{2\pi} K_0(m_0 a) + \sigma_\xi^2 \frac{q_1 q_2 m_0^4 a}{16\pi^2} K_1(m_0 a) + \mathcal{O}(\sigma^4) & (m_0 > 0) \\ \frac{q_1 q_2}{2\pi} \ln \frac{a}{a_0} + \Delta + \mathcal{O}(\sigma^4) & (m_0 = 0) \end{cases} \quad (1.84)$$

e

$$\vec{\mathcal{F}}_{int} = \begin{cases} -\frac{q_1 q_2 m_0}{8\pi^2 a} K_1(m_0 a) \hat{a} + \sigma_\xi^2 \frac{q_1 q_2 m_0^5 a}{16\pi^2} K_0(m_0 a) \hat{a} + \mathcal{O}(\sigma^4) & (m_0 > 0) \\ -\frac{q_1 q_2}{2\pi a} \hat{a} + \mathcal{O}(\sigma^4) & (m_0 = 0) . \end{cases} \quad (1.85)$$

Tal como no caso da interação entre cargas pontuais, ocorre na teoria livre que as linhas de carga tendem a se atrair (repelir) para densidades de carga de mesmo sinal (sinais opostos), e a presença da randomicidade no meio causa um pequeno efeito de atração para cargas de sinais opostos e repulsão para cargas iguais. Novamente o termo randômico domina a interação para longas distâncias, dado que para x grande temos $x K_1(x) \sim \sqrt{x} e^{-x}$ enquanto $K_0(x) \sim e^{-x}/\sqrt{x}$. Este fato é um indício da validade da teoria de perturbação empregada apenas até um certo limite de distâncias.

- **N = 2, D = 2, d = 1: Dois planos paralelos carregados em (3 + 1)-dimensões**

Aqui, L^D corresponde à área dos planos e portanto $\mathcal{E}_{int}^{(0)}$ é a energia por unidade de área. Naturalmente, q_1 e q_2 são neste caso as densidades superficiais de cargas em cada plano. As densidades de energia e de força para $m_0 > 0$ serão dadas pelas equações (1.50) e (1.54), que neste caso se reduzem a

$$\mathcal{E}_{int}^{(0)}(q_1, q_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2; m_0, d = 1) = -\frac{q_1 q_2}{2m_0} e^{-m_0 a} \quad (1.86)$$

e

$$\vec{\mathcal{F}}_{int}^{(0)}(q_1, q_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2; m_0, d = 1) = -\frac{q_1 q_2}{2} e^{-m_0 a} \hat{a} , \quad (1.87)$$

onde $a = |\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2| = |a_1 - a_2|$, visto que \mathbf{a}_1 e \mathbf{a}_2 são vetores de uma única componente no presente caso.

As correspondentes correções são novamente dadas pelas equações (1.62) e (1.64) com $\alpha_3 = m_0/4\pi$, isto é,

$$\mathcal{E}_{int}^{(1)}(q_1, q_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2; m_0, d = 1) = +\sigma_\xi^2 \frac{q_1 q_2 m_0^2}{16\pi} (1 + m_0 a) e^{-m_0 a} \quad (1.88)$$

e

$$\vec{\mathcal{F}}_{int}^{(1)}(q_1, q_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2; m_0, d = 1) = \sigma_\xi^2 \frac{q_1 q_2 m_0^4 a}{16\pi} e^{-m_0 a} \hat{a} . \quad (1.89)$$

As mesmas grandezas livres para o caso sem massa podem ser obtidas utilizando as expressões (1.51) e (1.55), resultando em

$$\mathcal{E}_{int}^{(0)}(q_1, q_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2; m_0, d = 1) = \frac{q_1 q_2}{2} a \quad (1.90)$$

e

$$\vec{\mathcal{F}}_{int}^{(0)}(q_1, q_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2; m_0, d = 1) = -\frac{q_1 q_2}{2} \hat{a} . \quad (1.91)$$

Como podemos notar da expressão acima, a força de interação entre os planos para este caso sem massa independe da separação entre os mesmos. Novamente, as correspondentes correções randômicas são nulas como de costume para $m_0 = 0$:

$$\mathcal{E}_{int}^{(1)}(q_1, q_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2; m_0 = 0, d = 1) = 0 \quad (1.92)$$

e

$$\vec{\mathcal{F}}_{int}^{(1)}(q_1, q_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2; m_0 = 0, d = 1) = \vec{0} \quad (1.93)$$

Podemos resumir a interação entre dois planos com densidades de cargas q_1 e q_2 neste modelo pelas seguintes expressões:

$$\mathcal{E}_{int} = \begin{cases} -\frac{q_1 q_2}{2m_0} e^{-m_0 a} + \sigma_\xi^2 \frac{q_1 q_2 m_0^2}{16\pi} (1 + m_0 a) e^{-m_0 a} + \mathcal{O}(\sigma^4) & (m_0 > 0) \\ \frac{q_1 q_2}{2} a + \mathcal{O}(\sigma^4) & (m_0 = 0) \end{cases} \quad (1.94)$$

e

$$\vec{\mathcal{F}}_{int} = \begin{cases} -\frac{q_1 q_2}{2} e^{-m_0 a} \hat{a} + \sigma_\xi^2 \frac{q_1 q_2 m_0^4 a}{16\pi} e^{-m_0 a} \hat{a} + \mathcal{O}(\sigma^4) & (m_0 > 0) \\ -\frac{q_1 q_2}{2} \hat{a} + \mathcal{O}(\sigma^4) & (m_0 = 0) . \end{cases} \quad (1.95)$$

A interação entre os planos exibe as mesmas propriedades já vistas anteriormente para a interação entre cargas e linhas de cargas. Em particular, as correções randômicas novamente dominam os correspondentes termos livres na escala de a grande. É interessante notar que a força de interação entre os planos é independente da separação a para o caso de $m_0 = 0$, tanto na teoria livre quanto na presença das flutuações randômicas no meio.

1.4 Interação entre fontes do tipo derivadas da delta: distribuição de dipolos generalizada

Nesta seção estudamos a energia de interação entre uma outra classe de objetos D -dimensionais, descritos por uma corrente escalar que contém derivadas da função delta de Dirac. A interação é intermediada pelo mesmo campo escalar randômico em $d + D + 1$ dimensões considerado na seção anterior, *i.e.*, descrito pela Lagrangeana \mathcal{L}_F . A metodologia utilizada, bem como a notação para coordenadas espaço-temporais, serão as mesmas da seção anterior.

A Lagrangeana a ser utilizada aqui possui essencialmente a mesma forma que no caso anterior,

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_F(x) + J(x)\varphi(x) ,$$

onde agora consideramos uma corrente J da forma

$$J(x) = \partial^\mu \sum_{r=1}^N q_r W_{\mu(r)} \delta^d(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a}_r) , \quad (1.96)$$

onde q_r são as densidades de cargas das branas e os $W_{\mu(r)}$ para $r = 1, 2, \dots, N$ são vetores $(d + D + 1)$ -dimensionais fixos e estáticos no referencial inercial no qual é feita a análise a seguir. Conforme veremos a posteriori, a corrente J acima simula, para o caso de $d = 3, D = 0$, a presença de uma distribuição de dipolos (isto é, pares de cargas opostas separados por uma distância fixa) com momentos de dipolo $\mathbf{p}_r = q_r \mathbf{V}_{\perp(r)}$. Neste sentido, a corrente (1.96) pode ser entendida, no caso de dimensões arbitrárias, como a generalização de uma distribuição uniforme de “dipolos” para o campo escalar, ao longo de branas D -dimensionais paralelas, com densidades de carga opostas, e separadas por uma distância fixa.

A energia de interação é obtida a partir do conhecimento da corrente $J(x)$ e da função de Green média $\langle G(x, x') \rangle$, novamente, através da equação (1.42). Após substituir a expressão (1.96) para a corrente e descartar as contribuições de auto-energia (os termos envolvendo q_r^2) que, tal como antes, não têm relação com a interação entre branas distintas, obtemos:

$$E_{int} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N q_r q_s (1 - \delta_{rs}) \mathcal{I}_{rs} , \quad (1.97)$$

onde definimos

$$\mathcal{I}_{rs} = \int d^{d+D+1}x d^{d+D+1}x' W_{\mu(r)} W_{\nu(s)} \partial_x^\mu \delta^d(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a}_r) \langle G(x, x') \rangle \partial_{x'}^\nu \delta^d(\mathbf{x}'_\perp - \mathbf{a}_s),$$

que, após duas integrações por partes, pode ser posto na forma

$$\mathcal{I}_{rs} = \int d^{d+D+1}x d^{d+D+1}x' W_{\mu(r)} W_{\nu(s)} \delta^d(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a}_r) \delta^d(\mathbf{x}'_\perp - \mathbf{a}_s) \partial_x^\mu \partial_{x'}^\nu \langle G(x, x') \rangle .$$

Os cálculos a seguir para manipular a integral \mathcal{I}_{rs} acima são bastante similares (embora um pouco mais extensos) àqueles realizados na seção anterior para chegar na expressão (1.46) para a densidade de energia. Primeiramente escrevemos a expansão de Fourier de $\langle G(x, x') \rangle$, a saber,

$$\langle G(x, x') \rangle = \int \frac{d^{d+D+1}k}{(2\pi)^{d+D+1}} e^{-ik(x-x')} \langle \tilde{G}(k) \rangle .$$

Em seguida, integramos sobre $d^d\mathbf{x}_\perp d^d\mathbf{x}'_\perp$, o que equivale simplesmente a fazer $\mathbf{x}_\perp = \mathbf{a}_r$ e $\mathbf{x}'_\perp = \mathbf{a}_s$. Então integramos sobre $dx^0 d^D\mathbf{x}_\parallel$ para obter $2\pi\delta(\omega)(2\pi)^D\delta^D(\mathbf{k}_\parallel)$. Na sequência integramos sobre $d\omega d^D\mathbf{k}_\parallel$, o que faz $\omega = 0$ e $\mathbf{k}_\parallel = \mathbf{0}_\parallel$. Por fim, integramos sobre $dx^0 d^D\mathbf{x}'_\parallel$ para produzir o mesmo fator TL^D que surge nos cálculos da seção 1.3. Com isto, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{rs} &= TL^D \int \frac{d^d\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^d} (\mathbf{W}_{(r)\perp} \cdot \mathbf{k}_\perp) (\mathbf{W}_{(s)\perp} \cdot \mathbf{k}_\perp) e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{a}_{rs}} \langle \tilde{G}(\omega = 0, \mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_\parallel = \mathbf{0}_\parallel) \rangle \\ &= -TL^D \left(\mathbf{W}_{(r)\perp} \cdot \vec{\nabla}_{rs\perp} \right) \left(\mathbf{W}_{(s)\perp} \cdot \vec{\nabla}_{rs\perp} \right) \int \frac{d^d\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{a}_{rs}} \langle \tilde{G}(0, \mathbf{k}_\perp, \mathbf{0}_\parallel) \rangle , \end{aligned}$$

onde definimos $\mathbf{a}_{rs} \doteq \mathbf{a}_r - \mathbf{a}_s$ e $\vec{\nabla}_{rs\perp} \doteq \partial/\partial\mathbf{a}_{rs}$ e ainda $\mathbf{W}_{(r)\perp}$ é o vetor d -dimensional composto pelas componentes de $W_{\mu(r)}$ nas direções perpendiculares às branas (isto é, $W_{\mu(r)} = (W_{0(r)}, \mathbf{W}_{(r)\perp}, \mathbf{W}_{(r)\parallel})$).

Com o resultado acima para a integral \mathcal{I}_{rs} a expressão (1.97) para a energia se torna ($\mathcal{E}_{int} \doteq E_{int}/L^D$):

$$\mathcal{E}_{int} = -\frac{1}{2} \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N q_r q_s (1 - \delta_{rs}) \left(\mathbf{W}_{(r)\perp} \cdot \vec{\nabla}_{rs\perp} \right) \left(\mathbf{W}_{(s)\perp} \cdot \vec{\nabla}_{rs\perp} \right) \int \frac{d^d\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{a}_{rs}} \langle \tilde{G}(0, \mathbf{k}_\perp, \mathbf{0}_\parallel) \rangle . \quad (1.98)$$

Conforme já discutido em outras ocasiões, a função de Green $\langle \tilde{G} \rangle$ possui duas contribuições: $\langle \tilde{G} \rangle = \tilde{G}^{(0)} + \tilde{G}^{(1)}$. Assim, a densidade de energia também possuirá dois termos distintos: um livre, $\mathcal{E}_{int}^{(0)}$, e uma correção randômica a este termo livre, $\mathcal{E}_{int}^{(1)}$. Vamos analisar cada uma destas contribuições separadamente a seguir.

1.4.1 A contribuição livre $\mathcal{E}_{int}^{(0)}$

A contribuição livre para a energia de interação entre as distribuições de “dipolos” vem da substituição do termo livre $\tilde{G}^{(0)}$ na função de Green média que aparece na expressão geral

(1.98), ou seja,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{int}^{(0)} &= -\frac{1}{2} \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N q_r q_s (1 - \delta_{rs}) \left(\mathbf{W}_{(r)\perp} \cdot \vec{\nabla}_{rs\perp} \right) \left(\mathbf{W}_{(s)\perp} \cdot \vec{\nabla}_{rs\perp} \right) \int \frac{d^d \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{a}_{rs}} \tilde{G}^{(0)}(0, \mathbf{k}_\perp, \mathbf{0}_\parallel) \\
&= +\frac{1}{2} \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N q_r q_s (1 - \delta_{rs}) \left(\mathbf{W}_{(r)\perp} \cdot \vec{\nabla}_{rs\perp} \right) \left(\mathbf{W}_{(s)\perp} \cdot \vec{\nabla}_{rs\perp} \right) \int \frac{d^d \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{a}_{rs}}}{\mathbf{k}_\perp^2 + m_0^2} .
\end{aligned} \tag{1.99}$$

A integral que aparece no lado direito desta expressão é a mesma que foi encontrada no cálculo da contribuição livre para a energia de interação na seção 1.3, que naquela oportunidade foi calculada com detalhes e resultou na expressão (1.49), a saber,

$$\int \frac{d^d \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{a}_{rs}}}{\mathbf{k}_\perp^2 + m_0^2} = (2\pi)^{-d/2} m_0^{d-2} \mathcal{K}_d(m_0 a_{rs}) , \tag{1.100}$$

onde definimos a função $\mathcal{K}_d(x) \doteq x^{1-d/2} K_{d/2-1}(x)$. Note que para obtermos a energia (1.99) basta atuar com o operador $\left(\mathbf{W}_{(r)\perp} \cdot \vec{\nabla}_{rs\perp} \right) \left(\mathbf{W}_{(s)\perp} \cdot \vec{\nabla}_{rs\perp} \right)$ na integral acima, o que significa basicamente atuá-lo na função $\mathcal{K}_d(m_0 a_{rs})$.

Notando que a derivada da função \mathcal{K} definida acima satisfaz à propriedade

$$\frac{d\mathcal{K}_d(x)}{dx} = -x\mathcal{K}_{d+2}(x) ,$$

(que pode ser facilmente provada usando as relações de recorrência da função de Bessel K), segue que

$$\left(\mathbf{W}_{(s)\perp} \cdot \vec{\nabla}_{rs\perp} \right) \mathcal{K}_d(m_0 a_{rs}) = \mathbf{W}_{(s)\perp} \cdot \left[\frac{\partial \mathcal{K}_d(m_0 a_{rs})}{\partial (m_0 a_{rs})} \vec{\nabla}_{rs\perp} (m_0 a_{rs}) \right] = -m_0^2 \mathcal{K}_{d+2}(m_0 a_{rs}) \left(\mathbf{W}_{(s)\perp} \cdot \mathbf{a}_{rs} \right) .$$

Atuando com $\left(\mathbf{W}_{(r)\perp} \cdot \vec{\nabla}_{rs\perp} \right)$ sobre este resultado obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{W}_{(r)\perp} \cdot \vec{\nabla}_{rs\perp} \right) \left(\mathbf{W}_{(s)\perp} \cdot \vec{\nabla}_{rs\perp} \right) \mathcal{K}_d(m_0 a_{rs}) &= -m_0^2 \left(\mathbf{W}_{(r)\perp} \cdot \vec{\nabla}_{rs\perp} \right) \left[\mathcal{K}_{d+2}(m_0 a_{rs}) \left(\mathbf{W}_{(s)\perp} \cdot \mathbf{a}_{rs} \right) \right] \\
&= -m_0^2 \left(\mathbf{W}_{(r)\perp} \cdot \vec{\nabla}_{rs\perp} \right) \mathcal{K}_{d+2}(m_0 a_{rs}) \left(\mathbf{W}_{(s)\perp} \cdot \mathbf{a}_{rs} \right) + \\
&\quad -m_0^2 \mathcal{K}_{d+2}(m_0 a_{rs}) \left(\mathbf{W}_{(r)\perp} \cdot \vec{\nabla}_{rs\perp} \right) \left(\mathbf{W}_{(s)\perp} \cdot \mathbf{a}_{rs} \right) \\
&= m_0^4 \mathcal{K}_{d+4}(m_0 a_{rs}) \left(\mathbf{W}_{(r)\perp} \cdot \mathbf{a}_{rs} \right) \left(\mathbf{W}_{(s)\perp} \cdot \mathbf{a}_{rs} \right) + \\
&\quad -m_0^2 \mathcal{K}_{d+2}(m_0 a_{rs}) \left(\mathbf{W}_{(r)\perp} \cdot \mathbf{W}_{(s)\perp} \right) \\
&= -m_0^2 (m_0 a_{rs})^{-d/2} \left[K_{d/2}(m_0 a_{rs}) \left(\mathbf{W}_{(r)\perp} \cdot \mathbf{W}_{(s)\perp} \right) + \right. \\
&\quad \left. -m_0 a_{rs} K_{d/2+1}(m_0 a_{rs}) \left(\mathbf{W}_{(r)\perp} \cdot \hat{\mathbf{a}}_{rs} \right) \left(\mathbf{W}_{(s)\perp} \cdot \hat{\mathbf{a}}_{rs} \right) \right] .
\end{aligned}$$

Substituindo na equação (1.99) obtemos uma densidade de energia de interação livre dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{int}^{(0)}(N; m_0, d) &= -\frac{m_0^d}{2(2\pi)^{d/2}} \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N q_r q_s (1 - \delta_{rs}) (m_0 a_{rs})^{-d/2} \\ &\times \left[K_{d/2}(m_0 a_{rs}) (\mathbf{W}_{(r)\perp} \cdot \mathbf{W}_{(s)\perp}) - m_0 a_{rs} K_{d/2+1}(m_0 a_{rs}) (\mathbf{W}_{(r)\perp} \cdot \hat{a}_{rs}) (\mathbf{W}_{(s)\perp} \cdot \hat{a}_{rs}) \right] \end{aligned} \quad (1.101)$$

para o caso de $m_0 > 0$ e d arbitrário. Aqui a dependência em N que aparece no argumento de $\mathcal{E}_{int}^{(0)}$ é apenas uma abreviação para a dependência em $q_1, \dots, q_N; W_{\mu(1)}, \dots, W_{\mu(N)}; \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N$.

A correspondente energia de interação para o caso de um campo sem massa pode ser obtida diretamente tomando o limite $m_0 \rightarrow 0$ na equação acima. Não há necessidade aqui de fazer a distinção entre os casos $d \neq 2$ e $d = 2$, visto que em todos os casos as funções de Bessel envolvidas são de ordem $\nu \neq 0$. Basta então usar novamente o comportamento assintótico de $K_\nu(x)$ para $x \rightarrow 0$, a saber,

$$K_\nu(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{\Gamma(\nu) 2^{\nu-1}}{x^\nu} \quad (\nu \neq 0),$$

resultando em

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{int}^{(0)}(N; m_0 = 0, d) &= -\frac{\Gamma(d/2)}{4\pi^{d/2}} \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N q_r q_s (1 - \delta_{rs}) a_{rs}^{-d} \\ &\times \left[(\mathbf{W}_{(r)\perp} \cdot \mathbf{W}_{(s)\perp}) - d (\mathbf{W}_{(r)\perp} \cdot \hat{a}_{rs}) (\mathbf{W}_{(s)\perp} \cdot \hat{a}_{rs}) \right]. \end{aligned} \quad (1.102)$$

De posse das expressões (1.101) e (1.102) é possível calcular, por exemplo, a força (por unidade de volume da brana) sobre o r -ésimo “dipolo”:

$$\vec{\mathcal{F}}_{int,r}^{(0)} = - \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^N \frac{\partial \mathcal{E}_{int}^{(0)}}{\partial a_{rs}} \hat{a}_{rs}.$$

Apesar de ser um cálculo direto, ele é bastante trabalhoso para a situação geral tratada aqui e a força resultante é dada por uma fórmula pouco instrutiva. Por esta razão, optamos por omitir este cálculo e focar toda a análise nas energias de interação.

Na sequência, o objetivo é procurar pelas correções randômicas de 2ª ordem a cada um dos resultados obtidos nesta seção.

1.4.2 A correção randômica $\mathcal{E}_{int}^{(1)}$

A correção randômica à energia de interação do campo livre ($\mathcal{E}_{int}^{(0)}$, obtida na seção anterior) corresponde ao termo randômico da função de Green média⁹, a saber $\tilde{G}^{(1)}$, inserido na energia

⁹Lembre-se que $\langle G(\omega, \mathbf{k}) \rangle = G^{(0)}(\omega, \mathbf{k}) + G^{(1)}(\omega, \mathbf{k})$.

(1.46), isto é,

$$\mathcal{E}_{int}^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N q_r q_s (1 - \delta_{rs}) \left(\mathbf{W}_{(r)\perp} \cdot \vec{\nabla}_{rs\perp} \right) \left(\mathbf{W}_{(s)\perp} \cdot \vec{\nabla}_{rs\perp} \right) \int \frac{d^d \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{a}_{rs}} \tilde{G}^{(1)}(0, \mathbf{k}_\perp, \mathbf{0}_\parallel), \quad (1.103)$$

onde $\tilde{G}^{(1)}(\omega, \mathbf{k})$ vem dado pela equação (1.16) para o caso de flutuações randômicas com correlação arbitrária. Em particular, para $\omega = 0$ e $\mathbf{k}_\parallel = \mathbf{0}_\parallel$ temos

$$\tilde{G}^{(1)}(0, \mathbf{k}_\perp, \mathbf{0}_\parallel) = -\frac{\sigma_\xi^2 m_0^4}{(\mathbf{k}_\perp^2 + m_0^2)^2} \int \frac{d^d \mathbf{k}'_\perp d^D \mathbf{k}'_\parallel}{(2\pi)^{d+D}} \frac{\tilde{f}(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp, -\mathbf{k}'_\parallel)}{\mathbf{k}'_\perp{}^2 + \mathbf{k}'_\parallel{}^2 + m_0^2},$$

de forma que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{int}^{(1)} &= -\frac{\sigma_\xi^2 m_0^4}{2} \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N q_r q_s (1 - \delta_{rs}) \left(\mathbf{W}_{(r)\perp} \cdot \vec{\nabla}_{rs\perp} \right) \left(\mathbf{W}_{(s)\perp} \cdot \vec{\nabla}_{rs\perp} \right) \\ &\quad \int \frac{d^d \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{a}_{rs}}}{(\mathbf{k}_\perp^2 + m_0^2)^2} \int \frac{d^d \mathbf{k}'_\perp d^D \mathbf{k}'_\parallel}{(2\pi)^{d+D}} \frac{\tilde{f}(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp, -\mathbf{k}'_\parallel)}{\mathbf{k}'_\perp{}^2 + \mathbf{k}'_\parallel{}^2 + m_0^2}. \end{aligned} \quad (1.104)$$

Nos concentraremos novamente somente no caso de ruídos do tipo branco (*white noise*), onde $f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \delta^{d+D}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rightarrow \tilde{f}(\mathbf{k}) = 1$, no qual a expressão anterior para a energia de interação entre as distribuições de “dipolos” se reduz a

$$\mathcal{E}_{int}^{(1)} = -\frac{\sigma_\xi^2 m_0^4 \alpha_{d+D}}{2} \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N q_r q_s (1 - \delta_{rs}) \left(\mathbf{W}_{(r)\perp} \cdot \vec{\nabla}_{rs\perp} \right) \left(\mathbf{W}_{(s)\perp} \cdot \vec{\nabla}_{rs\perp} \right) \int \frac{d^d \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{a}_{rs}}}{(\mathbf{k}_\perp^2 + m_0^2)^2}, \quad (1.105)$$

onde definimos novamente a constante

$$\alpha_{d+D}(\mathbf{k}_\perp) = \int \frac{d^d \mathbf{k}'_\perp d^D \mathbf{k}'_\parallel}{(2\pi)^{d+D}} \frac{1}{\mathbf{k}'_\perp{}^2 + \mathbf{k}'_\parallel{}^2 + m_0^2}.$$

A integral que aparece no lado direito da expressão para $\mathcal{E}_{int}^{(1)}$ é a mesma que apareceu e foi calculada na Seção 1.3 quando buscávamos pelas correções randômicas às interações entre branas. Bastaria portanto atuar com o operador $\left(\mathbf{W}_{(r)\perp} \cdot \vec{\nabla}_{rs\perp} \right) \left(\mathbf{W}_{(s)\perp} \cdot \vec{\nabla}_{rs\perp} \right)$ naquele resultado para obter a correção $\mathcal{E}_{int}^{(1)}$ no presente caso. Entretanto, há uma maneira mais simples de fazer isto. Notando que

$$\int \frac{d^d \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{a}_{rs}}}{(\mathbf{k}_\perp^2 + m_0^2)^2} = -\frac{1}{2m_0} \frac{\partial}{\partial m_0} \left\{ (2\pi)^{-d/2} m_0^{d-2} (m_0 a_{rs})^{1-d/2} K_{d/2-1}(m_0 a_{rs}) \right\},$$

podemos escrever a equação (1.105) como

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{int}^{(1)} &= +\frac{\sigma_\xi^2 m_0^4 \alpha_{d+D}}{2m_0} \frac{\partial}{\partial m_0} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N q_r q_s (1 - \delta_{rs}) \left(\mathbf{W}_{(r)\perp} \cdot \vec{\nabla}_{rs\perp} \right) \left(\mathbf{W}_{(s)\perp} \cdot \vec{\nabla}_{rs\perp} \right) \int \frac{d^d \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{a}_{rs}}}{\mathbf{k}_\perp^2 + m_0^2} \right\} \\ &= \frac{\sigma_\xi^2 m_0^3 \alpha_{d+D}}{2} \frac{\partial}{\partial m_0} \mathcal{E}_{int}^{(0)}. \end{aligned}$$

Logo, para obter a correção randômica basta derivarmos o resultado livre com relação a m_0 e multiplicar por um fator. O resultado disto é:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{int}^{(1)}(N; m_0, d) &= -\frac{\sigma_\xi^2 m_0^{d+2} \alpha_{d+D}}{2(2\pi)^{d/2}} \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N q_r q_s (1 - \delta_{rs}) (m_0 a_{rs})^{-d/2} \\ &\quad \times \left\{ \left[d K_{d/2}(m_0 a_{rs}) - m_0 a_{rs} K_{d/2+1}(m_0 a_{rs}) \right] (\mathbf{W}_{(r)\perp} \cdot \mathbf{W}_{(s)\perp}) + \right. \\ &\quad \left. + (m_0 a_{rs})^2 K_{d/2}(m_0 a_{rs}) (\mathbf{W}_{(r)\perp} \cdot \hat{a}_{rs}) (\mathbf{W}_{(s)\perp} \cdot \hat{a}_{rs}) \right\}. \end{aligned} \quad (1.106)$$

Para o caso de um campo sem massa, a correção randômica pode ser obtida tomando o limite de massa nula ($m_0 \rightarrow 0$) diretamente na expressão acima obtida para $m_0 \neq 0$. Novamente não há necessidade de distinguir os casos $d \neq 2$ e $d = 2$, visto que em ambos os casos aparecem funções de Bessel $K_\nu(x)$ com $\nu \neq 0$, cujo comportamento assintótico para $x \rightarrow 0$ é bem conhecido ($K_\nu(x) \sim \Gamma(\nu) 2^{\nu-1} x^{-\nu}$). Após tomar o referido limite, obtemos

$$\mathcal{E}_{int}^{(1)}(N; m_0 = 0, d) = 0. \quad (1.107)$$

Tal como ocorreu anteriormente para o caso da interação entre branas carregadas, ocorre também para a interação entre distribuições de “dipolos” que não há correção randômica para o caso sem massa.

Agora que temos alguns resultados gerais para a interação entre dipolos generalizados em dimensões arbitrárias, vamos ilustrar seu significado para uma situação específica de interesse e de maior apelo físico.

1.4.3 Caso particular: dipolos pontuais em $d + D = 3$ dimensões espaciais

A situação particular de maior apelo físico dos resultados gerais obtidos acima é o foco principal desta seção, e corresponde ao caso de $D = 0$ e $d = 3$, que representa a interação entre dipolos no seu sentido original (isto é, cargas pontuais opostas separadas por uma distância fixa) em 3 dimensões espaciais. O resultado livre para a energia servirá inclusive para ilustrar a razão pela qual estamos denominando por distribuição de dipolos à corrente (1.96) utilizada na Seção 1.4.

Dado que a interação entre os dipolos estacionários satisfaz ao princípio de superposição, é suficiente determinar apenas a energia de interação entre $N = 2$ dipolos. A interação para

$N > 2$ dipolos será uma combinação destes resultados de interação 2 a 2. A expressão (1.101), que neste caso corresponde à energia (e não densidade de energia) de interação livre, se reduz a

$$E_{int}^{(0)}(m_0, d) = -\frac{q_1 q_2 m_0^{3/2}}{(2\pi)^{3/2} a^{3/2}} \left[K_{3/2}(m_0 a) (\mathbf{W}_{(1)\perp} \cdot \mathbf{W}_{(2)\perp}) - m_0 a K_{5/2}(m_0 a) (\mathbf{W}_{(1)\perp} \cdot \hat{a}) (\mathbf{W}_{(2)\perp} \cdot \hat{a}) \right],$$

onde $\mathbf{a} \doteq \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$ e $a = |\mathbf{a}|$. Usando as relações de recorrência da função de Bessel K podemos facilmente mostrar que

$$\begin{aligned} K_{3/2}(x) &= \left(1 + \frac{1}{x}\right) K_{1/2}(x) \\ K_{5/2}(x) &= K_{1/2}(x) + \frac{3}{x} K_{3/2}(x) = \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}\right) K_{1/2}(x). \end{aligned}$$

Sabendo que $K_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}$, podemos reescrever a expressão acima para a energia de maneira mais simples como

$$E_{int}^{(0)}(m_0, d) = \frac{e^{-m_0 a}}{4\pi a^3} \left\{ (m_0^2 a^2 + 3m_0 a + 3) (q_1 \mathbf{W}_{(1)\perp} \cdot \hat{a}) (q_2 \mathbf{W}_{(2)\perp} \cdot \hat{a}) - (m_0 a + 1) (q_1 \mathbf{W}_{(1)\perp} \cdot q_2 \mathbf{W}_{(2)\perp}) \right\} \quad (1.108)$$

A expressão para o caso $m_0 = 0$ pode ser obtida aplicando a fórmula geral (1.102) com $N = 2, D = 0, d = 3$ ou, de maneira mais simples, tomando o limite $m_0 \rightarrow 0$ diretamente na expressão obtida acima para o caso massivo, resultando em

$$E_{int}^{(0)}(m_0 = 0, d) = \frac{1}{4\pi a^3} \left\{ 3 (q_1 \mathbf{W}_{(1)\perp} \cdot \hat{a}) (q_2 \mathbf{W}_{(2)\perp} \cdot \hat{a}) - (q_1 \mathbf{W}_{(1)\perp} \cdot q_2 \mathbf{W}_{(2)\perp}) \right\}. \quad (1.109)$$

Esta é, a menos de um sinal global, a energia de interação clássica (a mesma obtida via eletromagnetismo usual) entre dois dipolos elétricos/magnéticos [16] com momentos de dipolo $q_1 \mathbf{W}_{(1)\perp}$ e $q_2 \mathbf{W}_{(2)\perp}$, justificando portanto a nomenclatura de distribuição de dipolos para a corrente $J(x)$ utilizada nesta seção. O sinal negativo em relação ao resultado conhecido do eletromagnetismo é uma peculiaridade advinda do uso do campo escalar quântico como mediador da interação, fato este que já havia se manifestado anteriormente quando estudamos a interação entre cargas (lei de Coulomb, etc.). A expressão (1.108) é a generalização em 3 dimensões da interação entre dipolos pontuais para o caso massivo, e os casos gerais (1.101) e (1.102) são a generalização para o caso mais abstrato de dipolos não-pontuais, isto é, compostos por branas de dimensão arbitrária D .

O próximo passo é procurar pelas correções randômicas aos resultados acima. Para o caso

massivo, a correção é dada pela equação (1.106), que para $N = 2, d = 3$ fornece

$$E_{int}^{(1)}(m_0, d) = -\frac{\sigma_\xi^2 m_0^5 \alpha_3}{(2\pi)^{3/2}} q_1 q_2 (m_0 a)^{-3/2} \left\{ [3K_{3/2}(m_0 a) - m_0 a K_{5/2}(m_0 a)] (\mathbf{W}_{(1)\perp} \cdot \mathbf{W}_{(2)\perp}) + (m_0 a)^2 K_{3/2}(m_0 a) (\mathbf{W}_{(1)\perp} \cdot \hat{a}) (\mathbf{W}_{(2)\perp} \cdot \hat{a}) \right\} .$$

Lembrando que

$$\alpha_3 = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m_0^2} = \frac{m_0}{4\pi} ,$$

e manipulando as funções $K_{3/2}$ e $K_{5/2}$ da mesma forma que no caso livre feito logo acima, podemos reescrever esta correção na forma

$$E_{int}^{(1)}(m_0, d) = \sigma_\xi^2 \frac{m_0^5 e^{-m_0 a}}{32\pi^2 a} \left\{ (q_1 \mathbf{W}_{(1)\perp} \cdot q_2 \mathbf{W}_{(2)\perp}) - (m_0 a + 1) (q_1 \mathbf{W}_{(1)\perp} \cdot \hat{a}) (q_2 \mathbf{W}_{(2)\perp} \cdot \hat{a}) \right\} . \quad (1.110)$$

A correção para o caso $m_0 = 0$, que pode ser obtida tanto da equação (1.107) quanto tomando o limite $m_0 \rightarrow 0$ neste último resultado, é, sem surpresas, nula:

$$E_{int}^{(1)}(m_0 = 0, d) = 0. \quad (1.111)$$

Os resultados obtidos acima para este caso particular podem ser sumarizados como:

$$\begin{aligned} E_{int}(m_0, d) &= E_{int}^{(0)}(m_0, d) + E_{int}^{(1)}(m_0, d) \\ &= \frac{(m_0^2 a^2 + 3m_0 a + 3)e^{-m_0 a}}{4\pi a^3} \left\{ 1 - \sigma_\xi^2 \frac{m_0^5 a^2 (m_0 a + 1)}{8\pi (m_0^2 a^2 + 3m_0 a + 3)} \right\} (q_1 \mathbf{W}_{(1)\perp} \cdot \hat{a}) (q_2 \mathbf{W}_{(2)\perp} \cdot \hat{a}) \\ &\quad - \frac{(m_0 a + 1)e^{-m_0 a}}{4\pi a^3} \left\{ 1 - \sigma_\xi^2 \frac{m_0^5 a^2}{8\pi (m_0 a + 1)} \right\} (q_1 \mathbf{W}_{(1)\perp} \cdot q_2 \mathbf{W}_{(2)\perp}) + \mathcal{O}(\sigma^4) \end{aligned} \quad (1.112)$$

e

$$\begin{aligned} E_{int}(m_0 = 0, d) &= E_{int}^{(0)}(m_0 = 0, d) + E_{int}^{(1)}(m_0 = 0, d) \\ &= \frac{1}{4\pi a^3} \left\{ 3(q_1 \mathbf{W}_{(1)\perp} \cdot \hat{a}) (q_2 \mathbf{W}_{(2)\perp} \cdot \hat{a}) - (q_1 \mathbf{W}_{(1)\perp} \cdot q_2 \mathbf{W}_{(2)\perp}) \right\} + \mathcal{O}(\sigma^4) , \end{aligned} \quad (1.113)$$

de onde podemos perceber que novamente as correções randômicas de 2^a ordem nos campos de ruído tendem a dominar a interação para longas distâncias.

Capítulo 2

Eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw e violação da simetria de Lorentz

Desde o surgimento da teoria da relatividade especial e do eletromagnetismo de Maxwell, todas as teorias físicas ditas fundamentais supostamente devem exibir dois tipos de simetrias consideradas “sagradas”: simetria de calibre e de Lorentz. A presença destas simetrias fornece a uma dada teoria certos princípios físicos que permitem a criação de modelos para a descrição de fenômenos físicos com alto grau de precisão experimental. Um exemplo disto é a descrição atual da radiação eletromagnética, ambos no dia-a-dia ou em aceleradores de partículas a altas energias, que funciona com altíssima concordância experimental e é formulada de modo a exibir invariância de Lorentz e de calibre. Porém, ao menos do ponto de vista teórico, há certas razões para se investigar possíveis violações destas simetrias.

Por exemplo, a invariância de calibre no eletromagnetismo está intimamente ligada à massa nula do fóton, de modo que a busca por uma quebra desta simetria está relacionada à investigação de uma possível massa diferente de zero para o fóton. Para ser mais preciso, a invariância de calibre do eletromagnetismo corresponde à invariância das equações de movimento sob a transformação $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x)$, denominada transformação de calibre. A densidade de Lagrangeana de Maxwell

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} ,$$

com $F_{\mu\nu} \doteq \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, é claramente inalterada sob esta transformação e, assim, exibe simetria de calibre. Uma maneira possível de se quebrar esta simetria no contexto da teoria clássica seria adicionar um termo de massa para o fóton, que se acopla quadraticamente ao campo,

obtendo a chamada eletrodinâmica de Proca:

$$\mathcal{L}_P = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A^\mu A_\mu .$$

Porém, dados atuais advindos de medidas do campo magnético da Terra e de galáxias vizinhas [17] impõem um limite superior muito pequeno para esta massa do fóton,

$$m \leq 3 \times 10^{-36} GeV ,$$

o que nos leva a crer que a invariância de calibre do eletromagnetismo parece ser uma simetria fundamental da teoria, preservada pelo menos na escala de energia acessível aos experimentos atuais.

Por outro lado, a simetria de Lorentz, que é muito bem estabelecida e confirmada pelos experimentos atuais, tem sido bastante contestada pelos físicos teóricos recentemente. A questão principal que motiva esse questionamento é se a simetria de Lorentz é realmente uma simetria fundamental e verdadeira no cenário completo da teoria, ou se é apenas aproximadamente verdadeira (i.e., verdadeira na escala de energia à qual temos acesso atualmente, mas quebrada em uma escala de energias maiores à qual teríamos (ou não) acesso experimental apenas no futuro). A busca por violações desta simetria tem sido considerada nos últimos anos como bastante promissora, pois acredita-se que tais violações seriam manifestações físicas da ainda desconhecida teoria resultante da combinação entre gravidade e teoria quântica - a chamada *gravitação quântica*.

O objetivo deste capítulo é apresentar um modelo de eletrodinâmica clássica com violação das simetrias de Lorentz e paridade proposto por S. Carroll, G. Field e R. Jackiw (que abreviaremos simplesmente por CFJ) em 1990 [17, 18, 19]. Depois de expor o modelo original de CFJ, discutiremos algumas de suas consequências físicas, bem como os resultados de sua confrontação com os dados experimentais atuais. A razão pela qual estamos apresentando este modelo aqui é que, no próximo capítulo, apresentaremos uma nova proposta de eletrodinâmica com violação de Lorentz, proposta esta inspirada na de CFJ mas com considerações físicas e consequências fenomenológicas distintas.

2.1 O modelo de CFJ

O modelo de eletrodinâmica proposto por CFJ corresponde a uma modificação da eletrodinâmica de Maxwell por um termo do tipo Chern-Simons

$$\mathcal{L}_{CS} = -\frac{1}{2}V_\mu A_\nu {}^*F^{\mu\nu} ,$$

que acopla o campo eletromagnético A_μ a um quadrivetor de fundo V_μ cujo significado e propriedades serão discutidos a seguir. Nesta expressão, ${}^*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ designa o tensor de campo dual.

A origem deste termo do tipo Chern-Simons na literatura foi na busca por uma espécie de “massa topológica” para campos de calibre em $(2 + 1)$ dimensões e não tinha originalmente relação com a busca por violações da simetria de Lorentz [20, 21, 22]. De fato, ocorre que quando fenômenos eletromagnéticos são confinados a um plano, tal como no efeito Hall quântico e no fenômeno de supercondutividade a altas temperaturas críticas, é válida a aproximação de que não há dinâmica na direção perpendicular ao plano. Neste caso, se o vetor externo V_μ for escolhido como tendo componente não nula apenas nesta direção, a Lagrangeana \mathcal{L}_{CS} corresponde a uma eletrodinâmica que é invariante de Lorentz em um espaço-tempo $(2 + 1)$ -dimensional (i.e., boosts no plano de movimento deixam a dinâmica inalterada). Porém, no presente caso $(3 + 1)$ -dimensional as consequências são distintas: a invariância de Lorentz é quebrada e a invariância de calibre depende da forma do vetor V_μ , como veremos adiante.

Voltemos à eletrodinâmica de CFJ. Ela é descrita pela seguinte densidade de Lagrangeana:

$$\mathcal{L}_{CFJ} = \mathcal{L}_{EM} + \mathcal{L}_{CS} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}V_\mu A_\nu F_{\alpha\beta} . \quad (2.1)$$

A idéia aqui é estudar um modelo com violação da simetria de Lorentz mas que, por outro lado, mantenha a invariância de calibre intacta. Logo, o primeiro passo é determinar sob quais circunstâncias a Lagrangeana (2.1) é invariante sob uma transformação de calibre $\Delta A_\mu(x) = \partial_\mu\Lambda(x)$. Como \mathcal{L}_{EM} é obviamente invariante, devemos nos preocupar apenas com \mathcal{L}_{CS} , que se transforma como

$$\Delta\mathcal{L}_{CS} = \frac{1}{4}\Lambda\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu V_\mu F_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\Lambda(\partial_\nu V_\mu - \partial_\mu V_\nu){}^*F^{\mu\nu} . \quad (2.2)$$

Para que tenhamos invariância de calibre, deve ocorrer que $\Delta\mathcal{L}_{CS} = 0$ para qualquer função $\Lambda(x)$, ou seja, deve ocorrer que

$$\partial_\nu V_\mu - \partial_\mu V_\nu = 0 .$$

A condição acima é satisfeita geralmente desde que V_μ seja o gradiente de uma função escalar, i.e., $V_\mu(x) = \partial_\mu \theta(x)$, com $\theta(x)$ sendo um campo escalar arbitrário. Entretanto, o uso de um vetor de fundo desta forma traz consigo a questão natural de qual é a dinâmica do campo $\theta(x)$, quais são as leis que governam esta dinâmica, etc. Esta discussão é algo que queremos evitar, e por isso será conveniente procurar por outra alternativa mais simples que preserve a simetria de calibre.

Uma outra possibilidade bastante mais simplista para preservar a invariância de calibre da teoria (e que foi empregada por CFJ em seu trabalho original [17]) corresponde ao caso em que V_μ é na verdade um quadri vetor constante em um dado referencial inercial, isto é,

$$V_\mu = \text{const} \quad \implies \quad \partial_\nu V_\mu = 0 . \quad (2.3)$$

Sabendo que, num espaço-tempo plano tipo Minkowski, quando o tensor $\partial_\nu V_\mu$ zera em um dado referencial inercial então ele é nulo em todos os outros referenciais inerciais, segue que $\Delta \mathcal{L}_{CS} = 0$ para todo referencial inercial e a invariância de calibre fica garantida ¹.

Porém, a presença deste quadri vetor constante tem uma consequência física importante: ela introduz, em um certo sentido, uma (quadri-)direção privilegiada no espaço-tempo, violando, assim, explicitamente a simetria de Lorentz da teoria. Mais especificamente, se as componentes espaciais \mathbf{V} de V_μ forem diferentes de zero, haverá uma quebra na simetria por rotações espaciais (isto é, uma quebra da homogeneidade espacial), enquanto uma componente temporal não nula V_0 destruirá a invariância por boosts da teoria. Estes efeitos afetariam inevitavelmente os experimentos envolvendo o campo eletromagnético de forma que, se usarmos os dados experimentais atuais para impor limites na magnitude de V_μ , estamos de certa forma testando a validade da simetria de Lorentz em si no eletromagnetismo.

¹A discussão acima foi apresentada no background plano de Minkowski. A extensão natural para o caso de um espaço-tempo curvo arbitrário seria feita definindo o quadri vetor V_μ como “constante” no sentido covariante, isto é, exigindo que ele tenha derivada covariante nula em todos os pontos: $\nabla_\nu V_\mu = 0$. Porém, é bem sabido da literatura que um vetor não pode ter derivada covariante nula em todos os pontos de uma variedade curva. Esta inconsistência vem do simples fato de que estamos demandando covariância geral sobre uma teoria que viola a simetria de Lorentz, por construção. O que ocorre neste caso é que, ao introduzir uma direção privilegiada no espaço-tempo, o vetor V_μ determina também um referencial privilegiado (aquele no qual $\partial_\nu V_\mu = 0$). Assim, segue que $\partial_\nu V_\mu - \partial_\mu V_\nu = \nabla_\nu V_\mu - \nabla_\mu V_\nu = 0$ neste particular referencial inercial e também em qualquer outro, visto que $W_{\nu\mu} = \nabla_\nu V_\mu - \nabla_\mu V_\nu$ é um tensor nulo, assegurando assim a invariância de calibre do modelo.

Apenas a título de especulação, vale mencionar que a aparição desta quadridireção privilegiada no espaço-tempo pode não ser tão absurda quanto parece. O Universo, pelo menos como visto do referencial da nossa galáxia, exibe de fato uma direção privilegiada para o tempo (mas não para o espaço, que nos parece homogêneo e isotrópico), que é a direção definida pela 2ª Lei da termodinâmica. Este fato poderia a princípio estar relacionado à presença de um vetor de fundo do tipo tempo da forma

$$V_\mu = (V_0, \mathbf{0}) , \quad (2.4)$$

com V_0 constante. Apesar da discussão que segue neste capítulo ser feita, sempre que possível, para um quadrivetor constante V_μ com componentes arbitrárias, é interessante notar aqui que para um V_μ da forma (2.4) a lagrangeana de Chern-Simons se reduz a

$$\mathcal{L}_{CS} = -\frac{V_0}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (2.5)$$

(\mathbf{B} é o campo de indução magnética). Em especial, neste caso, além da simetria de Lorentz, a simetria de paridade do modelo também é violada, pois \mathcal{L}_{CS} é um pseudoescalar (resultante do produto escalar entre um pseudovetor \mathbf{B} e um vetor \mathbf{A}).

2.2 Equações dinâmicas e soluções

As equações dinâmicas para o campo eletromagnético no modelo de CFJ, na presença de uma fonte externa $J^\mu(x)$, tomam a seguinte forma:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu + V_\mu {}^*F^{\mu\nu} \quad (2.6a)$$

$$\partial_\mu {}^*F^{\mu\nu} = 0 \quad . \quad (2.6b)$$

Nota-se que a segunda equação nada mais do que é do que a identidade de Jacobi, a mesma que aparece no modelo de Maxwell (que decorre direto da definição de $F^{\mu\nu}$ e, por isso mesmo, não deveria ser influenciada pela presença do vetor de fundo), enquanto que a primeira é uma modificação nas equações de Maxwell com fontes, obtida como usual (via equações de Euler-Lagrange) da Lagrangeana $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{CFJ} - J^\nu A_\nu$. Em particular, tomando a quadridivergência de (2.6a) e usando (2.6b) vemos que a conservação da carga aparece naturalmente como uma condição de consistência:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad .$$

Em notação tridimensional, em termos dos campos \mathbf{E} , \mathbf{B} e ainda das grandezas $\rho = J^0$, \mathbf{J} , V^0 e \mathbf{V} , as equações (2.6) ficam:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho - \mathbf{V} \cdot \mathbf{B} \quad (2.7a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{J} - V_0 \mathbf{B} + \mathbf{V} \times \mathbf{E} \quad (2.7b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.7c)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0 \quad (2.7d)$$

Note que para $V_\mu = 0$ estas equações se reduzem às equações de Maxwell. Note também que as equações são todas expressas em termos dos campos \mathbf{E} e \mathbf{B} , deixando clara a invariância de calibre da teoria modificada de CFJ.

As equações homogêneas (2.7c,2.7d), tal como no caso de Maxwell, são automaticamente resolvidas introduzindo-se os potenciais escalar A^0 e vetor \mathbf{A} segundo o ansatz

$$\mathbf{E} = -\nabla A^0 - \partial_t \mathbf{A}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} .$$

Substituindo \mathbf{E} e \mathbf{B} acima no outro par de equações dinâmicas, a saber (2.7a) e (2.7b), obtemos as novas equações de onda satisfeitas pelos potenciais:

$$\square A^0 + \mathbf{V} \cdot \mathbf{B} = \rho \quad (2.8a)$$

$$\square \mathbf{A} + V_0 \mathbf{B} - \mathbf{V} \times \mathbf{E} = \mathbf{J} , \quad (2.8b)$$

onde fixamos, por simplicidade, o chamado calibre de Lorentz através da condição $\nabla \cdot \mathbf{A} + \partial_t A^0 = 0$. Nota-se das equações (2.8) um fato interessante da eletrodinâmica de CFJ: se o vetor de fundo tem componente espacial não nula ($\mathbf{V} \neq \mathbf{0}$), os setores elétrico e magnético da teoria se “misturam”, isto é, o campo magnético \mathbf{B} contribui para a determinação do potencial escalar A^0 enquanto o campo elétrico \mathbf{E} afeta o potencial vetor \mathbf{A} . Isto significa que uma densidade de cargas estáticas ρ é fonte não apenas de campo elétrico \mathbf{E} , mas também de campo magnético \mathbf{B} ; similarmente, uma densidade de corrente estacionária \mathbf{J} gera tanto campo magnético quanto elétrico. Para o caso de um vetor de fundo da forma $V_\mu = (V_0, \mathbf{0})$ não ocorre este acoplamento entre os fenômenos elétricos e magnéticos, mas ainda sim os resultados físicos são distintos dos correspondentes da teoria de Maxwell devido à presença de V_0 na equação para o potencial vetor \mathbf{A} .

As equações de Maxwell modificadas na ausência de fontes, correspondendo a $\rho = 0, \mathbf{J} = \mathbf{0}$ em (2.7) ainda admitem soluções tipo onda plana na forma $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{ikx}, \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{ikx}$ desde que as seguintes relações sejam satisfeitas entre $k = (\omega, \mathbf{k}), \mathbf{E}_0$ e \mathbf{B}_0 :

$$(\omega^2 - \mathbf{k}^2)\mathbf{E}_0 + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0)\mathbf{k} = i(-V_0\mathbf{k} + \omega\mathbf{V}) \times \mathbf{E}_0 \quad (2.9a)$$

$$\mathbf{B}_0 = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0}{\omega} \quad (2.9b)$$

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = \mathbf{V} \cdot \mathbf{B}_0 . \quad (2.9c)$$

Estas relações podem ser facilmente verificadas introduzindo-se o ansatz de solução tipo onda plana nas equações (2.7). Nota-se em particular que, exceto no caso em que $\mathbf{V} = 0$, os vetores $\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0$ e o vetor de onda \mathbf{k} não são necessariamente perpendiculares entre si como ocorre no eletromagnetismo usual.

O próximo passo na sequência é obter a relação de dispersão do modelo de CFJ, isto é, a relação entre ω e \mathbf{k} , que certamente diferirá da relação de dispersão usual da teoria de Maxwell ($\omega_M = |\mathbf{k}|$). Para isto, vamos antes obter o propagador do modelo, pois é bem sabido da literatura que as relações de dispersão de um dado modelo correspondem aos pólos do correspondente propagador [12]. Primeiramente, escrevemos as equações de onda (2.8) para A^0 e \mathbf{A} de maneira compacta como

$$(\square\eta^{\mu\nu} + \epsilon^{\mu\nu\beta\lambda}V_\beta\partial_\lambda) A_\nu(x) = J^\mu(x) . \quad (2.10)$$

O propagador $G^{\mu\nu}(x, x') = \langle A^\mu(x)A^\nu(x') \rangle$ é definido da maneira usual como a inversa do operador diferencial que aparece atuando em A_ν na expressão acima, isto é,

$$(\square\eta^{\mu\nu} + \epsilon^{\mu\nu\beta\lambda}V_\beta\partial_\lambda) G_\nu^\alpha(x, x') = \eta^{\mu\alpha}\delta^4(x - x') .$$

Escrevendo a expansão de Fourier de G_ν^α , a saber,

$$G_\nu^\alpha(x, x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} \tilde{G}_\nu^\alpha(k) ,$$

obtemos a correspondente equação no espaço dos momenta:

$$(k^2\eta^{\mu\nu} + i\epsilon^{\mu\nu\beta\lambda}V_\beta k_\lambda) \tilde{G}_\nu^\alpha(k) = -\eta^{\mu\alpha} . \quad (2.11)$$

Para resolvê-la, consideramos um ansatz de solução na forma

$$\tilde{G}_\nu^\alpha(k) = A(k)\eta_\nu^\alpha + B(k)k_\nu k^\alpha + C(k)\epsilon_{\nu\rho\sigma}^\alpha V^\rho k^\sigma + D(k)V_\nu V^\alpha + E(k)(V_\nu k^\alpha + V^\alpha k_\nu) ,$$

com as funções A, B, C, D, E a serem determinadas. Quando introduzido na equação (2.11), este ansatz produz um sistema de equações simples cuja solução é $A(k) = k^2[(k^2)^2 + V^2k^2 - (V \cdot k)^2]^{-1}$, $B = AV^2/(k^2)^2$, $C = -iA/k^2$, $D = A/k^2$ e $E = -A(\mathbf{V} \cdot \mathbf{k})/(k^2)^2$. Com isso, o propagador do modelo pode ser escrito (no espaço dos momenta) como

$$\tilde{G}_{\nu\alpha}(k) = \frac{1}{k^2 Q} \left\{ (k^2)^2 \eta^{\mu\nu} + V^2 k_\mu k_\nu - ik^2 \epsilon_{\nu\alpha\rho\sigma} V^\rho k^\sigma + k^2 V_\nu V_\alpha - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{k})(V_\nu k_\alpha + V_\alpha k_\nu) \right\} , \quad (2.12)$$

com Q definido por

$$Q \doteq (k^2)^2 + V^2 k^2 - (V \cdot k)^2 . \quad (2.13)$$

Conforme já foi dito antes, as relações de dispersão correspondem aos pólos do propagador $G_{\nu\alpha}(x, x')$. De acordo com a expressão (2.12), vemos que estes pólos correspondem a

$$k^2 = 0 \quad \implies \quad \omega = |\mathbf{k}| ,$$

que nada mais é que o modo usual do eletromagnetismo de Maxwell (o qual é bem conhecido e não merece maiores discussões aqui), e também aos valores de k_μ que satisfazem à condição $Q = 0$, ou seja,

$$(k^2)^2 + V^2 k^2 - (V \cdot k)^2 = 0 . \quad (2.14)$$

A obtenção de uma relação explícita entre ω e \mathbf{k} a partir desta equação é bastante complicada no caso geral de V^μ arbitrário. Porém, é possível resolvê-la para os casos especiais de V^μ puramente tipo tempo ou puramente tipo espaço, de modo a ganhar uma certa intuição física. Para o caso de V puramente do tipo tempo na forma $V^\mu = (V^0, 0, 0, 0)$ com $V^0 \geq 0$, a equação (2.14) fornece

$$\omega_\pm = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 \pm V^0 |\mathbf{k}|} , \quad (2.15)$$

enquanto para V puramente tipo espaço, isto é, $V^\mu = (0, \mathbf{V})$, resulta em

$$\omega_\pm^2 = |\mathbf{k}|^2 + \frac{1}{2} \left[|\mathbf{V}|^2 \pm \sqrt{|\mathbf{V}|^4 + 4(\mathbf{V} \cdot \mathbf{k})^2} \right] . \quad (2.16)$$

Nota-se em ambos os casos o aparecimento de dois modos distintos para os fótons do modelo como consequência da presença do vetor de fundo V . Os modos correspondendo a ω_+ em ambos os casos são estáveis, visto que neste caso $\omega_+^2 \geq 0$; entretanto, os modos ω_- são ambos instáveis, no sentido que ω_-^2 pode assumir valores negativos dependendo do valor de $|\mathbf{k}|$, indicando a

ocorrência de algum tipo de dissipação nesta escala de momentum $|\mathbf{k}|$. As correspondentes velocidades de fase $U_\phi = \omega/|\mathbf{k}|$ e de grupo $U_g = d\omega/d|\mathbf{k}|$ são

$$U_{\phi,\pm} = \sqrt{1 \pm \frac{V^0}{|\mathbf{k}|}} \quad (2.17a)$$

$$U_{g,\pm} = \frac{2|\mathbf{k}| \pm V^0}{2\sqrt{|\mathbf{k}|^2 \pm V^0|\mathbf{k}|}} \quad (2.17b)$$

para o caso de V tipo tempo, e

$$U_{\phi,\pm} = \sqrt{1 + \frac{|\mathbf{V}|^2 \pm \sqrt{|\mathbf{V}|^4 + 4(\mathbf{V} \cdot \mathbf{k})^2}}{2|\mathbf{k}|^2}} \quad (2.18a)$$

$$U_{g,\pm} = \frac{|\mathbf{k}|}{\omega_\pm} \left[1 \pm \frac{(\mathbf{V} \cdot \mathbf{k})^2}{4|\mathbf{k}|^2 \sqrt{|\mathbf{V}|^4 + 4(\mathbf{V} \cdot \mathbf{k})^2}} \right] \quad (2.18b)$$

para o caso de V puramente espacial.

Há também a possibilidade de resolver a relação de dispersão (2.14) para ω sem particularizar a natureza das componentes de V^μ se este é suposto ser suficientemente pequeno, por meio de uma expansão em série de potências de V . Conforme será justificado pela confrontação com os dados experimentais na próxima seção, ocorre que o vetor de fundo V deve de fato ser bem pequeno em intensidade de modo a recuperar a teoria de Maxwell no regime de baixas energias, e portanto uma expansão em potências de V parece bastante apropriada do ponto de vista físico. Para isto, é conveniente reescrever a relação de dispersão (2.14) na forma

$$\omega^2 - |\mathbf{k}|^2 = \pm(V^0|\mathbf{k}| - \omega|\mathbf{V}| \cos \theta) \left(1 - \frac{|\mathbf{V}|^2 \sin^2 \theta}{\omega^2 - |\mathbf{k}|^2} \right)^{-1/2},$$

onde θ é o ângulo entre os vetores \mathbf{V} e \mathbf{k} . Em seguida, expandindo o lado direito em potências de V e mantendo apenas os termos lineares em $V^0, |\mathbf{V}|$ segue que

$$\omega_\pm \approx |\mathbf{k}| \pm \frac{1}{2}(V^0 - |\mathbf{V}| \cos \theta). \quad (2.19)$$

Nota-se novamente o aparecimento de dois modos distintos ω_\pm , mas com o detalhe de que não há garantia de estabilidade de ambos os modos para valores arbitrários de V^0 e \mathbf{V} , visto que ambos ω_+^2 e ω_-^2 podem eventualmente assumir valores negativos. Vale comentar também, apenas como verificação de consistência dos resultados obtidos, que se colocarmos $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ ou $V^0 = 0$ na expressão acima obteremos as correspondentes versões das equações (2.15) e (2.16) linearizadas em V^0 ou \mathbf{V} , respectivamente. As velocidades de fase e de grupo neste contexto

são:

$$U_{\phi,\pm} \approx 1 \pm \frac{V^0 - |\mathbf{V}| \cos \theta}{2|\mathbf{k}|} \quad (2.20a)$$

$$U_{g,\pm} \approx 1 \quad (2.20b)$$

Apesar de não haver nenhuma manifestação de 1ª ordem em V na velocidade de grupo de ondas planas, aparece um termo linear em V na velocidade de fase e, mais do que isso, este termo é diferente para os dois modos distintos ω_{\pm} (que, por sua vez, são diferentes da velocidade de fase do modo sem massa $\omega_0 = |\mathbf{k}|$ usual). Esta velocidade de propagação distinta para diferentes polarizações de ondas planas é mais uma evidência de violação das simetrias de Lorentz e de paridade, correspondendo a um efeito de *trirrefringência* do vácuo que não ocorre no eletromagnetismo usual.

Por fim, vamos analisar o tensor de momentum-energia canônico do modelo. Ele é obtido da maneira usual [10] a partir da Lagrangeana (2.1), e possui a forma

$$\Theta^{\mu\nu} = -F^{\mu\alpha} F^{\nu}_{\alpha} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} {}^*F^{\mu\alpha} V^{\nu} A_{\alpha} . \quad (2.21)$$

Tomando a quadridivergência (∂_{μ}) deste resultado e usando as equações dinâmicas (2.6) é fácil ver que $\Theta^{\mu\nu}$ satisfaz

$$\partial_{\mu} \Theta^{\mu\nu} = J_{\mu} F^{\mu\nu}$$

e, em particular, na ausência de fontes ($J^{\mu} = 0$) ele é conservado:

$$\partial_{\mu} \Theta^{\mu\nu} = 0 .$$

Vale ressaltar também que, devido à contribuição do termo tipo Chern-Simons, $\Theta^{\mu\nu}$ acima não é simétrico em μ, ν e nem sequer pode ser simetrizado, pois sua parte antissimétrica não pode ser expressa como uma derivada total.

Outro ponto importante a ser notado é que o último termo na expressão do tensor momentum-energia envolve explicitamente A_{α} e, portanto, não é invariante de calibre. Visto que as componentes de $\Theta^{\mu\nu}$ contêm, por exemplo, as densidades de energia e momentum do campo eletromagnético, aparentemente as grandezas físicas neste modelo seriam dependentes de calibre e o status de invariante de calibre da teoria simplesmente perderia o sentido. Vejamos se isto de fato ocorre. As densidades de energia e momentum do campo escritas em notação

tridimensional são

$$\mathcal{E} \equiv \Theta^{00} = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{2} + \frac{V^0}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (2.22a)$$

$$\mathcal{P}^i \equiv \Theta^{0i} = (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^i + \frac{V^i}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} . \quad (2.22b)$$

Sob uma transformação de calibre $A'^\mu - A^\mu = \Delta A^\mu = \partial^\mu \Lambda$, que é equivalente a $\Delta A^0 = \partial_t \Lambda$, $\Delta \mathbf{A} = -\nabla \Lambda$, os termos que envolvem somente os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} são obviamente invariantes enquanto o termo $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ se transforma como

$$\Delta(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) = -\nabla \cdot (\Lambda \mathbf{B}) ,$$

de onde vemos que ambas as densidades de energia e de momentum em (2.22) se transformam por um termo que é uma derivada total. Desta forma, ao integrarmos em todo o espaço para obter a energia E e o momentum P^i do campo, ocorre que ambos os termos $\Delta \mathcal{E}$ e $\Delta \mathcal{P}^i$ originarão um termo de superfície que se anula no infinito espacial, de forma que $\Delta E = 0 = \Delta P^i$. Portanto, ao contrário do tensor momentum-energia, a energia e o momentum totais do campo eletromagnético (que são as grandezas físicas de fato) no modelo de CFJ são sim invariantes de calibre e a teoria permanece consistente neste aspecto.

2.3 Resultados experimentais e a intensidade do vetor fundo

O objetivo desta seção é apresentar sucintamente os resultados da confrontação do modelo de CFJ com dados experimentais envolvendo a radiação eletromagnética advinda de objetos astrofísicos distantes, de acordo com o trabalho feito na referência [17]. O intuito desta comparação é impor um limite superior na intensidade do vetor de fundo V (que é o objeto responsável pela modificação do modelo de Maxwell) visto que, para que o modelo de CFJ tenha qualquer chance de estar correto, ele deve concordar dentro do grau de precisão das medidas atuais com as previsões da eletrodinâmica de Maxwell, e tal concordância só é possível se V for suficientemente pequeno em intensidade ².

²A razão pela qual estamos reportando estes resultados obtidos em [17] aqui é que esta mesma análise e determinação de um limite superior para V^μ será realizada novamente no próximo capítulo no contexto do modelo de CFJ randômico que será proposto a seguir. Será possível então comparar as ordens de grandeza dos efeitos de violação da simetria de Lorentz em cada um dos modelos.

Baseados nos argumentos acima, admitimos de antemão que o vetor de fundo V é suficientemente pequeno de tal forma a garantir a validade da aproximação linear para a relação de dispersão discutida na última seção, que escrevemos como

$$|\mathbf{k}| = \omega \mp \frac{1}{2}(V^0 - |\mathbf{V}| \cos \theta) \quad (2.23)$$

com os sinais $-$ e $+$ correspondendo, respectivamente, a ondas planas monocromáticas com polarização circular à direita e à esquerda.

Consideremos a propagação de uma onda plana monocromática de polarização linear ao longo de uma direção arbitrária. Como sabemos, a priori esta onda pode ser decomposta como uma superposição de duas ondas planas monocromáticas circularmente polarizadas à direita e à esquerda. Conforme mostraremos logo a seguir, visto que os dois modos circularmente polarizados se propagam com velocidades de fase distintas ³ ($U_{\phi,+}$ e $U_{\phi,-}$), a direção da polarização da onda original tende a rodar suavemente conforme a onda viaja pelo espaço em um efeito similar à chamada rotação de Faraday [16].

Com o intuito de ver claramente este efeito de rotação da direção de polarização, vamos considerar por simplicidade uma onda linearmente polarizada em uma dada direção e que se propaga na direção x . Para não carregar demais a notação, ignoraremos a natureza vetorial e denotaremos a onda simplesmente por Ψ . Sendo linearmente polarizada, esta onda pode ser decomposta como uma superposição de duas ondas circularmente polarizadas, uma à esquerda ($\Psi_L(x, t) = e^{i(k_+x - \omega t)}$) e outra à direita ($\Psi_R(x, t) = e^{i(k_-x - \omega t)}$), onde $k_{\mp} = \omega \mp \frac{1}{2}(V^0 - |\mathbf{V}| \cos \theta)$. Sendo θ_0 a diferença de fase relativa entre Ψ_L e Ψ_R , esta decomposição tem a forma

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \Psi_L(x, t) + e^{i\theta_0} \Psi_R(x, t) \\ &= e^{i(k_+x - \omega t)} [1 + e^{i\theta_0} e^{i(k_- - k_+)x}] . \end{aligned} \quad (2.24)$$

Após se propagar por uma distância L em um intervalo de tempo T , a onda acima terá a forma

$$\Psi(x + L, t + T) = e^{i(k_+(x+L) - \omega(t+T))} [1 + e^{i\theta} e^{i(k_- - k_+)x}] ,$$

onde a nova diferença de fase $\theta = \theta_0 + \Delta\theta$ é diferente da inicial por um valor $\Delta\theta$ dado por

$$\Delta\theta = (k_- - k_+)L = -(V^0 - |\mathbf{V}| \cos \theta)L . \quad (2.25)$$

Esta mudança na fase relativa entre os dois modos circularmente polarizados é independente do comprimento de onda λ , e seu efeito físico, obviamente, é o de ocasionar uma rotação na

³Este fenômeno é conhecido na literatura como *birrefringência circular*.

direção de polarização da onda original. Este ângulo de rotação é tão maior quanto maior for a distância L viajada pela onda, e a princípio poderia ser observado nas medições de radiação advinda de objetos astronômicos muito distantes (radiogaláxias, quasares, etc.).

Utilizando dados de *redshifts* dos catálogos de radiogaláxias, Carroll, Field e Jackiw [17] estudaram a variação nos ângulos de polarização da radiação advinda destes objetos com relação à sua polarização inicial e concluíram, com um grau de confiança de 95%, que a variação $\Delta\theta$ não pode ser maior que $6,0^\circ \approx 0,1$ rad, isto é,

$$\Delta\theta \leq 0,1 . \quad (2.26)$$

Visto que as distâncias L da Terra às referidas radiogaláxias são da ordem de grandeza de $\sim 1/H_0$ (H_0 é a constante de Hubble, cujo valor atual em unidades naturais $\hbar = c = 1$ é $H_0 \approx 3.10^{-18}s^{-1} \approx 10^{-42}GeV$), segue da equação (2.25) que

$$V^0 - |\mathbf{V}| \cos \theta \leq 10^{-43} GeV , \quad (2.27)$$

que é um limite superior baixíssimo ⁴ para os efeitos do vetor de fundo V_μ . Para se ter uma idéia de quão pequenos seriam estes efeitos de violação da simetria de Lorentz compatíveis com a restrição (2.27), basta notar que este valor é várias ordens de grandeza menor do que o atual limite superior para a massa do fóton ($m \approx 10^{-36}GeV$) e do que o limite de precisão dos experimentos atuais. Assim, baseado nos dados astrofísicos de objetos distantes, é seguro afirmar que a simetria de Lorentz é preservada e que o modelo de CFJ não é capaz de prever nenhum resultado físico detectável nos dias de hoje.

No próximo capítulo apresentaremos um modelo alternativo inspirado pelo modelo de CFJ para violação da simetria de Lorentz e, após discutirmos algumas de suas propriedades, estudaremos novamente o limite de detectabilidade de seus efeitos com base nos experimentos disponíveis atualmente.

⁴A análise feita aqui foi bastante simplista, baseada apenas em ordens de grandeza, de modo a não tornar a leitura desagradável. Uma análise mais cuidadosa foi feita em [17] e resultou em

$$V^0 - |\mathbf{V}| \cos \theta \leq 1,7.10^{-42}h_0 GeV ,$$

onde $h_0 = H_0/100km.s^{-1}.Mpc^{-1}$ é uma constante adimensional cujo valor experimental atual está na faixa $0,5 \lesssim h_0 \lesssim 1,0$.

Capítulo 3

Modelo de CFJ randômico com invariância de calibre

3.1 Preliminares

O objetivo deste capítulo é investigar um modelo de eletrodinâmica com violação das simetrias de Lorentz e paridade do tipo Carroll-Field-Jackiw (CFJ), inspirado pelo modelo original (2.1), porém de um ponto de vista diferente. O chamado *vetor de fundo* V_μ , responsável pela violação das simetrias mencionadas, é aqui suposto flutuar de maneira estocástica, possivelmente como consequência de flutuações randômicas na métrica do espaço-tempo na escala de energia onde efeitos quânticos da gravidade seriam notáveis (em outras palavras, nos cálculos abaixo V_μ será tratado como um vetor $V_\mu(x)$ cujas componentes são campos randômicos com propriedades estatísticas a serem especificadas). O interesse neste modelo está no fato de que seus efeitos poderiam, a princípio, ser testados no laboratório em um modelo análogo de matéria condensada utilizando meios randômicos para simular a característica randômica do vetor de fundo V_μ , tal como na proposta [4].

Um ponto importante a se salientar é que a presença de um termo tipo CFJ na lagrangeana com $V_\mu = V_\mu(x)$ claramente pode quebrar a invariância de calibre da teoria. No entanto, seria interessante construir um modelo conforme justificado acima, mas que ainda se mantivesse invariante de calibre. Seria isto possível? Vejamos o efeito de uma transformação de calibre

$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ sobre o termo de CFJ randômico na lagrangeana:

$$\begin{aligned} V_\mu(x) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_\nu F_{\alpha\beta} &\rightarrow V_\mu(x) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_\nu F_{\alpha\beta} + V_\mu(x) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \Lambda F_{\alpha\beta} \\ &= V_\mu(x) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_\nu F_{\alpha\beta} + \partial_\nu [V_\mu(x) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \Lambda F_{\alpha\beta}] \\ &\quad - V_\mu(x) \Lambda \partial_\nu [\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}] - [\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu V_\mu(x)] \Lambda F_{\alpha\beta} . \end{aligned}$$

O segundo termo no lado direito da expressão acima contribui apenas com um termo de superfície na ação e é, portanto, fisicamente irrelevante. O terceiro termo é identicamente nulo dado que o tensor antissimétrico $F_{\alpha\beta}$ satisfaz à identidade de Bianchi. Portanto, vemos que o termo de CFJ randômico proposto possui ainda invariância de calibre desde que $V_\mu(x)$ satisfaça a

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu V_\mu(x) = 0 . \quad (3.1)$$

Conforme discutido no capítulo anterior, a condição acima é satisfeita para qualquer vetor V_μ da forma $V_\mu(x) = \partial_\mu \theta(x)$. Porém, um vetor com esta forma não é conveniente para o presente modelo pois traria consigo problemas com relação ao procedimento de médias randômicas. Por esta razão, adotaremos para V uma forma mais simples e apropriada ao procedimento de médias (mas que naturalmente satisfaz à condição (3.1) e, portanto, mantém a invariância de calibre intacta). Esta forma será enunciada explicitamente na próxima seção.

3.2 O modelo proposto

O modelo proposto neste trabalho para uma eletrodinâmica do tipo CFJ com flutuações randômicas no vetor de fundo é dado pela seguinte lagrangeana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} V_\mu(x) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_\nu F_{\alpha\beta} - \frac{1}{2\gamma} (\partial_\mu A^\mu)^2 , \quad (3.2)$$

onde γ é uma constante de fixação de calibre e o vetor de fundo V^μ será tomado como tendo a forma

$$V_\mu(x) = (V_0(x^0), V_1(x^1), V_2(x^2), V_3(x^3)) \quad (3.3)$$

em um dado referencial inercial, com cada uma de suas componentes sendo campos randômicos de uma única variável real. Além disto, estes campos são escolhidos (por simplicidade) como

possuindo distribuição Gaussiana com correlações do tipo ruído branco, i.e.,

$$\langle V_0(x^0) \rangle = 0 \quad \langle V_0(x^0)V_0(x'^0) \rangle = \sigma_0^2\delta(x^0 - x'^0) \quad (3.4a)$$

$$\langle V_1(x^1) \rangle = 0 \quad \langle V_1(x^1)V_1(x'^1) \rangle = \sigma_1^2\delta(x^1 - x'^1) \quad (3.4b)$$

$$\langle V_2(x^2) \rangle = 0 \quad \langle V_2(x^2)V_2(x'^2) \rangle = \sigma_2^2\delta(x^2 - x'^2) \quad (3.4c)$$

$$\langle V_3(x^3) \rangle = 0 \quad \langle V_3(x^3)V_3(x'^3) \rangle = \sigma_3^2\delta(x^3 - x'^3) , \quad (3.4d)$$

com as médias de ordem superior sendo dadas por expressões análogas às equações (1.4). É trivial checar que a escolha de $V_\mu(x)$ da forma (3.3) satisfaz à condição (3.1) e, com isso, garante que o modelo seja invariante de calibre.

Utilizando o fato de que $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, a ação $\mathcal{S} = \int d^4x \mathcal{L}$ associada à lagrangeana (3.2) pode ser escrita como

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu(x) \left[\eta^{\mu\nu} \square + \frac{1-\gamma}{\gamma} \partial^\mu \partial^\nu + \epsilon^{\mu\nu\beta\alpha} V_\beta(x) \partial_\alpha \right] A_\nu(x) + (\text{termos de superfície}) . \quad (3.5)$$

A variação de \mathcal{S} com respeito a A_μ produz a seguinte equação dinâmica:

$$\left[\eta^{\mu\nu} \square + \frac{1-\gamma}{\gamma} \partial^\mu \partial^\nu + \epsilon^{\mu\nu\beta\alpha} V_\beta(x) \partial_\alpha \right] A_\nu(x) = 0 . \quad (3.6)$$

Será conveniente reescrever esta equação em forma matricial como

$$(\mathbb{L}^{(0)} + \mathbb{L}^{(1)}) \mathbb{A} = 0 , \quad (3.7)$$

onde $\mathbb{L}^{(0)}, \mathbb{L}^{(1)}$ são as matrizes com componentes

$$L^{(0)\mu\nu}(x) = \eta^{\mu\nu} \square + \frac{1-\gamma}{\gamma} \partial^\mu \partial^\nu \quad (3.8a)$$

$$L^{(1)\mu\nu}(x) = \epsilon^{\mu\nu\beta\alpha} V_\beta(x) \partial_\alpha \quad (3.8b)$$

e \mathbb{A} é a matriz coluna composta pelas componentes do quadrivetor $A_\nu(x)$.

O propagador da teoria é obtido a partir da equação dinâmica (3.7) como sendo dado por

$$\mathbb{G} = (\mathbb{L}^{(0)} + \mathbb{L}^{(1)})^{-1} . \quad (3.9)$$

Se o vetor de fundo V_μ é suposto ser suficientemente pequeno em intensidade, o propagador \mathbb{G} pode ser obtido perturbativamente por meio de uma expansão em potências (série de Dyson) de $\mathbb{L}^{(1)}$:

$$\mathbb{G} = \mathbb{G}^{(0)} - \mathbb{G}^{(0)} \mathbb{L}^{(1)} \mathbb{G}^{(0)} + \mathbb{G}^{(0)} \mathbb{L}^{(1)} \mathbb{G}^{(0)} \mathbb{L}^{(1)} \mathbb{G}^{(0)} + O((\mathbb{L}^{(1)})^3) , \quad (3.10)$$

onde definimos o propagador livre $\mathbb{G}^{(0)} \equiv (\mathbb{L}^{(0)})^{-1}$.

O próximo passo é tomar a média sobre todas as possíveis realizações para os campos estocásticos contidos em $V_\mu(x)$ (e portanto em $\mathbb{L}^{(1)}$). Usando as equações (3.4) é fácil ver que $\mathbb{L}^{(1)}$ possui média randômica nula ($\langle \mathbb{L}^{(1)} \rangle = 0$) e, com isso,

$$\langle \mathbb{G} \rangle = \mathbb{G}^{(0)} + \mathbb{G}^{(1)} , \quad (3.11)$$

onde $\mathbb{G}^{(0)}$ é o termo livre de randomicidade e $\mathbb{G}^{(1)}$ é a correção randômica, definida por

$$\mathbb{G}^{(1)} = \langle \mathbb{G}^{(0)} \mathbb{L}^{(1)} \mathbb{G}^{(0)} \mathbb{L}^{(1)} \mathbb{G}^{(0)} \rangle + O((\mathbb{L}^{(1)})^4) . \quad (3.12)$$

Nosso objetivo é determinar os elementos de matriz de $\mathbb{G}^{(1)}$ no espaço de coordenadas em função dos elementos de matriz de $\mathbb{G}^{(0)}$. Nos restringiremos a ordem 2 na expansão perturbativa (pois a próxima correção não nula é de ordem 4, dado que $\langle \mathbb{L}^{(1)} \rangle = \langle (\mathbb{L}^{(1)})^3 \rangle = \dots = 0$). A equação (3.12) neste caso fica

$$G^{(1)\mu\nu}(x, x') = \int d^4x_1 d^4x_2 G^{(0)\mu}_\rho(x, x_1) \left\langle L^{(1)\rho\lambda}(x_1) G^{(0)}_{\lambda\tau}(x_1, x_2) L^{(1)\tau\theta}(x_2) \right\rangle G^{(0)\nu}_\theta(x_2, x') . \quad (3.13)$$

No apêndice C mostramos, usando as equações (3.4), que a média que aparece na expressão acima resulta em

$$\begin{aligned} \left\langle L^{(1)\rho\lambda}(x_1) G^{(0)}_{\lambda\tau}(x_1, x_2) L^{(1)\tau\theta}(x_2) \right\rangle &= \sigma_0^2 \epsilon^{0\rho\lambda\beta} \epsilon^{0\tau\theta\chi} \delta(x_1^0 - x_2^0) \partial_{(x_1)\beta} G^{(0)}_{\lambda\tau}(x_1, x_2) \partial_{(x_2)\chi} + \\ &\sigma_1^2 \epsilon^{1\rho\lambda\beta} \epsilon^{1\tau\theta\chi} \delta(x_1^1 - x_2^1) \partial_{(x_1)\beta} G^{(0)}_{\lambda\tau}(x_1, x_2) \partial_{(x_2)\chi} + \\ &\sigma_2^2 \epsilon^{2\rho\lambda\beta} \epsilon^{2\tau\theta\chi} \delta(x_1^2 - x_2^2) \partial_{(x_1)\beta} G^{(0)}_{\lambda\tau}(x_1, x_2) \partial_{(x_2)\chi} + \\ &\sigma_3^2 \epsilon^{3\rho\lambda\beta} \epsilon^{3\tau\theta\chi} \delta(x_1^3 - x_2^3) \partial_{(x_1)\beta} G^{(0)}_{\lambda\tau}(x_1, x_2) \partial_{(x_2)\chi} . \end{aligned}$$

Usando ainda o fato de que $G^{(0)\mu\nu}(x, x')$ depende apenas da diferença entre os dois pontos e, assim, admite uma expansão em série de Fourier em $x - x'$, i.e.,

$$G^{(0)\mu\nu}(x, x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} \tilde{G}^{(0)\mu\nu}(k) ,$$

mostramos também no Apêndice C que a equação (3.13) se reduz a

$$G^{(1)\mu\nu}(x, x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} \tilde{G}^{(1)\mu\nu}(k) , \quad (3.14)$$

onde $\tilde{G}^{(1)\mu\nu}$ é a correção no propagador no espaço dos momenta, que é dada por

$$\begin{aligned} \tilde{G}^{(1)\mu\nu}(k) = & -k_\beta k_\alpha \tilde{G}^{(0)\mu}{}_\rho(k) \tilde{G}^{(0)\nu}{}_\theta(k) \left[\sigma_0^2 \epsilon^{0\rho\lambda\beta} \epsilon^{0\tau\theta\alpha} \int \frac{dk'^0}{2\pi} \tilde{G}^{(0)}{}_{\lambda\tau}(k'^0, \mathbf{k}) + \right. \\ & \sigma_1^2 \epsilon^{1\rho\lambda\beta} \epsilon^{1\tau\theta\alpha} \int \frac{dk'^1}{2\pi} \tilde{G}^{(0)}{}_{\lambda\tau}(k^0, k'^1, k^2, k^3) + \\ & \sigma_2^2 \epsilon^{2\rho\lambda\beta} \epsilon^{2\tau\theta\alpha} \int \frac{dk'^2}{2\pi} \tilde{G}^{(0)}{}_{\lambda\tau}(k^0, k^1, k'^2, k^3) + \\ & \left. \sigma_3^2 \epsilon^{3\rho\lambda\beta} \epsilon^{3\tau\theta\alpha} \int \frac{dk'^3}{2\pi} \tilde{G}^{(0)}{}_{\lambda\tau}(k^0, k^1, k^2, k'^3) \right]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

É importante notar que, apesar do vetor de fundo $V_\mu(x)$ flutuar de maneira independente em cada uma das 4 direções do espaço-tempo, o que poderia ocasionar uma possível inhomogeneidade na estrutura espaço-temporal, a correção (3.14) no propagador depende apenas da separação entre os dois pontos x, x' e sugere que a homogeneidade pode sim ser mantida no presente modelo. Este fato terá implicações físicas importantes, como veremos na sequência.

O propagador livre $G^{(0)\mu\nu}(x, x')$ é facilmente obtido para valores arbitrários da constante de fixação de calibre γ (veja Apêndice C) como sendo dado por

$$G^{(0)\mu\nu}(x, x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} \frac{-1}{k^2} \left[\eta^{\mu\nu} - (1 - \gamma) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right]. \quad (3.16)$$

Para os cálculos a seguir será conveniente trabalhar no chamado calibre de Feynman ($\gamma = 1$), onde temos simplesmente

$$\tilde{G}^{(0)\mu\nu}(k) = \frac{-\eta^{\mu\nu}}{k^2}. \quad (3.17)$$

Neste calibre, a correção (3.15) assume a forma simples

$$\begin{aligned} \tilde{G}^{(1)\mu\nu}(k) = & \frac{i\eta_{\lambda\tau} k_\beta k_\alpha}{2(k^2)^2} \left[\sigma_0^2 \frac{\epsilon^{0\mu\lambda\beta} \epsilon^{0\tau\nu\alpha}}{|\mathbf{k}|} - \sigma_1^2 \frac{\epsilon^{1\mu\lambda\beta} \epsilon^{1\tau\nu\alpha}}{\sqrt{(k^0)^2 - (k^2)^2 - (k^3)^2}} \right. \\ & \left. - \sigma_2^2 \frac{\epsilon^{2\mu\lambda\beta} \epsilon^{2\tau\nu\alpha}}{\sqrt{(k^0)^2 - (k^1)^2 - (k^3)^2}} - \sigma_3^2 \frac{\epsilon^{3\mu\lambda\beta} \epsilon^{3\tau\nu\alpha}}{\sqrt{(k^0)^2 - (k^1)^2 - (k^2)^2}} \right]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

3.3 Interação entre cargas no modelo de CFJ randômico

Nesta seção investigaremos as consequências do modelo de CFJ randômico proposto na seção anterior para a interação de vácuo entre distribuições de cargas estacionárias. Para isto,

consideramos duas cargas pontuais estáticas q_1, q_2 situadas em $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, descritas pela quadricorrente

$$J^\mu(x) = \eta^{\mu 0} [q_1 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{a}_1) + q_2 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{a}_2)] . \quad (3.19)$$

A energia de vácuo devido à presença das duas cargas é obtida da forma usual por meio da expressão

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int d^4x d^4x' J_\mu(x) \langle G \rangle^{\mu\nu}(x, x') J_\nu(x') , \quad (3.20)$$

que vem da análise da forma do funcional gerador $Z[J]$ no limite $T \rightarrow \infty$, analogamente ao que foi feito no capítulo 1. Substituindo a corrente (3.19) e descartando as autoenergias de cada uma das cargas (i.e., os termos com q_1^2, q_2^2) obtemos, após integrar sobre as duas funções delta,

$$E_{int} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{q_1 q_2}{2T} \int dt dt' [\langle G \rangle^{00}(t, \mathbf{a}_1; t', \mathbf{a}_2) + \langle G \rangle^{00}(t, \mathbf{a}_2; t', \mathbf{a}_1)] .$$

Escrevendo

$$\langle G \rangle^{00}(t, \mathbf{a}_1; t', \mathbf{a}_2) = \int d\omega d^3\mathbf{k} / (2\pi)^4 e^{-i\omega(t-t') + i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)} \langle \tilde{G} \rangle^{00}(\omega, \mathbf{k})$$

(e similarmente para o outro termo que aparece no integrando), podemos facilmente integrar sobre dt' para obter $2\pi\delta(\omega)$. Realizando em seguida a integral sobre $d\omega$, segue que

$$E_{int} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{q_1 q_2}{2T} \int dt \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)} [\langle \tilde{G} \rangle^{00}(\omega = 0, \mathbf{k}) + \langle \tilde{G} \rangle^{00}(\omega = 0, -\mathbf{k})] .$$

Notando que $\int dt = \int_{-T/2}^{T/2} dt = T$ e, ainda, que $\langle \tilde{G} \rangle^{00}(\omega, \mathbf{k}) = \langle \tilde{G} \rangle^{00}(\omega, -\mathbf{k})$ (no calibre utilizado), obtemos

$$E_{int} = \frac{q_1 q_2}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}} \langle \tilde{G} \rangle^{00}(0, \mathbf{k}) , \quad (3.21)$$

onde $\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$ é o vetor que conecta as duas cargas.

Conforme visto anteriormente (veja equação (3.11)), $\langle \tilde{G}^{\mu\nu} \rangle$ tem duas contribuições (uma livre e uma correção randômica), isto é, $\langle \tilde{G}^{\mu\nu} \rangle = \tilde{G}^{(0)\mu\nu} + \tilde{G}^{(1)\mu\nu}$. Consequentemente, a energia de interação (3.21) terá também duas contribuições, $E_{int}^{(0)}$ e $E_{int}^{(1)}$, referentes à interação de vácuo livre e à correção randômica, respectivamente. Vamos analisar a seguir estas duas contribuições separadamente.

3.3.1 O termo livre: interação Coulombiana

No calibre de Feynman, o propagador livre é dado pela expressão (3.17), de onde segue que $\tilde{G}^{(0)00}(\omega, \mathbf{k}) = -1/(\omega^2 - \mathbf{k}^2)$. Desta forma, o termo de vácuo livre para a energia de interação

entre as cargas fica

$$E_{int}^{(0)} = \frac{q_1 q_2}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}} \tilde{G}^{(0)00}(0, \mathbf{k}) = \frac{q_1 q_2}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}}}{\mathbf{k}^2} .$$

Escolhendo convenientemente um sistema de coordenadas tal que a separação \mathbf{a} entre as cargas esteja sobre o eixo z e passando a integral para coordenadas esféricas usuais de forma que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} = ka \cos \theta$ (θ é o ângulo polar) é fácil mostrar que

$$\int d^3 \mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}} / \mathbf{k}^2 = \int dk d\theta d\phi \sin \theta e^{ika \cos \theta} = 2\pi^2 / a .$$

Com isso, a energia de interação fica dada por

$$E_{int}^{(0)}(\mathbf{a}) = \frac{q_1 q_2}{4\pi a} . \quad (3.22)$$

Esta é a bem conhecida interação Coulombiana entre duas cargas pontuais, como era de se esperar.

A correspondente força entre as cargas é proporcional ao inverso do quadrado da distância entre elas e é dirigida ao longo da linha as conecta:

$$\mathbf{F}_{int}^{(0)}(\mathbf{a}) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} E_{int}^{(0)} = \frac{q_1 q_2}{4\pi a^2} \hat{\mathbf{a}} . \quad (3.23)$$

Como de costume no eletromagnetismo, esta força de interação é atrativa para cargas de sinais opostos e repulsiva para cargas semelhantes.

3.3.2 A correção randômica

A correção randômica ao propagador livre é dada (no calibre de Feynman) pela expressão (3.18). Em particular, para $\mu = \nu = 0$ ela fica

$$\begin{aligned} \tilde{G}^{(1)00}(\omega, \mathbf{k}) &= \frac{i}{2(\omega^2 - \mathbf{k}^2)^2} \left[\sigma_1^2 \frac{(k^2)^2 + (k^3)^2}{\sqrt{\omega^2 - (k^2)^2 - (k^3)^2}} + \sigma_2^2 \frac{(k^1)^2 + (k^3)^2}{\sqrt{\omega^2 - (k^1)^2 - (k^3)^2}} \right. \\ &\quad \left. + \sigma_3^2 \frac{(k^1)^2 + (k^2)^2}{\sqrt{\omega^2 - (k^1)^2 - (k^2)^2}} \right] . \end{aligned}$$

Desta forma, a primeira correção randômica não nula ao potencial de Coulomb ($E_{int}^{(0)}$ calculado acima) será dada por

$$\begin{aligned} E_{int}^{(1)} &= \frac{q_1 q_2}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}} \tilde{G}^{(1)00}(0, \mathbf{k}) \\ &= \frac{q_1 q_2}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}}}{2(\mathbf{k}^2)^2} \left[\sigma_1^2 \sqrt{(k^2)^2 + (k^3)^2} + \sigma_2^2 \sqrt{(k^1)^2 + (k^3)^2} + \sigma_3^2 \sqrt{(k^1)^2 + (k^2)^2} \right] . \end{aligned}$$

A integral que aparece na expressão acima é problemática devido ao pólo do integrando em $|\mathbf{k}| = 0$, que certamente ocasionará alguma divergência. Com o intuito de regularizar este infinito, será conveniente introduzir um parâmetro regularizador de massa m^2 no denominador e, apenas no final das contas, fazer $m \rightarrow 0$, ou seja,

$$E_{int}^{(1)} = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{q_1 q_2}{2(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}}}{(\mathbf{k}^2 + m^2)^2} \left[\sigma_1^2 \sqrt{(k^2)^2 + (k^3)^2} + \sigma_2^2 \sqrt{(k^1)^2 + (k^3)^2} + \sigma_3^2 \sqrt{(k^1)^2 + (k^2)^2} \right]. \quad (3.24)$$

Escolhendo o sistema de coordenadas (tal como antes) de forma que $\mathbf{a} = a\hat{z}$ e usando coordenadas esféricas usuais, obtém-se

$$\begin{aligned} E_{int}^{(1)} &= \lim_{m \rightarrow 0} \frac{q_1 q_2}{2(2\pi)^3} \int dk d\theta d\phi k^2 \sin \theta \frac{e^{ika \cos \theta}}{(k^2 + m^2)^2} \left[\sigma_1^2 \sqrt{k^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + k^2 \cos^2 \theta} \right. \\ &\quad \left. + \sigma_2^2 \sqrt{k^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + k^2 \cos^2 \theta} + \sigma_3^2 \sqrt{k^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + k^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi} \right] \\ &= \lim_{m \rightarrow 0} \frac{q_1 q_2}{2(2\pi)^3} \int_0^\infty dk \int_{-1}^1 du \int_0^{2\pi} d\phi \frac{k^3 e^{ikua}}{(k^2 + m^2)^2} \left[\sigma_1^2 \sqrt{\sin^2 \phi + u^2 \cos^2 \phi} \right. \\ &\quad \left. + \sigma_2^2 \sqrt{\cos^2 \phi + u^2 \sin^2 \phi} + \sigma_3^2 \sqrt{1 - u^2} \right], \end{aligned}$$

onde a nova variável de integração $u = \cos \theta$ foi introduzida no último passo. Usando a fórmula de Euler para escrever $e^{ikua} = \cos(kua) + i \sin(kua)$, vemos que a integral em u do termo com $\sin(kua)$ é igual a zero, pois o integrando é uma função ímpar de u . Para o termo com $\cos(kua)$ o integrando é uma função par de u e, portanto, podemos escrever

$$E_{int}^{(1)} = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{q_1 q_2}{(2\pi)^3} \int_0^1 du \int_0^{2\pi} d\phi \left[\sigma_1^2 \sqrt{\sin^2 \phi + u^2 \cos^2 \phi} + \sigma_2^2 \sqrt{\cos^2 \phi + u^2 \sin^2 \phi} + \sigma_3^2 \sqrt{1 - u^2} \right] \int_0^\infty dk \frac{k^3 \cos(kua)}{(k^2 + m^2)^2}.$$

A integral dk na expressão acima contém toda a dependência na distância a entre as cargas, e pode ser resolvida para m arbitrário com o auxílio de um software matemático. Ao tomar o limite $m \rightarrow 0$, segue que

$$\lim_{m \rightarrow 0} \int_0^\infty dk \frac{k^3 \cos(kua)}{(k^2 + m^2)^2} = -\frac{1}{2} - \gamma - \ln u - \ln \frac{a}{a_0} - \lim_{m \rightarrow 0} [\ln ma_0 + O((ma_0)^2)], \quad (3.25)$$

onde somamos e subtraímos um termo constante $\ln a_0$ (a_0 é uma constante não nula arbitrária com dimensão de comprimento) de modo a manter adimensionais os argumentos dos logaritmos. Na expressão acima, o símbolo “ $O((ma_0)^2)$ ” denota termos do tipo $(ma_0)^2, (ma_0)^2 \ln(ma_0)^2, \dots$, todos os quais tendem a zero para $ma_0 \rightarrow 0$.

É possível ver da expressão (3.25) que o procedimento de regularização acima separou o termo divergente $-\ln ma_0$ do termo fisicamente relevante $-\ln \frac{a}{a_0}$ (o único dependente da distância a entre as cargas). Os termos independentes da distância darão origem a constantes aditivas (infinitas!) na energia de interação, mas que não contribuem para a força de interação entre as cargas e podem ser eliminadas por uma simples reescala no zero de energia. Portanto, para os nossos propósitos, podemos escrever

$$\lim_{m \rightarrow 0} \int_0^\infty dk \frac{k^3 \cos(kua)}{(k^2 + m^2)^2} = -\ln \frac{a}{a_0} + \text{const.}$$

e, com isso, a correção randômica ao potencial de Coulomb fica dada (a menos de constantes aditivas independentes de a) por

$$\begin{aligned} E_{int}^{(1)} &= -\frac{q_1 q_2}{(2\pi)^3} \ln \frac{a}{a_0} \int_0^1 du \int_0^{2\pi} d\phi \left[\sigma_1^2 \sqrt{\sin^2 \phi + u^2 \cos^2 \phi} + \sigma_2^2 \sqrt{\cos^2 \phi + u^2 \sin^2 \phi} \right. \\ &\quad \left. + \sigma_3^2 \sqrt{1 - u^2} \right] \\ &= -\frac{q_1 q_2}{(2\pi)^3} \ln \frac{a}{a_0} \int_0^1 du \left[\sigma_1^2 4\mathbb{E}(\sqrt{1 - u^2}) + \sigma_2^2 4\mathbb{E} \left(\sqrt{\frac{u^2 - 1}{u^2}} \right) u + \sigma_3^2 2\pi \sqrt{1 - u^2} \right] \\ &= -q_1 q_2 (\alpha_1 \sigma_1^2 + \alpha_2 \sigma_2^2 + \alpha_3 \sigma_3^2) \ln \frac{a}{a_0}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde $\mathbb{E}(x) \equiv \int_0^{\pi/2} d\xi \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \xi}$ é a função elíptica completa de primeira espécie, e definimos as constantes

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\doteq \frac{4}{(2\pi)^3} \int_0^1 du \mathbb{E}(\sqrt{1 - u^2}) \\ \alpha_2 &\doteq \frac{4}{(2\pi)^3} \int_0^1 du \mathbb{E} \left(\sqrt{\frac{u^2 - 1}{u^2}} \right) u \\ \alpha_3 &\doteq \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^1 du \sqrt{1 - u^2}. \end{aligned}$$

Nota-se da definição da função elíptica $\mathbb{E}(x)$ que

$$\begin{aligned} u \mathbb{E} \left(\sqrt{\frac{u^2 - 1}{u^2}} \right) &= \int_0^{\pi/2} d\theta \sqrt{u^2 - (u^2 - 1) \sin^2 \theta} = \int_0^{\pi/2} d\theta \sqrt{1 + (u^2 - 1) \cos^2 \theta} \\ &= \int_0^{\pi/2} d\theta' \sqrt{1 - (1 - u^2) \sin^2 \theta'} = \mathbb{E}(\sqrt{1 - u^2}) \end{aligned}$$

(na passagem da primeira para a segunda linha fizemos $\theta' = \pi/2 - \theta$) e, portanto, $\alpha_1 = \alpha_2$. O valor de α_1 é facilmente obtido:

$$\alpha_1 = \frac{4}{(2\pi)^3} \int_0^1 du \int_0^{\pi/2} d\theta \sqrt{1 - (1 - u^2) \sin^2 \theta} = \frac{1}{16\pi},$$

onde integramos primeiramente sobre u , e em seguida sobre θ . Já o cálculo de α_3 é elementar e resulta em

$$\alpha_3 = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^1 du \sqrt{1-u^2} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\pi/2} d\theta \cos^2 \theta = \frac{1}{16\pi} .$$

Obtemos, portanto, curiosamente, que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{16\pi} . \quad (3.27)$$

Logo, a correção (3.26) no potencial de Coulomb assume uma forma bastante simples:

$$E_{int}^{(1)}(\mathbf{a}) = - (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) \frac{q_1 q_2}{16\pi} \ln \frac{a}{a_0} . \quad (3.28)$$

Nota-se que as intensidades das flutuações nas componentes espaciais de $V_\mu(x)$ ($\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2$) aparecem todas com o mesmo peso na correção (3.28), enquanto não há contribuição da flutuação na componente temporal (σ_0^2). O não aparecimento de σ_0^2 na correção não é motivo para muito espanto, tendo em vista que trata-se de uma distribuição estática de cargas e σ_0^2 caracteriza a presença de uma direção temporal privilegiada. Já o fato de que as contribuições de $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2$ possuem todas o mesmo peso, aliada ao fato de que a energia depende apenas da distância a entre as cargas, é uma manifestação física da preservação da homogeneidade espacial pelo modelo em questão, conforme mencionado anteriormente.

A correspondente correção $F_{int}^{(1)}$ na lei de força (3.23) neste caso fica

$$\mathbf{F}_{int}^{(1)}(\mathbf{a}) = - \frac{\partial E_{int}^{(1)}(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) \frac{q_1 q_2}{16\pi a} \hat{a} . \quad (3.29)$$

É importante notar que as correções randômicas (3.28), (3.29) caem mais lentamente com a distância a do que as correspondentes quantidades livres (3.22), (3.23) e, com isso, tendem a dominar a interação entre as cargas para distâncias suficientemente grandes. Além disso, o caráter atrativo para cargas opostas e repulsivo para cargas iguais, já manifesto no termo livre para a energia, é aqui preservado.

3.4 Átomo de Hidrogênio no modelo de CFJ randômico

O objetivo desta seção é um estudo do espectro do átomo de Hidrogênio no contexto do modelo de CFJ randômico proposto neste capítulo. Dado que a energia potencial de Coulomb usual para a interação entre duas cargas pontuais é modificada na presença de um vetor de

fundo randômico para a expressão ¹

$$V(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi r} - \sigma^2 \frac{q_1 q_2}{16\pi} \ln \frac{r}{r_0}, \quad (3.30)$$

o átomo de hidrogênio - constituído por um próton e um elétron interagindo eletromagneticamente - neste modelo certamente deve apresentar propriedades físicas distintas das usuais obtidas via interação Coulombiana. Na equação acima, utilizamos a abreviação $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2$; além disso, denotamos por r_0 a constante arbitrária a_0 com dimensão de comprimento que aparece na equação (3.28).

Introduzindo o potencial (3.30) com $q_1 = e, q_2 = -e$ ($e = 8,54 \times 10^{-2}$ é a carga do elétron em unidades de $\hbar = c = 1$) na equação de Schrödinger estacionária, somos levados a uma equação de autovalores e autovetores para o operador Hamiltoniano

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}, \quad (3.31)$$

onde definimos

$$\hat{H}_0 = -\frac{1}{2m} \nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi r} \quad (3.32a)$$

$$\hat{W} = \sigma^2 \frac{e^2}{16\pi} \ln \frac{r}{r_0}. \quad (3.32b)$$

O operador \hat{H}_0 é o bem conhecido Hamiltoniano do átomo de Hidrogênio em sua forma usual, correspondendo à interação Coulombiana entre o elétron e o próton. Já o operador \hat{W} contém as informações relativas à presença do vetor de fundo e é proporcional à intensidade σ^2 das flutuações randômicas quadráticas de V_μ . Por simplicidade, as correções de estrutura fina, hiperfina e demais correções relativísticas do átomo de Hidrogênio usual não serão levadas em conta na análise que segue. Porém, vale mencionar que, visto que os efeitos de quebra da simetria de Lorentz devem ser muito pequenos (inclusive se comparados às correções relativísticas mencionadas!), tais correções entrariam somente no operador \hat{H}_0 e não afetariam em nada o procedimento perturbativo e as conclusões a serem obtidas no final desta seção.

¹Se preferir, de modo a garantir que $V(r \rightarrow \infty) = 0$, o leitor pode redefinir o potencial $V(r)$ como o limite $\lambda \rightarrow 0$ do potencial

$$V_\lambda(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi r} - \sigma^2 \frac{q_1 q_2}{16\pi} e^{-\lambda r/r_0} \ln \frac{r}{r_0},$$

onde o limite $\lambda \rightarrow 0$ fica subentendido a ser tomado no final dos cálculos. Todos os resultados apresentados nesta seção permanecem inalterados para esta escolha de $V(r)$.

Tendo em vista que V_μ deve ser bem pequeno em intensidade de forma a não contradizer os resultados dos experimentos atuais, ocorre que σ^2 é uma quantidade certamente pequena; logo, podemos afirmar que $\hat{W} \ll \hat{H}_0$ e, com isso, o estudo do Hamiltoniano \hat{H} acima admite um tratamento perturbativo em potências de \hat{W} usando teoria de perturbações independentes do tempo, método bastante comum encontrado em livros-texto de mecânica quântica [23].

Antes de proceder com este estudo perturbativo, será importante relembrar os bem conhecidos autovalores e autofunções de \hat{H}_0 . As autofunções normalizadas são dadas, em coordenadas esféricas, por [23]:

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = \sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}} \left(\frac{2r}{na_0}\right)^l L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right) e^{-r/na_0} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (3.33)$$

onde $a_0 = 1/m_e e^2$ é o raio de Bohr (em unidades $\hbar = c = 1$), $L_q^p(x)$ são polinômios associados de Laguerre, $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ são harmônicos esféricos e os números quânticos n, l, m assumem os valores $n = 1, 2, 3, \dots$, $l = 0, 1, \dots, n-1$ e $m = -l, \dots, l$. As primeiras destas funções são dadas explicitamente na Tabela 3.1. Os autovalores associados às autofunções Ψ_{nlm} acima são independentes dos números quânticos l e m e vêm dados por ($\hbar = 1$)

$$E_n^{(0)} = -\frac{m_e e^4}{2n^2} = -\frac{13,6eV}{n^2}. \quad (3.34)$$

Obviamente, todos os estados com $n > 1$ são degenerados devido aos vários l, m associados a um mesmo n .

3.4.1 Correções randômicas aos níveis de energia $E_n^{(0)}$

Vamos agora ao estudo perturbativo dos efeitos randômicos contidos no operador \hat{W} sobre \hat{H}_0 . O interesse aqui é investigar apenas as correções randômicas $E_n^{(1)}$ nos níveis de energia ($E_n^{(0)}$ da equação (3.34)) do átomo de Hidrogênio. As correções nas autofunções podem ser obtidas utilizando os métodos padrão de mecânica quântica, mas não serão explorados aqui neste trabalho.

O nível $n = 1$ é não degenerado, correspondendo unicamente ao estado fundamental $|\psi_{100}\rangle$. Sua energia é

$$E_1^{(0)} = -13,6eV. \quad (3.35)$$

A correção de primeira ordem nesta energia devido a uma perturbação \hat{W} é dada pelo valor

n	l	m	$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi)$
1	0	0	$\frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}$
2	0	0	$\frac{1}{2\sqrt{2\pi a_0^3}} \left(1 - \frac{r}{2a_0}\right) e^{-r/2a_0}$
2	1	0	$\frac{1}{4\sqrt{2\pi a_0^3}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0} \cos \theta$
2	1	± 1	$\frac{1}{8\sqrt{\pi a_0^3}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0} \sin \theta e^{\pm i\varphi}$
3	0	0	$\frac{1}{81\sqrt{3\pi a_0^3}} \left(27 - 18\frac{r}{a_0} + 2\frac{r^2}{a_0^2}\right) e^{-r/3a_0}$
3	1	0	$\frac{1}{81} \sqrt{\frac{2}{\pi a_0^3}} \left(6 - \frac{r}{a_0}\right) \frac{r}{a_0} e^{-r/3a_0} \cos \theta$
3	1	± 1	$\frac{1}{81\sqrt{\pi a_0^3}} \left(6 - \frac{r}{a_0}\right) \frac{r}{a_0} e^{-r/3a_0} \sin \theta e^{\pm i\varphi}$
3	2	0	$\frac{1}{81\sqrt{6\pi a_0^3}} \frac{r^2}{a_0^2} e^{-r/3a_0} (3 \cos^2 \theta - 1)$
3	2	± 1	$\frac{1}{81\sqrt{\pi a_0^3}} \frac{r^2}{a_0^2} e^{-r/3a_0} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\varphi}$
3	2	± 2	$\frac{1}{162\sqrt{\pi a_0^3}} \frac{r^2}{a_0^2} e^{-r/3a_0} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\varphi}$

Tabela 3.1: Autofunções do átomo de Hidrogênio livre (\hat{H}_0) para $n = 1, 2, 3$.

médio da perturbação no estado $|\psi_{100}\rangle$, isto é,

$$E_1^{(1)} = \langle \psi_{100} | \hat{W} | \psi_{100} \rangle = \int d^3\mathbf{x} \psi_{100}^*(\mathbf{x}) \hat{W}(\mathbf{x}) \psi_{100}(\mathbf{x}) .$$

Resolvendo a integral acima em coordenadas esféricas com $\psi_{100}(r, \theta, \varphi)$ dado na Tabela 3.1 e \hat{W} dado pela equação (3.32b), obtemos

$$E_{1,s}^{(1)} = -\sigma^2 \frac{e^2}{16\pi} \left(\ln \frac{2r_0}{a_0} + \gamma - \frac{3}{2} \right) , \quad (3.36)$$

onde γ é a constante de Euler-Mascheroni ($\gamma = 0,577216\dots$). O significado do subíndice s introduzido na notação ficará claro na sequência.

O nível $n = 2$ é degenerado de grau 4, correspondendo aos estados $|\Psi_1\rangle \doteq |\psi_{200}\rangle$, $|\Psi_2\rangle \doteq |\psi_{21-1}\rangle$, $|\Psi_3\rangle \doteq |\psi_{210}\rangle$ e $|\Psi_4\rangle \doteq |\psi_{211}\rangle$. A energia deste nível é

$$E_2^{(0)} = -3,40eV . \quad (3.37)$$

As correções de primeira ordem em \hat{W} a esta energia, de acordo com a bem conhecida teoria de perturbações estacionárias para níveis degenerados, são dadas pelos autovalores da matriz de perturbação 4×4 W_{ij} definida por

$$W_{ij} = \langle \Psi_i | \hat{W} | \Psi_j \rangle = \int d^3\mathbf{x} \Psi_i^*(\mathbf{x}) \hat{W}(\mathbf{x}) \Psi_j(\mathbf{x}) \quad (i, j = 1, 2, 3, 4) . \quad (3.38)$$

Substituindo as funções de onda Ψ_i apresentadas na Tabela 3.1 e a expressão (3.32b) para \hat{W} , obtemos as seguintes componentes para a matriz W :

$$\begin{aligned} W_{11} &= -\sigma^2 \frac{e^2}{16\pi} \left(\ln \frac{r_0}{a_0} + \gamma - \frac{9}{4} \right) \\ W_{22} &= W_{33} = W_{44} = -\sigma^2 \frac{e^2}{16\pi} \left(\ln \frac{r_0}{a_0} + \gamma - \frac{25}{12} \right) \\ W_{ij} &= 0 \quad (i \neq j) . \end{aligned}$$

Como esta é uma matriz diagonal, seus autovalores são imediatamente determinados, e identificamos diretamente duas correções distintas para a energia (3.37):

$$E_{2,s}^{(1)} = -\sigma^2 \frac{e^2}{16\pi} \left(\ln \frac{r_0}{a_0} + \gamma - \frac{9}{4} \right) \quad (3.39a)$$

$$E_{2,p}^{(1)} = -\sigma^2 \frac{e^2}{16\pi} \left(\ln \frac{r_0}{a_0} + \gamma - \frac{25}{12} \right) \quad (3.39b)$$

A primeira destas correções corresponde ao estado $|\psi_{200}\rangle$ (isto é, aquele com $l = 0$), enquanto a segunda corresponde aos 3 estados $|\psi_{21m}\rangle$ (isto é, os estados $l = 1$)². Aqui aparece o primeiro efeito notável da presença do vetor de fundo randômico V_μ para o átomo de Hidrogênio: a degenerescência no número quântico orbital l é quebrada.

Será conveniente analisar também o próximo nível, $n = 3$, a fim de verificar esta quebra de degenerescência. Ele é degenerado de grau 9 e corresponde aos estados $|\Psi_1\rangle \doteq |\psi_{300}\rangle, |\Psi_2\rangle \doteq |\psi_{31-1}\rangle, |\Psi_3\rangle \doteq |\psi_{310}\rangle, |\Psi_4\rangle \doteq |\psi_{311}\rangle, |\Psi_5\rangle \doteq |\psi_{32-2}\rangle, |\Psi_6\rangle \doteq |\psi_{32-1}\rangle, |\Psi_7\rangle \doteq |\psi_{320}\rangle, |\Psi_8\rangle \doteq |\psi_{321}\rangle$ e $|\Psi_9\rangle \doteq |\psi_{322}\rangle$. O valor da energia sem a perturbação é

$$E_3^{(0)} = 1,51eV , \quad (3.40)$$

e a correção perturbativa de primeira ordem é novamente dada pelos autovalores da matriz de perturbação W_{ij} definida em (3.38), onde agora temos $i, j = 1, 2, \dots, 9$. Substituindo cada uma das funções de onda Ψ_i e a perturbação \hat{W} é possível determinar cada uma das componentes

²A notação utilizada para distinguir as duas correções em (3.39) é baseada na notação espectroscópica para os estados do átomo de Hidrogênio, onde estados com $l = 0$ correspondem a orbitais tipo “s” ($1s, 2s, \dots$), $l = 1$ corresponde a orbitais tipo “p” ($2p, 3p, \dots$), $l = 2$ corresponde a orbitais tipo “d” ($3d, 4d, \dots$), etc.

da matriz W_{ij} , que são:

$$\begin{aligned} W_{11} &= -\sigma^2 \frac{e^2}{16\pi} \left(\ln \frac{2r_0}{3a_0} + \gamma - \frac{8}{3} \right) \\ W_{22} &= W_{33} = W_{44} = -\sigma^2 \frac{e^2}{16\pi} \left(\ln \frac{2r_0}{3a_0} + \gamma - \frac{31}{12} \right) \\ W_{55} &= W_{66} = W_{77} = W_{88} = W_{99} = -\sigma^2 \frac{e^2}{16\pi} \left(\ln \frac{2r_0}{3a_0} + \gamma - \frac{49}{20} \right) \\ W_{ij} &= 0 \quad (i \neq j) . \end{aligned}$$

Tal como no caso $n = 1$, W é novamente uma matriz diagonal e, por esta razão, podemos ler seus autovalores facilmente. Neste caso, há 3 diferentes correções perturbativas ao valor (3.40).

São elas:

$$E_{3,s}^{(1)} = -\sigma^2 \frac{e^2}{16\pi} \left(\ln \frac{2r_0}{3a_0} + \gamma - \frac{8}{3} \right) \quad (3.41a)$$

$$E_{3,p}^{(1)} = -\sigma^2 \frac{e^2}{16\pi} \left(\ln \frac{2r_0}{3a_0} + \gamma - \frac{31}{12} \right) \quad (3.41b)$$

$$E_{3,d}^{(1)} = -\sigma^2 \frac{e^2}{16\pi} \left(\ln \frac{2r_0}{3a_0} + \gamma - \frac{49}{20} \right) . \quad (3.41c)$$

A primeira corresponde ao estado com $l = 0$ e por isso recebe o índice s . A segunda corresponde aos 3 estados que possuem $l = 1$ e por isso recebe o índice p . Por fim, a última está associada aos 5 estados com $l = 2$ e por isso é designada pelo índice d . Estes resultados confirmam claramente o efeito de quebra da degenerescência em l do átomo de Hidrogênio no modelo de CFJ randômico.

Poderíamos estender esta análise para todos os demais níveis $n = 4, 5, \dots$, mas é suficiente parar por aqui. Um ponto importante a ser notado é que em todas as correções perturbativas obtidas (equações (3.36),(3.39) e (3.41)) aparece uma constante aditiva

$$\Delta = -\frac{\sigma^2 e^2}{16\pi} \left(\ln \frac{2r_0}{a_0} + \gamma - \frac{3}{2} \right) ,$$

que vem da arbitrariedade na escolha da constante r_0 que aparece na correção randômica à lei de Coulomb. Naturalmente, esta constante aditiva em todos os níveis de energia não se manifesta em nenhuma das frequências de transição (como veremos adiante) e pode inclusive ser feita nula, sem perda de generalidade, com uma escolha apropriada para r_0 ³. Esta escolha para r_0 é particularmente conveniente pois não altera a energia de ionização (energia do estado fundamental) do Hidrogênio.

³A saber, temos $\Delta = 0$ se $r_0 = \frac{a_0}{2} \exp(3/2 - \gamma)$.

Nível	$E_n^{(0)}$ (livre)	$E_n^{(1)}$ (correção)	Estados
n=1	$-13,6eV$	Δ	1s
n=2	$-3,40eV$	$\frac{\sigma^2 e^2}{16\pi} \left(\ln 2 + \frac{3}{4} \right) + \Delta$	2s
		$\frac{\sigma^2 e^2}{16\pi} \left(\ln 2 + \frac{7}{12} \right) + \Delta$	2p
n=3	$-1,51eV$	$\frac{\sigma^2 e^2}{16\pi} \left(\ln 3 + \frac{7}{6} \right) + \Delta$	3s
		$\frac{\sigma^2 e^2}{16\pi} \left(\ln 3 + \frac{13}{12} \right) + \Delta$	3p
		$\frac{\sigma^2 e^2}{16\pi} \left(\ln 3 + \frac{19}{20} \right) + \Delta$	3d

Tabela 3.2: Correções randômicas de ordem mais baixa aos primeiros níveis de energia do átomo de Hidrogênio.

Um sumário dos resultados obtidos e discutidos acima é apresentado de maneira mais instrutiva na Tabela 3.2.

3.4.2 Correções nas frequências de transição e comparação com os dados experimentais

Na última seção foram calculadas as correções randômicas de mais baixa ordem aos primeiros níveis de energia do átomo de Hidrogênio. De posse destes resultados, podemos obter as correções nas frequências de transição (também conhecidas como *frequências de Bohr*) entre estes primeiros níveis. Lembramos que a frequência de transição entre dois estados, inicial (i) e final (f), é definida como o módulo da diferença $E_f - E_i$ entre as energias dos correspondentes níveis dividido pela constante de Planck $h = 2\pi\hbar = 2\pi$, de forma que teremos duas contribuições distintas – uma livre e uma correção randômica – para $\nu_{i \leftrightarrow f}$:

$$\nu_{i \leftrightarrow f} = \nu_{i \leftrightarrow f}^{(0)} + \nu_{i \leftrightarrow f}^{(1)}, \quad (3.42)$$

onde

$$\nu_{i \rightarrow f}^{(0)} = \frac{|E_f^{(0)} - E_i^{(0)}|}{2\pi} \quad (3.43a)$$

$$\nu_{i \rightarrow f}^{(1)} = \frac{|E_f^{(1)} - E_i^{(1)}|}{2\pi}. \quad (3.43b)$$

Porém, antes de prosseguir com o cálculo das frequências, lembramos que nem todas as transições são permitidas de ocorrer entre diferentes estados do átomo de Hidrogênio. As

Tipo de transição	(nlm)	$(n'l'm')$
$1s \leftrightarrow 2p$	(100)	(21-1), (210), (211)
$1s \leftrightarrow 3p$	(100)	(31-1), (310), (311)
$2s \leftrightarrow 2p$	(200)	(21-1), (210), (211)
$2s \leftrightarrow 3p$	(200)	(31-1), (310), (311)
$2p \leftrightarrow 3d$	(21-1)	(32-2), (32-1), (320)
	(210)	(32-1), (320), (321)
	(211)	(320), (321), (322)
$3s \leftrightarrow 2p$	(300)	(21-1), (210), (211)
$3s \leftrightarrow 3p$	(300)	(31-1), (310), (311)
$3p \leftrightarrow 3d$	(31-1)	(32-2), (32-1), (320)
	(310)	(32-1), (320), (321)
	(311)	(320), (321), (322)

Tabela 3.3: Transições $(nlm) \leftrightarrow (n'l'm')$ permitidas entre os três primeiros níveis do átomo de Hidrogênio.

únicas transições $|\psi_{nlm}\rangle \leftrightarrow |\psi_{n'l'm'}\rangle$ permitidas são aquelas que satisfazem às seguintes regras de seleção [23]:

$$l' = l \pm 1$$

$$m' = m, m \pm 1 .$$

Para os três primeiros níveis ($n = 1, 2, 3$), ao levar em conta a regra de seleção sobre l obtemos as seguintes classes de transições permitidas: $1s \leftrightarrow 2p, 1s \leftrightarrow 3p, 2s \leftrightarrow 2p, 2s \leftrightarrow 3p, 2p \leftrightarrow 3s, 2p \leftrightarrow 3d, 3s \leftrightarrow 3p$ e $3p \leftrightarrow 3d$. O efeito da regra de seleção sobre o número quântico m é só o de eliminar algumas possibilidades dentro de cada uma das transições acima mencionadas (por exemplo, dentre as transições do tipo $2p \leftrightarrow 3d$ ($l = 1, l' = 2$), é proibida pelas regras de seleção a transição $|\psi_{21-1}\rangle \leftrightarrow |\psi_{321}\rangle$, pois esta corresponde a $m = -1, m' = 1 = m + 2$). Porém, como as energias $E_n^{(0)}$ e suas correções $E_n^{(1)}$ não dependem de m , podemos proceder com a análise das frequências de transição atentando apenas para o número quântico l . Na Tabela 3.3 apresentamos detalhadamente todas as transições possíveis entre os níveis $n = 1, 2, 3$.

Vejamos inicialmente as transições do tipo $1s \leftrightarrow 2p$. A frequência natural dos fótons

emitidos/absorvidos nestas transições é

$$\nu_{1s \leftrightarrow 2p}^{(0)} = \frac{|E_2^{(0)} - E_1^{(0)}|}{2\pi} = 1,62eV = 2,47 \times 10^{15} Hz , \quad (3.44)$$

onde utilizamos o fato de que $1eV = 1,52 \times 10^{15} Hz$ no sistema de unidades naturais utilizado.

A correção randômica a este resultado é

$$\begin{aligned} \nu_{1s \leftrightarrow 2p}^{(1)} &= \frac{|E_{2,p}^{(1)} - E_{1,s}^{(1)}|}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\sigma^2 e^2}{16\pi} \left(\ln 2 + \frac{7}{12} \right) + \Delta - \Delta \right| \\ &= \sigma^2 \frac{e^2}{32\pi^2} \left(\ln 2 + \frac{7}{12} \right) = 2,95 \times 10^{-5} \sigma^2 , \end{aligned} \quad (3.45)$$

onde na última passagem usamos o valor da carga do elétron em unidades naturais ($e = 8,54 \times 10^{-2}$) e σ^2 deve ser expresso em Hertz (Hz). Aqui fica claro que a constante aditiva Δ nos níveis de energia não carrega consigo nenhuma consequência física.

Para as transições $1s \leftrightarrow 3p$, a frequência natural é

$$\nu_{1s \leftrightarrow 3p}^{(0)} = \frac{|E_3^{(0)} - E_1^{(0)}|}{2\pi} = 1,93eV = 2,92 \times 10^{15} Hz , \quad (3.46)$$

enquanto a correção randômica é igual a

$$\begin{aligned} \nu_{1s \leftrightarrow 3p}^{(1)} &= \frac{|E_{3,p}^{(1)} - E_{1,s}^{(1)}|}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\sigma^2 e^2}{16\pi} \left(\ln 3 + \frac{13}{12} \right) + \Delta - \Delta \right| \\ &= \sigma^2 \frac{e^2}{32\pi^2} \left(\ln 3 + \frac{13}{12} \right) = 5,04 \times 10^{-5} \sigma^2 . \end{aligned} \quad (3.47)$$

A próxima classe de transições é $2s \leftrightarrow 2p$. Estas transições não ocorrem na teoria livre ⁴, isto é,

$$\nu_{2s \leftrightarrow 2p}^{(0)} = 0 , \quad (3.48)$$

pois são transições entre o mesmo nível de energia ($n = 2$). Porém, com a introdução dos efeitos randômicos do vetor de fundo V_μ e a quebra da degenerescência em l , transições espontâneas entre estes estados podem ocorrer com frequência dada por

$$\begin{aligned} \nu_{2s \leftrightarrow 2p}^{(1)} &= \frac{|E_{2,p}^{(1)} - E_{2,s}^{(1)}|}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\sigma^2 e^2}{16\pi} \left(\ln 2 + \frac{7}{12} \right) + \Delta - \frac{\sigma^2 e^2}{16\pi} \left(\ln 2 + \frac{3}{4} \right) - \Delta \right| \\ &= \sigma^2 \frac{e^2}{192\pi^2} = 0,385 \times 10^{-5} \sigma^2 . \end{aligned} \quad (3.49)$$

⁴Na verdade, se levarmos em conta as correções de estrutura fina, hiperfina e demais correções ao átomo de Hidrogênio veremos que os níveis de energia não são funções apenas do número quântico principal n e, portanto, transições do tipo $2s \leftrightarrow 2p$ são sim possíveis de ocorrer espontaneamente. Este fato não influencia em nada a análise que segue adiante, pois estamos preocupados apenas com o papel das correções randômicas, e será simplesmente ignorado, por simplicidade.

Para ambas as transições do tipo $2s \leftrightarrow 3p$, $2p \leftrightarrow 3d$ e $3s \leftrightarrow 2p$, temos uma frequência natural dada por

$$\nu_{2s \leftrightarrow 3p}^{(0)} = \nu_{2s \leftrightarrow 3d}^{(0)} = \nu_{3s \leftrightarrow 2p}^{(0)} = \frac{|E_3^{(0)} - E_2^{(0)}|}{2\pi} = 0,301eV = 0,457 \times 10^{15} Hz . \quad (3.50)$$

Já as correções randômicas a cada um destes valores são distintas: para o primeiro tipo, a correção é

$$\begin{aligned} \nu_{2s \leftrightarrow 3p}^{(1)} &= \frac{|E_{3,p}^{(1)} - E_{2,s}^{(1)}|}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\sigma^2 e^2}{16\pi} \left(\ln 3 + \frac{13}{12} \right) + \Delta - \frac{\sigma^2 e^2}{16\pi} \left(\ln 2 + \frac{3}{4} \right) - \Delta \right| \\ &= \sigma^2 \frac{e^2}{32\pi^2} \left(\ln \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \right) = 1,71 \times 10^{-5} \sigma^2 , \end{aligned} \quad (3.51)$$

enquanto que para o segundo tipo ela vem dada por

$$\begin{aligned} \nu_{2p \leftrightarrow 3d}^{(1)} &= \frac{|E_{3,d}^{(1)} - E_{2,p}^{(1)}|}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\sigma^2 e^2}{16\pi} \left(\ln 3 + \frac{19}{20} \right) + \Delta - \frac{\sigma^2 e^2}{16\pi} \left(\ln 2 + \frac{7}{12} \right) - \Delta \right| \\ &= \sigma^2 \frac{e^2}{32\pi^2} \left(\ln \frac{3}{2} + \frac{11}{30} \right) = 1,78 \times 10^{-5} \sigma^2 \end{aligned} \quad (3.52)$$

e, para o último tipo, temos

$$\begin{aligned} \nu_{3s \leftrightarrow 2p}^{(1)} &= \frac{|E_{3,s}^{(1)} - E_{2,p}^{(1)}|}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\sigma^2 e^2}{16\pi} \left(\ln 3 + \frac{7}{6} \right) - \frac{\sigma^2 e^2}{16\pi} \left(\ln 2 + \frac{7}{12} \right) - \Delta \right| \\ &= \sigma^2 \frac{e^2}{32\pi^2} \left(\ln \frac{3}{2} + \frac{7}{12} \right) = 2,28 \times 10^{-5} \sigma^2 . \end{aligned} \quad (3.53)$$

Por fim, restam as transições dos tipos $3s \leftrightarrow 3p$ e $3p \leftrightarrow 3d$, ambas as quais são impossíveis de ocorrer espontaneamente ⁵ no átomo de Hidrogênio usual (livre), isto é,

$$\nu_{3s \leftrightarrow 3p}^{(0)} = \nu_{3p \leftrightarrow 3d}^{(0)} = 0 . \quad (3.54)$$

Todavia, devido à presença do vetor de fundo randômico V_μ , ambas as classes de transições se fazem possíveis para o átomo de Hidrogênio, e com frequências distintas: no primeiro caso, a frequência é

$$\begin{aligned} \nu_{3s \leftrightarrow 3p}^{(1)} &= \frac{|E_{3,p}^{(1)} - E_{3,s}^{(1)}|}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\sigma^2 e^2}{16\pi} \left(\ln 3 + \frac{13}{12} \right) + \Delta - \frac{\sigma^2 e^2}{16\pi} \left(\ln 3 + \frac{7}{6} \right) - \Delta \right| \\ &= \sigma^2 \frac{e^2}{384\pi^2} = 0,192 \times 10^{-5} \sigma^2 , \end{aligned} \quad (3.55)$$

⁵Aqui vale a mesma observação feita na página anterior para o caso das transições do tipo $2s \leftrightarrow 2p$.

Transições	Frequência natural $\omega^{(0)}$	Correção randômica $\omega^{(1)}$
$1s \leftrightarrow 2p$	$2,47 \times 10^{15} Hz$	$2,95 \times 10^{-5} \sigma^2$
$1s \leftrightarrow 3p$	$2,92 \times 10^{15} Hz$	$5,04 \times 10^{-5} \sigma^2$
$2s \leftrightarrow 2p$	0	$0,385 \times 10^{-5} \sigma^2$
$2s \leftrightarrow 3p$	$0,457 \times 10^{15} Hz$	$1,71 \times 10^{-5} \sigma^2$
$2p \leftrightarrow 3d$	$0,457 \times 10^{15} Hz$	$1,78 \times 10^{-5} \sigma^2$
$3s \leftrightarrow 2p$	$0,457 \times 10^{15} Hz$	$2,28 \times 10^{-5} \sigma^2$
$3s \leftrightarrow 3p$	0	$0,192 \times 10^{-5} \sigma^2$
$3p \leftrightarrow 3d$	0	$0,308 \times 10^{-5} \sigma^2$

Tabela 3.4: Correções nas frequências de transição entre os três primeiros níveis do átomo de Hidrogênio.

enquanto no segundo caso temos

$$\begin{aligned}
\nu_{3p \leftrightarrow 3d}^{(1)} &= \frac{|E_{3,d}^{(1)} - E_{3,p}^{(1)}|}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\sigma^2 e^2}{16\pi} \left(\ln 3 + \frac{19}{20} \right) + \Delta - \frac{\sigma^2 e^2}{16\pi} \left(\ln 3 + \frac{13}{12} \right) - \Delta \right| \\
&= \sigma^2 \frac{e^2}{240\pi^2} = 0,308 \times 10^{-5} \sigma^2 .
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Antes de prosseguir, apresentamos na Tabela 3.4 uma compilação dos resultados (3.44)-(3.56) com o intuito de elucidar as ordens de grandeza envolvidas, bem como seu significado. Nas correções apresentadas nesta tabela, σ^2 está supostamente expresso em Hertz (Hz).

O próximo passo é comparar as correções randômicas apresentadas na Tabela 3.4 com os dados experimentais atuais para as medidas de transições do átomo de Hidrogênio. A intenção desta comparação é impor um limite superior na intensidade das flutuações randômicas (σ^2) baseado na precisão dos resultados experimentais. Afinal, como as medidas de altíssima precisão do espectro do Hidrogênio são muito bem explicadas teoricamente por um modelo sem quebra da simetria de Lorentz, qualquer efeito de violação desta simetria deve certamente estar dentro da faixa de erro experimental atual (caso contrário, já teria sido detectado). Em particular, isto vale para as correções nas frequências de transição:

$$\nu^{(1)} \lesssim \delta\nu , \tag{3.57}$$

onde $\delta\nu$ é a incerteza experimental na medida da frequência livre $\nu^{(0)}$, isto é, $\nu_{exp} = \nu^{(0)} \pm \delta\nu$.

Os dados experimentais atualizados sobre as frequências de transição do átomo de Hidrogênio podem ser encontrados na referência [24]. Os valores apresentados levam em conta as correções de estrutura fina, correções de recuo devido ao movimento e ao raio finito do núcleo atômico (*relativistic-recoil corrections*), correções devido à polarização do núcleo e correções de eletrodinâmica quântica (polarização do vácuo, etc.)[25].

O objetivo aqui é apenas um estudo qualitativo das ordens de grandeza envolvidas a fim de estabelecer uma *estimativa* para a ordem de grandeza de σ^2 . Assumindo que a precisão dos aparelhos de medida é aproximadamente a mesma para todos os tipos de transição possíveis (pelo menos entre os primeiros níveis), podemos proceder a análise para apenas uma destas transições possíveis e o resultado se manterá, pelo menos em ordem de grandeza, para as demais.

Por simplicidade, escolhemos analisar as transições entre os mais baixos níveis, isto é, aquelas do tipo $1s \leftrightarrow 2p$. O valor medido para a frequência dos fótons emitidos no decaimento dos estados $2p$ para o estado fundamental $1s$, segundo a referência [24], é

$$\nu_{2p_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2}} = 2,4660603553431(24) \times 10^{15} \text{ Hz} \quad (3.58)$$

para o caso de estados p com momento angular total $j = l + s = 1/2$ e

$$\nu_{2p_{3/2} \rightarrow 1s_{1/2}} = 2,4660713243847(24) \times 10^{15} \text{ Hz} \quad (3.59)$$

para o caso de estados p com $j = 3/2$. O importante a se notar de (3.58) e (3.59) é que a incerteza experimental das medidas é dada por $0,0000000000024 \times 10^{15} \text{ Hz} \sim 2,4 \times 10^3 \text{ Hz}$, isto é,

$$\delta\nu_{1s \leftrightarrow 2p} = 2,4 \times 10^3 \text{ Hz} .$$

Logo, segue da equação (3.57) que

$$\nu_{1s \leftrightarrow 2p}^{(1)} \lesssim 2,4 \times 10^3 \text{ Hz} ,$$

ou ainda, substituindo $\nu_{1s \leftrightarrow 2p}^{(1)}$ dado na Tabela 3.4, a saber $\nu_{1s \leftrightarrow 2p}^{(1)} = 2,94 \times 10^{-5} \sigma^2$, obtemos

$$2,95 \times 10^{-5} \sigma^2 \lesssim 2,4 \times 10^3 \text{ Hz} \quad \Rightarrow \quad \sigma^2 \lesssim 8,1 \times 10^7 \text{ Hz} .$$

Será mais conveniente expressar o resultado acima em unidades de giga-elétrons-volt (GeV), usando o fato de que $1GeV = 10^9 eV$ e ainda $1eV = 1,52 \times 10^{15} Hz$ (no sistema de unidades utilizado). O resultado é:

$$\sigma^2 \lesssim 5,4 \times 10^{-17} GeV . \quad (3.60)$$

Nota-se de imediato uma enorme diferença (25 ordens de grandeza) entre este resultado e o limite superior para manifestações de quebra de simetria de Lorentz no modelo de CFJ (equação (2.27)).

Este limite superior aparentemente grande para os efeitos de V_μ randômico pode ser apenas um reflexo do método utilizado para a estimativa de sua intensidade (via átomo de Hidrogênio), i.e., não devemos excluir a possibilidade de que uma análise utilizando outros métodos mais apropriados (como, por exemplo, a investigação original de CFJ usando radiação advinda de objetos astrofísicos distantes) possa resultar em uma intensidade algumas ordens de grandeza menor para σ^2 . Por outro lado, devemos mencionar que este resultado pode significar também que os efeitos randômicos do vetor de fundo neste modelo são, de fato, muito mais intensos que aqueles previstos pelo modelo de CFJ e, neste caso, seriam mais prováveis de ser detectados por experimentos de maior precisão que os atuais.

3.5 A presença de um solenóide infinito no modelo de CFJ randômico

Um fato já mencionado anteriormente neste capítulo, e que pode ser observado na expressão (3.28), é que a intensidade σ_0^2 das flutuações na componente V_0 do vetor de fundo não aparece na correção randômica à lei de Coulomb, possivelmente por se tratar da interação entre uma distribuição estática de cargas. Com o intuito de investigar que tipo de consequência física está associada a σ_0^2 , vamos estudar nesta seção a presença de um solenóide infinito no modelo de CFJ randômico.

Um solenóide de altura infinita e raio R é um objeto bastante conhecido do eletromagnetismo de Maxwell, e caracteriza-se por um campo magnético que é constante e uniforme em sua região interior ($\mathbf{B}_{int} = B\hat{z}$) e nulo na região exterior ($\mathbf{B}_{ext} = \mathbf{0}$). É fácil verificar [28, 29] que este campo magnético pode ser descrito de maneira equivalente pelo seguinte quadripotencial:

$$A_{sol}^\mu(x) = \begin{cases} \frac{B}{2}(0, -y, x, 0) & \text{se } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \leq R \\ \frac{\Phi_B}{2\pi(x^2 + y^2)}(0, -y, x, 0) & \text{se } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} > R, \end{cases}$$

onde $\Phi_B = B\pi R^2$ é o fluxo magnético total sobre a superfície do solenóide.

O interesse nesta seção é estudar a correção $A_{sol}^{\mu(1)}$ no potencial na região *externa* ao solenóide, isto é, na região $\rho > R$, correção esta devido à presença do vetor de fundo randômico.

Para isto, vamos considerar a aproximação de solenóide muito fino $R \rightarrow 0$ (mas com $\mathbf{B} \rightarrow \infty$ de tal forma que $\Phi_B = \text{const.}$), também conhecida como aproximação de *corda de Dirac*. Neste caso, podemos ignorar o potencial na região interna e nos referir ao potencial do solenóide simplesmente como

$$A_{sol}^{(0)\mu}(x) = \frac{\Phi_B}{2\pi(x^2 + y^2)}(0, -y, x, 0) , \quad (3.61)$$

onde introduzimos o sobreíndice “(0)” na notação para o potencial para lembrar que este é o resultado obtido na teoria de Maxwell e manter a notação consistente com o restante deste trabalho.

O primeiro passo em direção à obtenção da correção randômica $A_{sol}^{(1)\mu}$ ao resultado (3.61) é encontrar a quadricorrente $J_{sol}^\mu(x)$ correspondente a este solenóide muito fino. Isto pode ser feito lembrando da relação usual entre qualquer potencial clássico $A^{(0)\mu}$ e sua correspondente quadricorrente [16], a saber

$$A^{(0)\mu}(x) = \int d^4x' G^{(0)\mu\nu}(x, x') J_\nu(x') , \quad (3.62)$$

onde $G^{(0)\mu\nu}(x, x')$ é o propagador do modelo (neste caso, o propagador de Maxwell). Escrevendo a expansão de Fourier usual de cada uma das funções $A^{(0)\mu}(x)$, $G^{(0)\mu\nu}(x, x')$ e $J_\nu(x')$ e fazendo algumas integrações simples obtemos a seguinte versão no espaço dos momenta da equação acima:

$$\tilde{A}^{(0)\mu}(k) = \tilde{G}^{(0)\mu\nu}(k) \tilde{J}_\nu(k) ,$$

onde $\tilde{A}^{(0)}$, $\tilde{G}^{(0)}$ e \tilde{J} são as transformadas de Fourier de $A^{(0)}$, $G^{(0)}$ e J , respectivamente. Esta expressão permite obter a transformada de Fourier da corrente J a partir do conhecimento da transformada do potencial A , isto é,

$$\tilde{J}_\nu(k) = (\tilde{G}^{(0)-1})_{\nu\alpha}(k) \tilde{A}^{(0)\alpha}(k) .$$

Trabalhando no calibre de Feynman, onde (veja Apêndice C) o propagador de Maxwell no espaço dos momenta possui a forma $\tilde{G}^{(0)\mu\nu}(k) = -\eta^{\mu\nu}/k^2$ e, portanto, sua inversa vem dada por $(\tilde{G}^{(0)-1})_{\nu\alpha}(k) = -k^2\eta_{\nu\alpha}$, a expressão para \tilde{J} assume a forma simples

$$\tilde{J}_\nu(k) = -k^2\eta_{\nu\alpha} \tilde{A}^{(0)\alpha}(k) . \quad (3.63)$$

Para o caso do solenóide muito fino, para obter $\tilde{J}_{\nu sol}(k)$ precisamos apenas calcular a transformada de Fourier de $A_{sol}^{(0)\alpha}(x)$ dado pela equação (3.61) e substituir na expressão acima, isto

é, precisamos calcular

$$\tilde{A}_{sol}^{(0)\alpha}(k) = \int d^4x e^{ikx} A_{sol}^{(0)\alpha}(x) .$$

As componentes 0 e 3 são obviamente nulas, ou seja, $\tilde{A}_{sol}^{(0)0}(k) = \tilde{A}_{sol}^{(0)3}(k) = 0$. A componente 1 é dada por:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{sol}^{(0)1}(k) &= -\frac{\Phi_B}{2\pi} \int dt dx dy dz e^{i\omega t - k_x x - k_y y - k_z z} \frac{y}{x^2 + y^2} \\ &= -\frac{\Phi_B}{2\pi} 2\pi\delta(\omega) 2\pi\delta(k_z) \left(-\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial k_y} \right) \int d^2\mathbf{x}_\perp \frac{e^{-i\mathbf{x}_\perp \cdot \mathbf{k}_\perp}}{\mathbf{x}_\perp^2} , \end{aligned}$$

onde definimos $\mathbf{x}_\perp = (x, y)$ e $\mathbf{k}_\perp = (k_x, k_y)$. A integral que aparece acima pode ser calculada somando-se um parâmetro regularizador m^2 no denominador (a integral $\int d^2\mathbf{x}_\perp \frac{e^{-i\mathbf{x}_\perp \cdot \mathbf{k}_\perp}}{\mathbf{x}_\perp^2 + m^2}$ já foi calculada anteriormente no Apêndice B e é igual a $2\pi K_0(m|\mathbf{k}_\perp|)$) e no final tomando o limite $m \rightarrow 0$. Após tomar este limite, aparecerá uma divergência logarítmica aditiva do tipo $\ln m$ que será destruída pela derivada $\partial/\partial k_y$, e o resultado final será simplesmente

$$\tilde{A}_{sol}^{(0)1}(k) = i(2\pi)^2 \Phi_B \delta(\omega) \delta(k_z) \frac{k_y}{|\mathbf{k}_\perp|^2} .$$

O cálculo de $\tilde{A}_{sol}^{(0)2}$ é bastante similar e resulta em

$$\tilde{A}_{sol}^{(0)2}(k) = -i(2\pi)^2 \Phi_B \delta(\omega) \delta(k_z) \frac{k_x}{|\mathbf{k}_\perp|^2} .$$

Podemos compactar todos estes resultados e escrever o quadrivetor $\tilde{A}_{sol}^{(0)\alpha}$ como:

$$\tilde{A}_{sol}^{(0)\alpha}(k) = -\frac{1}{k^2} i(2\pi)^2 \Phi_B \delta(\omega) \delta(k_z) (0, k_y, -k_x, 0) \quad (3.64)$$

(note que utilizamos uma das propriedades da função delta de Dirac para escrever $-k^2 = -\omega^2 + |\mathbf{k}_\perp|^2 + k_z^2$ no denominador ao invés de $|\mathbf{k}_\perp|^2$). Substituindo (3.64) em (3.63) obtemos finalmente a corrente associada à presença do solenóide (no espaço dos momenta) como sendo:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{\nu sol}(k) &= i(2\pi)^2 \Phi_B \delta(\omega) \delta(k_z) (\eta_{\nu 1} k_y - \eta_{\nu 2} k_x) \\ &= i(2\pi)^2 \Phi_B \delta(\omega) \delta(k_z) (0, -k_y, k_x, 0) . \end{aligned} \quad (3.65)$$

Obviamente, se quisermos obter a corrente $J_{\nu sol}(x)$ no espaço de coordenadas, basta tomar a transformada de Fourier inversa, mas isto não será necessário para os nossos propósitos.

Agora que já temos em mãos a corrente associada ao solenóide, estamos aptos a calcular o potencial produzido na região externa a um solenóide no modelo de CFJ randômico. Isto

será feito usando novamente a relação entre o potencial A_{sol}^μ e a corrente $J_{\nu sol}$ neste modelo (o análogo da equação (3.64)), que no espaço k é dada por

$$\tilde{A}_{sol}^\mu(k) = \langle \tilde{G}^{\mu\nu} \rangle(k) \tilde{J}_{\nu sol}(k) . \quad (3.66)$$

Note que a diferença entre a expressão acima e a correspondente no modelo de Maxwell é a presença do propagador médio $\langle \tilde{G} \rangle$ (ao invés do propagador de maxwell $\tilde{G}^{(0)}$) fazendo a conexão entre \tilde{A} e \tilde{J} . Lembramos que o propagador médio (equação (3.11)) possui uma contribuição de Maxwell e uma correção randômica, isto é,

$$\langle \tilde{G}^{\mu\nu} \rangle(k) = \tilde{G}^{(0)\mu\nu}(k) + \tilde{G}^{(1)\mu\nu}(k) ,$$

onde $\tilde{G}^{(0)\mu\nu}(k) = -\eta^{\mu\nu}/k^2$ (no calibre de Feynman) e

$$\begin{aligned} \tilde{G}^{(1)\mu\nu}(k) = & \frac{i\eta_{\lambda\tau}k_\beta k_\alpha}{2(k^2)^2} \left[\sigma_0^2 \frac{\epsilon^{0\mu\lambda\beta}\epsilon^{0\tau\nu\alpha}}{|\mathbf{k}|} - \sigma_1^2 \frac{\epsilon^{1\mu\lambda\beta}\epsilon^{1\tau\nu\alpha}}{\sqrt{(k^0)^2 - (k^2)^2 - (k^3)^2}} \right. \\ & \left. - \sigma_2^2 \frac{\epsilon^{2\mu\lambda\beta}\epsilon^{2\tau\nu\alpha}}{\sqrt{(k^0)^2 - (k^1)^2 - (k^3)^2}} - \sigma_3^2 \frac{\epsilon^{3\mu\lambda\beta}\epsilon^{3\tau\nu\alpha}}{\sqrt{(k^0)^2 - (k^1)^2 - (k^2)^2}} \right] . \end{aligned}$$

Logo, o potencial \tilde{A}_{sol}^μ do solenóide também terá duas contribuições distintas:

$$\tilde{A}_{sol}^\mu(k) = \tilde{A}_{sol}^{(0)\mu}(k) + \tilde{A}_{sol}^{(1)\mu}(k) , \quad (3.67)$$

onde $\tilde{A}_{sol}^{(0)\mu}(k) = \tilde{G}^{(0)\mu\nu}(k) \tilde{J}_{\nu sol}(k)$ é o já bem conhecido potencial do solenóide na teoria de Maxwell (dado por (3.64) ou, equivalentemente, por (3.61) no espaço de coordenadas) e a correção randômica $\tilde{A}_{sol}^{(1)\mu}$ (que é nosso objeto de interesse) é dada por

$$\tilde{A}_{sol}^{(1)\mu}(k) = \tilde{G}^{(1)\mu\nu}(k) \tilde{J}_{\nu sol}(k) . \quad (3.68)$$

Após substituir $\tilde{G}^{(1)\mu\nu}(k)$ dado logo acima e $\tilde{J}_{\nu sol}(k)$ dado pela expressão (3.65) (veja os detalhes no Apêndice C), resulta a seguinte expressão para a contribuição randômica ao potencial do solenóide:

$$\tilde{A}_{sol}^{(1)\mu}(k) = 2\pi^2 \Phi_B (\sigma_0^2 - i\sigma_3^2) \delta(\omega) \delta(k_z) \left(0, \frac{k_y}{|\mathbf{k}_\perp|^3}, \frac{-k_x}{|\mathbf{k}_\perp|^3}, 0 \right) . \quad (3.69)$$

Tomando a transformada de Fourier inversa deste resultado (veja Apêndice C), obtemos a correspondente expressão no espaço x :

$$A_{sol}^{(1)\mu}(x) = (i\sigma_0^2 + \sigma_3^2) \frac{\Phi_B}{4\pi} \left(0, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 0 \right) . \quad (3.70)$$

De posse do resultado acima podemos agora calcular o campo magnético produzido na região externa ao solenóide no modelo de CFJ randômico:

$$\mathbf{B}_{sol} = \nabla \times \mathbf{A}_{sol} = \nabla \times \mathbf{A}_{sol}^{(0)} + \nabla \times \mathbf{A}_{sol}^{(1)} .$$

Obviamente, temos $\mathbf{B}_{sol}^{(0)} = \nabla \times \mathbf{A}_{sol}^{(0)} = \mathbf{0}$, que nada mais é que o resultado da teoria de Maxwell. Entretanto, o termo randômico $\mathbf{A}_{sol}^{(1)}$ no potencial possui rotacional não nulo, como pode ser visto substituindo a expressão (3.70):

$$\mathbf{B}_{sol}^{(1)} = \nabla \times \mathbf{A}_{sol}^{(1)}(x) = (i\sigma_0^2 + \sigma_3^2) \frac{\Phi_B}{4\pi\rho} \hat{z} , \quad (3.71)$$

onde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ é a distância ao eixo de simetria do solenóide.

O resultado (3.71) possui duas peculiaridades que merecem serem discutidas. A primeira é a presença do termo imaginário no campo magnético $\mathbf{B}_{sol}^{(1)}$; naturalmente, este termo não tem significado físico nenhum e, por isto, deve ocorrer que

$$\sigma_0^2 \equiv 0 , \quad (3.72)$$

ou seja, a componente temporal do vetor de fundo randômico deve ter média quadrática nula ($\langle V^0(x)V^0(x') \rangle = 0$)⁶. Vale comentar aqui que esta associação da componente zero de V_μ com problemas físicos não é de grande surpresa até mesmo no caso bem estudado onde V_μ é tomado como constante (modelo do tipo CFJ): conforme pode ser visto nas referências [26, 27], a presença de um vetor de fundo tipo tempo traz consigo problemas de causalidade (efeitos taquiônicos), além de violar a unitariedade do modelo.

Já a segunda observação é evidente: um solenóide infinitamente longo e fino no modelo de CFJ randômico possui sim um campo magnético não nulo na região externa ao solenóide. Este campo tem sua origem relacionada exclusivamente com a presença do vetor de fundo V e (com a condição de consistência $\sigma_0^2 = 0$) é proporcional à flutuação σ_3^2 na componente z do vetor de fundo (V^3), além de cair linearmente com a distância ao eixo e apontar na mesma direção do campo dentro do solenóide:

$$\mathbf{B}_{sol}^{(1)} = \sigma_3^2 \frac{\Phi_B}{4\pi\rho} \hat{z} . \quad (3.73)$$

⁶Como V^0 é um campo randômico com distribuição Gaussiana, suas médias de ordem par superior (4, 6, ...) são todas combinações de produtos destas médias quadráticas e, portanto, são também todas nulas. Visto que as médias de ordem ímpar são todas nulas, a afirmação $\sigma_0^2 = 0$ é equivalente a dizer que $V^0(x) = 0$.

Em particular, acreditamos que a presença do campo na região externa ao solenóide poderia gerar uma força de atração/repulsão sobre outro solenóide colocado paralelamente, mas este é um resultado que precisa ser checado. O fato importante aqui é que este efeito sem análogo no eletromagnetismo usual de Maxwell poderia servir também como uma possibilidade de verificação dos efeitos de violação da simetria de Lorentz neste modelo.

Conclusões e Perspectivas

Na primeira parte do trabalho, que consiste no estudo de um campo de Klein-Gordon com flutuações randômicas na velocidade e na massa do campo, calculamos perturbativamente o efeito de ordem mais baixa nos parâmetros de randomicidade sobre a interação entre diferentes tipos de distribuições estacionárias de cargas concentradas em *branas* de dimensão arbitrária. O tipo escolhido de correlação para as flutuações randômicas resultou em correções perturbativas que são consistentes apenas para um número ímpar de dimensões espaciais. Tendo em vista esta relação de consistência, alguns casos particulares de maior apelo físico foram analisados em 3 dimensões espaciais, como as correções ao potencial de Coulomb entre duas cargas pontuais, à interação entre duas linhas de carga e entre dois planos carregados, e à interação entre dipolos. Em todos os casos, as correções randômicas às energias de interação decaem mais lentamente com a distância de separação do que a correspondente energia de interação livre, sendo este um indício de que a validade da abordagem perturbativa utilizada se torna questionável acima de uma certa escala de distâncias.

Ainda com relação a este modelo de campo escalar com efeitos randômicos, investigamos também a possibilidade de construir uma teoria efetiva linear em 3+1 dimensões para os efeitos randômicos de segunda ordem na velocidade e na massa do campo. A Lagrangeana efetiva resultante possui derivadas temporais de ordem superior (ordem 5 para um campo sem massa, todas as ordens pares para $m_0 \neq 0$), e está associada a efeitos físicos dissipativos tais como a evanescência de ondas planas. Acreditamos que esta Lagrangeana efetiva será importante para o estudo de problemas normalmente difíceis de se tratar na teoria randômica original, em especial o efeito Casimir, cujo estudo está em andamento [30].

Na segunda parte do trabalho, apresentamos um modelo de eletrodinâmica invariante de calibre com violação das simetrias de Lorentz e paridade devido à presença de um vetor de fundo que flutua randomicamente em torno de um valor médio nulo. Após obter a correção

randômica de ordem mais baixa ao propagador de Maxwell, obtivemos a correção randômica à lei de Coulomb entre duas cargas pontuais e observamos que o modelo proposto pode preservar a homogeneidade e isotropia espaciais em tais interações, mesmo para um vetor de fundo não homogêneo. Além disto, utilizamos esta correção randômica à interação Coulombiana para estudar as correções perturbativas ao espectro do átomo de Hidrogênio quântico neste modelo e, por meio de uma comparação com os dados experimentais atuais das frequências de transição do Hidrogênio, impusemos o limite superior de $\sigma^2 \lesssim 10^{-17} GeV$ para os efeitos deste vetor de fundo randômico.

Por fim, ainda no modelo de eletrodinâmica acima mencionado, investigamos os efeitos randômicos relacionados à presença de um solenóide muito longo e fino e concluímos que surge um pequeno campo magnético não nulo na região externa ao solenóide; este campo cai linearmente com a distância radial e aponta na direção do eixo do solenóide, e sua existência poderia ser explorada em uma possível busca por efeitos físicos deste vetor de fundo randômico (como, por exemplo, correções ao efeito Aharonov-Bohm).

Outra perspectiva futura interessante é a extensão das ideias apresentadas na segunda parte deste trabalho para o caso do campo gravitacional. Isto pode ser feito baseado no bem conhecido modelo de gravitação com quebra da simetria de Lorentz, caracterizado por um termo do tipo Chern-Simons com um vetor de fundo constante na ação de Einstein-Hilbert da relatividade geral [31]. Após considerar o vetor de fundo como uma variável randômica que flutua em torno de um valor médio nulo (analogamente ao caso analisado), a idéia é proceder similarmente ao que foi feito neste trabalho. Em particular, acreditamos que os resultados obtidos para a correção randômica à lei da gravitação universal possam ser relevantes para a explicação das curvas de rotação de galáxias. Este trabalho já está em andamento e apresenta uma série de dificuldades em relação ao presente caso, a maioria delas relacionada à questão da definição de médias randômicas em espaços-tempos curvos.

Apêndice A

Variáveis e campos randômicos: uma revisão

Este apêndice é reservado a uma breve revisão sobre alguns dos objetos matemáticos que serão utilizados nos demais capítulos e que terão um papel importante para o desenvolvimento deste trabalho ¹. Especificamente, o objetivo aqui é definir os objetos conhecidos como variáveis randômicas e então generalizar esta definição para os chamados campos randômicos; em seguida, introduzir os conceitos de média de uma variável/campo randômico bem como de distribuições de probabilidade, com particular ênfase na distribuição do tipo Gaussiana. Com o intuito de não tornar a leitura desagradável, será apenas uma discussão breve e sem rigor matemático, baseada nas referências [1, 2, 3].

A.1 Variáveis randômicas Gaussianas

No estudo de probabilidade e estatística, uma *variável randômica* (ou variável estocástica) é uma variável cujo valor observado é sujeito a variações aleatórias, podendo assumir diferentes valores – cada um com uma determinada probabilidade – dependendo do resultado de uma dada observação. Um exemplo bastante simples consiste no arremesso de um dado: o número de pontos na face superior do dado é uma variável randômica que pode assumir qualquer um dos valores inteiros de 1 a 6, todos com a mesma probabilidade (mesmo para arremessos

¹Este é um apêndice complementar cuja leitura não é indispensável para o desenvolvimento do restante do trabalho.

idênticos).

Uma variável randômica pode assumir valores discretos (como é o caso no exemplo do dado) ou pode assumir valores em um conjunto contínuo, sendo neste caso chamada de variável randômica contínua. Esta última corresponde à classe de variáveis na qual estaremos interessados. Uma dada variável randômica contínua X que assume valores x em um conjunto arbitrário T é totalmente especificada por meio da sua função distribuição de probabilidade $P(x)$, que é definida por [1]

$$P(x) = \mathcal{P}\{X < x\} , \quad (\text{A.1})$$

onde $\mathcal{P}\{\bullet\}$ denota a probabilidade de ocorrência do evento “ \bullet ”. A distribuição P é construída de modo a ser não negativa,

$$P(x) \geq 0 \quad \forall x \in T ,$$

e normalizada

$$\int_T P(x)dx = 1 .$$

Obviamente, $P(x)dx$ corresponde à probabilidade de X assumir valores entre x e $x + dx$.

A partir da função distribuição $P(x)$, podemos definir o *valor médio* (ou valor esperado) de qualquer função $Y(X)$ de uma dada variável randômica X como

$$\langle Y(X) \rangle = \int_T Y(x)P(x)dx , \quad (\text{A.2})$$

onde $Y(x)$ que aparece no integrando é o valor da variável randômica $Y(X)$ quando X assume o valor $x \in T$. Em particular, para $Y(X) = X$ ou $Y(X) = X^2$ temos:

$$\langle X \rangle = \int_T xP(x)dx \quad (\text{A.3a})$$

$$\langle X^2 \rangle = \int_T x^2P(x)dx . \quad (\text{A.3b})$$

Na análise que segue nesta seção, o conjunto T dos valores possíveis para a variável randômica X será tomado como o conjunto dos números reais (pois esta será a situação de interesse fisicamente), isto é, $T \equiv \mathbb{R}$, e vamos simplesmente omitir o subscrito T das integrais.

Uma função de distribuição de grande interesse na maioria das situações, inclusive no presente trabalho, é a chamada *distribuição Gaussiana* ou normal ². A distribuição Gaussiana

²Tal interesse é justificado matematicamente pelo chamado *Teorema do Limite Central*, o qual afirma que quando o tamanho de uma dada amostra aumenta, a distribuição amostral da sua média tende assintoticamente a uma distribuição Gaussiana [2].

de uma variável X é definida por [2]:

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}, \quad (\text{A.4})$$

onde $\sigma > 0$ é uma constante que corresponde ao chamado desvio padrão ³ de X . É trivial checar a partir de sua definição que as médias de uma variável randômica Gaussiana são dadas por ⁴:

$$\langle X \rangle = 0 \quad (\text{A.5a})$$

$$\langle X^2 \rangle = \sigma^2 \quad (\text{A.5b})$$

⋮

$$\langle X^{2n-1} \rangle = 0 \quad (\text{A.5c})$$

$$\langle X^{2n} \rangle \propto \sigma^{2n} \quad (\text{A.5d})$$

onde $n = 1, 2, 3, \dots$. É importante notar das equações (A.5) que as médias não nulas de ordem superior a 2 são todas obtidas a partir da média quadrática σ^2 (por exemplo, $\langle X^6 \rangle = 15\sigma^6 = 15(\sigma^2)^3$) e, neste sentido, podemos afirmar que a média quadrática contém toda a informação a respeito de uma variável Gaussiana.

Os resultados acima podem ser facilmente estendidos para o caso de N variáveis randômicas X_1, X_2, \dots, X_N tratando-as como componentes de uma única variável randômica N -dimensional $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N)$. Na análise a seguir assumiremos que cada uma das componentes X_i toma valores x_i no conjunto dos reais ou, equivalentemente, que \mathbf{X} toma valores \mathbf{x} no \mathbb{R}^N (i.e., $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$).

As quantidades matemáticas associadas a essa variável multidimensional podem ser construídas em estreita analogia com o caso unidimensional. Por exemplo, uma variável randômica \mathbf{X} é especificada por uma função distribuição multidimensional $P(\mathbf{x})$ definida por

$$P(\mathbf{x}) = \mathcal{P}\{X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_N < x_N\}. \quad (\text{A.6})$$

Novamente, a distribuição P é construída de modo a ser não negativa

$$P(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$$

³O desvio padrão de uma variável randômica X é definido como $\sigma_X = \sqrt{\langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2}$.

⁴Vale aqui comentar que a primeira média de X poderia ser feita igual a qualquer constante m (i.e., $\langle X \rangle = m$) simplesmente trocando x por $x - m$ na distribuição A.4, mas optamos aqui por trabalhar apenas com variáveis Gaussianas de média nula e por isso tomamos $m = 0$.

e normalizada:

$$\int P(\mathbf{x}) d^N \mathbf{x} = 1 .$$

Os valores médios de qualquer variável randômica $Y(\mathbf{X})$ também são definidos de maneira similar ao caso unidimensional:

$$\langle Y(\mathbf{X}) \rangle = \int d^N \mathbf{x} Y(\mathbf{x}) P(\mathbf{x}) . \quad (\text{A.7})$$

Em particular, para $Y(\mathbf{X}) = X_i$ e $Y(\mathbf{X}) = X_i X_j$, segue que

$$\langle X_i \rangle = \int d^N \mathbf{x} x_i P(\mathbf{x}) \quad (\text{A.8a})$$

$$\langle X_i X_j \rangle = \int d^N \mathbf{x} x_i x_j P(\mathbf{x}) . \quad (\text{A.8b})$$

A segunda das equações acima é comumente chamada de função de 2 pontos.

A generalização da distribuição Gaussiana para este caso N -dimensional é dada por

$$P(\mathbf{x}) = \left(\frac{\det \Sigma^{-1}}{(2\pi)^N} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \Sigma^{-1} \mathbf{x} \right) , \quad (\text{A.9})$$

onde \mathbf{x}^T denota a matriz transposta a \mathbf{x} e Σ é uma matriz simétrica $N \times N$ ($\Sigma_{ij} = \Sigma_{ji}$) conhecida como *matriz de correlação* ou matriz de covariância. Neste caso, para $P(\mathbf{x})$ acima, as equações (A.8) se tornam:

$$\langle X_i \rangle = 0 \quad (\text{A.10a})$$

$$\langle X_i X_j \rangle = \Sigma_{ij} \quad (\text{A.10b})$$

Estes são casos particulares de um resultado mais geral, válido para um produto de um número arbitrário de componentes de \mathbf{X} , que é dado por

$$\langle X_{i_1} \cdots X_{i_{2n-1}} \rangle = 0 \quad (\text{A.11a})$$

$$\langle X_{i_1} \cdots X_{i_{2n}} \rangle = \Sigma_{i_1 i_2} \cdots \Sigma_{i_{2n-1} i_{2n}} + \text{permutações} , \quad (\text{A.11b})$$

onde $n = 1, 2, 3, \dots$. A propriedade correspondente à segunda linha destas equações é similar ao bem conhecido Teorema de Wick em teoria quântica de campos [10], e dela podemos notar que, tal como no caso unidimensional, as médias de todas as ordens de uma variável randômica N -dimensional Gaussiana são dadas em termos da função de 2 pontos Σ_{ij} . Logo, a matriz de correlação Σ contém toda informação a respeito da variável randômica \mathbf{X} .

A.2 Campos randômicos Gaussianos

Um *campo randômico* (ou função randômica) Φ sobre um conjunto arbitrário T é definido como uma família de variáveis randômicas unidimensionais $\Phi(t)$ correspondendo a cada um dos elementos $t \in T$ [1]. Note que se o conjunto T contém apenas um número finito de elementos t_1, \dots, t_N , então o campo randômico Φ corresponde a uma família finita de variáveis $\Phi(t_1), \dots, \Phi(t_N)$, a qual pode ser agrupada em uma única variável randômica multidimensional (tal como feito na seção anterior) e, neste caso, não há nada de novo a ser discutido. O caso mais interessante ocorre quando o conjunto T é infinito, onde o campo Φ corresponde a uma família infinita de variáveis randômicas e que merece uma atenção especial. A discussão a seguir é essencialmente uma extensão da análise feita anteriormente para variáveis multidimensionais para o caso contínuo; baseado no futuro interesse físico, consideraremos T como sendo o espaço Euclidiano \mathbb{R} .

Um campo escalar randômico $\Phi(x)$ definido na reta real \mathbb{R} pode assumir uma coleção de valores que denotaremos pela função $\phi(x)$. De maneira análoga às variáveis randômicas usuais, o campo randômico Φ também é especificado por uma distribuição de probabilidade $P(\phi)$, a qual é positiva definida e normalizada de acordo com

$$\int \mathcal{D}\phi P(\phi) = 1 ,$$

onde o símbolo $\mathcal{D}\phi$ denota integração funcional sobre todas as configurações de campo $\phi(x)$.

A partir da distribuição $P(\phi)$ podemos definir valores médios de qualquer função $f(\Phi)$ deste campo randômico da maneira usual:

$$\langle f(\Phi) \rangle = \int \mathcal{D}\phi f(\phi) P(\phi) . \quad (\text{A.12})$$

Em particular, para $f(\Phi) = \Phi(x)$ e $f(\Phi) = \Phi(x)\Phi(x')$ obtemos as primeiras médias do campo Φ :

$$\langle \Phi(x) \rangle = \int \mathcal{D}\phi \phi(x) P(\phi) \quad (\text{A.13a})$$

$$\langle \Phi(x)\Phi(x') \rangle = \int \mathcal{D}\phi \phi(x)\phi(x') P(\phi) . \quad (\text{A.13b})$$

Tal como nos casos anteriores, podemos estender o conceito de distribuição Gaussiana para campos randômicos. Ela é definida por:

$$P(\phi) = \left(\frac{\det \Sigma^{-1}}{2\pi} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{1}{2} \int dx dx' \phi(x) \Sigma^{-1}(x, x') \phi(x') \right) , \quad (\text{A.14})$$

onde $\Sigma(x, x')$ é uma *função de correlação* que depende dos pontos x, x' e satisfaz a propriedade de simetria $\Sigma(x, x') = \Sigma(x', x)$, generalizando a matriz Σ_{ij} do caso de variáveis randômicas multidimensionais. Substituindo $P(\phi)$ nas equações (A.13) pode-se mostrar [3] que para o caso de uma distribuição Gaussiana as médias de $\Phi(x)$ são dadas por

$$\langle \Phi(x) \rangle = 0 \quad (\text{A.15a})$$

$$\langle \Phi(x)\Phi(x') \rangle = \Sigma(x, x') . \quad (\text{A.15b})$$

Novamente, estes resultados podem ser generalizados para o caso mais geral do produto de um número arbitrário de campos [3]:

$$\langle \Phi(x_1) \cdots \Phi(x_{2n-1}) \rangle = 0 \quad (\text{A.16a})$$

$$\langle \Phi(x_1) \cdots \Phi(x_{2n}) \rangle = \Sigma(x_1, x_2) \cdots \Sigma(x_{2n-1}, x_{2n}) + \text{permutações} , \quad (\text{A.16b})$$

com $n = 1, 2, 3, \dots$. Nota-se uma enorme semelhança em relação às expressões previamente discutidas. Em particular, a função de dois pontos $\Sigma(x, x')$ que aparece na média quadrática contém toda informação a respeito do campo escalar randômico Gaussiano $\Phi(x)$.

Dentre as diversas possíveis formas para a função de dois pontos $\Sigma(x, x')$, uma será particularmente adequada para os propósitos deste trabalho devido à sua simplicidade. Esta classe de campos randômicos Gaussianos, conhecida na literatura pelo nome de *ruído branco* (white noise), caracteriza um campo cujas flutuações randômicas só se correlacionam no mesmo ponto do espaço, sendo portanto definida por $\Sigma(x, x') = \sigma^2 \delta(x - x')$ (aqui, σ^2 é uma constante que caracteriza a intensidade das flutuações do campo Φ e tem dimensão $[\sigma^2] = [\Phi]^2 \times L$). Explícitamente, este tipo de correlação corresponde às seguintes médias:

$$\langle \Phi(x) \rangle_{RB} = 0 \quad (\text{A.17a})$$

$$\langle \Phi(x)\Phi(x') \rangle_{RB} = \sigma^2 \delta(x - x') . \quad (\text{A.17b})$$

Para finalizar, devemos lembrar que os resultados acima foram todos obtidos para um campo randômico Φ definido em \mathbb{R} . A generalização para o espaço Euclidiano N -dimensional ($x \in \mathbb{R}^N$) é trivial e todas as expressões acima serão essencialmente as mesmas, bastando trocar as integrais simples dx por integrais múltiplas $d^N x$ na definição da distribuição Gaussiana.

Apêndice B

Neste apêndice demonstramos alguns resultados matemáticos utilizados no Capítulo 1.

B.1 A série de Dyson

Sejam A e B operadores lineares atuando em um dado espaço vetorial, onde B é proporcional a algum dado parâmetro supostamente pequeno enquanto A não o é. O operador $(A+B)^{-1}$ (*i.e.*, o operador inverso de $A+B$) é definido por

$$(A+B)(A+B)^{-1} = \mathbb{I} ,$$

Multiplicando por A^{-1} à esquerda, podemos reescrever esta relação como

$$(A+B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(A+B)^{-1} . \tag{B.1}$$

A idéia aqui é obter $(A+B)^{-1}$ perturbativamente como uma série de potências de B usando um método iterativo. Por exemplo, os primeiros termos da série podem ser obtidos substituindo $(A+B)^{-1}$ pela equação (B.1) no lado direito desta equação:

$$\begin{aligned} (A+B)^{-1} &= A^{-1} - A^{-1}B[A^{-1} - A^{-1}B(A+B)^{-1}] \\ &= A^{-1} - A^{-1}BA^{-1} + A^{-1}BA^{-1}B(A+B)^{-1} . \end{aligned} \tag{B.2}$$

Repetindo o procedimento, isto é, substituindo $(A+B)^{-1}$ que aparece do lado direito desta expressão por (B.1), obtemos

$$\begin{aligned} (A+B)^{-1} &= A^{-1} - A^{-1}BA^{-1} + A^{-1}BA^{-1}B[A^{-1} - A^{-1}B(A+B)^{-1}] \\ &= A^{-1} - A^{-1}BA^{-1} + A^{-1}BA^{-1}BA^{-1} - A^{-1}BA^{-1}BA^{-1}B(A+B)^{-1} , \end{aligned} \tag{B.3}$$

e assim sucessivamente. O objetivo desta expansão é que, para o caso em que B contém algum parâmetro muito pequeno, podemos truncar a série em uma dada potência de B e desprezar os termos de ordem superior. Por exemplo, mantendo até termos quadráticos em B temos

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}BA^{-1} + A^{-1}BA^{-1}BA^{-1} + \mathcal{O}(B^3) . \quad (\text{B.4})$$

Em particular, para $A \equiv L^{(0)}$ e $B \equiv L^{(1)}$ segue a equação (1.12).

B.2 A Função de Green livre $G^{(0)}(x, x')$

A função de Green livre foi definida no Capítulo 1 como a inversa do operador linear $L^{(0)}(x) = -\partial^2/\partial t^2 + \nabla^2 - m_0^2 = -\square - m_0^2$, isto é, $G^{(0)} = (L^{(0)})^{-1}$. Em componentes, esta afirmação corresponde a

$$L^{(0)}(x)G^{(0)}(x, x') = \delta^{D+1}(x - x') .$$

Note que $L^{(0)}$ é um operador diferencial linear e invariante sob uma translação espaço-temporal $x \rightarrow x - \bar{x}$. Como a função delta do lado direito depende apenas da diferença $x - x'$ entre os pontos e, portanto, também é invariante sob translação, o mesmo deve ocorrer com $G^{(0)}$, ou seja, $G^{(0)}(x, x') = G^{(0)}(x - x')$. Assim, escrevendo $G^{(0)}$ como uma integral de Fourier na variável $x - x'$ na forma

$$G^{(0)}(x, x') = \int \frac{d^{D+1}k}{(2\pi)^{D+1}} e^{-ik(x-x')} \tilde{G}^{(0)}(k) , \quad (\text{B.5})$$

bem como a representação de Fourier da função delta, obtemos:

$$\int \frac{d^{D+1}k}{(2\pi)^{D+1}} e^{-ik(x-x')} [k^2 - m_0^2] \tilde{G}^{(0)}(k) = \int \frac{d^{D+1}k}{(2\pi)^{D+1}} e^{-ik(x-x')} .$$

Como as exponenciais são funções linearmente independentes, segue que

$$[k^2 - m_0^2] \tilde{G}^{(0)}(k) = 1 ,$$

ou ainda

$$\tilde{G}^{(0)}(k) = \frac{1}{k^2 - m_0^2} = \frac{1}{\omega^2 - \mathbf{k}^2 - m_0^2} . \quad (\text{B.6})$$

B.3 O funcional gerador $Z[J]$

O funcional gerador das funções de Green para a teoria randômica, $Z[J]$, é definido por [11]

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\varphi \exp \left(i \int d^{d+D+1}x [\mathcal{L}_F(x) + J(x)\varphi(x)] \right) \quad (\text{B.7})$$

$$= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\varphi \exp \left(i \int d^{d+D+1}x \left[\frac{1}{2}\varphi(x)\hat{\mathcal{O}}(x)\varphi(x) + J(x)\varphi(x) \right] \right), \quad (\text{B.8})$$

onde

$$\hat{\mathcal{O}}(x) = (1 + \mu(\mathbf{x})) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + (1 + \xi(\mathbf{x}))m_0^2$$

é o “operador de onda” do modelo. Vamos realizar a seguinte translação na variável de integração da integral funcional:

$$\varphi(x) \longrightarrow \bar{\varphi}(x) = \varphi(x) + \int d^{d+D+1}x' \langle G(x, x') \rangle J(x'),$$

onde $\langle G(x, x') \rangle$ é a função de Green do operador $\hat{\mathcal{O}}$, isto é,

$$\hat{\mathcal{O}}(x) \langle G(x, x') \rangle = \delta^{d+D+1}(x - x'). \quad (\text{B.9})$$

Sendo a mudança proposta apenas uma translação de variável, ela possui Jacobiano igual à identidade, e portanto ocorre que $\mathcal{D}\varphi = \mathcal{D}\bar{\varphi}$. Assim, a equação (B.7) fica

$$\begin{aligned} Z[J] = & \mathcal{N} \int \mathcal{D}\bar{\varphi} \exp \left(i \int d^{d+D+1}x \left[\frac{1}{2}\bar{\varphi}(x)\hat{\mathcal{O}}(x)\bar{\varphi}(x) + J(x)\bar{\varphi}(x) \right] + \right. \\ & - \frac{i}{2} \int d^{d+D+1}x d^{d+D+1}x' \left[\bar{\varphi}(x)\hat{\mathcal{O}}(x) \langle G(x, x') \rangle + \langle G(x, x') \rangle \hat{\mathcal{O}}(x)\bar{\varphi}(x) \right] J(x') + \\ & + \frac{i}{2} \int d^{d+D+1}x d^{d+D+1}x' d^{d+D+1}x'' \langle G(x, x') \rangle J(x') \hat{\mathcal{O}}(x) \langle G(x, x'') \rangle J(x'') + \\ & \left. - i \int d^{d+D+1}x d^{d+D+1}x' J(x) \langle G(x, x') \rangle J(x') \right). \end{aligned}$$

Os dois termos que aparecem na segunda linha são iguais (sob hipótese de que os campos $\bar{\varphi}$ zeram no infinito), o que pode ser demonstrado facilmente após duas integrações por partes na integral sobre $d^{d+D+1}x$. Usando a equação (B.9) para trocar os termos $\hat{\mathcal{O}} \langle G \rangle$ por uma função

delta, e em seguida integrando sobre estas funções delta, obtemos

$$\begin{aligned}
Z[J] &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\bar{\varphi} \exp \left(i \int d^{d+D+1}x \left[\frac{1}{2} \bar{\varphi}(x) \hat{\mathcal{O}}(x) \bar{\varphi}(x) + J(x) \bar{\varphi}(x) \right] + \right. \\
&\quad \left. -i \int d^{d+D+1}x J(x) \bar{\varphi}(x) + \frac{i}{2} \int d^{d+D+1}x d^{d+D+1}x' \langle G(x, x') \rangle J(x') J(x) + \right. \\
&\quad \left. -i \int d^{d+D+1}x d^{d+D+1}x' J(x) \langle G(x, x') \rangle J(x') \right) \\
&= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\bar{\varphi} \exp \left(i \int d^{d+D+1}x \left[\frac{1}{2} \bar{\varphi}(x) \hat{\mathcal{O}}(x) \bar{\varphi}(x) \right] + \right. \\
&\quad \left. -\frac{i}{2} \int d^{d+D+1}x d^{d+D+1}x' J(x) \langle G(x, x') \rangle J(x') \right) \\
&= \left[\mathcal{N} \int \mathcal{D}\varphi \exp \left(i \int d^{d+D+1}x \mathcal{L}_F(x) \right) \right] \exp \left(-\frac{i}{2} \int d^{d+D+1}x d^{d+D+1}x' J(x) \langle G(x, x') \rangle J(x') \right)
\end{aligned}$$

O termo entre colchetes na expressão acima corresponde a $Z[J = 0]$, o qual podemos normalizar como a unidade ($Z[0] = 1$) de modo a encontrar

$$Z[J] = \exp \left(-\frac{i}{2} \int d^{d+D+1}x d^{d+D+1}x' J(x) \langle G(x, x') \rangle J(x') \right), \quad (\text{B.10})$$

Note que $Z[J]$ possui essencialmente a mesma forma do funcional gerador para o caso de Klein-Gordon livre, exceto pela presença da função de Green randômica $\langle G \rangle$ no lugar da função de Green livre.

B.4 Algumas integrais úteis

A primeira integral de interesse é a que aparece na expressão (1.25), a saber,

$$I = - \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + (m_0^2 - \omega^2)}. \quad (\text{B.11})$$

Passando para coordenadas esféricas usuais (k, θ, ϕ) e integrando na parte angular para produzir o ângulo sólido total 4π , obtemos:

$$I = -\frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int dk \frac{k^2}{\mathbf{k}^2 + (m_0^2 - \omega^2)}.$$

A integral na coordenada radial que aparece acima é um caso particular (com $\beta = 2, \alpha = 1$ e $C^2 = m_0^2 - \omega^2$) do resultado geral [11]

$$\int_0^\infty dr \frac{r^\beta}{(r^2 + C^2)^\alpha} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(1 + \beta)\right) \Gamma\left(\alpha - \frac{1}{2}(1 + \beta)\right)}{2(C^2)^{\alpha - (1 + \beta)/2} \Gamma(\alpha)},$$

que é válido para todo $C \in \mathbb{C}^*$ e $Re(\beta) > -1, Re(\alpha) > 0$. Assim, segue que:

$$I = -\frac{4\pi}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(-1/2)}{2(m_0^2 - \omega^2)^{-1/2}\Gamma(1)} = \frac{1}{4\pi}(m_0^2 - \omega^2)^{1/2} . \quad (\text{B.12})$$

A próxima integral necessária para o capítulo 1 é da forma

$$I_d(a) = \int d^d \mathbf{k} f(k) e^{\pm i \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}} , \quad (\text{B.13})$$

onde $f(k)$ é uma função que depende apenas do módulo $k = |\mathbf{k}|$ do vetor \mathbf{k} e satisfaz a propriedade $f(k) = f(-k)$. Para resolvê-la, será conveniente utilizar (para o caso $d > 2$) coordenadas esféricas $(k, \theta_1, \dots, \theta_{d-1})$ em d dimensões, cuja definição é uma generalização da bem conhecida transformação em 3 dimensões:

$$\begin{aligned} k^1 &= k \cos \theta_1 \\ k^2 &= k \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ &\vdots \\ k^{d-1} &= k \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{d-2} \cos \theta_{d-1} \\ k^d &= k \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{d-2} \sin \theta_{d-1} , \end{aligned}$$

onde $k = |\mathbf{k}|$ é a coordenada radial, $\theta_1, \dots, \theta_{d-2}$ são ângulos polares ($0 \leq \theta_i \leq \pi$) e θ_{d-1} é o ângulo azimutal ($0 \leq \theta_{d-1} \leq 2\pi$). O Jacobiano da transformação é

$$J = \det \left(\frac{\partial(k^1, k^2, \dots, k^d)}{\partial(k, \theta_1, \dots, \theta_{d-1})} \right) = k^{d-1} \prod_{i=1}^{d-1} \sin^{d-(i+1)} \theta_i ,$$

de forma que

$$d^d \mathbf{k} = k^{d-1} dk \prod_{i=1}^{d-1} \sin^{d-(i+1)} \theta_i d\theta_i .$$

Será conveniente também escolher um sistema de coordenadas de tal forma que o vetor \mathbf{a} só tenha a primeira componente não nula, isto é, $\mathbf{a} = (a, 0, \dots, 0)$. Feita esta escolha e a mudança para coordenadas esféricas, a integral $I_d(a)$ toma a forma

$$\begin{aligned} I_d(a) &= \left[\int_0^\infty dk k^{d-1} f(k) \int_0^\pi d\theta_1 \sin^{d-2} \theta_1 e^{\pm ika \cos \theta_1} \right] \\ &\times \left(\int_0^\pi d\theta_2 \sin^{d-3} \theta_2 \right) \left(\int_0^\pi d\theta_3 \sin^{d-4} \theta_3 \right) \dots \left(\int_0^\pi d\theta_{d-2} \sin \theta_{d-2} \right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta_{d-1} \right) . \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

As integrais que aparecem em (B.14) podem ser resolvidas usando os resultados [15]

$$\int_0^\pi d\theta \sin^{2\nu} \theta e^{\pm ix \cos \theta} = \pi^{1/2} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \quad \left(\nu > -\frac{1}{2}\right)$$

e

$$\int_0^\pi \sin^m \theta d\theta = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2}(m+1)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(m+2)\right)} \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

Após algumas manipulações simples, o resultado obtido é

$$I_d(a) = \frac{(2\pi)^{d/2}}{a^d} \int_0^\infty du u^{d/2} J_{d/2-1}(u) f\left(\frac{u}{a}\right) \quad (d > 2). \quad (\text{B.15})$$

Para $d = 2$, podemos usar coordenadas polares (k, θ) usuais e escrever

$$I_2(a) = \int_0^\infty dk k f(k) \int_0^{2\pi} d\theta e^{\pm ika \cos \theta}.$$

Notando que

$$\int_0^{2\pi} d\theta e^{\pm ix \cos \theta} = 2\pi J_0(x),$$

segue que

$$I_2(a) = \frac{2\pi}{a^2} \int_0^\infty du u J_0(u) f\left(\frac{u}{a}\right), \quad (\text{B.16})$$

o qual possui a mesma forma que a equação (B.15).

Para $d = 1$, basta usar o fato que $f(k) = f(-k)$ de modo a obter

$$I_1(a) = \int_{-\infty}^\infty dk f(k) e^{\pm ika} = \frac{2}{a} \int_0^\infty du f\left(\frac{u}{a}\right) \cos u.$$

Daí, escrevendo

$$\cos u = \sqrt{\frac{\pi u}{2}} J_{-1/2}(u),$$

segue que

$$I_1(a) = \frac{(2\pi)^{1/2}}{a} \int_0^\infty du u^{1/2} J_{-1/2}(u) f\left(\frac{u}{a}\right), \quad (\text{B.17})$$

que também possui a mesma forma que a equação (B.15).

Logo, combinando os três resultados (B.15), (B.16) e (B.17) chegamos ao resultado geral

$$I_d(a) = \frac{(2\pi)^{d/2}}{a^d} \int_0^\infty du u^{d/2} J_{d/2-1}(u) f\left(\frac{u}{a}\right), \quad (\text{B.18})$$

que é válido para todo $d = 1, 2, 3, \dots$

Em particular, para $f(k) = (k^2 + m_0^2)^{-1}$ temos:

$$I_d(a) = \int d^d \mathbf{k} \frac{e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}}}{\mathbf{k}^2 + m_0^2} = \frac{(2\pi)^{d/2}}{a^d} \int_0^\infty du u^{d/2} J_{d/2-1}(u) \frac{a^2}{u^2 + m_0^2 a^2}.$$

Usando o resultado [15]

$$\int du \frac{u^{\nu+1} J_\nu(u)}{u^2 + x^2} = x^\nu K_\nu(x) \quad (x > 0, -1 < \nu < 3/2),$$

onde K_ν é a função de Bessel modificada de segunda espécie, segue que

$$\int d^d \mathbf{k} \frac{e^{\pm i \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}}}{\mathbf{k}^2 + m_0^2} = (2\pi)^{d/2} a^{2-d} (m_0 a)^{d/2-1} K_{d/2-1}(m_0 a), \quad (\text{B.19})$$

relação esta válida para $m_0 > 0$ e $0 < d < 5$.

Apêndice C

Neste apêndice apresentamos de forma explícita alguns resultados importantes utilizados no Capítulo 3.

C.1 Cálculo de $G^{(1)\mu\nu}(x, x')$

Esta seção é dedicada ao cálculo explícito da correção randômica $G^{(1)\mu\nu}(x, x')$ ao propagador livre $G^{(0)\mu\nu}(x, x')$. Conforme apresentado no Capítulo 3, a primeira correção perturbativa não nula (correção de ordem 2) ao propagador livre vem dada por (eq. (3.13))

$$G^{(1)\mu\nu}(x, x') = \int d^4x_1 d^4x_2 G^{(0)\mu}_{\rho}(x, x_1) M^{\rho\theta}(x_1, x_2) G^{(0)\nu}_{\theta}(x_2, x'), \quad (\text{C.1})$$

onde definimos o elemento de matriz

$$M^{\rho\theta}(x_1, x_2) = \left\langle L^{(1)\rho\lambda}(x_1) G^{(0)}_{\lambda\tau}(x_1, x_2) L^{(1)\tau\theta}(x_2) \right\rangle .$$

O primeiro passo é calcular $M^{\rho\theta}(x_1, x_2)$ acima. Usando a definição (3.8) de $L^{(1)\mu\nu}(x)$ juntamente com as equações (3.4) para as médias randômicas das componentes do vetor de fundo, segue que

$$\begin{aligned} M^{\rho\theta}(x_1, x_2) &= \epsilon^{\rho\lambda\alpha\beta} \epsilon^{\tau\theta\xi\chi} \langle V_{\alpha}(x_1) V_{\xi}(x_2) \rangle \partial_{(x_1)\beta} G^{(0)}_{\lambda\tau}(x_1, x_2) \partial_{(x_2)\chi} \\ &= \left[\epsilon^{\rho\lambda 0\beta} \epsilon^{\tau\theta 0\chi} \langle V_0(x_1^0) V_0(x_2^0) \rangle + \epsilon^{\rho\lambda 1\beta} \epsilon^{\tau\theta 1\chi} \langle V_1(x_1^1) V_1(x_2^1) \rangle + \right. \\ &\quad \left. \epsilon^{\rho\lambda 2\beta} \epsilon^{\tau\theta 2\chi} \langle V_2(x_1^2) V_2(x_2^2) \rangle + \epsilon^{\rho\lambda 3\beta} \epsilon^{\tau\theta 3\chi} \langle V_3(x_1^3) V_3(x_2^3) \rangle \right] \partial_{(x_1)\beta} G^{(0)}_{\lambda\tau}(x_1, x_2) \partial_{(x_2)\chi} \\ &= \sigma_0^2 \delta(x_1^0 - x_2^0) \epsilon^{0\rho\lambda\beta} \epsilon^{0\tau\theta\chi} \partial_{(x_1)\beta} G^{(0)}_{\lambda\tau}(x_1, x_2) \partial_{(x_2)\chi} + \\ &\quad \sigma_1^2 \delta(x_1^1 - x_2^1) \epsilon^{1\rho\lambda\beta} \epsilon^{1\tau\theta\chi} \partial_{(x_1)\beta} G^{(0)}_{\lambda\tau}(x_1, x_2) \partial_{(x_2)\chi} + \\ &\quad \sigma_2^2 \delta(x_1^2 - x_2^2) \epsilon^{2\rho\lambda\beta} \epsilon^{2\tau\theta\chi} \partial_{(x_1)\beta} G^{(0)}_{\lambda\tau}(x_1, x_2) \partial_{(x_2)\chi} + \\ &\quad \sigma_3^2 \delta(x_1^3 - x_2^3) \epsilon^{3\rho\lambda\beta} \epsilon^{3\tau\theta\chi} \partial_{(x_1)\beta} G^{(0)}_{\lambda\tau}(x_1, x_2) \partial_{(x_2)\chi} . \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

O propagador livre é função apenas da diferença $x - x'$ entre os pontos, como consequência da homogeneidade e isotropia espaço-temporal na teoria livre. Logo, podemos escrevê-lo em termos de sua transformada de Fourier na variável $x - x'$, isto é,

$$G^{(0)\mu\nu}(x, x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} \tilde{G}^{(0)\mu\nu}(k) .$$

Neste caso, substituindo a expressão (C.2) de volta em (C.1) obtemos:

$$\begin{aligned} G^{(1)\mu\nu}(x, x') = & \int d^4x_1 d^4x_2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \frac{d^4k''}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x_1)} e^{-ik'(x_1-x_2)} e^{-ik''(x_2-x')} \tilde{G}^{(0)\mu}{}_{\rho}(k) \\ & \left[\sigma_0^2 \delta(x_1^0 - x_2^0) \epsilon^{0\rho\lambda\beta} \epsilon^{0\tau\theta\chi} (-ik'_{\beta}) \tilde{G}^{(0)}{}_{\lambda\tau}(k') (-ik''_{\chi}) + \right. \\ & \sigma_1^2 \delta(x_1^1 - x_2^1) \epsilon^{1\rho\lambda\beta} \epsilon^{1\tau\theta\chi} (-ik'_{\beta}) \tilde{G}^{(0)}{}_{\lambda\tau}(k') (-ik''_{\chi}) + \\ & \sigma_2^2 \delta(x_1^2 - x_2^2) \epsilon^{2\rho\lambda\beta} \epsilon^{2\tau\theta\chi} (-ik'_{\beta}) \tilde{G}^{(0)}{}_{\lambda\tau}(k') (-ik''_{\chi}) + \\ & \left. \sigma_3^2 \delta(x_1^3 - x_2^3) \epsilon^{3\rho\lambda\beta} \epsilon^{3\tau\theta\chi} (-ik'_{\beta}) \tilde{G}^{(0)}{}_{\lambda\tau}(k') (-ik''_{\chi}) \right] \tilde{G}^{(0)\nu}{}_{\theta}(k'') . \end{aligned} \quad (C.3)$$

Vamos focar no primeiro termo entre colchetes. Ele será manipulado da seguinte forma: primeiramente, integramos sobre dx_2^0 , que tem o efeito de fazer $x_2^0 = x_1^0$; em seguida, integramos sobre $d^3\mathbf{x}_2$ para produzir um fator $(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}'' - \mathbf{k}')$; então, integramos sobre $d^3\mathbf{k}''$, o que faz $\mathbf{k}'' = \mathbf{k}'$; na sequência integramos sobre d^4x_1 para obter um fator $(2\pi)\delta(k''^0 - k^0)(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k})$; por fim integramos sobre $dk''^0 d^3\mathbf{k}'$ fazendo $k''^0 = k^0$ e $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$; as integrais sobre d^4k e dk^0 são as únicas remanescentes. Os outros três termos entre colchetes são tratados de maneira análoga, e após estas manipulações o resultado obtido é

$$G^{(1)\mu\nu}(x, x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} \tilde{G}^{(1)\mu\nu}(k) , \quad (C.4)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{G}^{(1)\mu\nu}(k) = & -k_{\beta} k_{\alpha} \tilde{G}^{(0)\mu}{}_{\rho}(k) \tilde{G}^{(0)\nu}{}_{\theta}(k) \left[\sigma_0^2 \epsilon^{0\rho\lambda\beta} \epsilon^{0\tau\theta\alpha} \int \frac{dk'^0}{2\pi} \tilde{G}^{(0)}{}_{\lambda\tau}(k'^0, \mathbf{k}) + \right. \\ & \sigma_1^2 \epsilon^{1\rho\lambda\beta} \epsilon^{1\tau\theta\alpha} \int \frac{dk'^1}{2\pi} \tilde{G}^{(0)}{}_{\lambda\tau}(k^0, k'^1, k^2, k^3) + \\ & \sigma_2^2 \epsilon^{2\rho\lambda\beta} \epsilon^{2\tau\theta\alpha} \int \frac{dk'^2}{2\pi} \tilde{G}^{(0)}{}_{\lambda\tau}(k^0, k^1, k'^2, k^3) + \\ & \left. \sigma_3^2 \epsilon^{3\rho\lambda\beta} \epsilon^{3\tau\theta\alpha} \int \frac{dk'^3}{2\pi} \tilde{G}^{(0)}{}_{\lambda\tau}(k^0, k^1, k^2, k'^3) \right] . \end{aligned} \quad (C.5)$$

É importante notar da equação (C.4) que $G^{(1)}$, tal como $G^{(0)}$, é função apenas da diferença $x - x'$ entre os pontos, indicando que a homogeneidade e isotropia espaço-temporal é preservada mesmo na teoria com perturbação randômica.

C.2 O propagador livre $G^{(0)\mu\nu}(x, x')$

Nesta seção obtemos uma expressão para o propagador da teoria livre de randomicidade, $G^{(0)\mu\nu}(x, x')$, também conhecido como propagador de Feynman. Conforme visto no Capítulo 3, temos que $\mathbb{G}^{(0)} = (\mathbb{L}^{(0)})^{-1}$ onde $\mathbb{L}^{(0)}$ é o operador com componentes $L^{(0)\mu\nu}(x) = \eta^{\mu\nu}\square + \frac{1-\gamma}{\gamma}\partial^\mu\partial^\nu$. Logo,

$$\mathbb{L}^{(0)}\overline{\mathbb{G}^{(0)}} = \mathbb{I} ,$$

ou, em componentes,

$$\left[\eta^{\mu\nu}\square + \frac{1-\gamma}{\gamma}\partial^\mu\partial^\nu \right] G^{(0)\lambda}_{\nu}(x, x') = \eta^{\mu\lambda}\delta^4(x - x') . \quad (\text{C.6})$$

Escrevendo

$$G^{(0)\lambda}_{\nu}(x, x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} \tilde{G}^{(0)\lambda}_{\nu}(k) ,$$

é fácil ver que $\tilde{G}^{(0)\lambda}_{\nu}(k)$ satisfaz à equação

$$\left[\eta^{\mu\nu} + \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right] \tilde{G}^{(0)\lambda}_{\nu}(k) = -\frac{1}{k^2} \eta^{\mu\lambda} . \quad (\text{C.7})$$

Considerando um ansatz de solução da forma $\tilde{G}^{(0)\lambda}_{\nu}(k) = A(k)\eta_\nu^\lambda + B(k)k_\nu k^\lambda/k^2$, a equação (C.7) fornece $A(k) = -1/k^2$ e $B(k) = -(1-\gamma)A(k) = (1-\gamma)/k^2$. Portanto, segue que

$$\tilde{G}^{(0)\mu\nu}(k) = -\frac{1}{k^2} \left[\eta^{\mu\nu} - (1-\gamma) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right] \quad (\text{C.8})$$

é o propagador livre para valores arbitrários do parâmetro de calibre γ . Em particular, para $\gamma = 1$ (o chamado calibre de Feynman) segue a equação (3.17).

C.3 Forma explícita de $G^{(1)\mu\nu}(x, x')$ no calibre de Feynman

Nesta seção calculamos explicitamente a correção randômica $\tilde{G}^{(1)\mu\nu}(k)$ no calibre de Feynman. Para isto, substituímos $\tilde{G}^{(0)\mu\nu}(k) = -\eta^{\mu\nu}/k^2$ na forma geral (C.5) da correção e, após algumas manipulações indiciais simples, obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{G}^{(1)\mu\nu}(k) = & \frac{\eta_{\lambda\tau} k_\beta k_\alpha}{(k^2)^2} \left[\sigma_0^2 \epsilon^{0\mu\lambda\beta} \epsilon^{0\tau\nu\alpha} \int \frac{dk'^0}{2\pi} \frac{1}{(k'^0)^2 - |\mathbf{k}|^2} + \right. \\ & \sigma_1^2 \epsilon^{1\mu\lambda\beta} \epsilon^{1\tau\nu\alpha} \int \frac{dk'^1}{2\pi} \frac{1}{(k^0)^2 - (k'^1)^2 - (k^2)^2 - (k^3)^2} + \\ & \sigma_2^2 \epsilon^{2\mu\lambda\beta} \epsilon^{2\tau\nu\alpha} \int \frac{dk'^2}{2\pi} \frac{1}{(k^0)^2 - (k^1)^2 - (k'^2)^2 - (k^3)^2} + \\ & \left. \sigma_3^2 \epsilon^{3\mu\lambda\beta} \epsilon^{3\tau\nu\alpha} \int \frac{dk'^3}{2\pi} \frac{1}{(k^0)^2 - (k^1)^2 - (k^2)^2 - (k'^3)^2} \right] . \end{aligned}$$

As integrais acima podem ser facilmente resolvidas no plano complexo com o auxílio do teorema dos resíduos. Para isto é conveniente somar nos denominadores de cada uma das integrais um pequeno termo imaginário $i0^+$ e então integrar sobre a semicircunferência formada pela reta real e o arco que passa pelo semiplano superior. O resultado é:

$$\begin{aligned} \tilde{G}^{(1)\mu\nu}(k) = & \frac{i\eta_{\lambda\tau}k_{\beta}k_{\alpha}}{2(k^2)^2} \left[\sigma_0^2 \epsilon^{0\mu\lambda\beta} \epsilon^{0\tau\nu\alpha} \frac{1}{|\mathbf{k}|} - \sigma_1^2 \epsilon^{1\mu\lambda\beta} \epsilon^{1\tau\nu\alpha} \frac{1}{\sqrt{(k^0)^2 - (k^2)^2 - (k^3)^2}} \right. \\ & \left. - \sigma_2^2 \epsilon^{2\mu\lambda\beta} \epsilon^{2\tau\nu\alpha} \frac{1}{\sqrt{(k^0)^2 - (k^1)^2 - (k^3)^2}} - \sigma_3^2 \epsilon^{3\mu\lambda\beta} \epsilon^{3\tau\nu\alpha} \frac{1}{\sqrt{(k^0)^2 - (k^1)^2 - (k^2)^2}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

C.4 Correção randômica $\tilde{A}_{sol}^{(1)\mu}$ no potencial do solenóide

Como visto no Capítulo 3, a correção randômica no potencial do solenóide é dada no espaço dos momenta por

$$\tilde{A}_{sol}^{(1)\mu}(k) = \tilde{G}^{(1)\mu\nu}(k) \tilde{J}_{\nu sol}(k). \quad (\text{C.10})$$

onde $\tilde{G}^{(1)\mu\nu}$ é dado pela equação (C.9) e $\tilde{J}_{\nu sol}$ pela equação (3.65). Como $\tilde{J}_{\nu sol}$ só possui as componentes $\nu = 1, 2$ não nulas, podemos reescrever a equação acima como

$$\tilde{A}_{sol}^{(1)\mu}(k) = \tilde{G}^{(1)\mu a}(k) \tilde{J}_{a sol}(k),$$

onde $a = 1, 2$ (utilizaremos também b, c, \dots para denotar índices assumindo apenas os valores 1 e 2).

Vamos inicialmente ao cálculo da componente 0 de $\tilde{A}_{sol}^{(1)}$. Substituindo $\tilde{G}^{(1)0a}(k)$ e $\tilde{J}_{a sol}(k)$, obtemos:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{sol}^{(1)0}(k) = & i \frac{\eta_{\lambda\tau}k_{\beta}k_{\alpha}}{2(k^2)^2} \left[-\sigma_1^2 \frac{\epsilon^{10\lambda\beta} \epsilon^{1\tau a\alpha}}{\sqrt{\omega^2 - k_y^2 - k_z^2}} - \sigma_2^2 \frac{\epsilon^{20\lambda\beta} \epsilon^{2\tau a\alpha}}{\sqrt{\omega^2 - k_x^2 - k_z^2}} - \sigma_3^2 \frac{\epsilon^{30\lambda\beta} \epsilon^{3\tau a\alpha}}{\sqrt{\omega^2 - k_x^2 - k_y^2}} \right] \\ & \cdot i(2\pi)^2 \Phi_B \delta(\omega) \delta(k_z) (\eta_{a1} k_y - \eta_{a2} k_x) \\ = & \frac{2\pi^2 \Phi_B \eta_{\lambda\tau} k_b k_c}{i|\mathbf{k}_{\perp}|^4} \delta(\omega) \delta(k_z) \left[\sigma_1^2 \frac{\epsilon^{10\lambda b} \epsilon^{1\tau a c}}{|k_y|} + \sigma_2^2 \frac{\epsilon^{20\lambda b} \epsilon^{2\tau a c}}{|k_x|} + \sigma_3^2 \frac{\epsilon^{30\lambda b} \epsilon^{3\tau a c}}{|\mathbf{k}_{\perp}|} \right] (\eta_{a1} k_y - \eta_{a2} k_x), \end{aligned}$$

onde usamos as funções delta de Dirac para fazer $\omega = k_z = 0$. Os dois primeiros termos entre colchetes na expressão acima são nulos, pois os índices a e c só assumem os valores 1 e 2 e o símbolo de Levi-Civita (que é totalmente antissimétrico) se anula para ambos. Resta apenas o último termo, o qual, após abrir as somas sobre os índices a, b, c e usar a antissimetria do

símbolo de Levi-Civita para reagrupar alguns termos semelhantes, vem dado por (lembrando que $k_1 = -k_x, k_2 = -k_y$):

$$\tilde{A}_{sol}^{(1)0}(k) = \frac{2\pi^2 \Phi_B \eta_{\lambda\tau} \sigma_3^2}{i|\mathbf{k}_\perp|^5} \delta(\omega) \delta(k_z) \left[\epsilon^{30\lambda 1} \epsilon^{3\tau 21} (k_x k_y^2 + k_x^3) \epsilon^{30\lambda 2} \epsilon^{3\tau 21} (k_y k_x^2 + k_y^3) \right] .$$

Por fim, abrindo a soma sobre os índices λ, τ , nos termos com $\lambda \neq \tau$ as componentes da métrica de Minkowski são nulas, enquanto que nos termos com $\lambda = \tau$ são os símbolos de Levi-Civita que se anulam, de forma que o resultado é

$$\tilde{A}_{sol}^{(1)0}(k) = 0 .$$

Os cálculos para a componente $\mu = 3$ de $\tilde{A}_{sol}^{(1)\nu}$ são bastante parecidos e o resultado é o mesmo:

$$\tilde{A}_{sol}^{(1)3}(k) = 0 .$$

Já para as componentes $\mu = 1, 2$ temos um resultado não nulo. Para $\mu = 1$, temos:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{sol}^{(1)1}(k) &= i \frac{\eta_{\lambda\tau} k_\beta k_\alpha}{2(k^2)^2} \left[\sigma_0^2 \frac{\epsilon^{01\lambda\beta} \epsilon^{0\tau\alpha\alpha}}{|\mathbf{k}|} - \sigma_2^2 \frac{\epsilon^{21\lambda\beta} \epsilon^{2\tau\alpha\alpha}}{\sqrt{\omega^2 - k_x^2 - k_z^2}} - \sigma_3^2 \frac{\epsilon^{31\lambda\beta} \epsilon^{3\tau\alpha\alpha}}{\sqrt{\omega^2 - k_x^2 - k_y^2}} \right] \\ &\quad \cdot i (2\pi)^2 \Phi_B \delta(\omega) \delta(k_z) (\eta_{a1} k_y - \eta_{a2} k_x) \\ &= \frac{-2\pi^2 \Phi_B \eta_{\lambda\tau} k_b k_c}{|\mathbf{k}_\perp|^4} \delta(\omega) \delta(k_z) \left[\sigma_0^2 \frac{\epsilon^{01\lambda b} \epsilon^{0\tau a c}}{|\mathbf{k}_\perp|} - \sigma_2^2 \frac{\epsilon^{21\lambda b} \epsilon^{2\tau a c}}{i|k_x|} - \sigma_3^2 \frac{\epsilon^{31\lambda b} \epsilon^{3\tau a c}}{i|\mathbf{k}_\perp|} \right] (\eta_{a1} k_y - \eta_{a2} k_x) \\ &= \frac{+2\pi^2 \Phi_B \eta_{\lambda\tau} k_y k_c}{|\mathbf{k}_\perp|^5} \delta(\omega) \delta(k_z) \left[\sigma_0^2 \epsilon^{01\lambda 2} \epsilon^{0\tau a c} + i \sigma_3^2 \epsilon^{31\lambda 2} \epsilon^{3\tau a c} \right] (\eta_{a1} k_y - \eta_{a2} k_x) , \end{aligned}$$

onde no primeiro passo utilizamos as funções delta para fazer $\omega = k_z = 0$, e no segundo passo abrimos a soma no índice b (cujo efeito é zerar o termo com σ_2^2 e fazer $b = 2$ nos outros dois). Em seguida, somando sobre λ, τ para fazer $\lambda = \tau = 3$ no primeiro termo (com um sinal negativo $\eta_{33} = -1$) e $\lambda = \tau = 0$ no último termo, obtemos:

$$\tilde{A}_{sol}^{(1)1}(k) = \frac{+2\pi^2 \Phi_B k_y k_c}{|\mathbf{k}_\perp|^5} \delta(\omega) \delta(k_z) \left[-\sigma_0^2 \epsilon^{0132} \epsilon^{03ac} + i \sigma_3^2 \epsilon^{3102} \epsilon^{30ac} \right] (\eta_{a1} k_y - \eta_{a2} k_x) .$$

Abrindo, por fim, as somas nos índices a e c e usando a antissimetria do símbolo de Levi-Civita juntamente com o fato de que $\epsilon^{0123} = +1$ segue que:

$$\tilde{A}_{sol}^{(1)1}(k) = 2\pi^2 \Phi_B (\sigma_0^2 - i \sigma_3^2) \delta(\omega) \delta(k_z) \frac{k_y}{|\mathbf{k}_\perp|^3} .$$

O cálculo para a componente $\mu = 2$ é bastante análogo e resulta em

$$\tilde{A}_{sol}^{(1)2}(k) = -2\pi^2 \Phi_B (\sigma_0^2 - i \sigma_3^2) \delta(\omega) \delta(k_z) \frac{k_x}{|\mathbf{k}_\perp|^3} .$$

Os 4 resultados apresentados acima para cada uma das componentes podem ser compactados na seguinte expressão:

$$\tilde{A}_{sol}^{(1)\mu}(k) = 2\pi^2 \Phi_B(\sigma_0^2 - i\sigma_3^2) \delta(\omega) \delta(k_z) \left(0, \frac{k_y}{|\mathbf{k}_\perp|^3}, \frac{-k_x}{|\mathbf{k}_\perp|^3}, 0 \right). \quad (\text{C.11})$$

Para obter o correspondente potencial no espaço x , basta calcular a transformada de Fourier inversa, i.e.,

$$A_{sol}^{(1)\mu}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \tilde{A}_{sol}^{(1)\mu}(k).$$

Obviamente, temos

$$A_{sol}^{(1)0}(x) = A_{sol}^{(1)3}(x).$$

Para a componente $\mu = 1$ segue que:

$$\begin{aligned} A_{sol}^{(1)1}(x) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} 2\pi^2 \Phi_B(\sigma_0^2 - i\sigma_3^2) \delta(\omega) \delta(k_z) \frac{k_y}{|\mathbf{k}_\perp|^3} \\ &= \frac{\Phi_B}{2(2\pi)^2} (\sigma_0^2 - i\sigma_3^2) \int dk_x dk_y \frac{e^{i(k_x x + k_y y)} k_y}{|\mathbf{k}_\perp|^3} \\ &= \frac{\Phi_B}{8\pi^2} (\sigma_0^2 - i\sigma_3^2) \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} \int d^2\mathbf{k}_\perp \frac{e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp}}{|\mathbf{k}_\perp|^3}, \end{aligned}$$

onde $\mathbf{x}_\perp = (x, y)$. A integral que aparece na expressão acima pode ser calculada introduzindo-se um parâmetro regularizador m^2 no denominador, i.e.,

$$\int d^2\mathbf{k}_\perp \frac{e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp}}{|\mathbf{k}_\perp|^3} = \lim_{m \rightarrow 0} \int d^2\mathbf{k}_\perp \frac{e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp}}{(|\mathbf{k}_\perp|^2 + m^2)^{3/2}}.$$

Utilizando os resultados do Apêndice B podemos mostrar que

$$\int d^2\mathbf{k}_\perp \frac{e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp}}{(|\mathbf{k}_\perp|^2 + m^2)^{3/2}} = \frac{2\pi e^{-m|\mathbf{x}_\perp|}}{m}.$$

Introduzindo este resultado de volta na expressão para $A_{sol}^{(1)\mu}$, diferenciando com relação a y e depois tomando o limite $m \rightarrow 0$, resulta em

$$A_{sol}^{(1)1}(x) = \frac{\Phi_B(i\sigma_0^2 + \sigma_3^2)}{4\pi} \frac{y}{|\mathbf{x}_\perp|}.$$

Os cálculos para a componente $\mu = 2$ são quase idênticos, e o resultado é:

$$A_{sol}^{(1)2}(x) = -\frac{\Phi_B(i\sigma_0^2 + \sigma_3^2)}{4\pi} \frac{x}{|\mathbf{x}_\perp|}.$$

Finalmente, juntando os resultados individuais de cada uma das 4 componentes, segue que

$$A_{sol}^{(1)\mu}(x) = \frac{\Phi_B(i\sigma_0^2 + \sigma_3^2)}{4\pi} \left(0, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 0 \right). \quad (\text{C.12})$$

Bibliografia

- [1] A. M. Yaglom, *An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions*, Dover Publications Inc. (2004).
- [2] H. Cramer, *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton University Press (1962).
- [3] P. Damgaard, H. Hffel, *Stochastic Quantization*, World Scientific Pub Co Inc (1988).
- [4] G. Krein, G. Menezes, N. F. Svaiter, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 131301 (2010).
- [5] E. Arias, E. Goulart, G. Krein, G. Menezes, N. F. Svaiter, *Phys. Rev. D* **83**, 125022 (2011).
- [6] L. H. Ford, N. F. Svaiter, *Phys. Rev. D* **80**, 065034 (2009).
- [7] E. Arias, C. H. G. Béssa, N. F. Svaiter, *Modern Physics Letters A* **26** pp. 2335-2344 (2011).
- [8] F. A. Barone, G. Flores-Hidalgo, *Phys. Rev. D* **78**, 125003 (2008).
- [9] F. A. Barone, G. Flores-Hidalgo, *Braz. J. Phys.* **40**, pp. 188-194 (2010).
- [10] W. Greiner, J. Reinhardt, *Field Quantization*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1996).
- [11] M. Kaku, *Quantum Field Theory, a Modern Introduction*, Oxford (1993).
- [12] M. Peskin, D. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Perseus Books (1995).
- [13] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, Princeton (2003).
- [14] G. B. Arfken, *Mathematical methods for Physicists*, Harcourt Academic Press (1995).
- [15] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Tables of integrals, series and products*, 7th Ed., Elsevier (2007).

- [16] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd Ed., John Wiley & Sons Inc. (1999).
- [17] S. M. Carroll, G. B. Field, R. Jackiw, *Phys. Rev. D* **41**, 1231-1240 (1990).
- [18] R. Jackiw, *Confluence of Cosmology, Massive Neutrinos, Elementary Particles and Gravitation*, Kluwer Academic Publishers (2002), p. 95-100.
- [19] R. Casana, M. Ferreira Jr., C. E. H. Santos, *Phys. Rev. D* **78**, 025030 (2008).
- [20] R. Jackiw, S. Templeton, *Phys. Rev. D* **23**, 2291 (1981).
- [21] J. Schonfeld, *Nucl. Phys.* **B185**, 157 (1981).
- [22] S. Deser, R. Jackiw, S. Templeton, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 975 (1982).
- [23] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe, *Quantum Mechanics vol. 2*, Wiley-VCH (1978).
- [24] Base de dados do *National Institute of Standards and Technology (NIST)*, disponível em www.nist.gov/pml/data/hdel/index.cfm (acesso em 07 de janeiro de 2013 às 15:23h).
- [25] P. J. Mohr, B. N. Taylor, *Reviews of Modern Physics* **77**, 1-107 (2005).
- [26] A. P. Baeta Scarpelli, H. Belich, J. L. Boldo, J. A. Helayel-Neto, *Phys. Rev. D* **67**, 085021 (2003).
- [27] A. P. Baeta Scarpelli, J. A. Helayel-Neto, *Phys. Rev. D* **73**, 105020 (2006).
- [28] G. T. Camilo, *Potenciais não globais e a quantização das cargas elétricas*, Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal de Itajubá (2010).
- [29] M. F. X. P. Medeiros, *Efeitos da polarização do vácuo nas imediações de um solenóide*, Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Itajubá (2012).
- [30] G. T. Camilo, F. A. Barone, *Trabalho em andamento*.
- [31] R. Jackiw, S.Y. Pi, *Phys. Rev. D* **68**, 104012 (2003).