

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

Coordenadas renormalizadas: o formalismo dos
operadores de criação e aniquilação

Paulo Henrique Teixeira da Silva

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

Paulo Henrique Teixeira da Silva

**Coordenadas renormalizadas: o formalismo dos
operadores de criação e aniquilação**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física e Matemática Aplicada como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Física e Matemática Aplicada.

Área de concentração: Teoria Quântica de Campos

Orientador: Prof. Dr. Gabriel Flores Hidalgo

Abril de 2013

Itajubá-MG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

Paulo Henrique Teixeira da Silva

**Coordenadas renormalizadas: o formalismo dos
operadores de criação e aniquilação**

Dissertação aprovada por banca examinadora em 26 de abril de 2013, conferindo ao autor o título de **Mestre em Ciências em Física e Matemática Aplicada**.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Gabriel Flores Hidalgo (Orientador)

Prof. Dr. Celso Chikahiro Nishi

Prof. Dr. Fabrício Augusto Barone Rangel

*A todos aqueles que acreditaram
em meu potencial e, de alguma forma,
contribuíram para a realização deste sonho.*

Agradecimentos

Aos meus familiares, que sempre me incentivaram e me deram o necessário para realizar este sonho. Em especial, a minha noiva Nadieli Alves, por comportar-se como um verdadeiro alicerce, sempre com muita paciência e uma incansável dedicação nos momentos difíceis.

Ao meu orientador, Gabriel Flores Hidalgo, pela ajuda concebida não só academicamente mas, principalmente, pela transmissão de caráter. Demonstrando maestria e entusiasmo no convívio com o próximo.

Aos amigos do curso de Licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará. Em especial, Adriano Braga Barreto, o primeiro desbravador e responsável por perpetuar as boas atuações dos alunos do IFCE no departamento de Física da UNIFEI. A minha eterna gratidão.

Aos amigos do Projeto 6 de Março pelo apoio e motivação. Em especial, ao responsável direto pela minha iniciação no estudo da Física, que tenho grande admiração e afinidade de um verdadeiro irmão, George Frederick Tavares da Silva. Feliz é aquele que o tem como amigo.

Aos professores do programa de mestrado em Física da Universidade Federal de Itajubá, agradeço pelo empenho e dedicação para com os alunos. Pelas aulas empolgantes, seminários motivadores e pelas conversas nos bastidores, que proporcionam acolhimento e desenvolvem a maturidade acadêmica dos discentes. Em especial, ao Prof. Fabrício A. Barone Rangel pelo profissionalismo e veemência que aplica as lutas por melhorias no programa de mestrado em Física, deixando aos estudantes uma confortável condição de estudo.

Aos companheiros discentes participantes do programa de Física e Matemática, que me ajudaram nos debates e problemas provenientes das disciplinas cursadas. Dentro dos quais posso citar alguns: Adriano Braga Barreto, Antonio José Melo de Queiroz, Cleuber Pereira Ramos, Edson do Nascimento Neres Jr., Fernando Félix Oliveira e Silva, Fernando Soares Guimarães, Filipe Mendonça Lopes, Franco Bassi Rocha, Giancarlo Thales Camilo da Silva, Hemily Gomes Marciano, Jarne Donizetti Ribeiro, Juliana Celestino, Luiz Fernando Rodrigues Pires, Marcos Alexandre Rabelo de Lima, Malú Maira da Silva, Marina Machado Cunha e Mello, Marlon Marques da Silva, Tiago Garcia Ribeiro, Warley Mendes Batista e Will Robson Monteiro Rocha. Ninguém torna-se grande sozinho.

Agradeço aos colegas e amigos que fiz nessa jornada de dois anos, na pacata cidade de Itajubá. Em especial, agradeço aos amigos com quem dividi a república. Primeiro aos veteranos: Adriano Braga, Gian (Bichão), Marlon (Pinduca), Will, Lucas Rafael (Piranguinho). Depois, aos que certamente perpetuarão a animação da casa: Edson Neres (Pelé), Warley Mendes (Fofo), Tiago Ribeiro, Marcos Alexandre (Limoeiro), Jarne Donizetti (Baxim), Antônio e José Lucas (Zé). Que provisoriamente, preencheram a ausência de familiares e amigos distantes. Tenho a certeza de que seremos amigos independente da distância que nos separa.

Finalmente, agradeço aos funcionários da UNIFEI que, nos bastidores do meio acadêmico, desempenham importantes missões e fazem um ótimo programa de pós-graduação em Física.

E a CAPES, pelos auxílios financeiros concedidos.

*“There is a driving force
more powerful than steam, electricity
and nuclear power: the will.”*

Albert Einstein

Resumo

Neste trabalho, estudamos o conceito de coordenadas vestidas e estados vestidos, inicialmente introduzido em [1], em que foi possível tratar de forma exata diversos processos radioativos associados a um sistema átomo-campo eletromagnético aproximado por um oscilador harmônico interagindo linearmente com um campo escalar sem massa, ambos confinados em uma cavidade esférica. Para recuperarmos o caso livre, consideramos o raio da cavidade arbitrariamente grande. Após revisarmos o método polinomial, empregado em trabalhos precursores para se calcular os processos radioativos, mencionamos algumas dificuldades associadas aos métodos matemáticos utilizados nos cálculos das taxas de transições do sistema. Assim, como uma forma de contornar estas dificuldades, introduzimos um novo formalismo, ainda dentro do contexto de coordenadas vestidas e estados vestidos, baseado em operadores de criação e de aniquilação vestidos, que reduzem substancialmente tais complicações matemáticas. Como uma forma de demonstração para as vantagens apresentadas neste novo método, recuperamos diversos casos físicos associados aos processos radioativos já calculados nos trabalhos precursores presentes na literatura. E, como uma maneira de estender este mecanismo em termos de operadores de criação e de aniquilação vestidos, calculamos uma nova probabilidade de transição, associada a um processo de espalhamento “fóton-átomo” mais decaimento induzido. Finalizamos com algumas sugestões de aplicabilidade desta nova probabilidade em recentes resultados apresentados na literatura.

Palavras-chave: Coordenadas vestidas, estados vestidos, processos radioativos, renormalização.

Abstract

We study the concept of dressed coordinates and dressed states, initially introduced in [1], where was possible to deal exactly with several radioactive processes associated with an atom-electromagnetic field system approximated by a harmonic oscillator linearly interacting with a massless scalar field, both confined in a spherical cavity. In order to recover the free case, we consider the cavity radius arbitrarily large. After reviewing the polynomial method, used in early studies to calculate the radioactive processes, we show some of the difficulties associated with the mathematical methods used in the calculations of transition rates of the system. So, as a way to circumvent these difficulties, we introduce a new formalism, still inside the framework of dressed coordinates and dressed states, based on dressed creation and annihilation operators, which reduce substantially these mathematical complications. In order to illustrate the advantages presented in this new method, we have recovered some radioactive processes already calculated in previous works well known in the literature. Furthermore, by extending this mechanism in terms of dressed creation and annihilation operators, we obtain a new transition probability associated to the process of photon-atom scattering plus induced decay. We conclude with some suggestions of applicability of this new probability on latest results presented in the literature.

Keywords: Dressed coordinates, dressed states, radioactive processes, renormalization.

Conteúdo

Agradecimentos	ii
Resumo	v
Abstract	vi
Conteúdo	vii
Lista de Figuras	ix
Introdução	1
1 Acoplamento linear e as coordenadas renormalizadas	3
1.1 O modelo linear e seus aspectos	3
1.1.1 Renormalizando a Hamiltoniana do sistema	6
1.2 A diagonalização da Hamiltoniana do sistema	8
1.2.1 O espectro das autofrequências	10
1.3 Distribuição de energia dos modos normais e o conceito de osciladores vestidos	12
1.4 Coordenadas e estados renormalizados	13
2 Processos de radiação na representação de coordenadas	17
2.1 Amplitude de probabilidade na representação de coordenadas	18
2.1.1 Método dos resíduos no limite contínuo	20
2.1.2 Amplitude de probabilidade de permanência do oscilador (átomo) em seu primeiro estado excitado	22
2.1.3 Amplitude de probabilidade de decaimento do oscilador (átomo) . .	28
3 Formalismo com operadores de criação e de aniquilação vestidos	33
3.1 Revisando o oscilador harmônico simples	33

3.2	Espaço composto por N osciladores vestidos	35
3.2.1	Operadores de criação e de aniquilação vestidos	36
3.3	Exemplos de aplicações do formalismo com operadores de criação e de aniquilação vestidos	37
3.3.1	Amplitude de permanência do oscilador (átomo) em seu primeiro estado excitado	38
3.3.2	Decaimento do oscilador (átomo) do primeiro estado excitado para o estado fundamental	38
3.3.3	Amplitude de permanência do oscilador (átomo) em seu segundo estado excitado	39
3.4	Amplitude de probabilidade no formalismo de operadores de criação e de aniquilação vestidos	40
4	Probabilidade de espalhamento “fóton-átomo” mais decaimento induzido	43
4.1	Espalhamento “fóton-átomo” mais decaimento induzido	43
	Conclusões e perspectivas	52
A	Lagrangeana para N osciladores acoplados linearmente	54
A.1	Demonstração para a Lagrangeana (1.17)	54
B	Diagonalização da Hamiltoniana	56
B.1	Cálculo para a diagonalização da Hamiltoniana (1.29)	56
C	Amplitude de permanência do oscilador (átomo) em seu primeiro estado excitado	59
C.1	Calculando os resíduos	59
D	Teste de validade para a amplitude de espalhamento	61
D.1	Amplitude de espalhamento em $t = 0$	61
	Bibliografia	63

Lista de Figuras

1.1	Análise da equação (1.47) em termos do parâmetro x , representado pelo eixo horizontal e definido por $x = \frac{\Omega}{\Delta\omega}$	11
2.1	Contorno retangular que contemple todo o eixo real positivo, onde estão presentes todos os Ω_r	23
2.2	Contorno C de integração da equação (2.34), onde está presente o polo z_3	25
2.3	Análise da equação (2.45). A curva em preto está associada a uma constante de acoplamento da ordem de $g \approx 3,0 \times 10^{-3}/s$ e a curva em vermelho com $g \approx 6,0 \times 10^{-3}/s$. Definimos o parâmetro $\omega_0 = 1,0/s$. Nas aproximações consideradas, temos um tempo característico ($\tau = \frac{1}{\pi g}$) de decaimento da ordem de $\tau_p \approx 106s$ e $\tau_v \approx 53s$, para as curvas em preto e em vermelho, respectivamente.	27
2.4	Análise da equação (2.61), onde temos $P(\omega)$ em função de ω com $g = 0,2/s$, $\omega_0 = 2,0/s$. Notemos uma região de máxima probabilidade quando $\omega = \omega_0$	32
4.1	Uma ilustração esquemática do processo de espalhamento “fóton-átomo” mais decaimento induzido.	44
C.1	Contorno Γ de integração da equação (C.3).	60

Introdução

As investigações sobre a forma como ocorrem as interações entre matéria e campo eletromagnético sempre foram de grande interesse para a física, desde a sua escala macroscópica até a mais fundamental estrutura. Por exemplo, no contexto da interação da radiação com a matéria, em nível microscópico, a aplicação da Eletrodinâmica Quântica é a mais apropriada. Porém, a descrição nesta situação, geralmente traz algumas complicações, tais como limitar-se a resultados aproximados e abordados perturbativamente.

Como uma forma de evitar tais complicações, muitos trabalhos que abordam o tratamento não-perturbativo em sistemas constituídos por um átomo acoplado ao campo eletromagnético tem sido desenvolvidos na literatura, onde alguns deles conduzem ao conceito de “átomos vestidos”. Veja por exemplo [2] e [3]. Desde então, este conceito tem sido amplamente utilizado para investigar diversas situações que envolvem este tipo de interação, tais como em escala de radiofrequência [4] e [5], e átomos em intensos raios lasers ressonantes [6]. Além do conceito de “átomos vestidos” em si, outro aspecto que merece uma atenção especial é a não-linearidade que surge neste tipo de problema, quando consideramos situações muito próximas das condições reais. Estas considerações levam a difíceis problemas matemáticos. Uma maneira de contornar tais dificuldades matemáticas é supor que, sob certas condições, o sistema acoplado átomo-campo eletromagnético pode ser aproximado por um sistema composto por um oscilador harmônico acoplado linearmente ao campo por meio de uma constante de acoplamento efetiva g . É esta aproximação que iremos considerar. Tal forma de aproximação foi proposta por [1], onde o sistema foi confinado a uma cavidade esférica de raio R . Nesse sentido, num contexto ligeiramente diferente, aproximações lineares desta natureza tem sido utilizadas nos últimos anos na física da matéria condensada e em Óptica Quântica, em particular para o estudo do movimento Browniano e no problema da decoerência, para citar alguns exemplos.

Dentro do contexto da aproximação feita em [1], surgiram as coordenadas vestidas e os

estados vestidos, que posteriormente vieram a se chamar coordenadas renormalizadas e estados renormalizados, em analogia com a Teoria Quântica de Campos [9]. Ainda no âmbito das coordenadas renormalizadas, surgiram outras aplicações de interesse, como por exemplo: processos de termalização de átomos com campo de radiação térmica [10], estabilidades de átomos excitados em pequenas cavidades [11], evolução temporal de estados biatômicos emaranhados em cavidades [12] e formulações em termos de integrais de trajetórias [13].

Em termos das coordenadas renormalizadas, os estados renormalizados são definidos como os estados fisicamente mensuráveis. Os estados renormalizados possuem a correta propriedade física de estabilidade do oscilador (átomo) em seu estado fundamental e na ausência de quanta do campo (vácuo quântico). Este formalismo tem demonstrado vantagens quanto ao processo de cálculos de probabilidades de transição relativas aos processos de radiação do oscilador (átomo), como visto em [14]. Dessa forma, nosso trabalho traz uma contribuição para este formalismo.

Este trabalho está dividido em quatro capítulos e quatro apêndices, onde consideramos os aspectos mais técnicos. No primeiro capítulo, introduzimos o modelo a ser estudado, um oscilador (átomo) em interação com um campo escalar (eletromagnético). Fizemos uma revisão dos aspectos qualitativos do modelo e resolvemos para os autovalores e autovetores desse sistema. No segundo capítulo, aplicamos o formalismo para calcularmos amplitudes de transição na representação de coordenadas. Ainda no capítulo 2, consideramos os diferentes processos de radiação. Em particular, calculamos as amplitudes de transição usando o método polinomial onde notaremos que a maioria dos processos de radiação são impossíveis de se calcular mediante este formalismo. No capítulo 3 introduzimos os operadores de aniquilação e criação vestidos que serão utilizados para simplificar, de forma considerável, os cálculos das amplitudes de transição. Em particular, reproduzimos alguns cálculos, realizados anteriormente com método polinomial, para evidenciarmos as vantagens do novo formalismo. Finalmente, no capítulo 4, consideramos o cálculo da probabilidade de transição desde o primeiro estado excitado do oscilador (átomo), pela presença de um quanta do campo (fóton), para o seu estado fundamental, *i.e.*, o decaimento induzido ou emissão estimulada. Neste trabalho iremos utilizar unidades naturais $c = \hbar = 1$, exceto quando necessário mencioná-las explicitamente.

Capítulo 1

Acoplamento linear e as coordenadas renormalizadas

Neste capítulo, tratamos em detalhes os aspectos do modelo que estamos usando em todo o trabalho. Além disso, introduzimos alguns aspectos quantitativos referentes ao conceito de coordenadas e estados renormalizados.

1.1 O modelo linear e seus aspectos

Um importante aspecto que devemos ter atenção quanto a modelagem de sistemas físicos é o caráter não-linear dos problemas que envolvem situações muito próximas das reais, tais que implicam em questões matemáticas de difíceis soluções. Uma forma de contornar estes problemas matemáticos é assumirmos que, sob certas condições, o sistema possa ser representado de forma aproximada por um modelo simples. No nosso caso, estamos interessados em tratarmos problemas relacionados à acoplamento do tipo átomo-campo eletromagnético. Como um modelo simplificado do problema, consideramos um sistema composto de um oscilador harmônico acoplado linearmente com um campo escalar de massa nula, através de alguma constante de acoplamento efetiva g (a qual estará relacionada à carga elétrica ou a constante de estrutura fina). Confinamos o sistema oscilador-campo numa esfera de raio R , localizando o oscilador no centro da esfera. Para recuperarmos a situação no espaço livre tomaremos o limite $R \rightarrow \infty$. Assim, a Lagrangeana do sistema é dado¹

¹Uma reparametrização para p e q canonicamente conjugados, pode incorporar a massa. Por exemplo, para o oscilador podemos fazer: $p_0 \equiv \frac{p_0}{\sqrt{m}}$ e $q_0 \equiv \sqrt{m}q_0$.

por

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}_0^2 - \frac{\omega_0^2}{2}q_0^2 + \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \partial_\mu \phi(\vec{r}, t) \partial^\mu \phi(\vec{r}, t) + \int d^3\vec{r} 2\pi\sqrt{g} \phi(\vec{r}, t) q_0 \delta(\vec{r}), \quad (1.1)$$

onde $q_0(t)$ está associado ao grau de liberdade do átomo, que consideraremos aproximado por um oscilador harmônico com frequência ω_0 e $\phi(\vec{r}, t)$ representa o campo escalar. Já o último termo de (1.1) revela a forma de acoplamento entre o campo escalar e o oscilador. Antes de continuarmos com a descrição do modelo devemos comentar sobre alguns aspectos do mesmo. Primeiro, em relação ao limite contínuo, $R \rightarrow \infty$. As ideias referentes a confinamentos de sistemas dentro de volumes finitos tem sido apresentadas em grande número na literatura [15]. Este artifício é introduzido para facilitar, matematicamente, problemas de autovalores bem definidos e numeráveis. O limite contínuo não é trivial, na verdade requer análises bem sutis. Para maiores detalhes destes problemas, ver por exemplo o apêndice de [15]. Recentemente, ideias similares tem sido empregadas em processos de radiação [16]. Segundo, mencionamos que, soluções para problemas em sistemas compostos de um oscilador acoplado com um campo escalar, tem sido consideradas recorrentemente na literatura. No contexto do movimento Browniano, veja [17, 18, 19, 20, 21]. Utilizando a equação de Euler-Lagrange para $q_0(t)$ e $\phi(\vec{r}, t)$, encontramos as seguintes equações de movimento,

$$\ddot{q}_0 + \omega_0^2 q_0 = 2\pi\sqrt{g} \int_0^R d^3\vec{r} \phi(\vec{r}, t) \delta(\vec{r}), \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(\vec{r}, t) - \nabla^2 \phi(\vec{r}, t) = 2\pi\sqrt{g} q_0 \delta(\vec{r}). \quad (1.3)$$

Como o nosso sistema está confinado em uma cavidade esférica, o campo deve obedecer a seguinte condição de fronteira,

$$\phi(\vec{R}) = 0 \quad \text{para } \forall t. \quad (1.4)$$

O campo pode ser expresso em termos dos seus modos harmônicos, tal que podemos propor a seguinte expressão para o mesmo,

$$\phi(\vec{r}, t) = \sum_{k=1}^N u_k(\vec{r}) q_k(t), \quad (1.5)$$

onde a dependência temporal é dada através dos coeficientes $q_k(t)$ e a espacial através de $u_k(\vec{r})$. No limite em que $N \rightarrow \infty$ recuperamos nossa situação original de acoplamento

oscilador-campo escalar através de uma redefinição das quantidades divergentes, de maneira análoga a renormalização em teoria de campos [1].

De (1.4) devemos ter

$$u_k(R) = 0 . \quad (1.6)$$

Substituindo a equação (1.5) nas equações de movimento (1.2) e (1.3), encontramos

$$\ddot{q}_0 + \omega_0^2 q_0 = 2\pi \sqrt{g} \sum_{k=1}^N u_k(0) q_k(t), \quad (1.7)$$

onde o subscrito k está associado aos modos harmônicos do campo, e assumem valores $k = 1, 2, 3, \dots, N$. Para a segunda equação acoplada, equação (1.3) devemos ter um maior cuidado. Se utilizarmos o *ansatz* de que $u_k(\vec{r})$ seja solução da equação,

$$\nabla^2 u_k(\vec{r}) = -\omega_k^2 u_k(\vec{r}), \quad (1.8)$$

e que a parte espacial do campo também obedeça a condição (1.4), podemos encontrar a forma explícita de $u_k(\vec{r})$. Assim, em princípio devemos considerar todas as soluções de (1.8). Entretanto, notemos que na equação (1.7), somente os valores dos modos u_k em $r = 0$ estão acoplados ao oscilador. Assim, basta procurarmos as soluções da equação (1.8) tais que $u_k(0) \neq 0$. Não é difícil demonstrar que as únicas soluções tais que $u_k(0) \neq 0$, são as soluções esfericamente simétricas da equação (1.8). Estas soluções satisfazem a equação

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{d}{dr} u_k(r) \right] = -\omega_k^2 u_k(r). \quad (1.9)$$

É fácil mostrar que a equação (1.9) possui soluções normalizadas a um dadas por,

$$u_k(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \frac{\sin(\omega_k r)}{r}, \quad (1.10)$$

onde

$$\omega_k = \frac{k\pi}{R}, \quad \text{com } k = 1, 2, 3, \dots . \quad (1.11)$$

Da equação (1.10) encontramos que,

$$\lim_{r \rightarrow 0} u_k(r) = \frac{\omega_k}{\sqrt{2\pi R}}. \quad (1.12)$$

Desta forma, usando a equação (1.5) podemos escrever as equações acopladas como

$$\ddot{q}_0(t) + \omega_0^2 q_0(t) = 2\pi \sqrt{g} \sum_{k=1}^N u_k(0) q_k(t), \quad (1.13)$$

$$\ddot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = 2\pi \sqrt{g} q_0(t) u_k(0), \quad (1.14)$$

e com a ajuda de (1.12) encontramos,

$$\ddot{q}_0(t) + \omega_0^2 q_0(t) = \eta \sum_{k=1}^N \omega_k q_k(t), \quad (1.15)$$

$$\ddot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = \eta \omega_k q_0(t). \quad (1.16)$$

Nas equações acima, $\eta = \sqrt{2g\Delta\omega}$ e $\Delta\omega = \frac{\pi}{R}$ é o intervalo entre duas frequências consecutivas do campo, $\omega_{k+1} - \omega_k = \Delta\omega$.

Com os resultados acima (para detalhes veja apêndice A) podemos escrever a Lagrangeana (1.1), da seguinte forma

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}_0^2 - \frac{\omega_0^2}{2} q_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \dot{q}_k^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \omega_k^2 q_k^2 + \eta \sum_{k=1}^N q_0 q_k \omega_k. \quad (1.17)$$

Agora busquemos a forma da Hamiltoniana que descreve nosso sistema em questão. Em termos dos momentos canonicamente conjugados, definidos por

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_0} = \dot{q}_0 = p_0, \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \dot{q}_k = p_k \quad (1.19)$$

e usando,

$$H = \sum_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} - L, \quad (1.20)$$

encontramos

$$H = \frac{1}{2} \left[p_0^2 + \omega_b^2 q_0^2 + \sum_{k=1}^N (p_k^2 + q_k^2 \omega_k^2) - 2 \sum_{k=1}^N \eta \omega_k q_0 q_k \right]. \quad (1.21)$$

A equação (1.21) é a mesma utilizada em [1]. Porém, com o intuito de evitarmos problemas quando tomarmos o limite de $N \rightarrow \infty$, devemos acrescentar o termo $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \eta^2 q_0^2$ na expressão (1.21), o qual irá ser necessário para a renormalização da frequência do oscilador. A mudança no subíndice da frequência do oscilador, *i.e.*, de ω_0 para ω_b será melhor compreendida na próxima subseção.

1.1.1 Renormalizando a Hamiltoniana do sistema

Como foi mencionado anteriormente, o acréscimo do termo $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \eta^2 q_0^2$ na Hamiltoniana, desde o ponto de vista técnico, evitará divergências quando tomarmos o limite de $N \rightarrow \infty$.

Veja equação (1.27). Contudo, desde o ponto de vista físico, esse termo é necessário por consistência física do modelo sugerido. Vejamos o motivo fundamental desse termo. Consideraremos o cálculo para a energia efetiva do oscilador $q_0(t)$, quando os modos do campo tomam valores para q_k e p_k que minimizam a energia do sistema, isto é, consideraremos a energia do oscilador levando em conta a interação com os modos do campo. Este procedimento deve nos revelar a forma da frequência do oscilador, quando este encontra-se em seu estado de mínima energia. Vamos verificar esta situação de mínima energia para a Hamiltoniana sem o termo $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \eta^2 q_0^2$, *i.e.*, quando dada pela equação (1.21).

Nesta situação exigimos que

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = 0 \quad (1.22)$$

e

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0, \quad (1.23)$$

onde (1.22) e (1.23) nos garantem uma situação de mínima energia associada ao oscilador.

Assim, de (1.22) e (1.23) concluímos, respectivamente, que

$$p_k = 0, \quad (1.24)$$

$$q_k = \eta \frac{q_0}{\omega_k}. \quad (1.25)$$

Substituindo estes resultados em (1.21) encontramos,

$$H_{min} = \frac{1}{2} \left[p_0^2 + q_0^2 \left(\omega_b^2 - \sum_{k=1}^N \eta^2 \right) \right], \quad (1.26)$$

onde deduzimos que a frequência efetiva (física) do oscilador devido a interação com os modos do campo, é na verdade dada por²

$$\omega_0^2 = \left(\omega_b^2 - \sum_{k=1}^N \eta^2 \right). \quad (1.27)$$

Da expressão anterior, substituindo ω_b^2 na equação (1.21), temos

$$H = \frac{1}{2} \left[p_0^2 + \omega_0^2 q_0^2 + \sum_{k=1}^N (p_k^2 + q_k^2 \omega_k^2) - 2 \sum_{k=1}^N \eta \omega_k q_0 q_k \right] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \eta^2 q_0^2. \quad (1.28)$$

Desde o ponto de vista técnico, o último termo na expressão anterior evitará problemas de divergência após a diagonalização da Hamiltoniana do sistema, como mencionado acima,

²Utilizamos b como subíndice de ω_b , para indicarmos que esta frequência é na verdade a frequência nua (*bare*), ou não vestida, do oscilador.

mas também traz naturalmente a forma real da frequência do sistema quando este possui um certo regime de mínima interação entre as suas partes constituintes. Além disso, o último termo na equação (1.28) garante a positividade da Hamiltoniana e pode ser visto como uma renormalização da frequência do oscilador [22, 23].

1.2 A diagonalização da Hamiltoniana do sistema

Tendo encontrado a Hamiltoniana do sistema oscilador-campo escalar em termos de osciladores acoplados, devemos agora procurar a sua forma diagonalizada, de maneira que nosso sistema possa ser descrito por uma Hamiltoniana associada a um conjunto de osciladores livres. Para isso, faremos uma transformação linear das coordenadas e dos momentos canonicamente conjugados. Assim, nosso trabalho agora consiste em encontrarmos matrizes que realizem uma transformação para os eixos principais, tornando possível a determinação do espectro de autofreqüências. Agora, elevando a categoria de operadores as coordenadas e os momentos presentes em (1.28), tal que estes obedeçam a regra de comutação usual entre operadores posição e momento, temos

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \left[\hat{p}_0^2 + \omega_0^2 \hat{q}_0^2 + \sum_{k=1}^N (\hat{p}_k^2 + \omega_k^2 \hat{q}_k^2) - 2 \sum_{k=1}^N \eta \omega_k \hat{q}_0 \hat{q}_k \right] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \eta^2 \hat{q}_0^2. \quad (1.29)$$

Propomos para tal diagonalização a introdução das seguintes transformações

$$\hat{q}_\mu = \sum_{r=0}^N t_{\mu r} \hat{Q}_r, \quad (1.30)$$

$$\hat{p}_\mu = \sum_{r=0}^N t_{\mu r} \hat{P}_r, \quad (1.31)$$

em (1.29) onde \hat{Q}_r e \hat{P}_r são os operadores posição e momento normais, respectivamente, e $[t_{\mu r}]$ representa uma matriz ortogonal, *i.e.*, satisfaz as seguintes relações,

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^N t_{\mu r} t_{\nu r} &= \delta_{\mu\nu}, \\ \sum_{\mu=0}^N t_{\mu r} t_{\mu s} &= \delta_{rs}, \end{aligned} \quad (1.32)$$

onde $\mu = (0, k)$, $k = 1, 2, 3, \dots, N$ e $r = 0, 1, 2, 3, \dots, N$. Os subscritos 0 e k denotam, respectivamente, o oscilador e os modos harmônicos do campo. Já o índice r refere-se aos

modos normais. Substituindo as transformações (1.30) e (1.31), na Hamiltoniana (1.29) encontramos,

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^N \left(\hat{P}_r^2 + \Omega_r^2 \hat{Q}_r^2 \right). \quad (1.33)$$

Para detalhes veja apêndice B. Uma vez realizada esta diagonalização, verificamos que os elementos da matriz $[t_{\mu r}]$ vem dados por

$$t_{kr} = \frac{\eta \omega_k}{(\omega_k^2 - \Omega_r^2)} t_{0r}, \quad (1.34)$$

$$t_{0r} = \left[1 + \sum_{k=1}^N \frac{\eta^2 \omega_k^2}{(\omega_k^2 - \Omega_r^2)^2} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (1.35)$$

e as frequências normais, Ω_r , vem dados como soluções da equação:

$$\omega_0^2 - \Omega_r^2 = \eta^2 \sum_{k=1}^N \frac{\Omega_r^2}{\omega_k^2 - \Omega_r^2}. \quad (1.36)$$

Devemos analisar a equação (1.36) em relação as suas possíveis soluções.

Podemos dividir esta análise na seguinte forma:

- Se $\omega_0^2 \geq 0$, então a equação (1.36) admite apenas raízes não-negativas. Sendo observado que, se supusermos $\Omega^2 < 0$, veremos que o segundo membro de (1.36) é negativo, enquanto o primeiro membro não. Logo, $\Omega^2 < 0$ não pode ser raiz da equação. Neste caso, se $\omega_0^2 > 0$, então teremos raízes estritamente positivas e assim, o sistema oscila harmonicamente em todos os seus modos.
- Por outro lado, se $\omega_0^2 < 0$, a equação (1.36) possui uma única raiz negativa. Para comprovarmos esta afirmação, introduzimos a seguinte função:

$$I(\Omega^2) = \omega_0^2 - \Omega^2 \left[1 + \sum_{k=1}^N \frac{\eta^2}{\omega_k^2 - \Omega^2} \right], \quad (1.37)$$

onde concluímos que, se $\Omega^2 = 0$,

$$I(0) = \omega_0^2 < 0, \quad \text{por hipótese,} \quad (1.38)$$

além de

$$I(\Omega^2) = \begin{cases} -\infty, & \text{quando } \Omega^2 \rightarrow +\infty \\ +\infty, & \text{quando } \Omega^2 \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (1.39)$$

Das equações acima, concluímos que $I(\Omega^2)$ possui pelo menos uma raiz negativa. Para verificarmos que ela é única, analisemos a sua primeira derivada com respeito a Ω^2 , ou seja,

$$\frac{dI(\Omega^2)}{d(\Omega^2)} = -1 - \eta^2 \sum_{k=1}^N \left[\frac{\omega_k^2}{(\omega_k^2 - \Omega^2)^2} \right] < 0, \quad \text{para } \forall \Omega^2. \quad (1.40)$$

Logo, a função $I(\Omega^2)$ no intervalo $[-\infty, 0]$ é monotonicamente decrescente e, portanto, possui uma única raiz.

Assim, o segundo caso analisado não nos interessa, pois não admite estados estacionários. Desta forma, daqui para frente, iremos assumir que $\omega_0^2 > 0$, para garantirmos que todas as autofreqüências sejam estritamente positivas.

Notemos também que, caso não houvéssemos introduzido $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \eta^2 \hat{q}_0^2$ na equação (1.29), então teríamos em lugar da equação (1.36), o seguinte

$$\omega_0^2 - N\eta^2 - \Omega_r^2 = \eta^2 \sum_{k=1}^N \frac{\Omega_r^2}{\omega_k^2 - \Omega_r^2}. \quad (1.41)$$

Notando que, quando $N \rightarrow \infty$, o lado esquerdo da equação acima é negativo independentemente dos valores assumidos por ω_0^2 e Ω_r^2 . Assim, nesse caso, segundo a análise feita acima, teremos uma solução negativa para Ω_r^2 , *i.e.*, uma solução instável. Esta é uma outra justificativa da necessidade de renormalizarmos a freqüência do oscilador.

1.2.1 O espectro das autofreqüências

Uma vez encontrado a dependência entre as freqüências, equação (1.36), estamos prontos para determinarmos o espectro das autofreqüências deste sistema. Para esse efeito, escrevemos as freqüências normais, Ω_r , na forma,

$$\Omega = x \frac{\pi}{R}, \quad (1.42)$$

com x sendo um número real positivo. Usando o limite de $N \rightarrow \infty$ e as equações (1.11) e (1.42), temos a seguinte igualdade

$$\sum_{k=1}^N \frac{\Omega^2}{\omega_k^2 - \Omega^2} = \sum_{k=1}^N \frac{x^2}{k^2 - x^2}, \quad (1.43)$$

e com o auxílio da identidade [24],

$$\frac{1}{2} [1 - x\pi \cot(x\pi)] = \sum_{k=1}^N \frac{x^2}{k^2 - x^2}, \quad (1.44)$$

na equação (1.43), temos

$$\sum_{k=1}^N \frac{\Omega^2}{\omega_k^2 - \Omega^2} = \frac{1}{2} [1 - (\Omega R) \cot(\Omega R)], \quad (1.45)$$

e usando (1.36), $\eta = \sqrt{2g\Delta\omega}$ e $\Delta\omega = \frac{\pi}{R}$, encontramos

$$\cot(\Omega R) = \frac{\Omega}{g\pi} + \frac{1}{\Omega R} \left[1 - \frac{R\omega_0^2}{g\pi} \right], \quad (1.46)$$

que, com o uso de (1.42), reescrevemos a equação acima na forma

$$\cot(x\pi) = \frac{x}{gR} + \frac{1}{x\pi} \left(1 - \frac{R\omega_0^2}{g\pi} \right). \quad (1.47)$$

Agora, para encontrarmos a forma do espectro, devemos resolver a equação transcendental acima. Em geral esta equação não pode ser resolvida de forma exata, assim vamos analisar as soluções graficamente. Da análise da Figura 1.1, podemos concluir que o espectro de Ω_r é dado pelos pontos de interseção das curvas. Assim, podemos escrever as soluções na forma

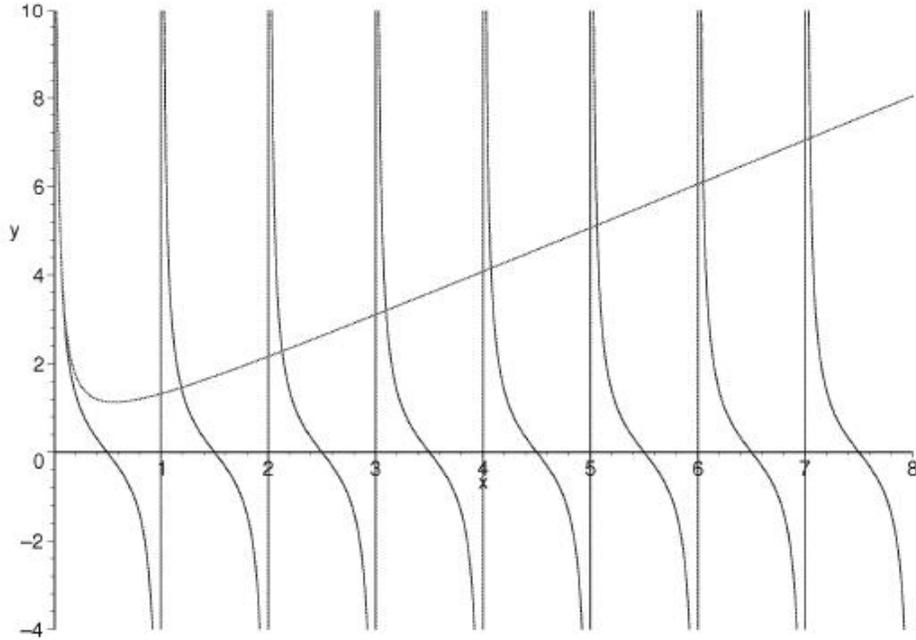


Figura 1.1: Análise da equação (1.47) em termos do parâmetro x , representado pelo eixo horizontal e definido por $x = \frac{\Omega}{\Delta\omega}$.

$$\Omega_r = (r + \epsilon_r) \frac{\pi}{R}, \quad (1.48)$$

com $r = 0, 1, 2, \dots$ e $0 < \epsilon_r < 1$. Do resultado acima, podemos concluir que para R suficientemente pequeno, com exceção da menor autofrequência, as outras soluções serão

aproximadamente iguais as frequências do campo, *i.e.*, ω_k . Por outro lado, para $R \rightarrow \infty$, podemos concluir que as soluções ocuparão todo o eixo real positivo.

1.3 Distribuição de energia dos modos normais e o conceito de osciladores vestidos

Uma vez encontrada a equação (1.33), podemos introduzir operadores de criação e de aniquilação coletivos em termos dos operadores \hat{P}_r e \hat{Q}_r , dados por operadores,

$$\hat{A}_r^\dagger = \sqrt{\frac{\Omega_r}{2}} \left(\hat{Q}_r - i \frac{\hat{P}_r}{\Omega_r} \right), \quad (1.49)$$

$$\hat{A}_r = \sqrt{\frac{\Omega_r}{2}} \left(\hat{Q}_r + i \frac{\hat{P}_r}{\Omega_r} \right), \quad (1.50)$$

com estes, podemos reescrever a Hamiltoniana do sistema na forma

$$\hat{H} = \sum_{r=0}^N \Omega_r \left(\hat{A}_r^\dagger \hat{A}_r + \frac{1}{2} \right). \quad (1.51)$$

Os autoestados de (1.51), são estados coletivos que denotamos por $|n_0\rangle_c \otimes |n_1\rangle_c \otimes |n_2\rangle_c \otimes \cdots |n_N\rangle_c = |n_0, n_1, n_2, \dots, n_N\rangle_c$.

As autofunções correspondentes a tais estados são, portanto

$$\Phi_{n_0, n_1, \dots, n_N}(Q)_c \equiv \langle Q | n_0, n_1, \dots, n_N \rangle_c = \prod_{r=0}^N \left[\left(\frac{\Omega_r}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{2^{-n_r}}{n_r!}} H_{n_r}(\sqrt{\Omega_r} Q_r) e^{-\frac{1}{2} \Omega_r Q_r^2} \right], \quad (1.52)$$

cujas respectivas autoenergias são

$$E_{n_0, n_1, \dots, n_N} = \sum_{r=0}^N \Omega_r \left(n_r + \frac{1}{2} \right). \quad (1.53)$$

Usando a identidade

$$(t_{0r})^2 + \sum_{k=1}^N (t_{kr})^2 = 1$$

na equação (1.53), encontramos,

$$E_{n_0, n_1, \dots, n_N} = \sum_{r=0}^N \Omega_r \left(n_r + \frac{1}{2} \right) \left[(t_{0r})^2 + \sum_{k=1}^N (t_{kr})^2 \right], \quad (1.54)$$

ou ainda melhor expresso por³,

$$E_{n_0, n_1, \dots, n_N} = \sum_{r=0}^N \hbar \Omega_r \left(n_r + \frac{1}{2} \right) (t_{0r})^2 + \sum_{r=0}^N \hbar \Omega_r \left(n_r + \frac{1}{2} \right) \sum_{k=1}^N (t_{kr})^2. \quad (1.55)$$

Da equação acima podemos concluir que a energia do sistema se divide em duas partes, nas quais podemos associar com novos estados coletivos. Denominamos estes novos estados coletivos de estados vestidos. Fisicamente, vamos identificar os estados vestidos com os estados associados ao oscilador e aos modos físicos do campo, *i.e.*, com os estados fisicamente mensuráveis. Para o oscilador vestido vamos associar a fração de energia correspondente ao primeiro termo da equação (1.55),

$$\sum_{r=0}^N \frac{\hbar \Omega_r}{2} (t_{0r})^2. \quad (1.56)$$

Com os modos vestidos do campo, associamos a fração de energia correspondente ao segundo termo da equação (1.55)

$$\sum_{r=0}^N \frac{\hbar \Omega_r}{2} \sum_{k=1}^N (t_{kr})^2. \quad (1.57)$$

Agora podemos dizer que o sistema pode ser visto como composto por um oscilador e um campo vestido. Aqui, fica claro que o termo vestido está associado a mudança de energia quando tratamos do problema acoplado. Situação análoga a encontrada anteriormente, quando discutimos a necessidade de se redefinir a frequência física do oscilador.

Naturalmente, surge a seguinte questão. Se estamos redefinindo o que são os estados fisicamente mensuráveis, devemos também redefinir as variáveis cinemáticas associadas a esses estados? Colocado de outra forma, são q_μ e p_μ , as quantidades físicas? Na próxima seção veremos que é necessário redefinir as quantidades q_μ e p_μ , as quais chamaremos de coordenadas vestidas e momentos vestidos, ou renormalizados, em termos dos quais escreveremos os estados vestidos ou renormalizados.

1.4 Coordenadas e estados renormalizados

Para justificar a necessidade de introduzirmos coordenadas renormalizadas e estados renormalizados vamos considerar o seguinte problema. Imagine que o oscilador de frequência ω_0 ,

³Aqui abriremos mão de $\hbar = 1$ para tornarmos mais visível o aspecto da divisão energética entre as partes do sistema acoplado.

representado na equação (1.29), represente um átomo e os outros osciladores representem os modos do campo eletromagnético. Se não existir interação entre eles, a Hamiltoniana livre, possui as seguintes autofunções:

$$\Psi_{n_0, n_1, \dots, n_N}(q) \equiv \langle q | n_0, n_1, \dots, n_N \rangle = \prod_{\mu=0}^N \left[\left(\frac{\omega_\mu}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{2^{-n_\mu}}{n_\mu!}} H_{n_\mu}(\sqrt{\omega_\mu} q_\mu) e^{-\frac{1}{2}\omega_\mu q_\mu^2} \right]. \quad (1.58)$$

O significado físico de $\Psi_{n_0, n_1, n_2, \dots, n_N}(q)$ neste caso é claro, este representa um átomo em seu n_0 -ésimo nível excitado e n_k fótons de frequência ω_k . Agora, considere o estado $\Psi_{n_0, 0, 0, \dots, 0}(q)$: O átomo excitado em seu n_0 -ésimo nível excitado no vácuo quântico. A partir de experiências, sabemos que qualquer nível excitado de um átomo é instável. A explicação deste fato é que o átomo não está isolado da interação com o campo eletromagnético. Esta interação em nosso modelo aproximado é dada por um acoplamento linear de \hat{q}_0 com \hat{q}_k . Obviamente, quando se leva em conta essa interação, $\Psi_{n_0, 0, 0, \dots, 0}(q)$ é instável. Mas existe um problema, o estado $\Psi_{0, 0, 0, \dots, 0}(q)$, que representa um átomo em seu estado fundamental e nenhum fóton, é também instável, contradizendo o fato experimental da estabilidade do mesmo em seu estado fundamental e na ausência de fótons. O que está errado? A primeira ideia que vem em nossa mente, seria admitir que o modelo dado pela equação (1.29) está errado. Certamente, sabemos que o modelo correto para tratar o problema em questão é a Eletrodinâmica Quântica. Porém, tal descrição é extremamente complicada, além de limitar-se a resultados aproximados e abordados perturbativamente. Como o nosso objetivo é manter o modelo o mais simples possível e ainda insistir em descrevê-lo pela Hamiltoniana dada pela equação (1.29), o que podemos fazer para que a estabilidade do átomo em seu estado fundamental não seja violada? A resposta está no espírito do programa de renormalização empregado em Teoria Quântica de Campos [9]: As coordenadas \hat{q}_μ , que aparecem na Hamiltoniana, não são as coordenadas físicas, são as coordenadas “nuas”. Nós introduzimos coordenadas renormalizadas (ou vestidas)⁴, \hat{q}'_0 e \hat{q}'_k , respectivamente para o átomo vestido e os fótons vestidos. Definimos coordenadas renormalizadas \hat{q}'_μ como as fisicamente significativas.

Na representação destas coordenadas, definimos as autofunções vestidas da seguinte ma-

⁴Usaremos estas duas nomenclaturas aqui, como sinônimos.

neira,

$$\Psi_{n_0 n_1, \dots, n_N}(q') \equiv \langle q' | n_0, n_1, \dots, n_N \rangle_d = \prod_{\mu=0}^N \left[\left(\frac{\omega_\mu}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{2^{-n_\mu}}{n_\mu!}} H_{n_\mu}(\sqrt{\omega_\mu} q'_\mu) e^{-\frac{1}{2} \omega_\mu q'^2_\mu} \right], \quad (1.59)$$

onde o subscrito d refere-se a estado vestido. Os estados vestidos dados pela equação (1.59) são definidos como estados fisicamente mensuráveis e descrevem em geral, o átomo em seu n_0 -ésimo nível excitado e n_k fótons de frequência ω_k . Obviamente, no limite em que a constante de acoplamento $g \rightarrow 0$, as coordenadas renormalizadas q'_μ devem resultar nas coordenadas “nuas” q_μ , em outras palavras essa possível transformação de coordenadas deve ser automaticamente “desligada” quando não houver acoplamento para as mesmas.

Agora, a fim de relacionarmos as coordenadas renormalizadas com as “nuas”, teremos que utilizar a exigência física de estabilidade do estado fundamental do átomo vestido. Essa exigência faz-se necessário que o estado fundamental vestido seja uma autofunção da Hamiltoniana com interação, dada pela expressão (1.29). Além disso, o estado fundamental vestido deve ser o de mínima energia, isto é, ele deve ser definido como sendo idêntico (ou proporcional) a autofunção do estado fundamental da Hamiltoniana com interação. Partindo desta definição, pode-se construir as coordenadas renormalizadas em termos das “nuas”. Faremos isso agora.

O primeiro passo para esta construção é resolvermos as autofunções da Hamiltoniana com interação (1.29). Boa parte deste processo de resolução consiste em diagonalizarmos a Hamiltoniana (1.29) através da introdução das coordenadas e momenta normais \hat{Q}_r e \hat{P}_r , procedimento esse que já está feito na seção (1.2), e visto com maiores detalhes no apêndice B.

Uma vez diagonalizada a Hamiltoniana, encontramos a equação (1.33), cujas autofunções são dadas por

$$\Phi_{n_0, n_1, \dots, n_N}(Q)_c \equiv \langle Q | n_0, n_1, \dots, n_N \rangle_c = \prod_{r=0}^N \left[\left(\frac{\Omega_r}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{2^{-n_r}}{n_r!}} H_{n_r}(\sqrt{\Omega_r} Q_r) e^{-\frac{1}{2} \Omega_r Q_r^2} \right], \quad (1.60)$$

onde o subscrito c denota estados coletivos⁵. Agora, usando a definição de coordenadas renormalizadas, podemos inferir que

$$\Psi_{0,0,\dots,0}(q')_d \propto \Phi_{0,0,\dots,0}(Q)_c. \quad (1.61)$$

Usando as equações (1.59) e (1.60), encontramos

$$e^{-\frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^N \omega_{\mu} (q'_{\mu})^2} = e^{-\frac{1}{2} \sum_{r=0}^N \Omega_r (Q_r)^2},$$

a partir das quais, as coordenadas renormalizadas são obtidas como

$$q'_{\mu} = \sum_{r=0}^N \sqrt{\frac{\Omega_r}{\omega_{\mu}}} t_{\mu r} Q_r, \quad (1.62)$$

que em termos das coordenadas nuas, podemos escrever

$$q'_{\mu} = \sum_{\nu=0}^N M_{\mu\nu} q_{\nu}, \quad (1.63)$$

com $M_{\mu\nu}$ definido por

$$M_{\mu\nu} = \sum_{r=0}^N \sqrt{\frac{\Omega_r}{\omega_{\mu}}} t_{\mu r} t_{\nu r}. \quad (1.64)$$

Na verdade, teríamos uma constante aditiva quando saímos da proporcionalidade (1.61) e levamos em conta a igualdade. Porém, se fizermos esta constante igual a zero não teremos perda de generalidade. Mencionamos que, em princípio, poderíamos ter qualquer matriz ortogonal que torne possível encontrarmos a equação (1.62), no entanto, como no limite de $g \rightarrow 0$ as coordenadas renormalizadas devem ser iguais as nuas, é necessário que $t_{\mu r} \rightarrow \delta_{\mu r}$, também neste limite.

Antes de terminarmos este capítulo, é necessário salientarmos que estas coordenadas introduzidas não são fruto de uma mera mudança de variáveis, elas são novas coordenadas intrinsecamente ligadas a exigência da consistência física do modelo. No próximo capítulo iremos ver como a introdução de tais coordenadas contribuem para a realização dos cálculos associados aos diversos processos radioativos do sistema.

⁵Também mencionadas como normais no decorrer do texto.

Capítulo 2

Processos de radiação na representação de coordenadas

Sistemas mecânicos quânticos permanecem estáveis na ausência de interação. Ao interagir com um ambiente, eles perdem a estabilidade como consequência desta interação. Um corpo material, por exemplo, um átomo ou uma molécula excitada, muda de estado em razão da sua interação com o meio no qual estão envolvidos, o acoplamento átomo-campo eletromagnético, no caso de um átomo, ou a interação quark-glúon para um núcleon dentro de um núcleo atômico, são exemplos. Conhecermos os mecanismos de perda de estabilidade é importante, mas em geral, torna-se um trabalho árduo, devido ao fato das ferramentas para realizar tais tarefas serem apenas métodos aproximados, levando a dificuldades no processo de modelagem e compreensão do comportamento do sistema. Aqui, estamos interessados em mostrar os passos necessários para os diversos processos de radiação do sistema causados pela interação átomo-campo eletromagnético. Algo bem semelhante ao que foi feito nos trabalhos pioneiros, relacionados ao assunto de coordenadas renormalizadas, especialmente [1, 9, 11]. A título de tornar exposto a forma como as referências citadas acima resolveram alguns dos problemas relativos aos processos radioativos, iremos resumir os passos realizados por estes no processo de cálculo de amplitudes de probabilidades de transição, como uma das aplicações do formalismo de coordenadas renormalizadas.

2.1 Amplitude de probabilidade na representação de coordenadas

Para uma abordagem inicial podemos nos perguntar como calcular a amplitude de probabilidade associada a uma determinada transição. Por exemplo, seja o estado inicial do sistema, num instante $t = 0$, dado por $|n_0, n_1, \dots, n_N\rangle_d$. Agora se perguntarmos, qual a probabilidade de encontrarmos para um instante t diferente de zero, o sistema no estado $|m_0, m_1, \dots, m_N\rangle_d$? Denotando esta amplitude de probabilidade por $\mathcal{A}_{n_0, n_1, \dots, n_N}^{m_0, m_1, \dots, m_N}(t)$, temos

$$\mathcal{A}_{n_0, n_1, \dots, n_N}^{m_0, m_1, \dots, m_N}(t) = {}_d \langle m_0, m_1, \dots, m_N | e^{-i\hat{H}t} | n_0, n_1, \dots, n_N \rangle_d, \quad (2.1)$$

ou

$$\mathcal{A}_{n_0, n_1, \dots, n_N}^{m_0, m_1, \dots, m_N}(t) = \sum_{l_0, l_1, \dots, l_N=0}^{\infty} T_{n_0, n_1, \dots, n_N}^{l_0, l_1, \dots, l_N} T_{m_0, m_1, \dots, m_N}^{l_0, l_1, \dots, l_N} e^{-itE_{l_0, l_1, \dots, l_N}}, \quad (2.2)$$

onde $E_{l_0, l_1, \dots, l_N} = \sum_{r=0}^N (l_r + \frac{1}{2})\Omega_r$ são os autovalores coletivos de energia. Mais adiante desconsideraremos a energia do vácuo por ser fisicamente irrelevante, quando calculamos as probabilidades de transição. Os $T_{n_0, n_1, \dots, n_N}^{l_0, l_1, \dots, l_N}$ são dados por

$$T_{n_0, n_1, \dots, n_N}^{l_0, l_1, \dots, l_N} = {}_c \langle l_0, l_1, \dots, l_N | n_0, n_1, \dots, n_N \rangle_d = \int dQ \Phi_{l_0, l_1, \dots, l_N}(Q) \Psi_{n_0, n_1, \dots, n_N}(q). \quad (2.3)$$

A dificuldade que surge neste método inicia-se exatamente na equação (2.3), e o motivo é claro. Usando as equações (1.59), (1.60) e (1.62) em (2.3) temos

$$T_{n_0, n_1, \dots, n_N}^{l_0, l_1, \dots, l_N} = \int dQ \left[\prod_{r, \mu=0}^N \left(\frac{\Omega_r}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2^{-l_r}}{l_r!}} \sqrt{\frac{2^{-n_\mu}}{n_\mu!}} H_{l_r}(\sqrt{\Omega_r} Q_r) \times \right. \\ \left. H_{n_\mu} \left(\sum_{s=0}^N t_{\mu s} \sqrt{\Omega_s} Q_s \right) \right] e^{-\sum_{r=0}^N \Omega_r Q_r^2}. \quad (2.4)$$

Usando a propriedade [28]

$$H_{n_\mu} \left(\sum_{s=0}^N t_{\mu s} \sqrt{\Omega_s} Q_s \right) = n_\mu! \sum_{\Lambda[n_\mu]} \prod_{r=0}^N \left[\frac{(t_{\mu r})^{s_r}}{s_r!} H_{s_r}(\sqrt{\Omega_r} Q_r) \right], \quad (2.5)$$

na equação (2.4) vemos que para obter os coeficientes $T_{n_0, n_1, \dots, n_N}^{l_0, l_1, \dots, l_N}$ devemos calcular integrais envolvendo produtos de polinômios de Hermite. No caso em que há produtos de dois polinômios de Hermite, podemos usar relações de ortogonalidade. Para produtos de três polinômios ainda é possível calcular, mas para um número arbitrário de polinômios de

Hermite o cálculo é praticamente inviável. Assim, o cálculo de amplitudes arbitrárias será praticamente impossível. Para alguns detalhes das possíveis dificuldades que irão surgir, ver [47], nas páginas [626-629]. Em [9] foi estabelecido uma forma de contornar estas dificuldades, na qual foram encontradas *regras de soma*.

Devemos mencionar que em certas situações é possível calcular de forma exata as integrais (2.4). Embora no próximo capítulo introduziremos o formalismo dos operadores de criação e aniquilação vestidos para contornarmos a dificuldade acima mencionada, consideramos aqui uma situação na qual é possível se obter de forma exata a amplitude de probabilidade através do cálculo da integral (2.4).

Considere o cálculo da amplitude de probabilidade de um estado inicial $|0, \dots, n_\mu, \dots, 0\rangle_d$ em $t = 0$, ser encontrado em um instante t diferente de zero, em $|0, 0, \dots, m_\nu, \dots, 0\rangle_d$. A partir da equação (2.2), encontramos

$$\mathcal{A}_{0,0,\dots,n_\mu,\dots,0}^{0,0,\dots,m_\nu,\dots,0}(t) = \sum_{l_0,l_1,\dots,l_N=0}^{\infty} T_{0,0,\dots,n_\mu,\dots,0}^{l_0,l_1,\dots,l_N} T_{0,0,\dots,m_\nu,\dots,0}^{l_0,l_1,\dots,l_N} e^{-itE_{l_0,l_1,\dots,l_N}}, \quad (2.6)$$

onde os $T_{0,0,\dots,n_\mu,\dots,0}^{l_0,l_1,\dots,l_N}$ podem ser escritos como

$$T_{0,0,\dots,n_\mu,\dots,0}^{l_0,l_1,\dots,l_N} = \int_{-\infty}^{\infty} dQ \left\{ \prod_{r=0}^N \left(\frac{\Omega_r}{\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{2^{-l_r}}{l_r!} \right)^{1/2} \left(\frac{2^{-n_\mu}}{n_\mu!} \right)^{1/2} H_{l_r}(\sqrt{\Omega_r} Q_r) n_\mu! \times \right. \\ \left. \sum_{\Lambda[n_\mu]} \prod_{r=0}^N \left[\frac{(t_{\mu r})^{s_r}}{s_r!} H_{s_r}(\sqrt{\Omega_r} Q_r) e^{-\Omega_r Q_r^2} \right] \right\}, \quad (2.7)$$

onde usamos a equação (2.5). Tal que, com algumas simplificações, obtemos

$$T_{0,0,\dots,n_\mu,\dots,0}^{l_0,l_1,\dots,l_N} = \sqrt{n_\mu!} (2^{-n_\mu})^{1/2} \sum_{\Lambda[n_\mu]} \prod_{r=0}^N \left[\frac{(t_{\mu r})^{s_r}}{s_r!} (2^{l_r})^{1/2} \sqrt{l_r!} \delta_{l_r s_r} \right]. \quad (2.8)$$

De forma similar, podemos encontrar para os $T_{0,0,\dots,m_\nu,\dots,0}^{l_0,l_1,\dots,l_N}$,

$$T_{0,0,\dots,m_\nu,\dots,0}^{l_0,l_1,\dots,l_N} = \sqrt{m_\nu!} (2^{-n_\nu})^{1/2} \sum_{\Lambda[m_\nu]} \prod_{r=0}^N \left[\frac{(t_{\nu r})^{s_r}}{s_r!} (2^{l_r})^{1/2} \sqrt{l_r!} \delta_{l_r s_r} \right], \quad (2.9)$$

substituindo as equações (2.8) e (2.9) na equação (2.6) encontramos

$$\mathcal{A}_{0,0,\dots,n_\mu,\dots,0}^{0,\dots,m_\nu,\dots,0}(t) = e^{-itE_{l_0,l_1,\dots,l_N}} \sum_{l_1,l_2,\dots,l_N=0}^{\infty} \left(\frac{n_\mu! m_\nu!}{2^{m_\nu+n_\mu}} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\Lambda[m_\nu], \Lambda[n_\mu]} \prod_{r=0}^N \left[\frac{(t_{\mu r})^{s_r}}{s_r!} \frac{(t_{\nu r})^{s_r}}{s_r!} 2^{l_r} l_r! \delta_{l_r s_r} \right]. \quad (2.10)$$

E uma vez que $\sum_{\Lambda[m_\nu]} l_r = m_\nu = \sum_{\Lambda[n_\mu]} s_r = n_\mu$, ficamos com

$$\mathcal{A}_{0,0,\dots,n_\mu,\dots,0}^{0,0,\dots,m_\nu,\dots,0}(t) = e^{-itE_{0,0,\dots,0}} n_\mu! \sum_{\Lambda[n_\mu]} \prod_{r=0}^N \left[\frac{(t_{\mu r} t_{\nu r} e^{-i\Omega_r t})^{s_r}}{s_r!} \right], \quad (2.11)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{0,0,\dots,n_\mu,\dots,0}^{0,0,\dots,m_\nu,\dots,0}(t) &= e^{-itE_{0,0,\dots,0}} \left[\sum_{r=0}^N t_{\mu r} t_{\nu r} e^{-i\Omega_r t} \right]^{n_\mu} \\ &= e^{-itE_{0,0,\dots,0}} \delta_{n_\mu m_\nu} [f_{\mu\nu}(t)]^{n_\mu}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde

$$f_{\mu\nu}(t) = \sum_{r=0}^N t_{\mu r} t_{\nu r} e^{-i\Omega_r t}. \quad (2.13)$$

Em (2.12) é importante notarmos a existência de uma delta $\delta_{n_\mu m_\nu}$. Assim, se $n_\mu \neq m_\nu$, teremos $\mathcal{A}_{0,0,\dots,n_\mu,\dots,0}^{0,0,\dots,m_\nu,\dots,0}(t) = 0$, ou seja, nesta situação de acoplamento linear surge naturalmente uma espécie de regra de seleção que proíbe, por exemplo, que o átomo no seu segundo estado excitado decaia para o seu estado fundamental emitindo um único fóton. Notemos, de (2.12), que $|f_{\mu\nu}(t)|^2$ é a probabilidade de ocorrer uma transição de um quantum de energia do modo μ para o modo ν (note que, $f_{\mu\nu}(t) = f_{\nu\mu}(t)$). Isto é reforçado pela seguinte propriedade de $f_{\mu\nu}(t)$:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^N |f_{\mu\nu}(t)|^2 &= \sum_{\nu=0}^N \left(\sum_{s=0}^N t_{\mu s} t_{\nu s} e^{i\Omega_s t} \right) \left(\sum_{r=0}^N t_{\mu r} t_{\nu r} e^{-i\Omega_r t} \right) \\ &= \sum_{r=0}^N \sum_{s=0}^N e^{i(\Omega_s - \Omega_r)t} t_{\mu r} t_{\mu s} \underbrace{\sum_{\nu=0}^N t_{\nu r} t_{\nu s}}_{=\delta_{rs}} = \sum_{r=0}^N (t_{\mu r})^2 = 1, \end{aligned} \quad (2.14)$$

ou ainda, escrito de outra forma,

$$|f_{00}(t)|^2 + \sum_{k=1}^N |f_{0k}(t)|^2 = 1, \quad (2.15)$$

$$|f_{k0}(t)|^2 + \sum_{k'=1}^N |f_{kk'}(t)|^2 = 1. \quad (2.16)$$

Na próxima subseção determinaremos $f_{\mu\nu}(t)$, no limite contínuo, $R \rightarrow \infty$, usando um formalismo baseado no teorema dos resíduos.

2.1.1 Método dos resíduos no limite contínuo

Observemos que para determinar a amplitude de probabilidade (2.12) ainda devemos resolver $f_{\mu\nu}(t)$ dado pela equação (2.13). Para calcularmos o somatório devemos em primeiro lugar, computarmos as autofrequências e os elementos de matriz $t_{\mu\nu}$. Conforme notado no capítulo anterior, as autofrequências não podem ser resolvidas de forma exata, já que

estas são raízes de uma equação transcendental, equação (1.46). Mesmo determinando de forma aproximada estas autofrequências, ainda devemos encontrar os elementos de matriz $t_{\mu\nu}$ e posteriormente efetuar um somatório com infinitos termos. De onde concluímos que, resolver (2.13), encadeia uma série de dificuldades. No entanto, podemos contornar estas dificuldades empregando um método indireto baseado no teorema dos resíduos, o qual foi introduzido em [10]. Usaremos, daqui para frente, este método ao longo do restante deste trabalho. Para este fim, consideremos o cálculo de expressões da forma

$$R_{\mu\nu} = \sum_{r=0}^N t_{\mu r} t_{\nu r} G_{\mu\nu}(\Omega_r), \quad (2.17)$$

onde $G_{\mu\nu}(\Omega_r)$ é uma função analítica de Ω_r . Expressões do tipo (2.17), também aparecerão quando considerarmos outros tipos de amplitudes nos capítulos seguintes. Para resolvermos a soma em (2.17), definimos uma função $W(z)$, de variável complexa z ,

$$W(z) = z^2 - \omega_0^2 + \sum_{k=1}^N \frac{\eta^2 z^2}{(\omega_k^2 - z^2)}. \quad (2.18)$$

Utilizando as equações (1.34), (1.35) e (1.36), notamos que os Ω_r são raízes de $W(z)$, ou seja, se $z = \Omega_r$, temos

$$W(\Omega_r) = 0. \quad (2.19)$$

É importante observarmos que se $z = \Omega_r$, implica que $W(z) = 0$, mas a recíproca não é necessariamente verdadeira.

Se tomarmos $\mu = \nu = 0$ na equação (2.17), encontramos

$$R_{00} = \sum_{r=0}^N (t_{0r})^2 G_{00}(\Omega_r). \quad (2.20)$$

Poderíamos escrever diretamente $f_{00}(t)$, no lugar de R_{00} , mas queremos generalizar o método do uso de $W(z)$. Agora, notemos que $\frac{dW(z)}{dz}$ é igual a

$$\frac{dW(z)}{dz} = 2z + \eta^2 \sum_{k=1}^N \left[\frac{2z}{(\omega_k^2 - z^2)} + \frac{2z^3}{(\omega_k^2 - z^2)^2} \right],$$

ou ainda

$$\frac{dW(z)}{dz} = 2z \left[1 + \eta^2 \sum_{k=1}^N \frac{\omega_k^2}{(\omega_k^2 - z^2)^2} \right]. \quad (2.21)$$

Comparando a equação (2.21) com (1.35) e tomando $z = \Omega_r$, encontramos

$$\left. \frac{dW(z)}{dz} \right|_{z=\Omega_r} = 2\Omega_r (t_{0r})^{-2},$$

ou seja¹,

$$(t_{0r})^2 = \frac{2\Omega_r}{W'(\Omega_r)}. \quad (2.22)$$

E assim, substituindo (2.22) em (2.20), encontramos,

$$R_{00} = \sum_{r=0}^N \frac{2\Omega_r G_{00}}{W'(\Omega_r)}. \quad (2.23)$$

O resultado (2.23) nos remete a um teorema em cálculos de resíduos, onde uma determinada função analítica $f(z)$ possuindo a forma [30, 31]

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

onde $P(z_0) \neq 0$ e $Q(z)$ possua zero simples em $z = z_0$, e neste caso $R_e f(z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$ com $Q'(z_0) \neq 0$. Sendo $R_e f(z_0)$ o resíduo de $f(z_0)$. E com o uso do teorema dos resíduos, encontramos

$$\oint_C \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2i\pi \sum_{r=0}^N \frac{P(z_r)}{Q'(z_r)}, \quad (2.24)$$

sendo C uma curva fechada que contenha todos os z_r , zeros de $Q(z_r)$. No nosso caso, a curva C deve ser um contorno fechado que contenha o eixo real positivo em seu interior, ou seja, onde os Ω_r se localizam. Usando estes resultados podemos escrever,

$$R_{00} = \frac{1}{i\pi} \oint_C \frac{z G_{00}(z, t)}{W(z)} dz. \quad (2.25)$$

Desta forma, o artifício matemático empregado com $W(z)$, que ao longo deste texto iremos referir como método dos resíduos no limite contínuo, possibilita deixarmos de lado as somas discretas envolvidas nos cálculos das amplitudes de transições e trabalharmos com somas contínuas, *i.e.*, integrais.

Nas subseções seguintes iremos aplicar este método em alguns casos de interesse.

2.1.2 Amplitude de probabilidade de permanência do oscilador (átomo) em seu primeiro estado excitado

Tomando $\mu = \nu = 0$ na equação (2.12) obtemos a amplitude de probabilidade com que o oscilador permaneça, para o tempo igual a t , no seu n -ésimo estado excitado, dado por

$$\mathcal{A}_{n,0,\dots,0}^{n,0,\dots,0}(t) = [f_{00}(t)]^n, \quad (2.26)$$

¹Estamos fazendo $\frac{dW(z)}{dz} = W'(z)$.

onde descartamos o fator $e^{-itE_{0,0,\dots}}$ pelo fato de não contribuir para a probabilidade associada. Este problema foi resolvido inicialmente em [1], e encadeou uma série de trabalhos com diversas aplicações e extensões de grandes interesses, ver as referências [9, 10, 11, 12, 13, 27, 32, 33, 34, 35, 36, 37]. Aqui iremos tratar em detalhe a probabilidade de permanência do átomo em seu primeiro estado excitado, *i.e.*, em (2.26), tomamos $n = 1$.

Usando $G_{00}(z, t) = e^{-izt}$ na equação (2.20) podemos escrever $f_{00}(t)$, como

$$f_{00}(t) = \frac{1}{\pi i} \oint_C \frac{ze^{-izt}}{W(z)} dz, \quad (2.27)$$

porém, antes de resolvermos (2.27), temos que determinar a forma de $W(z)$. Podemos encontrar $W(z)$ no limite contínuo, ou seja, no limite em que $R \rightarrow \infty$. Neste limite, podemos escrever a equação (2.18), na forma²

$$W(z) = z^2 - \omega_0^2 + 2gz^2 \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega^2 - z^2}, \quad (2.28)$$

onde, com o uso do teorema dos resíduos, encontramos

$$W(z) = \begin{cases} z^2 + i\pi gz - \omega_0^2, & \text{se } \text{Im}(z) > 0 \\ z^2 - i\pi gz - \omega_0^2, & \text{se } \text{Im}(z) < 0. \end{cases} \quad (2.29)$$

Escolhendo um contorno da forma da Figura (2.1) e substituindo (2.29) em (2.27), encontramos

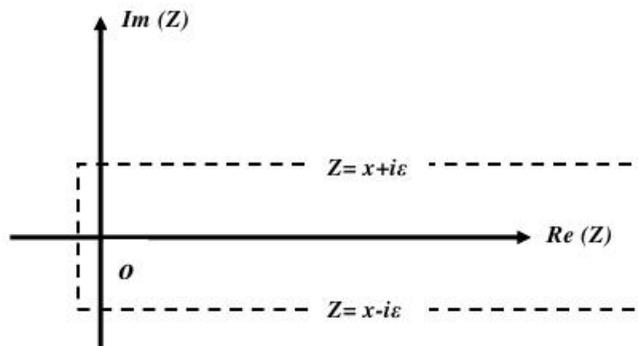


Figura 2.1: Contorno retangular que contemple todo o eixo real positivo, onde estão presentes todos os Ω_r .

$$f_{00}(t) = \frac{1}{i\pi} \left[\int_0^\infty \frac{(x - i\epsilon)e^{-(x-i\epsilon)t}}{(x - i\epsilon)^2 - i\pi g(x - i\epsilon) - \omega_0^2} dx + \int_\infty^0 \frac{(x + i\epsilon)e^{-(x+i\epsilon)t}}{(x + i\epsilon)^2 + i\pi g(x + i\epsilon) - \omega_0^2} dx \right] \Bigg|_{\epsilon \rightarrow 0^+}. \quad (2.30)$$

²Observemos que no limite de $R \rightarrow \infty$, $\omega_{k+1} - \omega_k = \Delta\omega$ torna-se infinitesimal, $d\omega$.

Após uma manipulação algébrica e da aplicação do limite $\epsilon \rightarrow 0^+$, (2.30) pode ser reescrita na forma

$$f_{00}(t) = 2g \int_0^\infty \frac{x^2 e^{-ixt}}{(x^2 - \omega_0^2)^2 + \pi^2 g^2 x^2} dx. \quad (2.31)$$

Como mencionado nesta seção, a equação (2.31) nos fornece a amplitude de probabilidade do oscilador permanecer em seu primeiro estado excitado. Portanto, como forma de teste da validade do resultado acima, calculemos $f_{00}(0)$. Segundo a equação (2.20) com $G_{00}(\Omega_r, t) = e^{-i\Omega_r t}$ devemos ter

$$f_{00}(0) = \sum_{r=0}^N (t_{0r})^2 = 1.$$

Tomando $t = 0$ em (2.31), encontramos

$$f_{00}(0) = 2g \int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2 - \omega_0^2)^2 + \pi^2 g^2 x^2} dx = 1. \quad (2.32)$$

Apesar de parecer difícil que a equação (2.32) seja exatamente igual a 1, este resultado é demonstrado em maiores detalhes no apêndice C.

Agora continuamos a solução para a amplitude de permanência. Para resolvermos (2.31), mais uma vez utilizaremos o teorema dos resíduos, fazendo

$$h(z) = 2g \frac{z^2 e^{-izt}}{(z^2 - \omega_0^2)^2 + \pi^2 g^2 z^2}, \quad (2.33)$$

vemos que esta função possui quatro polos:

$$\begin{aligned} z_1 &= i\frac{\pi g}{2} + \kappa & z_2 &= -i\frac{\pi g}{2} - \kappa \\ z_3 &= -i\frac{\pi g}{2} + \kappa & z_4 &= i\frac{\pi g}{2} - \kappa, \end{aligned}$$

com $\kappa = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\pi^2 g^2}{4}}$. Desta forma, basta utilizarmos um contorno na forma da Figura (2.2). Feito tal escolha de contorno, podemos escrever

$$\int_C h(z) dz = \int_{-\infty}^0 2g \frac{z^2 e^{-izt} dz}{(z^2 - \omega_0^2)^2 + \pi^2 g^2 z^2} + \int_0^\infty h(z) dz + \int_{C_R} h(z) dz, \quad (2.34)$$

ou seja,

$$\int_0^\infty h(z) dz = - \int_{-\infty}^0 2g \frac{z^2 e^{-izt} dz}{(z^2 - \omega_0^2)^2 + \pi^2 g^2 z^2} + \int_C h(z) dz - \int_{C_R} h(z) dz. \quad (2.35)$$

A integral em todo o contorno C é resolvida com o auxílio do teorema dos resíduos, resultando em

$$\int_C h(z) dz = \left(1 - \frac{i\pi g}{2\kappa}\right) e^{-i(\kappa - \frac{i\pi g}{2})t}. \quad (2.36)$$

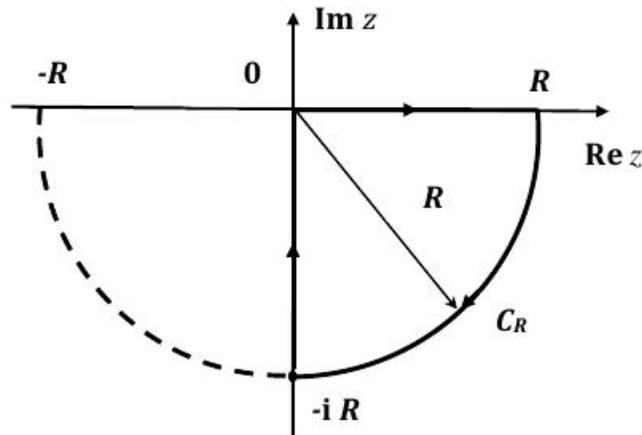


Figura 2.2: Contorno C de integração da equação (2.34), onde está presente o polo z_3 .

Agora vamos resolver a integral no contorno C_R . Esta pode ser reescrita na forma,

$$\int_{C_R} h(z) dz = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{2igR^3 e^{3i\theta} e^{-itR(\cos\theta + i\sin\theta)} d\theta}{(R^2 e^{2i\theta} - \omega_0^2)^2 + \pi^2 g^2 R^2 e^{2i\theta}} \Bigg|_{R \rightarrow \infty}, \quad (2.37)$$

onde substituímos $z = Re^{i\theta}$, com R igual ao raio do contorno que varre todo o quarto quadrante do plano complexo, por meio do ângulo θ . No limite $R \rightarrow \infty$, usando o lema de Jordan [38], temos

$$\int_{C_R} h(z) dz = 0, \quad \text{quando } R \rightarrow \infty. \quad (2.38)$$

Nestas condições, ficamos com

$$\int_0^\infty h(z) dz = \left(1 - \frac{i\pi g}{2\kappa}\right) e^{-i(\kappa - \frac{i\pi g}{2})t} + \int_{-\infty}^0 2g \frac{z^2 e^{-izt} dz}{(z^2 - \omega_0^2)^2 + \pi^2 g^2 z^2}. \quad (2.39)$$

Se realizarmos a seguinte mudança, $z = -iy$, com $-\infty < y < 0$, uma vez que estamos integrando sobre o eixo imaginário negativo, encontramos

$$\int_0^\infty h(z) dz = \left(1 - \frac{i\pi g}{2\kappa}\right) e^{-i(\kappa - \frac{i\pi g}{2})t} + \int_0^\infty 2gi \frac{y^2 e^{-yt} dy}{(y^2 + \omega_0^2)^2 - \pi^2 g^2 y^2}, \quad (2.40)$$

ou mais precisamente,

$$f_{00}(t) = \left(1 - \frac{i\pi g}{2\kappa}\right) e^{-i(\kappa - \frac{i\pi g}{2})t} + 2iJ(t), \quad (2.41)$$

onde

$$J(t) = \int_0^\infty g \frac{y^2 e^{-yt} dy}{(y^2 + \omega_0^2)^2 - \pi^2 g^2 y^2}. \quad (2.42)$$

Apesar do resultado definido pela equação (2.41) parecer único, isso não é verdade. Note que estamos supondo κ real e diferente de zero. Se considerarmos κ igual a zero ou imaginário, então a expressão (2.41) com $J(t)$ dado pela equação (2.42) deixa de ser válida. Isso se deve ao fato de que os polos estarão no eixo imaginário. Nesses casos tem que se considerar a expressão dada pela equação (2.31), a qual pode ser avaliada de forma numérica.

No caso em que $\omega_0 t \gg 1$, podemos avaliar $J(t)$ de forma aproximada, na qual chamamos *aproximação para tempos longos*. Nestas condições a equação (2.42), torna-se

$$J(t) = g \int_0^\infty \frac{y^2 e^{-yt} dy}{\omega_0^4}, \quad (2.43)$$

que se fizermos,

$$J(t) = \frac{g}{\omega_0^4} \frac{d^2}{dt^2} \left[\int_0^\infty e^{-yt} dy \right],$$

encontramos como solução

$$J(t) \approx \frac{2g}{\omega_0^4 t^3}. \quad (2.44)$$

Substituindo (2.44) em (2.41) e calculando o módulo quadrado do mesmo, encontramos a probabilidade associada que denotaremos por $P_{00}(t)$:

$$P_{00}(t) = \left(1 + \frac{\pi^2 g^2}{4\omega_0^2} \right) e^{-\pi g t} - \frac{8g}{\omega_0^4 t^3} \left[\sin(\kappa t) + \frac{\pi g}{2\kappa} \cos(\kappa t) \right] e^{-\frac{\pi g t}{2}} + \frac{16g^2}{\omega_0^8 t^6}. \quad (2.45)$$

Na Figura 2.3 temos duas soluções numéricas para a equação (2.45). A curva em vermelho representa a probabilidade do átomo permanecer em seu primeiro estado excitado quando temos uma constante de acoplamento da ordem de $g \approx 6,0 \times 10^{-3}/s$, já a curva em preto está associada a uma probabilidade com uma constante de acoplamento da ordem de $g \approx 3,0 \times 10^{-3}/s$, ambas com a frequência do oscilador com valor fixo, da ordem de $\omega_0 = 1,0/s$. Estes resultados mostram que, apesar de existirem termos oscilantes em (2.45), o decaimento exponencial torna-se predominante.

Neste regime de acoplamento fraco, *i.e.*, para g pequeno quando comparado com ω_0 , obtemos de (2.45) que a probabilidade do átomo permanecer excitado após um tempo $t \gg \frac{1}{\omega_0}$ obedece a conhecida lei de decaimento exponencial [39],

$$P_{00}(t) \approx e^{-\pi g t}. \quad (2.46)$$

Embora aqui consideramos somente o cálculo da probabilidade de permanência do átomo

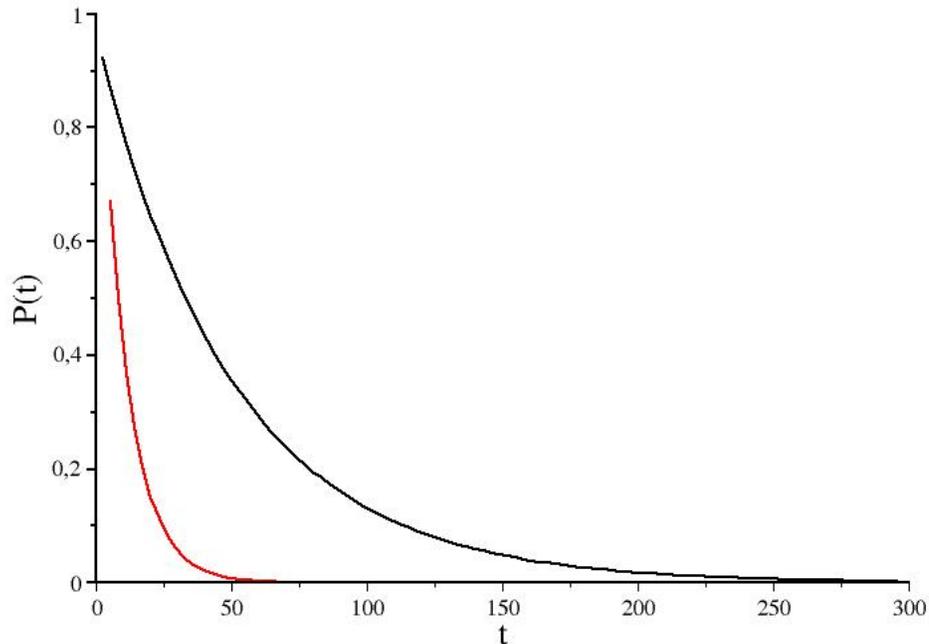


Figura 2.3: Análise da equação (2.45). A curva em preto está associada a uma constante de acoplamento da ordem de $g \approx 3,0 \times 10^{-3}/s$ e a curva em vermelho com $g \approx 6,0 \times 10^{-3}/s$. Definimos o parâmetro $\omega_0 = 1,0/s$. Nas aproximações consideradas, temos um tempo característico ($\tau = \frac{1}{\pi g}$) de decaimento da ordem de $\tau_p \approx 106s$ e $\tau_v \approx 53s$, para as curvas em preto e em vermelho, respectivamente.

manter-se no primeiro estado excitado, na situação em que $R \rightarrow \infty$, devemos salientar que no caso de cavidades pequenas, *i.e.*, para R suficientemente pequeno, também pode-se estimar esta probabilidade. Usando-se o fato de que para R suficientemente pequeno, as autofrequências são aproximadamente as mesmas que as frequências dos modos normais do campo, em [11], foi encontrado que a probabilidade do átomo permanecer no primeiro estado excitado oscila como função do tempo entre um valor mínimo e um valor máximo. Por exemplo, para uma frequência da ordem de $\omega_0 \sim 4,0 \times 10^{14}/s$ (dentro do visível), em uma cavidade de diâmetro da ordem de $2R \sim 1,0 \times 10^{-6}m$, foi encontrado uma probabilidade de permanência de 97%. E também, para uma típica frequência na faixa de micro-ondas da ordem de $\omega_0 \sim 2,0 \times 10^{10}/s$ com uma cavidade de raio da ordem de $R \sim 1,4 \times 10^{-2}m$, encontrou-se também 97%. De onde se conclui que um estado atômico instável torna-se praticamente estável quando confinado dentro de uma cavidade de raio suficientemente

pequeno. A informação quanto a distribuição de energia dentro da cavidade esférica, no nosso caso, nos remete a importante área de pesquisa intitulada Eletrodinâmica Quântica em Cavidades, ou simplesmente, CQED³. A Eletrodinâmica Quântica em Cavidades, em resumo, estuda os processos fundamentais de interações entre átomos e campo eletromagnético dentro de cavidades refletoras. Portanto, o formalismo de coordenadas renormalizadas vem como uma ferramenta de ajuda também neste ramo, como por exemplo pode ser apreciado nos estudos realizados em [27], que fazem uma interessante comparação junto aos resultados experimentais contidos em [40, 41], verificando estabilidades atômicas em regimes de acoplamento fraco e forte.

2.1.3 Amplitude de probabilidade de decaimento do oscilador (átomo)

Tomando $\mu = 0$ e $\nu = k$, em (2.12) obtemos a amplitude de probabilidade do oscilador (átomo) decair do seu n -ésimo estado excitado para o seu estado fundamental por uma emissão de n quanta do campo, com frequência (ou energia, se $\hbar = 1$) ω_k , dada por

$$\mathcal{A}_{n,0,\dots,0,0,\dots,0}^{0,0,\dots,n_k,\dots,0}(t) = [f_{0k}(t)]^n, \quad (2.47)$$

lembramos aqui, que já estamos desconsiderando a fase envolvida. Assim como em $\mathcal{A}_{n,0,\dots,0}^{n,0,\dots,0}(t)$, vamos considerar apenas o caso relacionado ao primeiro estado excitado, $n = 1$. Desta forma a probabilidade que iremos calcular é na verdade a associada ao processo de decaimento do átomo, do primeiro estado excitado para o estado fundamental por uma emissão de um quantum de frequência ω_k . Essa probabilidade depende da quantidade $f_{0k}(t)$,

$$f_{0k}(t) = \sum_{r=0}^N t_{0r} t_{kr} e^{-i\Omega_r t}. \quad (2.48)$$

Usando (1.34) e (1.35) em (2.48), temos

$$f_{0k}(t) = \eta\omega_k \sum_{r=0}^N \left[\frac{(t_{0r})^2}{\omega_k^2 - \Omega_r^2} \right] e^{-i\Omega_r t}, \quad (2.49)$$

que com o auxílio de (2.22), encontramos

$$f_{0k}(t) = \eta\omega_k \sum_{r=0}^N \frac{\Omega_r e^{-i\Omega_r t}}{W'(\Omega_r) (\omega_k^2 - \Omega_r^2)}. \quad (2.50)$$

³Do inglês *Cavity Quantum Electrodynamics*

Podemos questionar a validade do método dos resíduos no limite contínuo neste caso, por conta do surgimento do termo singular $(\omega_k^2 - \Omega_r^2)$ no denominador da equação (2.50). Porém, vamos supor que ainda seja válido, tal que possamos escrever

$$f_{0k}(t) = \eta \frac{\omega_k}{\pi i} \oint_C \frac{ze^{-izt}}{(\omega_k^2 - z^2)W(z)} dz. \quad (2.51)$$

Sendo possível escrever (2.51), com o uso do teorema dos resíduos, temos para $f_{0k}(t)$,

$$f_{0k}(t) = \eta \omega_k \left\{ \left[\sum_{r=0}^N \frac{(z - \Omega_r)ze^{-izt}}{W'(z)(\omega_k^2 - z^2)} \right] \Big|_{z \rightarrow \Omega_r} + \lim_{z \rightarrow \omega_k} \frac{(z - \omega_k)ze^{-izt}}{W'(z)(\omega_k - z)(\omega_k + z)} \right\}. \quad (2.52)$$

Mas, basta analisarmos a equação (2.21), no limite em que $z \rightarrow \omega_k$, para verificarmos que $W'(z) \rightarrow \infty$, mostrando que a segunda parte de (2.52) possui contribuição nula para $f_{0k}(t)$, de onde concluímos que a expressão (2.50) é válida.

Usando a equação (2.29) e o contorno retangular representado pela Figura (2.1), encontramos

$$f_{0k}(t) = \frac{\eta \omega_k}{\pi i} \left[\int_0^\infty \frac{xe^{-ixt}}{(x + \frac{i\pi g}{2} - \kappa)(x + \frac{i\pi g}{2} + \kappa)(x + i\epsilon - \omega_k)(x + i\epsilon + \omega_k)} dx - \int_0^\infty \frac{xe^{-ixt}}{(x - \frac{i\pi g}{2} - \kappa)(x - \frac{i\pi g}{2} + \kappa)(x - i\epsilon - \omega_k)(x - i\epsilon + \omega_k)} dx \right] \Big|_{\epsilon \rightarrow 0}. \quad (2.53)$$

Podemos resolver este caso utilizando mais uma vez o contorno ilustrado na Figura (2.2).

Com o auxílio deste contorno podemos escrever

$$f_{0k}(t) = \frac{\eta \omega_k}{\pi i} \left[\int_0^\infty \frac{xe^{-ixt}}{(x + \frac{i\pi g}{2} - \kappa)(x + \frac{i\pi g}{2} + \kappa)(x + i\epsilon - \omega_k)(x + i\epsilon + \omega_k)} dx \right] \Big|_{\epsilon \rightarrow 0}, \quad (2.54)$$

tal que, mais uma vez reescrevemos

$$\int_C g(z)dz = \int_0^\infty g(z)dz + \int_{-\infty}^0 g(z)dz + \int_{C_R} g(z)dz, \quad (2.55)$$

e da mesma forma que em $f_{00}(t)$, quando tomamos o limite de $R \rightarrow \infty$, temos contribuição nula no contorno C_R , restando

$$\int_0^\infty g(z)dz = \int_C g(z)dz - \int_{-\infty}^0 g(z)dz. \quad (2.56)$$

Com o auxílio do teorema de Cauchy, encontramos

$$\int_0^\infty g(z)dz = \eta \omega_k \left[\frac{\left(1 - \frac{i\pi g}{2\kappa}\right) e^{-i\kappa t - \frac{\pi g}{2}t}}{\left[\omega_k^2 - \left(\kappa - \frac{i\pi g}{2}\right)^2\right]} - \frac{e^{-i\omega_k t}}{\left[\omega_k^2 - \omega_0^2 + i\pi g \omega_k\right]} \right] + \int_{-\infty}^0 g(z)dz. \quad (2.57)$$

Já a contribuição de $-\infty$ a 0, avaliada com $W(z)$ no limite contínuo, torna $f_{0k}(t)$ da forma

$$f_{0k}(t) = \eta\omega_k \left[\frac{(1 - \frac{i\pi g}{2\kappa})e^{-i(\kappa - \frac{i\pi g}{2})t}}{[\omega_k^2 - (\kappa - \frac{i\pi g}{2})^2]} - \frac{e^{-i\omega_k t}}{[\omega_k^2 - \omega_0^2 + i\pi g\omega_k]} + 2i\ell(t) \right], \quad (2.58)$$

com $\ell(t)$ igual a

$$\ell(t) = g \int_0^\infty dy \frac{y^2 e^{-yt}}{[(y^2 + \omega_0^2)^2 - \pi^2 g^2 y^2](y^2 + \omega_k^2)},$$

no regime $\kappa^2 > 0$. A análise de um outro regime para $f_{0k}(t)$, depende apenas do parâmetro κ , assim como mencionado na seção anterior, certamente se fizermos considerações dentro de outros regimes, tais como $\kappa^2 = 0$, $\kappa^2 < 0$, $\kappa^2 \gg 0$ ou ainda, $\kappa^2 \ll 0$, teríamos amplitudes de transições distintas da apresentada pela equação (2.58). Considerando apenas o regime em que $\kappa^2 > 0$, e o módulo quadrado de (2.58), encontramos a seguinte probabilidade

$$\begin{aligned} P_{0k}(t) = \frac{\eta^2 \omega_k^2}{\kappa} \left\{ \frac{\kappa^2 + \omega_0^2 e^{-\pi g t}}{\kappa K(\omega_k)} - \frac{e^{-\frac{\pi g t}{2}}}{K^2(\omega_k)} \left([2\kappa(\omega_k^2 - \omega_0^2)^2 + \pi^2 g^2 \omega_k(\omega_k^2 + \omega_0^2)] \cos[(\omega_k - \kappa)t] + \right. \right. \\ \left. \left. + \pi g(\omega_k^2 - \omega_0^2)(\omega_k^2 + \omega_0^2 - 2\kappa\omega_k) \sin[(\omega_k - \kappa)t] + 2\ell(t)K(\omega_k) \times \right. \right. \\ \left. \left. [2\kappa(\omega_k^2 - \omega_0^2) \sin(\kappa t) + \pi g(\omega_k^2 + \omega_0^2) \cos(\kappa t)] \right) + 4\kappa \frac{\ell(t)}{K(\omega_k)} \times \right. \\ \left. [(\omega_k^2 - \omega_0^2) \sin(\omega_k t) + \pi g \omega_k \cos(\omega_k t)] + 4\kappa g \ell(t)^2 \right\}, \quad (2.59) \end{aligned}$$

onde

$$K(\omega_k) = (\omega_k^2 - \omega_0^2)^2 + \pi^2 g^2 \omega_k^2. \quad (2.60)$$

Salvo as aproximações feitas para o nosso modelo, o resultado acima deve possuir alguma semelhança com algum processo atômico descrito pela Eletrodinâmica Quântica. Sabemos que os átomos emitem fótons mesmo quando não existe um campo eletromagnético aplicado por meio de um mecanismo chamado de *emissão espontânea*. A Eletrodinâmica Quântica mostra que sempre existe um campo eletromagnético presente nas vizinhanças do átomo. A razão é que o campo eletromagnético tem energia quantizada discretamente e como em qualquer sistema de energia discretamente quantizada, o campo eletromagnético tem uma energia de ponto zero. Assim, sempre haverá alguma vibração eletromagnética presente, qualquer que seja a frequência necessária, para induzir oscilações de carga que levam o átomo a irradiar “espontaneamente” [43]. Tal como foi mencionado a forma como estavam preparados os estados inicial e final associados a esta probabilidade, a equação

(2.59) deve reproduzir alguma característica deste fenômeno de decaimento citado acima. O problema é que a solução exata da equação (2.59), em qualquer instante de tempo, torna-se de difícil acesso por métodos analíticos por conta da presença de $\ell(t)$, mas sendo completamente possível sua resolução numericamente. Porém, podemos evitar esta dificuldade estudando o comportamento desta probabilidade no limite em que $t \rightarrow \infty$. Aplicando este limite de tempo longo e lembrando que estamos analisando todos os processos de transições no limite contínuo, ou seja, no limite em que $R \rightarrow \infty$, encontramos⁴

$$P_{0\omega} = 2gd\omega \left[\frac{\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \pi^2 g^2 \omega^2} \right]. \quad (2.61)$$

Assim, a equação (2.61) nos informa a probabilidade do oscilador (átomo) emitir um “fóton” com frequência (energia) dentro de um intervalo entre ω e $\omega + d\omega$. Se integrarmos a equação (2.61) em todo o eixo real positivo, *i.e.*, onde encontram-se todas as frequências ω , verificamos que a probabilidade do oscilador (átomo) decair emitindo um “fóton” de frequência ω é um, como era de se esperar.

Sabemos que um dos resultados previstos pela Eletrodinâmica Quântica para processos atômicos desta natureza, é que a energia emitida pelo átomo (o fóton) tenha seu valor próximo da energia associada a transição entre os estados inicial e final do átomo. Em especial, uma característica importante neste fenômeno é a presença de uma condição de ressonância [39]. Portanto, como a equação (2.61) representa uma probabilidade de decaimento, espera-se que a mesma apresenta ressonância, como visto na Figura (2.6). Temos um máximo em $\omega_k = \omega_0$. Resultado já esperado do ponto de vista da mecânica quântica, quando se trata de probabilidade de decaimento atômico, ver por exemplo [44].

Antes de concluirmos este capítulo, devemos mencionar que as probabilidades de permanência e decaimento, $P_{00}(t)$ e $P_{0k}(t)$, aparecem de forma bastante sugestiva no estudo da evolução temporal de um átomo acoplado com um campo de radiação térmico, veja [10]. Nessa referência foi demonstrado que a evolução temporal dos valores esperados térmicos de operadores associados com o átomo, dependem exclusivamente das probabilidades associadas com as emissões e absorções de quanta do campo, *i.e.*, dos termos $P_{00}(t)$ e $P_{0k}(t)$.

⁴Como vimos no capítulo 1, $\eta = \sqrt{2g\Delta\omega}$. Logo, quando $R \rightarrow \infty$, o $\Delta\omega$ da equação (2.61) torna-se um intervalo infinitesimal $d\omega$.

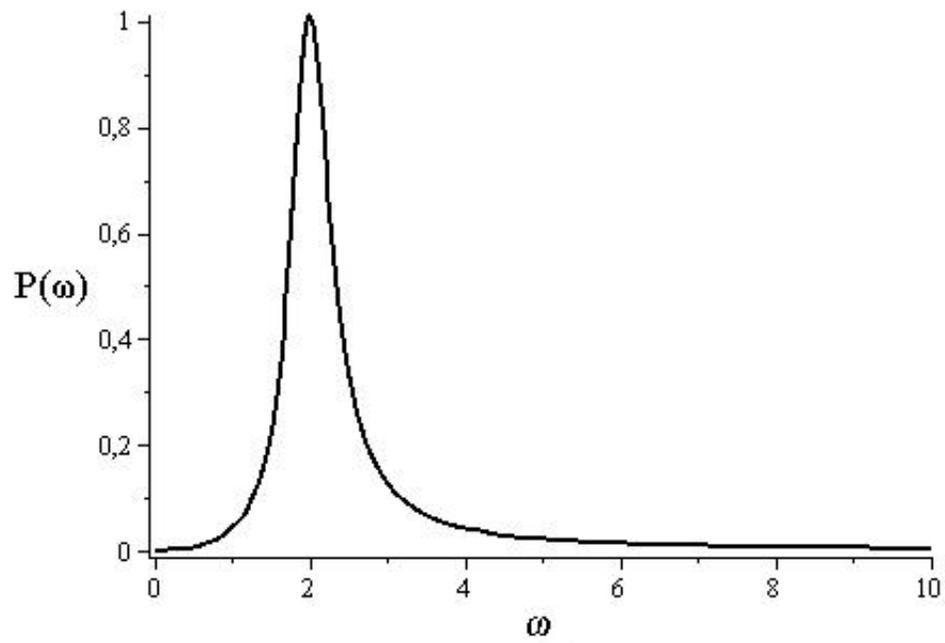


Figura 2.4: Análise da equação (2.61), onde temos $P(\omega)$ em função de ω com $g = 0,2/s$, $\omega_0 = 2,0/s$. Notemos uma região de máxima probabilidade quando $\omega = \omega_0$.

Capítulo 3

Formalismo com operadores de criação e de aniquilação vestidos

Neste capítulo, após uma breve revisão sobre o oscilador harmônico quântico simples, demonstramos uma nova forma de calcularmos probabilidades de transição baseados em operadores de criação e de aniquilação vestidos. Após alguns exemplos de aplicações, como uma forma de demonstrar a vantagem do método com estes operadores, comparado ao método polinomial, calculamos um caso mais geral, o mesmo calculado na seção (2.1).

3.1 Revisando o oscilador harmônico simples

A partir dos operadores \hat{q} e \hat{p} , definimos operadores não-Hermitianos, que denotaremos por \hat{a} e \hat{a}^\dagger como

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{\omega}{2}}(\hat{q} + i\frac{\hat{p}}{\omega}), \quad (3.1)$$

e seu conjugado

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{\omega}{2}}(\hat{q} - i\frac{\hat{p}}{\omega}). \quad (3.2)$$

Conhecidos como operadores de aniquilação e de criação, respectivamente. Usando a relação de comutação $[\hat{q}, \hat{p}] = i$, obtemos

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \mathbf{1}. \quad (3.3)$$

Uma outra importante propriedade destes operadores é que, se definirmos $\hat{a}^\dagger \hat{a} = \hat{N}$, podemos mostrar

$$\hat{H} = \omega(\hat{N} + \frac{\mathbf{1}}{2}). \quad (3.4)$$

A utilidade dos operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger surge quando investigamos os autovalores n , e autovetores $|n\rangle$ tais que $\langle n|n\rangle = 1$, do operador número \hat{N} , isto é, que satisfaça a relação

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle. \quad (3.5)$$

Considerando um estado qualquer que satisfaça a equação acima, com a relação de comutação (3.3), encontramos

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger |n\rangle = \hat{a}^\dagger (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \mathbf{1}) |n\rangle = (n+1) \hat{a}^\dagger |n\rangle \quad (3.6)$$

e

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} |n\rangle = (\hat{a} \hat{a}^\dagger - \mathbf{1}) \hat{a} |n\rangle = (n-1) \hat{a} |n\rangle, \quad (3.7)$$

ou seja, $\hat{a}^\dagger |n\rangle$ e $\hat{a} |n\rangle$ também são autovetores do operador \hat{N} , com autovalores $n \pm 1$, respectivamente. Desta forma, os autovetores $|n \pm 1\rangle$ podem ser obtidos fazendo

$$|n+1\rangle = \frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{n+1}} |n\rangle, \quad (3.8)$$

$$|n-1\rangle = \frac{\hat{a}}{\sqrt{n}} |n\rangle. \quad (3.9)$$

Uma consequência imediata dos resultados acima é que o espectro de \hat{N} deve ser o próprio conjunto \mathbb{N} . Uma vez imposta a não negatividade da norma de $\hat{a}|n\rangle$, obtemos

$$\langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} | n \rangle = n \geq 0. \quad (3.10)$$

O resultado acima proíbe a possibilidade de obtermos um autovetor com norma negativa [42]. Definimos $|0\rangle$, correspondendo ao menor autovalor de \hat{N} , de tal forma que $\hat{a}|0\rangle$ resulta no vetor nulo. Partindo deste autovetor podemos obter qualquer outro aplicando sucessivamente o operador \hat{a}^\dagger :

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.11)$$

A importância destes objetos se reflete quando decidimos interpretá-los junto a descrição quântica de sistemas físicos. Listemos algumas destas:

- Os autovalores n correspondem ao número de quanta (de energia, por exemplo) num dado estado, associado aos operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger ;
- O operador \hat{a} aniquila um quantum no estado em questão. O operador \hat{a}^\dagger , por sua vez, cria um quantum neste mesmo estado;

- O operador \hat{N} é tal que seu valor esperado, calculado num de seus autovetores, revela o número de quanta contidos em seu respectivo estado. Um autovetor de \hat{N} descreve um sistema cujo número de quanta no estado associado aquele operador é bem definido.

A síntese que fizemos acima sobre o mecanismo utilizado para o estudo do oscilador harmônico quântico, será de grande importância na próxima seção, onde iremos estender tais propriedades para o caso em que temos um espaço composto por um número N de osciladores, neste caso, vestidos.

3.2 Espaço composto por N osciladores vestidos

Em mecânica quântica e em outras áreas da física, quando um sistema físico é composto por um número grande de partículas (muitos estados), geralmente usa-se o conceito de espaço de Fock [45]. Neste espaço, surgem quantidades da forma de $|n\rangle$, bem como os operadores¹ \hat{a} , \hat{a}^\dagger e \hat{N} . Em particular, $|0\rangle$ é denominado estado de vácuo, ou simplesmente vácuo, do sistema em questão. Por exemplo, argumentamos que dinamicamente, um conjunto de osciladores harmônicos é equivalente a um gás de Bose de muitas partículas, e portanto é sugestivo este formalismo [46].

No nosso caso, os estados de Fock que descrevem separadamente o oscilador e o campo podem ser escritos como $|n_0\rangle_d \otimes |n_1\rangle_d \otimes |n_2\rangle_d \otimes \cdots |n_N\rangle_d$. Para tal estado, temos o oscilador em seu n_0 -ésimo estado excitado e cada modo normal do campo, $k = 1, 2, 3, \dots, N$, com n_k fótons. Em algumas situações iremos simplificar a notação para $|n, n_1, n_2, \dots, n_N\rangle_d$, simbolizando a mesma configuração acima.

Usando (3.11) podemos escrever para este estado

$$|n_0, n_1, \dots, n_N\rangle_d = \frac{(\hat{a}'^\dagger_0)^{n_0}}{\sqrt{n_0!}} \frac{(\hat{a}'^\dagger_1)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \cdots \frac{(\hat{a}'^\dagger_N)^{n_N}}{\sqrt{n_N!}} |0\rangle_d, \quad (3.12)$$

onde \hat{a}'^\dagger_μ e \hat{a}'_μ denotam os operadores de criação e aniquilação vestidos. Na seguinte subseção iremos construir esses operadores.

¹Com suas particularidades para sistemas compostos por férmions ou bósons, por exemplo.

3.2.1 Operadores de criação e de aniquilação vestidos

Definimos os operadores de criação e de aniquilação vestidos de forma análoga as equações (3.1) e (3.2), substituindo coordenadas e momenta nús por coordenadas e momenta vestidos:

$$\hat{a}'_{\mu}{}^{\dagger} = \sqrt{\frac{\omega_{\mu}}{2}} \left(\hat{q}'_{\mu} - i \frac{\hat{p}'_{\mu}}{\omega_{\mu}} \right) \quad (3.13)$$

e

$$\hat{a}'_{\mu} = \sqrt{\frac{\omega_{\mu}}{2}} \left(\hat{q}'_{\mu} + i \frac{\hat{p}'_{\mu}}{\omega_{\mu}} \right). \quad (3.14)$$

Os operadores \hat{a}'_{μ} e $\hat{a}'_{\mu}{}^{\dagger}$, foram inicialmente utilizados para o estudo da dinâmica do não-equilíbrio de sistemas quânticos acoplados [33], processos de termalização de átomos em campos de radiação [10], assim como em efeitos térmicos na estabilidade de átomos excitados em cavidades [36].

Na representação de coordenadas renormalizadas, o operador \hat{p}'_{μ} vem dado por

$$\hat{p}'_{\mu} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial q'_{\mu}}. \quad (3.15)$$

Quando calcularmos as amplitudes de probabilidade por meio dos operadores de criação e de aniquilação renormalizados, será necessário utilizarmos a relação entre os operadores renormalizados e coletivos, uma vez que os estados coletivos são autoestados da Hamiltoniana e não os estados vestidos. Usando

$$\hat{A}'_r{}^{\dagger} = \sqrt{\frac{\Omega_r}{2}} \left(\hat{Q}_r - i \frac{\hat{P}_r}{\Omega_r} \right), \quad (3.16)$$

$$\hat{A}'_r = \sqrt{\frac{\Omega_r}{2}} \left(\hat{Q}_r + i \frac{\hat{P}_r}{\Omega_r} \right), \quad (3.17)$$

e empregando a regra da cadeia, podemos escrever a equação (3.15) na forma

$$\hat{p}'_{\mu} = \frac{1}{i} \sum_{r=0}^N \frac{\partial Q_r}{\partial q'_{\mu}} \frac{\partial}{\partial Q_r}, \quad (3.18)$$

e usando $\hat{P}_r = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial Q_r}$, temos

$$\hat{p}'_{\mu} = \frac{1}{\sqrt{\omega_{\mu}}} \sum_{r=0}^N t_{\mu r} \sqrt{\Omega_r} \hat{P}_r. \quad (3.19)$$

Utilizando (3.19), (1.62) e (3.14), podemos escrever

$$\hat{a}'_{\mu} = \sqrt{\frac{\omega_{\mu}}{2}} \left[\left(\sum_{r=0}^N t_{\mu r} \sqrt{\frac{\Omega_r}{\omega_{\mu}}} \hat{Q}_r \right) + \frac{i}{\omega_{\mu}} \left(\sum_{r=0}^N \sqrt{\frac{\omega_{\mu}}{\Omega_r}} t_{\mu r} \hat{P}_r \right) \right], \quad (3.20)$$

que, com uma simplificação algébrica, encontramos

$$\hat{a}'_{\mu} = \sum_{r=0}^N t_{\mu r} \left[\sqrt{\frac{\Omega_r}{2}} \left(\hat{Q}_r + i \frac{\hat{P}_r}{\Omega_r} \right) \right], \quad (3.21)$$

e usando a equação (3.17), obtemos

$$\hat{a}'_{\mu} = \sum_{r=0}^N t_{\mu r} \hat{A}_r, \quad (3.22)$$

e conseqüentemente

$$\hat{a}'_{\mu}{}^{\dagger} = \sum_{r=0}^N t_{\mu r} \hat{A}_r^{\dagger}, \quad (3.23)$$

uma vez que os elementos de $T = [t_{\mu r}]$ são todos reais. Uma importante característica demonstrada pela relação matemática entre os operadores de criação e de aniquilação renormalizados com os coletivos, é essa dependência linear, na qual é a mesma que existe entre as coordenadas renormalizadas e as coletivas. Conforme veremos posteriormente, esta característica irá simplificar substancialmente os cálculos envolvidos nos processos radioativos.

Na seguinte seção vamos aplicar o formalismo dos operadores de aniquilação e de criação vestidos no cálculo de algumas amplitudes de probabilidade as quais também podem ser obtidas pelo método apresentado no capítulo anterior, método polinomial. Consideramos tais situações como uma forma de nos familiarizarmos com este novo formalismo.

3.3 Exemplos de aplicações do formalismo com operadores de criação e de aniquilação vestidos

Vamos introduzir o método com operadores \hat{a}'_{μ} e $\hat{a}'_{\mu}{}^{\dagger}$ através de alguns exemplos simples. Em primeiro lugar vamos considerar a determinação da amplitude de probabilidade do átomo permanecer no primeiro estado excitado. Posteriormente, consideramos o cálculo da amplitude de probabilidade associada ao decaimento do átomo desde o primeiro estado excitado para o estado fundamental através da emissão de um quantum de radiação. Calculamos também, para fins puramente didáticos, a amplitude de probabilidade de permanência do átomo em seu segundo estado excitado. Finalmente, consideraremos um caso mais geral de amplitude de probabilidade, a mesma calculada na seção (2.1), onde poderemos apreciar a vantagem técnica do método em relação ao método polinomial.

3.3.1 Amplitude de permanência do oscilador (átomo) em seu primeiro estado excitado

Considere o caso em que a equação (2.1), tal que apenas o átomo esteja em seu primeiro estado excitado, $|1_0, 0, 0, \dots, 0\rangle_d$. Agora nos perguntamos qual a probabilidade de permanência deste estado? Isso equivale a escrevermos

$$\mathcal{A}_{1_0, 0, 0, \dots, 0}^{1_0, 0, 0, \dots, 0}(t) = {}_d\langle 0, 0, \dots, 0, 1_0 | e^{-i\hat{H}t} | 1_0, 0, 0, \dots, 0 \rangle_d. \quad (3.24)$$

Dessa forma, com o auxílio das equações (3.22) e (3.23), podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{1_0, 0, 0, \dots, 0}^{1_0, 0, 0, \dots, 0}(t) &= {}_d\langle 0, 0, 0, \dots, 0 | \hat{a}'_0 e^{-i\hat{H}t} \hat{a}'_0^\dagger | 0, 0, 0, \dots, 0 \rangle_d \\ &= \sum_{r=0}^N t_{0r} \sum_{s=0}^N t_{0s} {}_d\langle 0, 0, 0, \dots, 0 | \hat{A}_r e^{-i\hat{H}t} \hat{A}_s^\dagger | 0, 0, 0, \dots, 0 \rangle_d, \end{aligned} \quad (3.25)$$

e uma vez que $|0, 0, 0, \dots, 0\rangle_d = |0, 0, 0, \dots, 0\rangle_c$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{1_0, 0, 0, \dots, 0}^{1_0, 0, 0, \dots, 0}(t) &= e^{-itE_{0, \dots, 0}} \sum_{r=0}^N t_{0r} \sum_{s=0}^N t_{0s} e^{-i\Omega_s t} {}_c\langle 0, 0, \dots, 0, 1_r | 1_s, 0, 0, \dots, 0 \rangle_c \\ &= e^{-itE_{0, \dots, 0}} \sum_{r=0}^N t_{0r} \sum_{s=0}^N t_{0s} e^{-i\Omega_s t} \delta_{rs} \\ &= e^{-itE_{0, \dots, 0}} \sum_{r=0}^N (t_{0r})^2 e^{-i\Omega_r t} = f_{00}(t), \end{aligned} \quad (3.26)$$

se mais uma vez desconsiderarmos a fase $e^{-itE_{0, \dots, 0}}$.

3.3.2 Decaimento do oscilador (átomo) do primeiro estado excitado para o estado fundamental

Agora consideremos mais uma vez o processo de decaimento do átomo do seu primeiro estado excitado para o seu estado fundamental por uma emissão de um quantum do campo, com frequência ω_k . Neste caso temos,

$$\mathcal{A}_{1_0, 0, 0, \dots, 0}^{0, \dots, 1_k, \dots, 0}(t) = {}_d\langle 0, \dots, 1_k, \dots, 0 | e^{-i\hat{H}t} | 1_0, 0, 0, \dots, 0 \rangle_d. \quad (3.27)$$

Tal que, usando

$$\hat{a}'_k = \sum_{r=0}^N t_{kr} \hat{A}_r$$

e

$$\hat{a}_0^\dagger = \sum_{r=0}^N t_{0r} \hat{A}_r^\dagger,$$

encontramos

$$\mathcal{A}_{1_0,0,0,\dots,0}^{0,\dots,0,1_k,\dots,0}(t) = \sum_{r=0}^N t_{kr} \sum_{s=0}^N t_{0s} {}_c \langle 0, 0, 0, \dots, 0 | \hat{A}_r e^{-i\hat{H}t} \hat{A}_s^\dagger | 0, 0, 0, \dots, 0 \rangle_c \quad (3.28)$$

$$= e^{-itE_{0,0,\dots,0}} \sum_{r=0}^N \sum_{s=0}^N t_{kr} t_{0s} {}_c \langle 0, 0, 1_r, \dots, 0 | 1_s, \dots, 0, \dots, 0 \rangle_c$$

$$\mathcal{A}_{1_0,0,0,\dots,0}^{0,\dots,1_k,\dots,0}(t) = e^{-itE_{0,\dots,0}} \sum_{r=0}^N \sum_{s=0}^N t_{kr} t_{0s} e^{-i\Omega_s t} \delta_{rs},$$

de onde concluimos

$$\mathcal{A}_{1_0,0,0,\dots,0}^{0,\dots,1_k,\dots,0}(t) = e^{-itE_{0,\dots,0}} \sum_{r=0}^N t_{kr} t_{0r} e^{-i\Omega_r t} = f_{0k}(t), \quad (3.29)$$

também desconsiderando a fase.

3.3.3 Amplitude de permanência do oscilador (átomo) em seu segundo estado excitado

Neste terceiro exemplo iremos aplicar de forma didática o método com operadores de criação e de aniquilação vestidos. Consideremos o sistema composto por $|n_0, n_1, n_2\rangle_d$, ou seja, o átomo e somente dois modos do campo. Tomando, $n_0 = 2, n_1 = n_2 = 0$, e perguntando qual a probabilidade de encontrarmos o sistema ainda neste estado, equivale a calcularmos

$$\mathcal{A}_{2_0,0,0}^{2_0,0,0}(t) = {}_d \langle 0, 0, 2_0 | e^{-i\hat{H}t} | 2_0, 0, 0 \rangle_d. \quad (3.30)$$

Nestas condições, nosso estado de vácuo é $|0_0\rangle_d \otimes |0\rangle_d \otimes |0\rangle_d = |0\rangle_d$. Com o uso das equações (3.22) e (3.23), e o fato de que estamos considerando apenas o átomo e somente dois modos do campo, temos

$$\hat{a}'_0 = \sum_{r=0}^2 t_{0r} \hat{A}_r = t_{00} \hat{A}_0 + t_{01} \hat{A}_1 + t_{02} \hat{A}_2 \quad (3.31)$$

e

$$\hat{a}_0^\dagger = \sum_{r=0}^2 t_{0r} \hat{A}_r^\dagger = t_{00} \hat{A}_0^\dagger + t_{01} \hat{A}_1^\dagger + t_{02} \hat{A}_2^\dagger, \quad (3.32)$$

cujas substituição em (3.30), resulta

$$\mathcal{A}_{2_0,0,0}^{2_0,0,0}(t) = \frac{1}{2!} {}_d \langle 0 | (t_{00} \hat{A}_0 + t_{01} \hat{A}_1 + t_{02} \hat{A}_2)^2 e^{-i\hat{H}t} (t_{00} \hat{A}_0^\dagger + t_{01} \hat{A}_1^\dagger + t_{02} \hat{A}_2^\dagger)^2 | 0 \rangle_d. \quad (3.33)$$

Considerando mais uma vez a igualdade entre os estados de vácuo para coletivos e vestidos, *i.e.*, $|0\rangle_c = |0\rangle_d$, temos

$$\mathcal{A}_{2_0,0_1,0_2}^{2_0,0_1,0_2}(t) = \frac{1}{2!} \langle 0 | (t_{00}\hat{A}_0 + t_{01}\hat{A}_1 + t_{02}\hat{A}_2)^2 e^{-i\hat{H}t} (t_{00}\hat{A}_0^\dagger + t_{01}\hat{A}_1^\dagger + t_{02}\hat{A}_2^\dagger)^2 | 0 \rangle_c. \quad (3.34)$$

Com as atuações dos operadores criação e aniquilação coletivos contidos na equação (3.34), encontramos facilmente

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{2_0,0,0}^{2_0,0,0}(t) &= t_{00}t_{00}e^{-it\Omega_0}(t_{00}t_{00}e^{-it\Omega_0})e^{-i\frac{t}{2}\sum_{r=0}^2\Omega_r} + 2t_{01}t_{01}e^{-it\Omega_1}(t_{00}t_{00}e^{-it\Omega_0})e^{-i\frac{t}{2}\sum_{r=0}^2\Omega_r} + \\ &+ 2t_{02}t_{02}e^{-it\Omega_2}(t_{00}t_{00}e^{-it\Omega_0})e^{-i\frac{t}{2}\sum_{r=0}^2\Omega_r} + t_{01}t_{01}e^{-it\Omega_1}(t_{01}t_{01}e^{-it\Omega_1})e^{-i\frac{t}{2}\sum_{r=0}^2\Omega_r} + \\ &+ 2t_{02}t_{02}e^{-it\Omega_2}(t_{01}t_{01}e^{-it\Omega_1})e^{-i\frac{t}{2}\sum_{r=0}^2\Omega_r} + t_{02}t_{02}e^{-it\Omega_2}(t_{02}t_{02}e^{-it\Omega_2})e^{-i\frac{t}{2}\sum_{r=0}^2\Omega_r}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

ou ainda, com uma simplificação

$$\mathcal{A}_{2_0,0,0}^{2_0,0,0}(t) = e^{-i\frac{t}{2}\sum_{r=0}^2\Omega_r} \left[\sum_{r=0}^2 (t_{0r})^2 e^{-i\Omega_r t} \right]^2, \quad (3.36)$$

onde o termo $e^{-i\frac{t}{2}\sum_{r=0}^2\Omega_r} = e^{-itE_{0,0,0}}$, representa uma fase. Com este simples exemplo fica claro que se quisermos estender para o caso em que temos N modos do campo, *i.e.*, se nas equações (3.31) e (3.32), somarmos em r de 0 até N , encontraremos obviamente

$$\mathcal{A}_{2_0,0,0}^{2_0,0,0}(t) = e^{-i\frac{t}{2}\sum_{r=0}^N\Omega_r} \left[\sum_{r=0}^N (t_{0r})^2 e^{-i\Omega_r t} \right]^2. \quad (3.37)$$

3.4 Amplitude de probabilidade no formalismo de operadores de criação e de aniquilação vestidos

Como vemos, os cálculos dos processos exemplificados acima são substancialmente reduzidos com o método de operadores de criação e de aniquilação vestidos. Porém, ainda não tratamos do caso mais geral, demonstrado na seção (2.1), em termos do método com operadores. Façamos isso agora. Considere, mais uma vez, o cálculo da amplitude de probabilidade de um estado inicial $|0, \dots, n, \dots, 0\rangle_d$ em $t = 0$, ser encontrado em um instante t diferente de zero, em $|0, 0, \dots, m, \dots, 0\rangle_d$.

Logo, o que queremos é

$$\mathcal{A}_{0,0,\dots,n,\dots,0}^{0,0,\dots,m,\dots,0}(t) = {}_d \langle 0, 0, \dots, m, \dots, 0 | e^{-i\hat{H}t} | 0, 0, \dots, n, \dots, 0 \rangle_d. \quad (3.38)$$

Como vimos nos exemplos acima, para aplicarmos o método com operadores de criação e de aniquilação vestidos, devemos utilizar as equações (3.22) e (3.23) de forma adequada. Neste caso mais geral, devemos reescrever a equação acima na forma

$$\mathcal{A}_{0,\dots,n,\dots,0}^{0,\dots,m,\dots,0}(t) = {}_d\langle 0, \dots, 0, \dots, 0 | \frac{(\hat{a}'_\nu)^m}{\sqrt{m!}} e^{-i\hat{H}t} \frac{(\hat{a}'_\mu)^\dagger{}^n}{\sqrt{n!}} | 0, \dots, 0, \dots, 0 \rangle_d \quad (3.39)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{0,\dots,n,\dots,0}^{0,\dots,m,\dots,0}(t) &= {}_d\langle 0, \dots, 0, \dots, 0 | \frac{(\sum_{r=0}^N t_{\nu r} \hat{A}_r)^m}{\sqrt{m!}} e^{-i\hat{H}t} \frac{(\sum_{s=0}^N t_{\mu s} \hat{A}_s^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} | 0, \dots, 0, \dots, 0 \rangle_d \\ &= \frac{1}{\sqrt{m!n!}} \sum_{r_1, r_2, \dots, r_m=0}^N t_{\nu r_1} t_{\nu r_2} \cdots t_{\nu r_m} \sum_{s_1, s_2, \dots, s_n=0}^N t_{\mu s_1} t_{\mu s_2} \cdots t_{\mu s_n} \times \\ &\quad {}_c\langle 0, \dots, 0, \dots, 0 | \hat{A}_{r_1} \hat{A}_{r_2} \cdots \hat{A}_{r_m} e^{-i\hat{H}t} \hat{A}_{s_1}^\dagger \hat{A}_{s_2}^\dagger \cdots \hat{A}_{s_n}^\dagger | 0, \dots, 0, \dots, 0 \rangle_c \end{aligned}$$

que com a aplicação sucessiva dos operadores de criação e de aniquilação coletivos nos estados de vácuo, encontramos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{0,\dots,n,\dots,0}^{0,\dots,m,\dots,0}(t) &= \frac{1}{\sqrt{m!n!}} \sum_{r_1, r_2, \dots, r_m=0}^N t_{\nu r_1} t_{\nu r_2} \cdots t_{\nu r_m} \sum_{s_1, s_2, \dots, s_n=0}^N t_{\mu s_1} t_{\mu s_2} \cdots t_{\mu s_n} \times \\ &\quad {}_c\langle 1_{r_1}, 1_{r_2}, \dots, 1_{r_m} | e^{-i\hat{H}t} | 1_{s_1}, 1_{s_2}, \dots, 1_{s_n} \rangle_c, \end{aligned} \quad (3.40)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{0,\dots,n,\dots,0}^{0,\dots,m,\dots,0}(t) &= \frac{e^{-itE_{0,0,\dots,0}}}{\sqrt{m!n!}} \sum_{r_1, r_2, \dots, r_m=0}^N t_{\nu r_1} t_{\nu r_2} \cdots t_{\nu r_m} \sum_{s_1, s_2, \dots, s_n=0}^N t_{\mu s_1} t_{\mu s_2} \cdots t_{\mu s_n} \times \\ &\quad e^{-it(\Omega_{s_1} + \Omega_{s_2} + \cdots + \Omega_{s_n})} {}_c\langle 1_{r_1}, 1_{r_2}, \dots, 1_{r_m} | 1_{s_1}, 1_{s_2}, \dots, 1_{s_n} \rangle_c. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Notemos que na equação (3.41), deve-se levar em conta todas as possíveis combinações entre os índices r_m e s_n associados os autoestados coletivos envolvidos no produto ${}_c\langle 1_{r_1}, 1_{r_2}, \dots, 1_{r_m} | 1_{s_1}, 1_{s_2}, \dots, 1_{s_n} \rangle_c$.

Isso produz a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{0,\dots,n,\dots,0}^{0,\dots,m,\dots,0}(t) &= \frac{e^{-itE_{0,0,\dots,0}}}{\sqrt{m!n!}} \sum_{r_1, r_2, \dots, r_m=0}^N t_{\nu r_1} t_{\nu r_2} \cdots t_{\nu r_m} \sum_{s_1, s_2, \dots, s_n=0}^N t_{\mu s_1} t_{\mu s_2} \cdots t_{\mu s_n} \times \\ &\quad e^{-it(\Omega_{s_1} + \Omega_{s_2} + \cdots + \Omega_{s_n})} \left(\delta_{r_1 s_1} \delta_{r_2 s_2} \cdots \delta_{r_m s_n} \delta_{mn} + \text{restante das permutações possíveis} \right), \end{aligned} \quad (3.42)$$

Notemos que, por consistência do modelo, devemos ter $n = m$ na equação acima, caso contrário teremos amplitude de probabilidade nula. Notemos também, que considerarmos

todas as combinações possíveis na equação (3.42), equivale a termos $n!$ possibilidades, tal que da equação (3.42), encontramos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{0,\dots,n,\dots,0}^{0,\dots,m,\dots,0}(t) &= e^{-itE_{0,0,\dots,0}} \sum_{r_1,r_2,\dots,r_m=0}^N t_{\nu r_1} t_{\nu r_2} \cdots t_{\nu r_m} \sum_{s_1,s_2,\dots,s_n=0}^N t_{\mu s_1} t_{\mu s_2} \cdots t_{\mu s_n} \times \\ &e^{-it(\Omega_{s_1} + \Omega_{s_2} + \cdots + \Omega_{s_n})} \delta_{r_1 s_1} \delta_{r_2 s_2} \cdots \delta_{r_m s_n}, \end{aligned}$$

e finalmente

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{0,\dots,n,\dots,0}^{0,\dots,m,\dots,0}(t) &= e^{-itE_{0,0,\dots,0}} \left[\sum_{r=0}^N t_{\mu r} t_{\nu r} e^{-it\Omega_r} \right]^n \\ &= e^{-itE_{0,0,\dots,0}} [f_{\mu\nu}(t)]^n. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Assim, o método com operadores mostrou-se mais simples e eficiente do que o método polinomial demonstrado na seção (2.1), onde evitamos o procedimento de resolução dos coeficientes $T_{n,0,\dots,0}^{l_0,l_1,\dots,l_N}$. Não é difícil verificarmos que outras amplitudes de transição, não calculadas no capítulo 2, com mais de um modo do campo em estado excitado, seja possível de se realizar com este novo método. Porém, ao invés de investigarmos estes processos através de simples exemplos, iremos mostrar a validade do método de operadores estendendo o estudo dos processos radioativos do sistema. Iremos considerar no próximo capítulo uma situação física que, dentro do contexto de coordenadas vestidas, não foi calculada na literatura.

Capítulo 4

Probabilidade de espalhamento “fóton-átomo” mais decaimento induzido

Neste capítulo iremos calcular a probabilidade do átomo decair do primeiro estado excitado para o seu estado fundamental por conta da interação com um modo do campo. Mais uma vez iremos utilizar o formalismo com operadores de criação e aniquilação vestidos. Mencionamos que nesta parte do trabalho ficará óbvio a vantagem em se utilizar este formalismo, visto que se fôssemos calcular em termos do método polinomial teríamos diversas complicações para realizarmos as integrais que surgem.

4.1 Espalhamento “fóton-átomo” mais decaimento induzido

Seja o nosso sistema inicial em ($t = 0$) encontrado na seguinte configuração, $|1_0, 1_{k'}, 0, \dots, 0\rangle_d$, isto é, o átomo em seu primeiro nível excitado e o campo com o modo $\omega_{k'}$. O átomo é induzido a decair de seu primeiro estado excitado pela interação com um modo do campo (o “fóton”). Como consequência da interação, que estamos designando por “espalhamento”, o átomo emite um outro fóton de frequência ω_k . Assim, temos no final do processo, dois modos do campo (ou dois “fótons”), um emitido pelo átomo (ω_k) e outro espalhado ($\omega_{k''}$). A particularidade deste processo é que, após ser estimulado, o átomo emite outro fóton com as características do incidente. Mencionamos que, dentro do contexto da mecânica

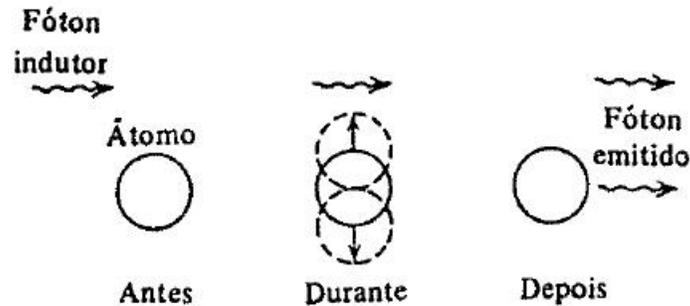


Figura 4.1: Uma ilustração esquemática do processo de espalhamento “fóton-átomo” mais decaimento induzido.

quântica, este não é o único processo possível para um sistema físico nestas condições. Poderíamos ter, por exemplo, após a interação “fóton-átomo”, uma absorção deste fóton pelo átomo, tal que este se excitaria e elevaria-se para o seu segundo estado excitado. Uma outra possibilidade seria, que mesmo havendo tal interação entre fóton e átomo, o sistema não mude sua configuração de energia, *i.e.*, o fóton se espalharia, mas permaneceria com a mesma frequência, e o átomo permaneceria em seu estado inicial. No entanto, voltamos nossa atenção para a possibilidade mencionada inicialmente. Assim como mencionamos na subseção (2.1.3), mesmo nos limitando a aproximação do nosso modelo, é possível associarmos o processo estudado neste capítulo a um dos possíveis processos atômicos descrito pela Eletrodinâmica Quântica. No contexto da Eletrodinâmica Quântica, se o átomo está em um nível excitado e o modo do campo eletromagnético contem um fóton, o átomo deve ser estimulado a emitir um outro fóton com as características do modo incidente. Em outras palavras, a presença de um fóton incidente, estimula uma emissão de uma duplicata (“clone”) de fóton com, precisamente, as mesmas características que o o fóton inicial. Chamamos este fenômeno de *emissão estimulada*. Ilustrado na Figura (4.1), temos uma representação esquemática do processo físico ocorrido em uma emissão estimulada.

Desta forma, podemos perguntar qual a amplitude de probabilidade de, em um instante $t \neq 0$, encontrarmos o sistema em $|0, \dots, 1_k, 1_{k'}, \dots, 0\rangle_d$? Isto é, queremos calcular a amplitude do átomo decair do seu primeiro nível excitado, na presença de um quantum do campo de frequência $\omega_{k'}$. Após a interação (“espalhamento”) o átomo deve emitir um “fóton” com frequência ω_k e o modo do campo, incidente, deve mudar de frequência, que

denominaremos por $\omega_{k''}$. Portanto, nossa amplitude de transição é dada por

$$\mathcal{A}_{1_0, 1_{k'}, \dots, 0}^{0, \dots, 1_k, 1_{k''}, \dots, 0}(t) = {}_d \langle 0, \dots, 1_{k''}, 1_k, \dots, 0 | e^{-i\hat{H}t} | 1_0, 1_{k'}, \dots, 0 \rangle_d. \quad (4.1)$$

De forma semelhante as amplitudes anteriores, usamos operadores de criação e de aniquilação vestidos de forma adequada. Podemos reescrever (4.1) na forma

$$\mathcal{A}_{1_0, 1_{k'}, \dots, 0}^{0, \dots, 1_k, 1_{k''}, \dots, 0}(t) = {}_d \langle 0, \dots, 0, 0 | \hat{a}'_k \hat{a}'_{k''} e^{-i\hat{H}t} \hat{a}'_k{}^\dagger \hat{a}'_0{}^\dagger | 0, 0, \dots, 0 \rangle_d, \quad (4.2)$$

que fazendo uso das equações (3.22) e (3.23) e da igualdade entre os estados de vácuo vestidos e coletivos, encontramos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{1_0, 1_{k'}, \dots, 0}^{0, \dots, 1_k, 1_{k''}, \dots, 0}(t) &= \sum_{r=0}^N t_{k''r} \sum_{s=0}^N t_{ks} \sum_{r'=0}^N t_{k'r'} \sum_{s'=0}^N t_{0s'} {}_c \langle 0, \dots, 1_r, 1_s, \dots, 0 | e^{-i\hat{H}t} | 1_{r'}, 1_{s'}, 0, \dots, 0 \rangle_c \\ &= \left(\sum_{r=0}^N t_{k''r} t_{k'r} e^{-i\Omega_r t} \right) \left(\sum_{s=0}^N t_{ks} t_{0s} e^{-i\Omega_s t} \right) e^{-itE_{0,0,0\dots}} + \\ &+ \left(\sum_{r'=0}^N t_{k'r'} t_{k''r'} e^{-i\Omega_{r'} t} \right) \left(\sum_{s'=0}^N t_{k's'} t_{0s'} e^{-i\Omega_{s'} t} \right) e^{-itE_{0,0\dots}}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

de onde identificamos,

$$\mathcal{A}_{1_0, 1_{k'}, \dots, 0}^{0, \dots, 1_k, 1_{k''}, \dots, 0}(t) = e^{-itE_{0,0,\dots}} [f_{k''k'}(t) f_{0k}(t) + f_{kk'}(t) f_{0k''}(t)]. \quad (4.4)$$

Observando a equação acima, vemos que surgem quantidades já calculadas neste trabalho, $f_{0k}(t)$ dado pela equação

$$f_{0k}(t) = \eta\omega_k \left[\frac{(1 - \frac{i\pi g}{2\kappa}) e^{-i(\kappa - \frac{i\pi g}{2})t}}{[\omega_k^2 - (\kappa - \frac{i\pi g}{2})^2]} - \frac{e^{-i\omega_k t}}{[\omega_k^2 - \omega_0^2 + i\pi g\omega_k]} + 2i\ell(t) \right], \quad (4.5)$$

com $\ell(t)$ igual a

$$\ell(t) = g \int_0^\infty dy \frac{y^2 e^{-yt}}{[(y^2 + \omega_0^2)^2 - \pi^2 g^2 y^2](y^2 + \omega_k^2)},$$

assim como $f_{0k''}(t)$, que possui a mesma forma de (4.5), com uma simples troca de índices (k por k''). Ambas no regime em que $\kappa^2 > 0$.

Munidos dos resultados acima, notemos que nos resta resolvermos as outras quantidades, *i.e.*, $f_{k''k'}(t)$ e $f_{k'k}(t)$. Assim como as equações para $f_{0k}(t)$ e $f_{0k''}(t)$, os termos $f_{k''k'}(t)$ e $f_{k'k}(t)$, entre si, possuem forma funcional análogas, com uma troca simples nos índices das frequências envolvidas (k'' por k). Desta forma, basta resolvermos um dos termos.

Logo, para $f_{k''k'}(t)$, temos

$$f_{k''k'}(t) = \sum_{r=0}^N \left[\frac{\eta\omega_{k''}}{\omega_{k''}^2 - \Omega_r^2} t_{0r} \right] \left[\frac{\eta\omega_{k'}}{\omega_{k'}^2 - \Omega_r^2} t_{0r} \right] e^{-i\Omega_r t}, \quad (4.6)$$

que pode ser reescrita por meio de uma decomposição por frações parciais na forma

$$f_{k'k''}(t) = \sum_{r=0}^N \eta^2 G(\Omega_r, t) \left[\frac{\omega_{k'}^3 \omega_{k''} (t_{0r})^2}{\Omega_r^2 (\omega_{k'}^2 - \omega_{k''}^2) (\omega_{k''}^2 - \Omega_r^2)} - \frac{\omega_{k'}^3 \omega_{k''} (t_{0r})^2}{\Omega_r^2 (\omega_{k'}^2 - \omega_{k''}^2) (\omega_{k'}^2 - \Omega_r^2)} \right], \quad (4.7)$$

onde $G(\Omega_r, t) = e^{-i\Omega_r t}$. Aplicando o método dos resíduos no limite contínuo, e usando a equação (2.22) encontramos (4.7) na seguinte maneira

$$f_{k'k''}(t) = \frac{2\eta^2 \omega_{k'} \omega_{k''}}{(\omega_{k'}^2 - \omega_{k''}^2)} \left[\sum_{r=0}^N \frac{\omega_{k''}^2 G(\Omega_r, t)}{W'(\Omega_r) (\omega_{k''}^2 - \Omega_r^2) \Omega_r} - \sum_{r=0}^N \frac{\omega_{k'}^2 G(\Omega_r, t)}{W'(\Omega_r) (\omega_{k'}^2 - \Omega_r^2) \Omega_r} \right]. \quad (4.8)$$

Da mesma forma que em $f_{0k}(t)$, equação (2.50), os fatores singulares do tipo $(\omega_\alpha^2 - \Omega_r^2)$, com $(\alpha = k', k'')$, e Ω_r presentes no denominador de (4.8), não contribuem de forma significativa para o processo, uma vez que nos limites $(z \rightarrow \omega_\alpha)$ e $(z \rightarrow 0)$, temos $f_{k'k''}(t) = 0$. Implicando que podemos aplicar, sem maiores problemas, o método dos resíduos no limite contínuo. Observemos ainda, que a equação (4.8) é válida somente para $\omega_{k'} \neq \omega_{k''}$. No entanto, podemos obter o caso em que $\omega_{k'} = \omega_{k''}$ por um método indireto. Podemos usar o fato de que a probabilidade total é um, *i.e.*, $\sum_{k'} P_{k'k''}(t) = 1$, tal que o caso em que $\omega_{k'} = \omega_{k''}$ pode ser obtido através da subtração de todas as possibilidades, exceto o caso de igualdade¹.

Olhando para a equação (4.8), é notório a simetria dos termos desta, a menos de parâmetros constantes distintos. Assim, basta resolvermos uma das partes da equação. De tal forma que podemos escrever o primeiro termo de (4.7), na seguinte forma

$$\sum_{r=0}^N \frac{G(\Omega_r, t)}{W'(\Omega_r) (\omega_{k''}^2 - \Omega_r^2) \Omega_r} = \frac{1}{\pi i} \oint_C \frac{G(z, t) dz}{W(z) (\omega_{k''}^2 - z^2) z}. \quad (4.9)$$

De onde concluímos que nosso trabalho é buscar a solução de

$$I_{\omega_{k''}} = \frac{1}{\pi i} \oint_C \frac{G(z, t) dz}{W(z) (\omega_{k''}^2 - z^2) z}. \quad (4.10)$$

Mais uma vez, lembramos que no limite contínuo $(R \rightarrow \infty)$,

$$W(z) = \begin{cases} z^2 + i\pi g z - \omega_0^2, & \text{se } \text{Im}(z) > 0 \\ z^2 - i\pi g z - \omega_0^2, & \text{se } \text{Im}(z) < 0. \end{cases}$$

Para investigarmos este problema, um bom contorno para (4.10) é o representado pela Figura (2.1), tal que $z = x + i\epsilon$ e $z = x - i\epsilon$ com $\epsilon > 0$, onde após fazermos os cálculos

¹Em outras palavras, podemos fazer: $P_{k'k'}(t) = 1 - \sum_{k' \neq k''} P_{k'k''}(t)$.

devemos tomar $\epsilon \rightarrow 0^+$.

Desta forma podemos reescrever (4.10), como

$$I_{\omega_{k''}} = \frac{1}{\pi i} \int_0^\infty G(x, t) dx \left\{ \frac{1}{[x^2 + i\pi g x - \omega_0^2] [(x + i\epsilon)^2 - \omega_{k''}^2] (x + i\epsilon)} - \frac{1}{[x^2 - i\pi g x - \omega_0^2] [(x - i\epsilon)^2 - \omega_{k''}^2] (x - i\epsilon)} \right\} \Big|_{\epsilon \rightarrow 0^+}, \quad (4.11)$$

Usando um outro contorno, onde a função $G(x, t) = e^{-ixt}$ não apresente divergência no limite em que $t \rightarrow \infty$, *i.e.*, o contorno representado na Figura (2.2), ficamos com

$$I_{\omega_{k''}} = \frac{1}{\pi i} \int_0^\infty G(x, t) dx \frac{1}{[x^2 + i\pi g x - \omega_0^2] [(x + i\epsilon)^2 - \omega_{k''}^2] (x + i\epsilon)} \Big|_{\epsilon \rightarrow 0^+}. \quad (4.12)$$

Assim, análogo a equação (2.55), façamos

$$\int_0^\infty w(z) dz = \int_C w(z) dz - \int_{-\infty}^0 w(z) dz - \int_{C_R} w(z) dz, \quad (4.13)$$

onde a última integral, vai a zero a medida que $R \rightarrow \infty$. Nestas condições, nos restam as duas outras contribuições. Em relação ao contorno C , usamos mais uma vez,

$$\int_C w(z) dz = -2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Re}(z_j), \quad (4.14)$$

onde n indica todas as contribuições devido aos resíduos envolvidos, que neste caso são três, cuja a soma resulta em

$$\int_C w(z) dz = -i\pi \left\{ \left[\frac{e^{-i(\kappa - \frac{i\pi g}{2})t}}{\kappa(\kappa - \frac{i\pi g}{2})[(\kappa - \frac{i\pi g}{2})^2 - \omega_{k''}^2]} \right] + \left[\frac{e^{-i\omega_{k''}t}}{(\omega_{k''}^2 + i\pi g \omega_{k''} - \omega_0^2)\omega_{k''}^2} \right] + \frac{2}{(\omega_{k''}\omega_0)^2} \right\}. \quad (4.15)$$

Nos resta agora calcularmos a outra integral em (4.13) cujo resultado, após algumas simplificações é

$$\int_{-\infty}^0 w(z) dz = \int_{-\infty}^0 dy e^{yt} \left[\frac{1}{(-y^2 - \pi g y - \omega_0^2)(y^2 + \omega_{k''}^2)y} - \frac{1}{(-y^2 + \pi g y - \omega_0^2)(y^2 + \omega_{k''}^2)y} \right], \quad (4.16)$$

ou ainda, se fizermos uma mudança de variável (y por $-y$), encontramos

$$\int_{-\infty}^0 w(z) dz = - \int_0^\infty dy \frac{2\pi g e^{-yt}}{[(y^2 + \omega_0^2)^2 - \pi^2 g^2 y^2](y^2 + \omega_{k''}^2)}. \quad (4.17)$$

Juntando todas os resultados em (4.13) e substituindo em (4.10), finalmente encontramos

$$I_{\omega_{k''}} = \eta^2 \frac{\omega_{k''}^3 \omega_{k'}}{(\omega_{k''}^2 - \omega_{k'}^2)} \left\{ \left[\frac{e^{-i(\kappa - \frac{i\pi g}{2})t}}{\kappa(\kappa - \frac{i\pi g}{2})[(\kappa - \frac{i\pi g}{2})^2 - \omega_{k''}^2]} \right] + \left[\frac{e^{-i\omega_{k''}t}}{(\omega_{k''}^2 + i\pi g\omega_{k''} - \omega_0^2)\omega_{k''}^2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{2}{(\omega_{k''}\omega_0)^2} + 2ig \int_0^\infty dy \frac{e^{-yt}}{[(y^2 + \omega_0^2)^2 - \pi^2 g^2 y^2](y^2 + \omega_{k''}^2)} \right\}. \quad (4.18)$$

Como mencionado acima, este resultado é somente uma parte do que estamos calculando.

A outra parte por simetria, e seguindo a mesma resolução para (4.10), é dada por

$$I_{\omega_{k'}} = \eta^2 \frac{\omega_{k'}^3 \omega_{k''}}{(\omega_{k'}^2 - \omega_{k''}^2)} \left\{ \left[\frac{e^{-i(\kappa - \frac{i\pi g}{2})t}}{\kappa(\kappa - \frac{i\pi g}{2})[(\kappa - \frac{i\pi g}{2})^2 - \omega_{k'}^2]} \right] + \left[\frac{e^{-i\omega_{k'}t}}{(\omega_{k'}^2 + i\pi g\omega_{k'} - \omega_0^2)\omega_{k'}^2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{2}{(\omega_{k'}\omega_0)^2} + 2ig \int_0^\infty dy \frac{e^{-yt}}{[(y^2 + \omega_0^2)^2 - \pi^2 g^2 y^2](y^2 + \omega_{k'}^2)} \right\}. \quad (4.19)$$

Substituindo (4.19) e (4.18) em (4.6), encontramos

$$f_{k'k''}(t) = \eta^2 \omega_{k'} \omega_{k''} \left\{ \frac{(1 - \frac{i\pi g}{2\kappa})e^{-i(\kappa - \frac{i\pi g}{2})t}}{[\omega_{k'}^2 - (\kappa - \frac{i\pi g}{2})^2][\omega_{k''}^2 - (\kappa - \frac{i\pi g}{2})^2]} + \frac{e^{-i\omega_{k'}t}}{[\omega_{k'}^2 - \omega_{k''}^2][\omega_{k'}^2 - \omega_0^2 + i\pi g\omega_{k'}]} + \right. \\ \left. + \frac{e^{-i\omega_{k''}t}}{[\omega_{k''}^2 - \omega_{k'}^2][\omega_{k''}^2 - \omega_0^2 + i\pi g\omega_{k''}]} + 2iS(t) \right\}, \quad (4.20)$$

com $\kappa > 0$ e $S(t)$, dada por

$$S(t) = g \int_0^\infty dy \frac{y^2 e^{-yt}}{[(y^2 + \omega_0^2)^2 - \pi^2 g^2 y^2](y^2 + \omega_{k'}^2)(y^2 + \omega_{k''}^2)}. \quad (4.21)$$

Como foi mencionado anteriormente, $f_{k'k''}(t)$, deve ser análogo a equação (4.20), e de fato é, basta trocarmos (k'' por k).

No apêndice D apresentamos um teste para mostrarmos a validade da equação (4.20) em $t = 0$.

Note que a equação (4.4) escrita em termos dos resultados (4.5), (4.20) e seus análogos, a menos de uma troca de índices, implica numa expressão extensa. E portanto, a probabilidade associada a tal amplitude, para qualquer valor de tempo, implicaria numa equação extremamente complicada. Além disso, sua análise torna-se de difícil acesso uma vez que as funções $\ell(t)$ e $S(t)$ impossibilitam uma solução final exata. Uma forma de contornar tais dificuldades é utilizarmos mais uma vez o limite de tempos longos, *i.e.*, tomarmos ($t \rightarrow \infty$) em cada termo da amplitude total. E assim, sob estas condições analisaremos a probabilidade do processo. Faremos isso agora.

Denotamos por $P_{1_0, 1_{k'}}^{1_k, 1_{k''}}(t)$, a probabilidade associada a equação (4.4), que para qualquer instante de tempo vale a forma

$$P_{1_0, 1_{k'}}^{1_k, 1_{k''}}(t) = |f_{k'k''}(t)f_{0k}(t)|^2 + |f_{k'k}(t)f_{0k''}(t)|^2 + 2\Re\{f_{k'k''}(t)f_{0k}f_{k'k}^*(t)f_{0k''}^*(t)\}. \quad (4.22)$$

O último termo de (4.22) representa duas vezes a parte real de $\{f_{k'k''}(t)f_{0k}f_{k'k}^*(t)f_{0k''}^*(t)\}$. Agora, aplicando o limite de tempos longos, ($t \rightarrow \infty$), para cada termo de (4.22), encontramos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |f_{k'k''}(t)f_{0k}(t)|^2 = \left[\frac{(\eta^3 \omega_k \omega_{k'} \omega_{k''})^2}{K(\omega_k)K(\omega_{k'})K(\omega_{k''})(\omega_{k'}^2 - \omega_{k''}^2)^2} \right] \left\{ [K(\omega_{k'}) + K(\omega_{k''})] + \right. \\ \left. + \alpha_{(\omega_{k'}, \omega_{k''})} \sin[(\omega_{k''} - \omega_{k'})t] - \beta_{(\omega_{k'}, \omega_{k''})} \cos[(\omega_{k''} - \omega_{k'})t] \right\}, \quad (4.23)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |f_{k'k}(t)f_{0k''}(t)|^2 = \left[\frac{(\eta^3 \omega_k \omega_{k'} \omega_{k''})^2}{K(\omega_k)K(\omega_{k'})K(\omega_{k''})(\omega_{k'}^2 - \omega_k^2)^2} \right] \left\{ [K(\omega_{k'}) + K(\omega_k)] + \right. \\ \left. + \alpha_{(\omega_k, \omega_{k'})} \sin[(\omega_k - \omega_{k'})t] - \beta_{(\omega_k, \omega_{k'})} \cos[(\omega_k - \omega_{k'})t] \right\}, \quad (4.24)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Re\{f_{k'k''}(t)f_{0k}f_{k'k}^*(t)f_{0k''}^*(t)\} = \left[\frac{(\eta^3 \omega_k \omega_{k'} \omega_{k''})^2}{K(\omega_k)K(\omega_{k'})K(\omega_{k''})(\omega_{k'}^2 - \omega_{k''}^2)(\omega_k^2 - \omega_{k'}^2)} \right] \times \\ \left\{ \alpha_{(\omega_{k''}, \omega_k)} \sin[(\omega_{k''} - \omega_k)t] + \beta_{(\omega_{k''}, \omega_k)} \cos[(\omega_k - \omega_{k''})t] + \right. \\ \left. + \alpha_{(\omega_{k'}, \omega_k)} \sin[(\omega_k - \omega_{k'})t] + \alpha_{(\omega_{k''}, \omega_{k'})} \sin[(\omega_{k'} - \omega_{k''})t] - \right. \\ \left. - \beta_{(\omega_{k''}, \omega_{k'})} \cos[(\omega_{k'} - \omega_{k''})t] - \beta_{(\omega_{k'}, \omega_k)} \cos[(\omega_k - \omega_{k'})t] + K(\omega_{k'}) \right\}. \quad (4.25)$$

Nas equações acima estamos introduzindo as seguintes quantidades

$$K(\omega_\delta) = (\omega_\delta^2 - \omega_0^2)^2 + \pi^2 g^2 \omega_\delta^2,$$

$$\alpha_{(\omega_\gamma, \omega_\sigma)} = \pi g [\omega_\gamma(\omega_\sigma^2 - \omega_0^2) - \omega_\sigma(\omega_\gamma^2 - \omega_0^2)],$$

$$\beta_{(\omega_\gamma, \omega_\sigma)} = (\omega_\gamma^2 - \omega_0^2)(\omega_\sigma^2 - \omega_0^2) + \pi^2 g^2 \omega_\gamma \omega_\sigma,$$

com δ , γ e σ assumindo os possíveis valores para k , k' ou k'' .

Substituindo as equações (4.23), (4.24) e (4.25) em (4.22), encontramos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{1_0, 1_{k'}}^{1_k, 1_{k''}}(t) = \left[\frac{(\eta^3 \omega_k \omega_{k'} \omega_{k''})^2}{K(\omega_k)K(\omega_{k'})K(\omega_{k''})(\omega_{k'}^2 - \omega_{k''}^2)^2} \right] \left\{ [K(\omega_{k'}) + K(\omega_{k''})] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \alpha_{(\omega_{k'}, \omega_{k''})} \sin[(\omega_{k''} - \omega_{k'})t] - \beta_{(\omega_{k'}, \omega_{k''})} \cos[(\omega_{k''} - \omega_{k'})t] \Big\} + \\
& + \left[\frac{(\eta^3 \omega_k \omega_{k'} \omega_{k''})^2}{K(\omega_k) K(\omega_{k'}) K(\omega_{k''}) (\omega_{k'}^2 - \omega_k^2)^2} \right] \left\{ [K(\omega_{k'}) + K(\omega_k)] + \right. \\
& \quad \left. + \alpha_{(\omega_k, \omega_{k'})} \sin[(\omega_k - \omega_{k'})t] - \beta_{(\omega_k, \omega_{k'})} \cos[(\omega_k - \omega_{k'})t] \right\} + \\
& + \left[\frac{2(\eta^3 \omega_k \omega_{k'} \omega_{k''})^2}{K(\omega_k) K(\omega_{k'}) K(\omega_{k''}) (\omega_{k''}^2 - \omega_{k'}^2) (\omega_k^2 - \omega_{k'}^2)} \right] \left\{ \alpha_{(\omega_{k''}, \omega_k)} \sin[(\omega_{k''} - \omega_k)t] + \right. \\
& \quad + \beta_{(\omega_{k''}, \omega_k)} \cos[(\omega_k - \omega_{k''})t] + \alpha_{(\omega_{k'}, \omega_k)} \sin[(\omega_k - \omega_{k'})t] + \\
& \quad + \alpha_{(\omega_{k''}, \omega_{k'})} \sin[(\omega_{k'} - \omega_{k''})t] - \beta_{(\omega_{k''}, \omega_{k'})} \cos[(\omega_{k'} - \omega_{k''})t] - \\
& \quad \left. - \beta_{(\omega_{k'}, \omega_k)} \cos[(\omega_k - \omega_{k'})t] + K(\omega_{k'}) \right\}. \tag{4.26}
\end{aligned}$$

Para compreendermos o comportamento associado a probabilidade acima para um instante de tempo t qualquer, teríamos que considerar todos os termos inicialmente negligenciados na equação (4.22) quando tomamos o limite de $t \rightarrow \infty$. No entanto, como já mencionado anteriormente, a solução exata para este processo possui algumas complicações. Porém, podemos analisar o comportamento de (4.26) para certos intervalos de frequências associadas a transição. Assim como mencionado na subseção (2.1.3), vale a observação de que, no limite contínuo, associarmos índices as frequências não faz mais sentido². Desta forma, para realizarmos tal análise devemos realizar uma integração nas frequências da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\omega_0, \omega'}^{\omega, \omega''} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int d\omega d\omega' d\omega'' \left\{ \left[\frac{8g^3 (\omega \omega' \omega'')^2}{K(\omega) K(\omega') K(\omega'') (\omega'^2 - \omega''^2)^2} \right] \left\{ [K(\omega') + K(\omega'')] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \alpha_{(\omega', \omega'')} \sin[(\omega'' - \omega')t] - \beta_{(\omega', \omega'')} \cos[(\omega'' - \omega')t] \right\} + \right. \\
& + \left[\frac{8g^3 (\omega \omega' \omega'')^2}{K(\omega) K(\omega') K(\omega'') (\omega'^2 - \omega^2)^2} \right] \left\{ [K(\omega') + K(\omega)] + \right. \\
& \quad \left. + \alpha_{(\omega, \omega')} \sin[(\omega - \omega')t] - \beta_{(\omega, \omega')} \cos[(\omega - \omega')t] \right\} +
\end{aligned}$$

²Trocamos $(\omega_k, \omega_{k'}, \omega_{k''})$ por $(\omega, \omega', \omega'')$.

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{16g^3(\omega\omega'\omega'')^2}{K(\omega)K(\omega')K(\omega'')(\omega'^2 - \omega''^2)(\omega^2 - \omega'^2)} \right] \left\{ \alpha_{(\omega'',\omega)} \sin[(\omega'' - \omega)t] + \right. \\
& \quad + \beta_{(\omega'',\omega)} \cos[(\omega - \omega'')t] + \alpha_{(\omega',\omega)} \sin[(\omega - \omega')t] + \\
& \quad + \alpha_{(\omega'',\omega')} \sin[(\omega' - \omega'')t] - \beta_{(\omega'',\omega')} \cos[(\omega' - \omega'')t] - \\
& \quad \left. - \beta_{(\omega',\omega)} \cos[(\omega - \omega')t] + K(\omega') \right\}. \tag{4.27}
\end{aligned}$$

Aplicando o lema de Riemann-Lebesgue [48, 49], dado por

$$\int d\omega f(\omega) e^{-i\omega t} \rightarrow 0, \quad \text{quando } t \rightarrow \infty, \tag{4.28}$$

na equação (4.27), encontramos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\omega_0, \omega'}^{\omega, \omega''} &= 8g^3 \int d\omega d\omega' d\omega'' \left[\frac{(\omega\omega'\omega'')^2}{K(\omega)K(\omega'')K(\omega'')[(\omega'^2 - \omega''^2)(\omega'^2 - \omega^2)]^2} \right] \times \\
& \quad \left\{ [K(\omega') + K(\omega'')](\omega'^2 - \omega^2)^2 + [K(\omega') + K(\omega)](\omega'^2 - \omega''^2)^2 + \right. \\
& \quad \left. + 2K(\omega')(\omega'^2 - \omega''^2)(\omega'^2 - \omega^2) \right\}, \tag{4.29}
\end{aligned}$$

escrevendo de outra forma, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\omega_0, \omega'}^{\omega, \omega''} &= \int_{\Delta\omega} d\omega \int_{\Delta\omega'} d\omega' \int_{\Delta\omega''} d\omega'' \left[\frac{8g^3(\omega\omega'\omega'')^2}{K(\omega)K(\omega')K(\omega'')} \right] \left\{ K(\omega') \left[\frac{2\omega'^2 - (\omega^2 + \omega''^2)}{(\omega'^2 - \omega''^2)(\omega'^2 - \omega^2)} \right]^2 + \right. \\
& \quad \left. + \frac{K(\omega)(\omega'^2 - \omega''^2)^2 + K(\omega'')(\omega'^2 - \omega^2)^2}{[(\omega'^2 - \omega''^2)(\omega'^2 - \omega^2)]^2} \right\}, \tag{4.30}
\end{aligned}$$

incluímos o subscrito $\Delta\omega$, que representa um intervalo em torno de ω , assim como $\Delta\omega'$ e $\Delta\omega''$, são intervalos em torno de ω' e ω'' , respectivamente. Resolver exatamente (4.30) torna-se de difícil acesso, no entanto sua solução numérica é perfeitamente possível. Notemos que a equação (4.30) possui características de emissão estimulada, tais como: ser diretamente proporcional a frequência do modo incidente.

Acreditamos que os resultados analisados neste capítulo possam ser úteis para contribuir junto a alguns trabalhos recentemente desenvolvidos na literatura, tais como: descrições de campos quânticos interagindo com cavidades ópticas [51, 52], emissões estimuladas por um átomo excitado em guias de ondas [53], além do estudo da ressonância fluorescente [46].

Conclusões e perspectivas

Neste trabalho tratamos o conceito de coordenadas e estados renormalizados. Com o auxílio de um modelo aproximado para o estudo de acoplamento átomo-campo eletromagnético estudamos alguns processos de radiação, provenientes de uma aplicação direta do formalismo, que sob certas condições, contorna as dificuldades apresentadas pela teoria de perturbações que geralmente é utilizada para o estudo do problema. Diferenciando-se da forma de resolver algumas passagens matemáticas, provenientes das tais amplitudes de probabilidades, escolhemos como ferramenta uma técnica baseada no teorema dos resíduos, inicialmente introduzida em [10], que no limite contínuo, $R \rightarrow \infty$, torna possível a solução de diversos processos físicos.

Como uma forma de contribuição para facilitar os métodos matemáticos empregados no capítulo 2, introduzimos os operadores de criação e de aniquilação renormalizados no contexto de amplitudes de transições, que de maneira muito mais simples que o método polinomial (na representação de coordenadas vestidas), possibilitou a reprodução dos mesmos resultados já calculados anteriormente nos trabalhos precursores sobre o assunto. Como ilustração da potencialidade desse formalismo, calculamos um novo processo físico de radiação, o “espalhamento fóton-átomo” mais decaimento induzido. Concluímos com a análise desta probabilidade de espalhamento mais decaimento induzido no limite de tempos longos ($t \rightarrow \infty$), de onde verificamos que a probabilidade obtida apresenta características de emissão estimulada, como esperávamos.

Como possíveis perspectivas de trabalho dentro deste formalismo, mencionamos a extensão do mesmo para casos de acoplamentos não-lineares, tais como os mencionados, por exemplo em [34, 37]. Munidos de uma nova técnica perturbativa, dentro dos moldes do formalismo com operadores de criação e de aniquilação renormalizados, espera-se uma simplificação substancial para os cálculos dos termos da série perturbativa. Posteri-

ormente, aplicando a técnica desenvolvida, será possível calcularmos as taxas de emissão e absorção de um sistema físico modelado por uma Lagrangeana não-linear. De posse destes resultados, podemos ainda interpretá-los baseando-se em dados experimentais de sistemas atômicos, assim como feito no caso de acoplamento linear. Outra perspectiva é usar o presente formalismo para o estudo do movimento Browniano, modelado pelo sistema oscilador-campo escalar onde o oscilador faz o papel de uma partícula Browniana e o campo representa um banho térmico [27]. No mesmo contexto, também seria interessante considerar o problema da decoerência em Mecânica Quântica [21]. Assim como, buscamos uma utilização do resultado da probabilidade de espalhamento “fóton-átomo” em descrições de campos quânticos interagindo com cavidades ópticas [51, 52], emissões estimuladas por um átomo excitado em guias de ondas [53], e por fim verificarmos o fenômeno da ressonância fluorescente dentro do contexto de coordenadas renormalizadas e estados renormalizados, algo semelhante ao que foi feito em [46, 54].

Apêndice A

Lagrangiana para N osciladores acoplados linearmente

Neste apêndice iremos apresentar de forma detalhada os cálculos relevantes para demonstrarmos a Lagrangiana que modela nosso sistema, definida pela equação (1.17).

A.1 Demonstração para a Lagrangiana (1.17)

Como vimos no capítulo 1, a solução para as equações de Euler-Lagrange provenientes da Lagrangiana (1.1) é o conjunto de equações acopladas dadas pelas equações (1.2) e (1.3). Sabemos que $\partial_\mu = (\partial t, \vec{\nabla})$ e $\partial^\mu = (\partial t, -\vec{\nabla})$. Tal que, se substituirmos estes operadores diferenciais e a forma decomposta de $\phi(\vec{x}, t)$, equação (1.5), encontramos

$$L = L_0 + \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \left[\left(\partial t + \vec{\nabla} \right) \left(\sum_{k=1}^N q_k(t) u_k(\vec{x}) \right) \left(\partial t - \vec{\nabla} \right) \left(\sum_{j=1}^N q_j(t) u_j(\vec{x}) \right) + 2\pi\sqrt{g} \sum_{k=1}^N q_k(t) u_k(\vec{x}) \delta(\vec{x}) \right], \quad (\text{A.1})$$

onde estamos definindo L_0 , como

$$L_0 = \frac{1}{2} (p_0^2 - \omega_0^2 q_0^2).$$

Tal que, após algumas manipulações simples, encontramos

$$L = L_0 + \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \left[\sum_{k,j=1}^N \left(\dot{q}_k(t) \dot{q}_j(t) u_k(\vec{x}) u_j(\vec{x}) - \dot{q}_k(t) u_k(\vec{x}) q_j(t) \vec{\nabla} u_j(\vec{x}) + \dot{q}_j(t) u_j(\vec{x}) q_k(t) \vec{\nabla} u_k(\vec{x}) - q_k(t) q_j(t) \vec{\nabla} u_k(\vec{x}) \vec{\nabla} u_j(\vec{x}) \right) \right] +$$

$$+2\pi\sqrt{g}q_0(t) \int d^3\vec{x} \sum_{k=1}^N q_k(t)u_k(\vec{x})\delta(\vec{x}), \quad (\text{A.2})$$

ou ainda,

$$L = L_0 + \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \left[\sum_{k,j=1}^N \dot{q}_k(t)\dot{q}_j(t)u_k(\vec{x})u_j(\vec{x}) - \sum_{k,j=1}^N q_k(t)q_j(t)\vec{\nabla}u_k(\vec{x})\vec{\nabla}u_j(\vec{x}) \right] + \\ +2\pi\sqrt{g}q_0(t) \int d^3\vec{x} \sum_{k=1}^N q_k(t)u_k(\vec{x})\delta(\vec{x}), \quad (\text{A.3})$$

onde fizemos uma mudança simples nos índices dos termos

$$\sum_{k,j=1}^N \left(\dot{q}_k(t)u_k(\vec{x})q_j(t)\vec{\nabla}u_j(\vec{x}) - \dot{q}_j(t)u_j(\vec{x})q_k(t)\vec{\nabla}u_k(\vec{x}) \right) = 0,$$

que claramente resulta na anulação dos mesmos. Agora, consideremos o termo

$$\int d^3\vec{x} \vec{\nabla}u_k(\vec{x})\vec{\nabla}u_j(\vec{x}) = \underbrace{\vec{\nabla}u_j(\vec{x})u_k(\vec{x})}_{=0} \Big|_R - \int d^3\vec{x} u_k(\vec{x})\vec{\nabla}(\vec{\nabla}u_j(\vec{x})),$$

onde realizamos uma integração por partes e aplicamos a condição de fronteira para campo $\phi(\vec{x}, t)$, indicada pela equação (1.4). Assim, substituindo estes resultados na Lagrangeana, temos

$$L = L_0 + \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^N \left[\dot{q}_k(t)\dot{q}_j(t) \int d^3\vec{x} u_k(\vec{x})u_j(\vec{x}) + q_k(t)q_j(t) \int d^3\vec{x} u_k(\vec{x})\vec{\nabla}^2 u_j(\vec{x}) \right] + \\ +2\pi\sqrt{g}q_0(t) \int d^3\vec{x} \sum_{k=1}^N q_k(t)u_k(\vec{x})\delta(\vec{x}). \quad (\text{A.4})$$

Por fim, considerando a equação (1.8), e que a parte espacial do campo seja definida como uma base ortonormal, ou seja,

$$\int d^3\vec{x} u_k(\vec{x})u_j(\vec{x}) = \delta_{kj}$$

encontramos,

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}_0^2 - \frac{\omega_0^2}{2}q_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \dot{q}_k^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \omega_k^2 q_k^2 + 2\pi q_0(t)\sqrt{g} \sum_{k=1}^N q_k(t)u_k(0), \quad (\text{A.5})$$

que com o uso da equação (1.12), finalmente chegamos a equação (1.17), completando nossa demonstração.

Apêndice B

Diagonalização da Hamiltoniana

B.1 Cálculo para a diagonalização da Hamiltoniana (1.29)

Antes de iniciarmos o processo de diagonalização, devemos mostrar as exigências impostas as transformações para que as equações (1.30) e (1.31) estejam de acordo com a proposta dos eixos principais. Basicamente, devemos exigir que

$$\sum_{\mu} t_{\mu r} t_{\mu s} = \delta_{rs} \quad \sum_r t_{\mu r} t_{\nu r} = \delta_{\mu\nu}.$$

Desta forma, substituindo

$$\hat{q}_{\mu} = t_{\mu r} \hat{Q}_r \quad \hat{p}_{\mu} = t_{\mu r} \hat{P}_r,$$

na Hamiltoniana abaixo

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \left[\hat{p}_0^2 + \omega_0^2 \hat{q}_0^2 + \sum_{k=1}^N (\hat{p}_k^2 + \hat{q}_k^2 \omega_k^2) - 2 \sum_{k=1}^N \eta \omega_k \hat{q}_0 \hat{q}_k \right] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \eta^2 \hat{q}_0^2,$$

temos¹

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\mu, r, s} \left(t_{\mu r} t_{\mu s} \hat{P}_r \hat{P}_s + \omega_{\mu}^2 t_{\mu r} t_{\mu s} \hat{Q}_r \hat{Q}_s \right) - \sum_{k, r, s} \eta \omega_k t_{0r} t_{ks} \hat{Q}_r \hat{Q}_s + \sum_{k, r, s} \eta^2 t_{0r} t_{0s} \hat{Q}_r \hat{Q}_s, \quad (\text{B.1})$$

ou ainda,

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{r, s} \left(\delta_{rs} \hat{P}_r \hat{P}_s + \sum_{\mu} \omega_{\mu}^2 t_{\mu r} t_{\mu s} \hat{Q}_r \hat{Q}_s \right) - \sum_{k, r, s} \eta \omega_k t_{0r} t_{ks} \hat{Q}_r \hat{Q}_s + \sum_{k, r, s} \eta^2 t_{0r} t_{0s} \hat{Q}_r \hat{Q}_s, \quad (\text{B.2})$$

que com o uso da propriedade da δ_{rs} , somada em s , temos

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_r \hat{P}_r^2 + \frac{1}{2} \sum_{r, s} \left[\sum_{\mu} \omega_{\mu}^2 t_{\mu r} t_{\mu s} - 2 \sum_k \left(\eta \omega_k t_{0r} t_{ks} - \frac{1}{2} \eta^2 t_{0r} t_{0s} \right) \right] \hat{Q}_r \hat{Q}_s. \quad (\text{B.3})$$

¹Estamos abreviando a notação nos termos do tipo, $\sum_{k, r, s} \equiv \sum_k \sum_r \sum_s$.

Nossa intenção é mostrarmos que as transformações são capaz de gerar uma Hamiltoniana na forma,

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_r \left(\hat{P}_r^2 + \Omega_r^2 \hat{Q}_r^2 \right), \quad (\text{B.4})$$

logo, com uma comparação entre as equações (B.3) e (B.4), munidos da seguinte relação,

$$\sum_\mu \sum_k [\eta\omega_k (t_{0r}\delta_{\mu k} + \delta_{0\mu}t_{kr})] t_{\mu s} = 2 \sum_k \eta\omega_k t_{0r}t_{ks}$$

e que sempre podemos escrever $t_{0r}t_{ks} = t_{kr}t_{0s}$, encontramos a seguinte igualdade

$$\sum_\mu \left\{ \omega_\mu^2 t_{\mu r} - \sum_k [\eta\omega_k (t_{0r}\delta_{\mu k} + \delta_{0\mu}t_{kr}) - \eta^2 t_{\mu r}\delta_{0\mu}] \right\} t_{\mu s} = \Omega_r^2 \delta_{rs}, \quad (\text{B.5})$$

e lembrando que $\sum_\mu t_{\mu r}t_{\mu s} = \delta_{rs}$, encontramos

$$\left\{ \omega_\mu^2 t_{\mu r} - \sum_k [\eta\omega_k (t_{0r}\delta_{\mu k} + \delta_{0\mu}t_{kr}) - \eta^2 t_{\mu r}\delta_{0\mu}] \right\} = \Omega_r^2 t_{\mu r}. \quad (\text{B.6})$$

Além, de encontrarmos as componentes de $t_{\mu\nu}$, também como consequência da diagonalização, podemos encontrar a relação entre as frequências das partes do sistema. Para fins de organização, vamos mudar $k \rightarrow k'$, e definirmos $\mu = 0$ na equação (B.6), logo

$$\omega_0^2 t_{0r} - \sum_{k'} [\eta\omega_{k'} (t_{0r}\delta_{0k'} + \delta_{00}t_{k'r}) - \eta^2 t_{0r}\delta_{00}] = \Omega_r^2 t_{0r}, \quad (\text{B.7})$$

mas como os k' só assumem valores $k' = 1, 2, 3, \dots, N$, temos $\delta_{0k'} = 0$, encontramos

$$\left(\omega_0^2 - \Omega_r^2 + \sum_{k'} \eta^2 \right) t_{0r} = \sum_{k'} \eta\omega_{k'} t_{k'r}. \quad (\text{B.8})$$

Agora, em (B.6), substituimos $\mu = k$, de tal forma que chegamos a

$$\omega_k^2 t_{kr} - \sum_{k'} [\eta\omega_{k'} (t_{0r}\delta_{kk'} + \delta_{0k}t_{k'r}) - \eta^2 t_{kr}\delta_{0k}] = \Omega_r^2 t_{kr}, \quad (\text{B.9})$$

que com o uso de propriedades das δ 's, chegamos a

$$t_{kr} = \frac{\eta\omega_k}{(\omega_k^2 - \Omega_r^2)} t_{0r}. \quad (\text{B.10})$$

E mais uma vez, sem perda de generalidade, fazemos $k' \rightarrow k$, temos de (B.8),

$$\sum_k \eta\omega_k t_{kr} = \left(\omega_0^2 - \Omega_r^2 + \sum_k \eta^2 t_{0r} \right). \quad (\text{B.11})$$

Além, de (B.10) e (B.11), sabemos que $\sum_{\mu=0}^N (t_{\mu r})^2 = 1$, de onde obtemos

$$(t_{0r})^2 = 1 - \sum_{k=1}^N (t_{kr})^2. \quad (\text{B.12})$$

Assim, temos como obter uma expressão que relacione os Ω_r com os $\omega_\mu = (\omega_0, \omega_k)$ e a constante de acoplamento g por meio de η . Logo, se substituirmos (B.10) em (B.12), encontramos

$$t_{0r} = \left[1 + \sum_{k=1}^N \frac{\eta^2 \omega_k^2}{(\omega_k^2 - \Omega_r^2)^2} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.13})$$

Agora, podemos utilizar (B.13) e (B.10), e substituirmos em (B.11), encontramos

$$\eta^2 \sum_{k=1}^N \frac{\omega_k^2}{(\omega_k^2 - \Omega_r^2)} = \omega_0^2 - \Omega_r^2 + \sum_{k=1}^N \eta^2. \quad (\text{B.14})$$

Na equação acima, ficam esclarecidos os argumentos a respeito do termo adicionado na Hamiltoniana (1.21), que evitam as divergências quando tomamos o limite de $N \rightarrow \infty$. Basta reescrevermos o lado esquerdo da equação (B.14), na forma

$$\eta^2 \sum_{k=1}^N \left[1 + \frac{\Omega_r^2}{(\omega_k^2 - \Omega_r^2)} \right] = \eta^2 \sum_{k=1}^N \frac{\omega_k^2}{(\omega_k^2 - \Omega_r^2)}, \quad (\text{B.15})$$

logo, substituindo em (B.14), temos

$$\underbrace{\sum_{k=1}^N \eta^2}_{\text{termo divergente}} + \eta^2 \sum_{k=1}^N \frac{\Omega_r^2}{(\omega_k^2 - \Omega_r^2)} = \omega_0^2 - \Omega_r^2 + \underbrace{\sum_{k=1}^N \eta^2}_{\text{termo divergente}} \quad (\text{B.16})$$

que resulta finalmente em

$$\eta^2 \sum_{k=1}^N \frac{\Omega_r^2}{(\omega_k^2 - \Omega_r^2)} = \omega_0^2 - \Omega_r^2, \quad (\text{B.17})$$

que não apresenta problemas de divergência, como mencionamos na seção 1.3.

Apêndice C

Amplitude de permanência do oscilador (átomo) em seu primeiro estado excitado

C.1 Calculando os resíduos

Estamos interessados em demonstrar a validade da equação (2.32). Uma vez feito isso, estamos demonstrando a validade do método dos resíduos no limite contínuo. Como mencionado no capítulo 2, este resultado matemático está intimamente ligado a possibilidade de não haver evolução temporal no processo que designamos por permanência do átomo em seu primeiro estado excitado. Basta utilizarmos a equação (2.31), com $t = 0$. Tal que, ficamos com

$$h(z) = \frac{2gz^2}{(z^2 - \omega_0^2)^2 + \pi^2 g^2 z^2}, \quad (\text{C.1})$$

onde os polos podem ser verificados com o auxílio de

$$(z^2 - i\pi gz - \omega_0^2)(z^2 + i\pi gz - \omega_0^2) = 0, \quad (\text{C.2})$$

tal que identificamos

$$\begin{aligned} z_1 &= i\frac{\pi g}{2} + \kappa & z_4 &= -i\frac{\pi g}{2} - \kappa \\ z_3 &= -i\frac{\pi g}{2} + \kappa & z_2 &= i\frac{\pi g}{2} - \kappa, \end{aligned}$$

com $\kappa = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\pi^2 g^2}{4}}$. Usando o contorno representado pela Figura C.1, que identificaremos por Γ , e a paridade da equação (2.32), podemos escrever

$$2g \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2 - \omega_0^2)^2 + \pi^2 g^2 x^2} = g \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2 - \omega_0^2)^2 + \pi^2 g^2 x^2}, \quad (\text{C.3})$$

que com o auxílio do teorema de Cauchy, encontramos

$$g \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 - \omega_0^2)^2 + \pi^2 g^2 x^2} = \oint_{\Gamma} h(z) dz = 2\pi i \sum_{\alpha} \text{Re}(z_{\alpha}), \quad (\text{C.4})$$

onde os $\text{Re}(z_{\alpha})$ são os resíduos provenientes dos polos de $h(z)$. Mencionamos que a integral em C_R , pelo lema de Jordan, é identicamente nula, no limite em que $R \rightarrow \infty$. Portanto, ficamos com

$$f_{00}(0) = 2\pi i \sum_{\alpha} \text{Re}(z_{\alpha}). \quad (\text{C.5})$$

Os resultados provenientes de cada resíduo são:

$$R_1 = \frac{i\pi g + 2\kappa}{4\kappa}, \quad R_2 = -\frac{(i\pi g + 2\kappa)}{4\kappa} \quad \text{e} \quad R_3 = R_4 = 0. \quad (\text{C.6})$$

E, finalmente, substituindo os resíduos mencionados em (C.6) na equação (C.5), encontramos

$$f_{00}(0) = \frac{1}{4\kappa} (i\pi g + 2\kappa - i\pi g + 2\kappa) = \frac{4\kappa}{4\kappa} = 1, \quad (\text{C.7})$$

como queríamos demonstrar. Mostrando que, se não houver evolução no sistema, a probabilidade do átomo permanecer em seu primeiro estado excitado é exatamente igual a 1.

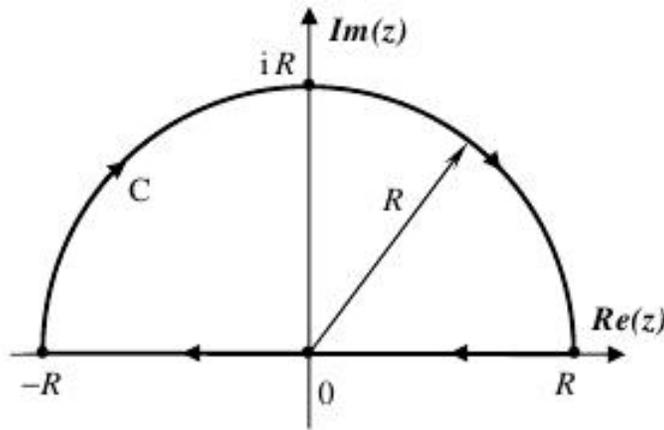


Figura C.1: Contorno Γ de integração da equação (C.3).

Apêndice D

Teste de validade para a amplitude de espalhamento

D.1 Amplitude de espalhamento em $t = 0$

Em $f_{k'k''}(t)$ com $t = 0$, esperamos que o resultado seja identicamente nulo, desde que $\omega_{k'} \neq \omega_{k''}$, ou seja, se não houver “espalhamento” a chance do modo do campo se alterar é identicamente nula.

Podemos começar pela equação

$$f_{k'k''}(0) = I_{\omega_{k''}}(0) + I_{\omega_{k'}}(0), \quad (\text{D.1})$$

cuja as partes $I_{\omega_{k'}}(t = 0)$ e $I_{\omega_{k''}}(t = 0)$, podem ser escritas na forma

$$I_{\omega_{k'}}(t = 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{(x^2 + ig\pi x - \omega_0^2)[(x + i\epsilon)^2 - \omega_{k'}^2](x + i\epsilon)} - \frac{1}{(x^2 - ig\pi x - \omega_0^2)[(x - i\epsilon)^2 - \omega_{k'}^2](x - i\epsilon)} \right], \quad (\text{D.2})$$

sendo $I_{\omega_{k''}}(t = 0)$ exatamente da forma de $I_{\omega_{k'}}(t = 0)$, substituindo $\omega_{k'}$ por $\omega_{k''}$, esta simetria possibilita a resolução de apenas umas destas partes, escolhemos o da equação (D.2), cujo contorno utilizado é representado na Figura C.1. O uso do teorema de Cauchy neste caso, resulta em

$$I_{\omega_{k'}}(t = 0) = - \left(\frac{\eta^2 \omega_{k'}^3 \omega_{k''}}{\omega_{k'}^2 - \omega_{k''}^2} \right) \left[\frac{8}{(4\kappa^2 + g^2 \pi^2) \omega_{k'}^2} \right], \quad (\text{D.3})$$

e consequentemente, em

$$I_{\omega_{k''}}(t = 0) = \left(\frac{\eta^2 \omega_{k''}^3 \omega_{k'}}{\omega_{k'}^2 - \omega_{k''}^2} \right) \left[\frac{8}{(4\kappa^2 + g^2 \pi^2) \omega_{k''}^2} \right], \quad (\text{D.4})$$

cuja substituição em (D.1), resulta

$$f_{k'k''}(0) = 0 \quad \text{com} \quad \omega_{k'} \neq \omega_{k''}, \quad (\text{D.5})$$

que é exatamente o resultado esperado para este tipo de processo em $t = 0$.

Bibliografia

- [1] N. P. Andion, A. P. C. Malbouisson, A. Mattos Neto, J. Phys. A **34**, 3735, (2001).
- [2] N. Polonsky, *Doctoral thesis École Normale Supérieure*, Paris, (1964).
- [3] S. Haroche, *Doctoral thesis École Normale Supérieure*, Paris, (1964).
- [4] C. Audoin, C. Cohen-Tannoudji, S. Haroche and J. P. Schermann, Phys. Rev. Lett. **24**, 861 (1970).
- [5] C. Cohen-Tannoudji and S. Haroche, Phys. Rev. Lett. **24** 974 (1970).
- [6] S. Haroche and S. Liberman, *Frontiers in Laser Spectroscopy*, ed. R Balian (Amsterdam: North Holland), (1977).
- [7] L. Davidovitch, M. Brune, J. M. Raimond and S. Haroche, Phys. Rev. A **53**, 1295, (1996).
- [8] K. M. Fonseca-Romero, M. C. Nemes, J. G. Peixoto de Faria, A. N. Salgueiro and A. F. R. de Toledo Piza, Phys. Rev. A **58**, 3205, (1998).
- [9] R. Casana, G. Flores-Hidalgo, B. M. Pimentel, Physica A, **374**, 600, (2007).
- [10] G. Flores-Hidalgo, J. Phys. A: Math. Theor. **40**, 13217-13230, (2007).
- [11] G. Flores-Hidalgo, A. P. C. Malbouisson and Y. Milla, Phys. Rev. A **65**, 063414, (2002).
- [12] E. G. Figueiredo, C. A. Linhares, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson, arXiv:1112.2899v1 [quant-ph], (2011).
- [13] R. Casana, G. Flores-Hidalgo, B. M. Pimentel, arXiv:physics/0506223v3 [physics.atom-ph], (2007).

- [14] G. Beck, Z. Phys. **42**, 77 (1927).
- [15] V. Glaser, G. Kallen, Nucl. Phys. **2**, 706, (1956).
- [16] V. I. Bykov, V. I. Tatarskii, Sov. Phys. Usp. **34**, 167, (1991).
- [17] P. Ullersma, Physica, **32**, 27, (1966).
- [18] G. Beck, Nuovo Cimento, **1**, 70, (1955).
- [19] R. P. Feynman, F. L. Vernon Jr, Annals of physics, **24**, 118-173, (1963).
- [20] A. O. Caldeira, A. J. Leggett, Physica A, **121**, 587-616, (1983).
- [21] W. G. Unruh, W. H. Zurek, Phys. Rev. D **40**, 1071-1094, (1989).
- [22] W. Thirring, F. Schwabl, Ergeb. Exakt. Naturw. **36**, 219, (1964).
- [23] U. Weiss, *Quantum Dissipative Systems*, World Scientific, Singapore, (1993).
- [24] A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev, *Integrals and Series. Elementary Functions*. Gordon and Breach, New York-London, (1986).
- [25] Yony Walter Milla Gonzales, *Distribuição de Energia de Átomos Excitados em Cavidades*, CBPF, Tese de Mestrado, Rio de Janeiro, (2002).
- [26] Laércio Benedito de Sousa Júnior, *Coordenadas vestidas: formulação segundo a interpretação de Dirac-Feynman para a Mecânica Quântica e aplicações em CQED*, IFT, Dissertação de Mestrado, São Paulo, (2007).
- [27] G. Flores-Hidalgo and A. P. C. Malbouisson, Phys. Rev. A, **66**, 042118, (2002).
- [28] H. Ederlyi, et al., *Higher Transcendental Functions*, McGraw-Hill, New York, pg. 196, equação (40), (1953).
- [29] R. Jackiw, Phys. Rev. **157**, 1220, (1967).
- [30] E. Butkov, *Mathematical Physics*, Addison-Wesley Publishing Company/ World Student Series Edition, California, (1973).
- [31] R. V. Churchill, J. W. Brown, R. F. Verhey, *Complex Variables and Applications*, McGraw-Hill Book Company, New York, (1974).

- [32] A. P. C. Malbouisson, *Annals of Physics* **308**, 373-394, (2003).
- [33] G. Flores-Hidalgo, R. O. Ramos, *Physica A* **326**, 159 - 188, (2003).
- [34] G. Flores-Hidalgo, A. P. C. Malbouisson, *Physics Letters A*, **311**, 82-86, (2003).
- [35] G. Flores-Hidalgo, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson, Y. W. Milla, A. E. Santana, *Phys. Rev. A* **79**, 032105, (2009).
- [36] F. C. Khanna, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson, A. E. Santana, *Physical Review A*, **81**, 032119, (2010).
- [37] G. Flores-Hidalgo, Y. W. Milla, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38**, 7527-7541, (2005).
- [38] F. B. Hildebrand, *Advanced Calculus for Applications*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, (1962).
- [39] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe, *Mecanique Quantique*, Vol. II, Hermann, Paris, (1973).
- [40] W. Jhe, A. Anderson, E. A. Hinds, D. Meschede, L. Moi, and S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 666, (1987).
- [41] R. G. Hulet, E. S. Hilfer, and D. Kleppner, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2137, (1985).
- [42] J. J. Sakurai, San Fu Tuan (editor), *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, New York, (1994).
- [43] J. J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, New York. (1967).
- [44] Bahaa E. A. Saleh, Malvin Carl Teich, *Fundamentals of photonics*, John Wiley and Sons, (1991).
- [45] Leslie E. Ballentine, *Quantum Mechanics. A modern development*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, Singapore, (1998).
- [46] Marlan O. Scully and M. Suhail Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge University Press-CUP, New York, (1997).
- [47] George B. Arfken, Hans Weber, *Métodos matemáticos para engenharia e física*, Elsevier, Rio de Janeiro, (2007).

- [48] Lowell S. Brown, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, New York, (1992).
- [49] Douglas S. Kurtz, Charles W. Swartz, *Theories of Integration - The Integrals of Riemann, Lebesgue, Henstock-Kurzweil, and McShane*, World Scientific Publishing Company, (2004).
- [50] D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*, Prentice Hall, Inc., New Jersey, (1995).
- [51] J. Gea-Banacloche, *Phy. Rev. A*, **87**, 023832, (2013).
- [52] G. Hétet, M. Hennrich, R. Blatt, *Phy. Rev. Lett.* **107**, 133002, (2011).
- [53] E. Rephaeli, Shanhui Fan, *Phy. Rev. Lett.* **108**, 143602, (2012).
- [54] G. Compagno, R. Passante and F. Persico, *Atom-field interactions and Dressed atoms*, Cambridge University Press-CUP, New York, (1995).

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Mauá –
Bibliotecária Margareth Ribeiro- CRB_6/1700

G963t

Silva, Paulo Henrique Teixeira da

Coordenadas renormalizadas: o formalismo dos operadores de
criação e aniquilação / Paulo Henrique Teixeira da Silva. -- Itajubá,
(MG) : [s.n.], 2013.

66 p. : il.

Orientador: Prof. Dr. Gabriel Flôres Hidalgo.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Itajubá.

1. Coordenadas vestidas. 2. Estados vestidos. 3. Processos radi_
oativos. 4. Renormalização. I. Hidalgo, Gabriel Flôres, orient. II.
Universidade Federal de Itajubá. III. Título.